Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 3 (2019), páginas 41 – 57
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo Científico [1]

PERSPECTIVAS MATEMÁTICAS Y PEDAGÓGICAS DE LA JUSTIFICACIÓN: APROXIMANDO LA RAÍZ DE 18 [1]

Jason Cooper y Alon Pinto

Resumen. "La raíz cuadrada de 18 está más cerca de 4 que de 5, porque 18 está más cerca de 16 que de 25". ¿Será válida esta afirmación, escuchada en una clase de un octavo grado? Proponemos argumentos hipotéticos sobre los cuales esta afirmación estaría basada y los analizamos desde dos perspectivas complementarias – epistémica y pedagógica – apoyándonos en la noción de Toulmin sobre dependencia de campo en la argumentación y en la clasificación de Freeman de la justificación basada en el tipo de intuición, creencia o comprensión subyacentes. Proponemos que nuestro análisis de esta proposición puede ser un modelo de investigación en cursos de formación docente.

Abstract. "The square root of 18 is closer to 4 than it is to 5 because 18 is closer to 16 than it is to 25". Is this statement, voiced in an 8th grade class, valid? We suggest hypothetical arguments upon which this statement might be based, and analyze them from two complementary perspectives – epistemic and pedagogical – drawing on Toulmin's notion of field-dependence in argumentation and on Freeman's classification of warrants based on the type of underlying intuition, belief or prior understanding. We propose that our investigation of this statement may serve as a model for inquiry in teacher preparation.

[1] Originalmente publicado en inglés en *For the Learning of Mathematics*, https://flm-journal.org como: Cooper, J. & Pinto, A. (2017). Mathematical and pedagogical perspectives on warranting: approximating the root of 18. *For the Learning of Mathematics*, 37(2), 8–13.
Traducido por: Abraham Arcavi (con autorización de los autores y los editores).
N. de E.: a lo largo de todo el artículo, siempre que aparezca "raíz", "raíz de..." o "función raíz", se refiere a raíz cuadrada.

Palabras clave: Justificación matemática, validez matemática, perspectivas interactuantes.
Keywords: Mathematical warranting, mathematical validity, interacting perspectives.

Profesora: ¿Qué número es raíz de 18?
Alumnos: Entre 4 y 5.
Profesor: ¿Quién quiere explicar?
Gail: 4 al cuadrado es 16 y cinco al cuadrado es 25.
Profesor: ¿De quién está más cerca?[2]
Dina: De 4.
Profesor: De 4. ¿Por qué?
Dina: 18 está más cerca [pausa]
Profesor: Porque 18 está más cerca de 16 que de 25
Dina: está a dos [de 16] y a 7 [de 25], la diferencia.

Esta transcripción, tomada de una clase en un octavo grado en Israel[3], fue observada durante un curso de desarrollo profesional docente basado en videos de clase. En su momento, no provocó respuestas de los profesores participantes, pero para nosotros, algo en el razonamiento no nos pareció del todo correcto. Claramente, la afirmación (A) "$\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5", es correcta, y también lo son los datos (D) sobre los cuales se apoya "18 está más cerca de 16 que de 25". Pero, ¿es correcto decir que A es verdadero por causa de D?

Reconocemos que diferentes comunidades matemáticas, cada una de ellas guiada por sus normas particulares y sus objetivos, pueden tener razones diferentes para avalar o rechazar D como la causa de A. Típicamente, los matemáticos se ocupan de las rutinas de demostración; para ellos se puede decir que D es la causa de A si es un elemento clave en la demostración de una generalización de A. Alumnos de un octavo grado mayormente se ocupan de rutinas de cálculo y estimación. Ellos pueden percibir que la proximidad de 18 a 16 es en cierto sentido 'responsable' de la proximidad de a 4, y eso se apoya en la estimación. Profesores, al decidir si avalan esa narrativa en sus clases, pueden guiarse por lo que sus alumnos saben actualmente y por lo que necesitan saber en un futuro próximo. Por lo tanto, renunciamos a la falacia de un análisis "objetivo" de esta proposición. En cambio, consideraremos la perspectiva de los matemáticos, de los alumnos y de sus profesores acerca de la palabra 'porque' en un argumento.

Nuestra motivación inicial fue desentrañar el potencial de esta anécdota para fomentar la discusión en un curso de desarrollo profesional docente. Nuestro análisis de la proposición reveló una profundidad y unos matices inesperados, tanto matemáticos como pedagógicos. En este artículo, reconstruimos nuestro análisis

[2]Tanto en hebreo, como en español, el número sería referido normalmente como 'cuál', pero en este diálogo fue referido como 'quién'.
[3]N. de T.: los estudiantes de octavo grado en Israel tienen edades entre 13 y 14 años.

con dos objetivos en mente. El primero es compartir nuestros hallazgos en relación con el asunto matemático en juego y con respecto a la argumentación matemática en diferentes comunidades. El segundo es mostrar cómo un análisis multifacético de un error aparente puede servir como un trampolín para investigar. Además, mostramos cómo las perspectivas matemática y pedagógica interactúan y se enriquecen mutuamente.

Fundamentos teóricos

Consideramos el 'conocimiento' matemático como un discurso particular de una comunidad –sus modos establecidos de comunicación– que se constituye mediante palabras clave y sus usos, mediante narrativas que son avaladas o rechazadas por la comunidad, mediante mediación visual y mediante rutinas repetitivas (Sfard, 2008). La comunidad de matemáticos define un discurso matemático especial. Sin embargo, hay otras comunidades que se ocupan de un discurso matemático, tales como los profesores de educación secundaria y los investigadores en educación matemática. Aun un aula determinada puede tener su propio discurso. Las comunidades pueden diferir en su uso de palabras clave, en el tipo de rutinas de las que se ocupan, o en el uso de reglas y normas que determinan cuáles narrativas serán avaladas o rechazadas.

Un argumento es un tipo particular de narrativa, y una argumentación es un tipo particular de rutina discursiva. De acuerdo al modelo de (Toulmin, 1958) acerca de la estructura y el contenido semántico de la argumentación, un argumento consistiría típicamente en una afirmación (o conclusión), basada en datos (o información), y una justificación que permite derivar la conclusión a partir de los datos. Asimismo, incluiría soportes en los cuales la justificación se apoya, una calificación expresando el grado de confianza del argumentador en la conclusión, y una refutación que consiste de posibles objeciones a la conclusión, incluyendo excepciones o condiciones bajo las cuales la conclusión no es sostenible. En estos términos, la afirmación "$\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5" está basada en el dato "18 está más cerca de 16 que de 25". En el trasfondo, se esconde una justificación tácita sobre la cual podemos especular. Quizás la justificación del argumentador fue "cuando un número está más cerca de n^2 que de $(n+1)^2$ su raíz está más cerca de n que de $n+1$". Las justificaciones, y en particular los argumentos en los que se basan, dependen del campo de actividad en el cual ocurre la argumentación. Desde nuestra perspectiva discursiva, reemplazaríamos campo por discurso. Por ejemplo, en el discurso de los matemáticos, la justificación típica sería que la afirmación puede ser demostrada.

(Freeman, 2005) opina que la noción de dependencia del campo de Toulmin es problemática. Él sostiene que las personas pueden participar en varios campos de actividad, y a menudo es difícil (e improductivo) intentar determinar el campo en el cual la argumentación tiene lugar. En cambio, él clasifica las justificaciones en base al tipo de intuición, creencia o comprensión previa que las originaron. Propone cuatro categorías: a priori (basada en la intuición primaria), empírica (basada en la experiencia o en intuiciones secundarias), institucional (basada en definiciones o en reglas definidas) y evaluativa (que requiere un proceso argumentativo tal como una demostración matemática).

> *Esta clasificación conserva la idea de dependencia de campo de Toulmin, pero sin la problemática noción de campo. Justificaciones diferentes serán apoyadas de maneras diferentes, y debemos observar el tipo de justificación para determinar cómo hacerlo de manera apropiada (p. 342).*

(Von Glasersfeld, 1993) argumentó que "lo que sea que el alumno diga [...] es lo que tiene sentido para él en ese momento. Debe ser tomado seriamente como tal, sin importar cuán raro o 'incorrecto' parezca" (p. 10). Aplicando esto a la argumentación, reconocemos una implicación pedagógica al enfoque de Freeman. Desde la perspectiva de Toulmin, al considerar campos de actividad nos puede llevar a decidir si un argumento es válido o normativo (es decir, sería avalado por una comunidad particular), mientras que considerar el tipo de intuición o comprensión previa sobre la cual se apoya un argumento, dejando de lado la pregunta de si es 'válido', nos ayudaría a ver que el pensamiento del alumno tiene sentido.

(Chazan & Herbst, 2012) han usado experimentos (acerca de rupturas de normas) para investigar normas matemáticas y pedagógicas de los profesores. Por medio de viñetas de clase, en las que, para algunos profesores algo 'no se siente como correcto', sondearon y revelaron normas tácitas de clases. En estos términos, puede decirse que la afirmación acerca de $\sqrt{18}$ ha violado una norma tácita del discurso matemático. El objetivo de este estudio es explicitar nuestras rupturas de las normas matemáticas, primeramente, para nosotros mismos y luego para los lectores de este artículo, revelando por qué tendemos a rechazar la afirmación sobre $\sqrt{18}$. A pesar de eso, entendemos que esta afirmación tiene sentido para otros. Es más, aun cuando eventualmente rechacemos la afirmación, reflexionar sobre ella puede ser productivo. (Borasi, 1996) sugirió cómo errores en la clase pueden ser un trampolín para una investigación matemática. En base a eso, proponemos cómo un argumento, considerado un error, puede servir de trampolín para una investigación matemática y pedagógica en la formación docente. Aquí ejemplificamos una investigación de ese tipo.

Análisis epistémico: la perspectiva del matemático

Consideremos la siguiente proposición, basada en el intercambio ocurrido en el octavo grado:

> **Proposición 1.1**: $\sqrt{18}$ *está más cerca de 4 que de 5 porque 18 está más cerca de 16 que de 25.*

En esta sección, nuestra meta es elaborar nuestras normas de argumentación (como matemáticos), explicando en qué sentido esta proposición las transgrede. Para ello, elaboramos la proposición con argumentos hipotéticos, y discutimos razones para avalar o rechazar cada uno de ellos. En el discurso de los matemáticos, la palabra 'porque' en la Proposición 1.1 debería estar ligada a la idea de demostración matemática. Presentamos un argumento hipotético, basado en la descomposición estructural de Toulmin en afirmación, datos, justificación y su soporte:

> **Argumento 1.1**: (Afirmación:) $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5 porque (Datos:) 18 está más cerca de 16 que de 25, debido a que (Justificación 1.1:) cuando un número x está más cerca de 16 que de 25, $\sqrt{x}$ está más cerca de 4 que de 5, teniendo en cuenta que (Soporte 1.1:) la Justificación 1.1 puede ser demostrada.

Acá hemos explicitado un posible significado de "porque' en la Proposición 1.1. Por lo tanto, debemos decidir si la Justificación 1.1 puede ser demostrada. Esto sugiere una investigación.

> **Investigación 1.1:** Demuéstrese o refútese la Justificación 1.1.

El resultado de esta investigación es que la Justificación 1.1 es inválida, pues, por ejemplo, $20{,}3$ está más cerca de 16 que de 25, pero $\sqrt{20{,}3} \approx 4{,}505$ está más cerca de 5 que de 4. Notamos que el intervalo de contraejemplos es bastante pequeño $20{,}25 < x < 20{,}5$ (longitud 0.25).

Hemos mostrado cómo en cierto sentido el Argumento 1.1 puede ser considerado inválido. El argumento se sostiene en la Justificación 1.1, para la cual hay contraejemplos, y por lo tanto no se puede demostrar. Aparentemente, hemos revelado el origen de nuestro recelo con respecto a la Proposición 1.1, sin embargo, pensamos que la situación es más delicada, y lo demostraremos sugiriendo una línea de argumentación similar usando números diferentes. Supóngase que la proposición hubiese sido:

> **Proposición 1.2**: $\sqrt{21}$ está más cerca de 5 que de 4 porque 21 está más cerca de 25 que de 16.

Esta proposición se puede argumentar así:

> **Argumento 1.2:** (Afirmación:) $\sqrt{21}$ está más cerca de 5 que de 4, porque (Datos:) 21 está más cerca de 25 que de 16, debido a que (Justificación 1.2:) cuando un número x está más cerca de 25 que de 16, $\sqrt{x}$ está más cerca de 5 que de 4, teniendo en cuenta que (Soporte:) la Justificación 1.2 puede ser demostrada.

Este argumento sugiere una nueva investigación:

> **Investigación 1.2:** Demuéstrese o refútese la Justificación 1.2.

A diferencia de la Justificación 1.1, la Justificación 1.2 puede ser demostrada, así. Supóngase que x es mayor que

$$20{,}5 = \frac{4^2 + 5^2}{2}.$$

Entonces es también mayor que

$$20{,}25 = \left(\frac{4+5}{2}\right)^2,$$

y como la función raíz es creciente, $\sqrt{x} > 4{,}5$ es verdadero.

¿Sería el Argumento 1.2 avalado por la comunidad de matemáticos? La Justificación 1.2 es demostrable, la afirmación se deduce de los datos, por lo tanto, en base a la discusión anterior, la respuesta es "sí". Sin embargo, nos preguntamos si la Justificación 1.2 es apropiada. ¿Son los datos la causa de la afirmación? Los lectores compartirán nuestra sensación de que esto no es del todo correcto, y trataremos de articular por qué.

Expectativas acerca de la palabra 'porque': En el discurso de los matemáticos, tanto como en el discurso general, un argumento expresado como "Afirmación porque Datos" no solo nos convencería que la afirmación es verdadera, pero nos debería proveer alguna apreciación de la naturaleza de esa causalidad entre los datos y la afirmación, tal como lo sugiere la palabra porque. Desde nuestra perspectiva, el Argumento 1.2, si bien está basado en la Justificación 1.2 que es demostrable, falla en proveernos de esa apreciación porque, a pesar de la similitud entre la Justificación 1.1 y la Justificación 1.2, no queda claro por qué la segunda es válida y la primera no lo es.

Generalización: Para entender por qué $\sqrt{21}$ está más cerca de 5 que de 4, y por qué $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5, nos gustaría tener una justificación general. La Justificaciones 1.1 y 1.2 nos parecen un tanto específicas. Por empezar, los roles de los números 4, 5, 16 y 25 pueden generalizarse a n, $n+1$, n^2, $(n+1)^2$ pero, aun así, la existencia de dos afirmaciones similares (Justificaciones 1.1 y 1.2), siendo una válida y la otra no, sugiere que un patrón más general está esperando ser descubierto. Ambas cuestiones se resolverían si la siguiente justificación general fuera válida:

> **Justificación 1.3:** Si un número x en el intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ está más cerca de uno de los extremos, $\sqrt{x}$ estará más cerca del correspondiente extremo del intervalo $[n, n+1]$.

Ya hemos establecido que la Justificación 1.3, tal como está enunciada, es inválida. Sin embargo, sugerimos ahora la siguiente investigación:

> **Investigación 1.3:** Encontremos todos los contraejemplos de la Justificación 1.3. Modifiquémosla para hacerla demostrable y reformulemos la Proposición 1.1 de acuerdo a ello.

La investigación produce un resultado que nos pareció sorprendente. La justificación es 'casi-válida', en el sentido de que la longitud del intervalo de contraejemplos, $n^2+n+\frac{1}{4} < x < n^2+n+\frac{1}{2}$, es $0{,}25$ para todo n, tal como lo fue para el caso de $n = 4$, y la longitud realtiva del intervalo de contraejemplos $\frac{0{,}25}{(n+1)^2 - n^2}$ tiende a cero. Por lo tanto, las Justificaciones 1.1 y 1.3 pueden 'corregirse' agregando una refutación apropiada. Sugerimos lo siguiente:

> **Proposición 1.4:** $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5 porque 18 está mucho más cerca de 16 que de 25.

> **Justificación 1.4:** Si un número x del intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ está suficientemente cerca de uno de los puntos extremos, $\sqrt{x}$ está más cerca del punto extremo correspondiente del intervalo $[n, n+1]$.

Elaboramos esta proposición y su justificación en la sección siguiente.

Análisis pedagógico: las perspectivas del alumno y del profesor

La Proposición 1.1 fue producida por una alumna, guiada y estimulada por su profesora. Aceptando la postura de von Glasersfeld, esta proposición debe haber tenido sentido para el alumno (y para el profesor). Queremos investigar qué sentido pudo haber tenido esta proposición para el alumno. Nuestra meta no es llegar al fondo del pensamiento de un alumno en particular, más bien aprovechar esta postura pedagógica, considerando lo que la alumna pudo haber pensado, para nuestra investigación acerca de los aspectos epistémicos y pedagógicos de la matemática en juego.

Por empezar, la matemática practicada en un octavo grado es diferente de lo que es practicado en departamentos de matemática. Para un matemático, el valor particular de $\sqrt{18}$ es de poco interés; la cuestión principal es la demostrabilidad de la justificación de la afirmación general. Sin embargo, en muchos contextos escolares, la estimación del valor de un cálculo es una rutina apreciada, y cualquier argumento que apoye la Proposición 1.1 debe ser considerado en ese contexto. En términos de Toulmin, el argumento de la alumna y el argumento del matemático pertenecen a diferentes campos de actividad.

Para encontrarle sentido a lo que dijo la alumna, no es suficiente considerar su campo de actividad; recurrimos además a las categorías de argumentación de Freeman. Considérese el siguiente argumento hipotético:

> **Argumento 2.1:** (Afirmación:) $\sqrt{18}$ está más cerca de 4 que de 5, porque (Datos:) 18 está más cerca de 16 que de 25, ya que (Justificación 2.1:) cuando un número x está cerca de n^2, $\sqrt{x}$ está cerca de n.

Esta justificación, con o sin una refutación (condicionado *a cuán cerca* x esté de n^2), parece ser apropiada para estimar $\sqrt{18}$. ¿Cuál podría ser su soporte? Proponemos lo siguiente:

> ... teniendo en cuenta el hecho que (Soporte 2.1) esta es mi experiencia con la función raíz.

En términos de Freeman, sugerimos que a diferencia del soporte de los matemáticos (es decir, basado en la demostrabilidad de la justificación), el soporte de un alumno para la Justificación 2.1 puede ser empírico (es decir, basado en la experiencia), ya que la justificación puede ser un medio para el fin de aproximar un cálculo. Esto lleva a una cuestión pedagógica crítica: ¿qué comprensión previa de la función raíz puede respaldar la Justificación 2.1? Contextos escolares diferentes pueden sugerir diferentes respuestas. Por lo tanto, la investigación que estamos proponiendo diferiría a través de distintos contextos. Proponemos respuestas basadas en nuestras experiencias escolares en Israel.

Nuestra primera respuesta es continuidad. Aunque los alumnos no han sido introducidos a esta noción, subyace a la creencia que la proximidad de 18 a 16 'causa' la proximidad de $\sqrt{18}$ a 4. Pero, la afirmación no fue solo que está cerca de 4, sino más cerca de 4 que de 5. Esto parece basarse en la noción de monotonicidad. De acuerdo a esto proponemos:

> **Justificación 2.2:** A medida que x aumenta de 16 a 25, $\sqrt{x}$ aumenta de 4 a 5.

Esta justificación sugiere que hay un cierto punto en el cual $\sqrt{x}$ hará la transición de "más cercano a 4" a "más cercano a 5". Pensamos que tal justificación, proviniendo de un alumno, sería empírica en términos de Freeman. No es ni a priori (obvia e inmediata), ni institucional (basada en reglas o definiciones), ni evaluativa (basada en cierto proceso de razonamiento). Está basada en intuiciones secundarias que un alumno ha recogido con respecto a la función raíz. Revisando la Justificación 1.4 con estas ideas en mente, notamos que las palabras "mucho más cerca" tienen un significado matemático sólido, derivado de la definición de continuidad: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x - 16 < \delta$ implica $\sqrt{x} - 4 < \varepsilon$. En estos términos, la Proposición 1.1 se apoya tácitamente en que $\delta = 2$ es un valor apropiado para $\varepsilon = 0{,}5$.

Consideremos ahora la Proposición 1.4 (basada en el dato de que 18 está *mucho* más cerca de 16) teniendo en mente la Justificación 2.2. Pensamos que esta proposición puede ser aprobada igualmente por matemáticos y profesores, ya que el argumento sugerido es bastante sofisticado. Su justificación sigue siendo empírica, apoyándose en la experiencia con funciones continuas y monótonas[4], mientras que su refutación, implicada por la palabra 'mucho', permite excepciones más alejadas de 16. Si bien la palabra 'mucho' es bastante imprecisa, quien esté familiarizado con el discurso de los matemáticos sabe cómo formalizarla en un argumento evaluativo, basado en lo siguiente:

> **Justificación 2.3:** Existe un único número $16 < d < 25$, tal que para todo $16 \leq x \leq 25$: si $x < d$ entonces $\sqrt{x}$ está más cerca de 4 que de 5, y si $x > d$ entonces $\sqrt{x}$ está más cerca de 5 que de 4.

Esto sugiere una variante de la Investigación 1.3:

> **Investigación 2.1:** Encontremos d para el cual la Justificación 2.3 es válida y generalicemos.

Desde el punto de vista del matemático, la Justificación 2.3 es atractiva porque no solo generaliza el rol de 18 para cualquier número suficientemente cercano a 16, sino que además sugiere una generalización del rol de la función raíz a cualquier función monótona y continua en un cierto intervalo.

Examinemos ahora con más cuidado la Justificación 2.2 y en qué se apoya. ¿Cuál puede ser el origen de la experiencia de los alumnos acerca de funciones continuas y monótonas? La formulación de la Proposición 1.1 nos sugiere que quien la dijo cree (erróneamente) que la transición de $\sqrt{x}$ de *más cerca de 4 a más cerca de 5* está exactamente a mitad de camino entre 16 y 25. Aparentemente es probable que la alumna, y posiblemente incluso la profesora, aplicaban un razonamiento lineal a una situación no lineal (véase, por ejemplo, (Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1983)). Claramente si $f(x)$ es *lineal* en el intervalo [4,5] (es decir, su gráfico es una recta), entonces la siguiente proposición es válida:

[4] A lo largo de todo el artículo, cuando decimos 'monótonas', nos referimos a estrictamente monótonas.

> **Proposición 2.2:** Si un número x está más cerca de uno de los puntos extremos del intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ está más cerca del punto extremo correspondiente en el intervalo $[f(a), f(b)]$.

La función x^2 y su inversa $\sqrt{x}$ no son funciones lineales, pero tienen mucho en común con ellas (son continuas y monótonas). Es posible que la Proposición 1.1 se haya basado en una sobre-extensión de un principio válido para relaciones lineales. Desde esta perspectiva, incluso la Proposición 1.2, que se basa en la Justificación 1.2 que es válida, puede ser considerada 'pedagógicamente' inválida, si aceptamos que está basada en una aplicación incorrecta de linealidad. Esto sugiere una explicación para nuestro recelo con respecto a la Proposición 1.1; a pesar de su validez epistémica, sospechamos que está basada en una concepción errónea de la alumna, y por lo tanto no es válida. Esto provee una nueva perspectiva sobre la Justificación 1.3 (si un número x en el intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ está más cerca de uno de los extremos, estará más cerca del extremo correspondiente del intervalo $[n, (n+1)]$). La Investigación 1.3 convocó un argumento evaluativo acerca de la invalidez de esta justificación: encontrar (y demostrar) el conjunto de contraejemplos. Sin embargo, recordamos claramente el primer argumento que nos vino a la mente:

> **Argumento 2.4:** (Afirmación 2.4:) la Justificación 1.3 no es válida, debido a que (Datos:) hubiera sido válida si $\sqrt{x}$ fuese lineal, pero no lo es.

¿Sobre qué tipo de justificación se basa este argumento? Notamos que la Proposición 2.2 es válida para funciones lineales, donde la transición de "cerca de $f(a)$" a "cerca de $f(b)$" ocurre en el punto medio $\frac{a+b}{2}$. Además, esta propiedad caracteriza a las funciones lineales (es decir, es la condición necesaria y suficiente para la linealidad). Por lo tanto, sugerimos lo siguiente:

> **Justificación 2.4:** Si una propiedad caracteriza a las funciones lineales, entonces no es válida para funciones no lineales.

Esto implica que si $f(x)$ no es lineal, entonces el punto d (como en la Justificación 2.3) no puede ser el punto medio de $[16, 25]$, y la Afirmación 2.4 se deduce de los datos basados en esta justificación. El problema es que la Proposición 2.2 ¡no es una condición suficiente para la linealidad! Podemos cerciorarnos de esto mediante la siguiente investigación:

> **Investigación 2.3:** Encontremos una función no lineal continua creciente para la cual la Proposición 2.2 es válida.

Demostramos la existencia de dichas funciones en la siguiente sección acerca de la perspectiva del alumno.

Nota acerca de la perspectiva del profesor: Nuestro análisis epistémico y pedagógico puede llevarnos a cuestionar el criterio del profesor al inducir y avalar la Proposición 1.1. Sin embargo, el docente pudo haber sido capaz de justificar pedagógicamente este paso. Proponer este tipo de justificaciones va más allá del alcance de este artículo. Dirigimos a los lectores al trabajo de (Nardi, Biza, & Zachariades, 2012) que se basaron en los trabajos de Toulmin y de Freeman para estudiar las justificaciones de los profesores, distinguiendo en su argumentación entre consideraciones epistemológicas/pedagógicas, a-priori/empíricas/institucionales/evaluativas y personales/profesionales.

Retomando el análisis epistémico desde la perspectiva del alumno

Nuestro primer análisis estaba basado en una argumentación evaluativa: justificaciones que son demostrables matemáticamente. Retomamos el análisis de la matemática, centrándonos en la comprensión matemática y las intuiciones que pueden traer los alumnos, incluyendo nociones tales como continuidad, monotonicidad y linealidad. Comenzamos trabajando la generalización de la Investigación 1.3.

> **Investigación 3.1:** Demuéstrese o refútese la siguiente aserción: Si un número en el intervalo (a^2, b^2) está más cerca de uno de los puntos extremos del intervalo, su raíz estará más cerca del correspondiente punto extremo del intervalo (a, b).

Para refutar esta aserción por medio de un contraejemplo, se debe encontrar un número y, para el cual se cumple una de estas dos opciones:

A. y está más cerca de a^2, es decir $y < \dfrac{a^2+b^2}{2}$, pero su raíz cuadrada está más cerca de b, es decir $y > \dfrac{a+b}{2}$,

B. y está más cerca de b^2, es decir $y > \dfrac{a^2+b^2}{2}$, pero su raíz cuadrada está más cerca de a, es decir $y < \dfrac{a+b}{2}$.

Dijimos que para el caso de $a = 4$, $b = 5$ existen contraejemplos del tipo A. Para el caso general denotemos $d = b-a$ como la longitud del intervalo (a, b). Encontremos primero el punto medio del intervalo (a^2, b^2):

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+(a+d)^2}{2} = \frac{2a^2+2ad+d^2}{2} = a^2+ad+\frac{d^2}{2}.$$

Comparamos esto con el cuadrado del punto medio del intervalo (a, b):

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+(a+d)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a+d}{2}\right)^2 = \frac{4a^2+4ad+d^2}{4} = a^2+ad+\frac{d^2}{4}.$$

Sin importar cuales fueran los valores de a y de b, hay una diferencia de $\frac{d^2}{4}$ entre los dos resultados. Esto muestra que contraejemplos de tipo B no pueden existir, y que contraejemplos de tipo A sí existen, y que todos ellos están en un intervalo de longitud $\frac{d^2}{4}$ tales que

$$a^2 + ad + \frac{d^2}{4} < y < a^2 + ad + \frac{d^2}{4}.$$

Este argumento tiene una convincente representación visual. La Figura 1 muestra dos puntos A, B en la parábola $y = x^2$ (ó $x = \sqrt{y}$). El punto C es el punto medio de la cuerda AB. Las líneas punteadas $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a^2+b^2}{2}$ dividen el plano en cuatro 'cuadrantes'.

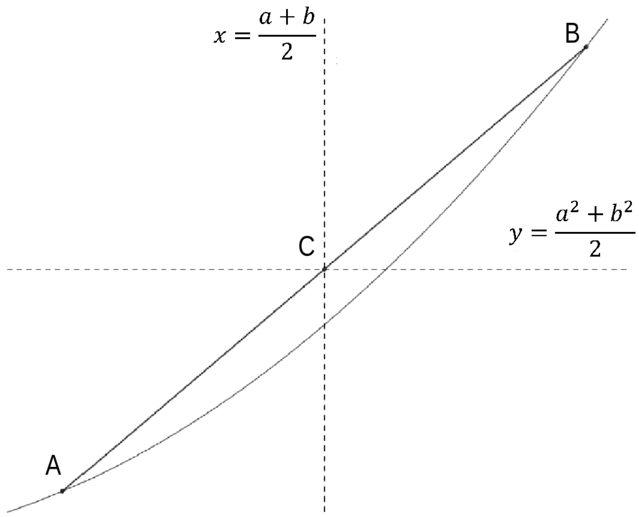

Figura 1. Representación visual del argumento del punto medio

El dominio de los contraejemplos de tipo A y B tienen ahora una interpretación gráfica: un contraejemplo de tipo A es un punto de la parábola en el cuadrante inferior derecho y un contraejemplo de tipo B es un punto de la parábola en el cuadrante superior izquierdo. La parábola es convexa, su gráfico está completamente debajo de la cuerda, por lo tanto, no pasa por el cuadrante superior izquierdo, y entonces contraejemplos de tipo B no existen. El rango de contraejemplos de tipo A está indicado en la Figura 2.

¿Qué sentido le atribuirían los alumnos a la Proposición 1.1? Tuvimos curiosidad por saber qué pensarían los alumnos de la Proposición 1.1. No lo investigamos sistemáticamente, pero el primer autor lo intentó con su hijo, alumno del

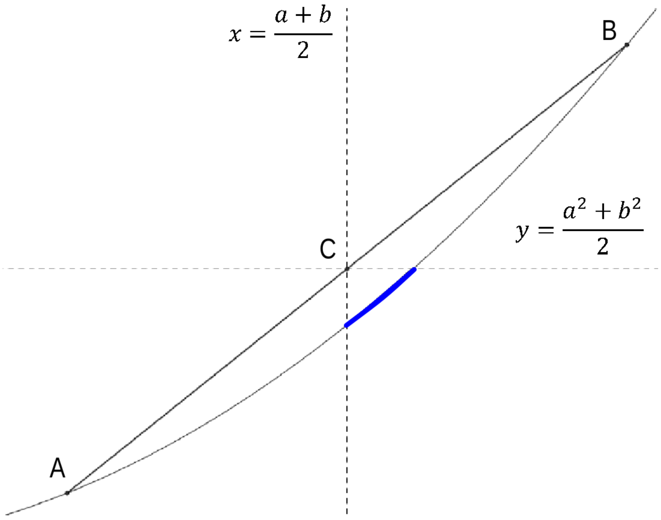

FIGURA 2. Conjunto de contraejemplos del tipo A

duodécimo grado[5] en un curso avanzado de matemática. Él, como nosotros, reconoció la justificación tácita 1.3 en esta proposición, que inmediatamente consideró incorrecta. Su argumento fue el siguiente: si la Justificación 1.3 fuera verdadera, entonces necesariamente debería ser verdadero que "la raíz del punto medio es el punto medio de las raíces", es decir

$$\sqrt{\frac{4^2+5^2}{2}} = \frac{4+5}{2}.$$

Como este no es el caso ($\sqrt{20{,}5} \neq 4{,}5$), la Justificacion 1.3 es falsa y debe existir un contraejemplo. Nos preguntamos qué nivel de comprensión requeriría este argumento. Parecería estar basado en la noción de continuidad, pero el alumno no tenía ningún conocimiento formal de análisis matemático más allá de lo que estudió en el secundario. Su argumento puede ser formalizado (es decir, demostrado) en base al Teorema de los valores intermedios aplicado a la función continua $f(x) = \sqrt{x}$, pero la visualización que propusimos sugiere una realización concreta que sería más accesible a los alumnos. El gráfico de pasa de manera continua del punto (4,16) en cuadrante inferior izquierdo al punto (5, 25) en cuadrante superior derecho. Si suponemos (por la negación) que el gráfico no pasa por los cuadrantes (de los contraejemplos) superior izquierdo e inferior derecho, deberá pasar por el punto $C = (4{,}5, 20{,}5)$. Como no pasa por él, ($\sqrt{20{,}5} \neq 4{,}5$), la justificación es inválida.

Linealidad es suficiente para la Proposición 2.2, pero no es necesaria. Retomemos ahora la Investigación 2.3, usando nuestra visualización para presentar un contraejemplo: una función continua, monótona creciente, no lineal para la cual

[5]N. de T.: Último grado de la escuela secundaria en Israel

la Proposición 2.2 es válida. Esa función solo necesita pasar por los puntos (4,16) y (5,25), quedando fuera de las dos zonas de contraejemplos. Evidentemente, esa función no necesariamente debe ser lineal (Figura 3).

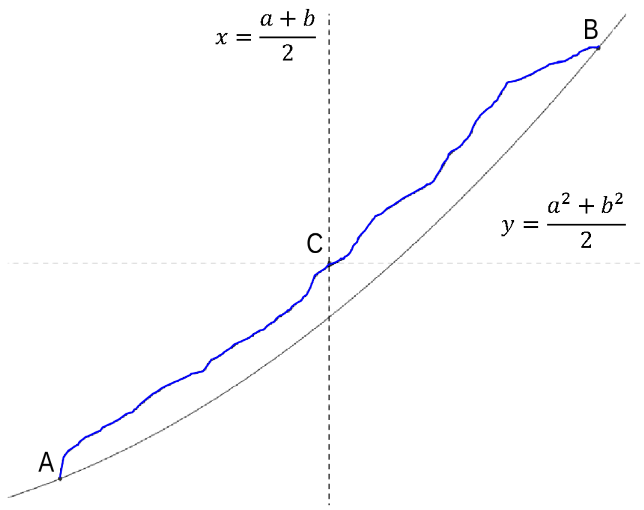

Figura 3. Una función no lineal para la cual la Proposición 2.2 es válida

Como ya mencionáramos, esto revela una falla en nuestro razonamiento. Cuando decíamos en el Argumento 2.4 que “la Justificación 1.3 es inválida porque $\sqrt{x}$ no es lineal”, no estábamos permitiendo funciones tales como la que trazamos en la Figura 3. Supusimos erróneamente que la Proposición 2.2 no solo es una condición necesaria para la linealidad, sino también suficiente. Apliquemos ahora el principio de von Glasersfeld a nosotros mismos, y veamos si nuestro error pudo haberse basado en una comprensión productiva. Proponemos que teníamos en mente la siguiente caracterización de funciones lineales:

> **Proposición 3.1:** *Para todo* número $a < b$, si un número x en el intervalo $[a, b]$ está más cerca de uno de sus puntos extremos, entonces $f(x)$ está más cerca del correspondiente punto extremo de $[f(a), f(b)]$.

Esta proposición es idéntica a la Proposición 2.2, salvo que no está formulada para números $a < b$ dados, sino para cualesquier números $a < b$. Tal como la Proposición 2.2, ésta es válida para funciones lineales, pero a diferencia de la Proposición 2.2, es verdadera solamente para funciones lineales[6].

Supongamos que éste haya sido el argumento para la Proposición 1.1:

[6]Suponiendo continuidad. Omitimos la demostración por falta de espacio.

> **Argumento 3.1:** (Afirmación:) está más cerca de 4 que de 5, puesto que (Justificación 3.1:) Para todo número $0 < a < b$, y para todo x en el intervalo $[a, b]$ si x está más cerca a uno de los puntos extremos, $\sqrt{x}$ está más cerca del correspondiente punto extremo de $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$.

Este argumento es tan fallido como el Argumento 1.1, y tiene los mismos contraejemplos para la Justificación 3.1 que para la Justificación 1.3. Sin embargo, tiene el tono general del que carecían las justificaciones previas, donde los puntos extremos del intervalo $[a, b]$ están precedidas del cuantificador universal ("para todo"). Además, con este argumento en mente, proponemos una versión válida del Argumento 2.4:

> **Argumento 3.2:** (Afirmación 3.2:) La Justificación 3.1 es inválida, porque (Datos:) hubiera sido válida si $\sqrt{x}$ fuera lineal, pero no lo es. Esta conclusión es posible pues (Justificación 3.2:) si una propiedad es necesaria y suficiente para funciones lineales, entonces no es válida para funciones no lineales.

Resumen

Hemos reconstruido una investigación de una proposición matemática de un octavo grado en Israel. No afirmamos que estudiantes o matemáticos hubieran argumentado de la manera en que conjeturamos. Más bien, usamos argumentos hipotéticos, derivados de nuestra propia experiencia con alumnos y matemáticos, como objeto para reflexionar en nuestro análisis.

Nuestro punto de partida fue nuestra sensación de intranquilidad de que el argumento es fallido. Comenzamos con una investigación matemática de argumentos hipotéticos para la afirmación. La invalidez del Argumento 1.1 aparentemente explicó nuestra intranquilidad, sin embargo, la validez del similar Argumento 1.2 nos empujó a cavar más hondo.

La perspectiva de los matemáticos nos avanzó solo un poco. La perspectiva pedagógica, tomando la postura del docente y preguntándonos qué pudo haber tenido en mente el que lo dijo, nos permitió progresar. Comprensiones previas que emergieron de esta perspectiva pedagógica, continuidad, monotonicidad y eventualmente linealidad, no solo arrojaron luz acerca de lo que los alumnos pueden traer con ellos a la conversación, sino que demostraron ser productivas en nuestro análisis de la matemática subyacente.

Retomando la perspectiva de los matemáticos con esta comprensión en mente, eventualmente reconocimos una condición necesaria y suficiente para funciones lineales. Esta condición sugirió una nueva perspectiva acerca de la proposición:

el argumento se apoya tácitamente en una condición que es válida solo para funciones lineales. $\sqrt{x}$ no es lineal, por lo tanto el argumento no es válido.

Por lo tanto, esta condición necesaria y suficiente para funciones lineales (Proposición 3.1) surgió como la clave para reconciliar todos nuestros argumentos previos, evaluativos y empíricos, epistémicos y pedagógicos.

A lo largo de nuestra exposición, hemos explicitado nuestras propias normas acerca de la argumentación matemática, una de las cuales es: Justificaciones no solo deben ser demostrables, deben ser lo más generales posible, y deben aportar una idea del porqué la afirmación presentada se deriva de los datos. También hemos discutido la argumentación de los alumnos, que pueden basarse en objetivos diferentes de los de los matemáticos. Además, hemos mostrado que tomar en consideración la comprensión previa de los alumnos puede arrojar luz no solo sobre sus argumentaciones sino también sobre la matemática que está en juego.

La afirmación sobre $\sqrt{18}$ no provocó una reacción de los profesores que la vieron en video en un curso de desarrollo profesional. Proponemos que formadores de profesores deberían tratar de desarrollar la sensibilidad y la curiosidad de los profesores para involucrarse en investigaciones como la que hemos presentado. Eso requiere escuchar muy atentamente las afirmaciones matemáticas, aparentemente obvias, de profesores y alumnos durante la clase, ya que ellas pueden llevar, como en el caso de $\sqrt{18}$, a ricos descubrimientos matemáticos y pedagógicos.

Reconocimiento

Este artículo se basa en un trabajo que fue financiado parcialmente por la Fundación Israelí de Ciencias, Grant 1539/15 y por el Instituto Weizmann de Ciencias.

Bibliografía

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: a Focus on Errors*. Norwood, NJ: Praeger.

Chazan, D., & Herbst, P. (2012). Animations of classroom interaction: expanding the boundaries of video records of practice. *Teachers College Record*, *114*(3), 1-34.

Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: an epistemic approach. *Argumentation*, *19*(3), 331-346.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1983). Functions: linearity unconstrained. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 271-277). Israel: Rehovot.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Von Glasersfeld, E. (1993). Questions and answers about radical constructivism. In K. G. Tobin (Ed.), *The Practice of Constructivism in Science Education* (p. 23-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Jason Cooper
Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Instituto Weizmann de Ciencias Rehovot - Israel.
(✉) *jason.cooper@weizmann.ac.il*

Alon Pinto
Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Instituto Weizmann de Ciencias Rehovot - Israel.
(✉) *alon.pinto@weizmann.ac.il*

Recibido: *16 de septiembre de 2019*.
Aceptado: *1 de noviembre de 2019*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2019*.