
UNA MESA INESTABLE

Hugo Alvarez

§1. Problema y solución

Quiero exponer un problema que ocurre con una cotidianidad capaz de despertar la curiosidad del lector. Admite una solución de modesta Matemática, pero su exposición permite codearse con muchas formas de pensar útiles en la disciplina. Soy de los que creen que la Matemática, como otras artes, está dentro de uno. Y el docente debe ayudar a que el alumno la encuentre. Será por eso que preferimos hablar de Educación Matemática en vez de Enseñanza de la Matemática.

Escribo sobre una mesa inestable (sin ignorar el doble sentido de la palabra "sobre")*: apoya tres patas en el suelo y la cuarta queda en el aire. Como decía al principio, el problema es frecuente. Nos ocurrió en un patio con una mesa de cuatro patas. En esos casos se busca algo con qué suplementar la pata que no apoya. Pero mis hijos me acercaron una solución empírica que habían aprendido de su hermanastro. Girando la mesa en su sitio, apoyada sobre tres patas, en algún momento apoya las cuatro. Probamos y funcionó, y recorrimos todo el patio comprobando que siempre funcionaba. Entonces Agustín, que aún no era un matemático certificado por el sistema, se preguntó si se podría demostrar.

Si los extremos inferiores de las cuatro patas no están en un mismo plano, el problema no tiene interés porque en una superficie perfectamente plana, caso que no tiene sentido excluir, el método no funcionaría. Supondré entonces que los extremos de las patas son los vértices de un **cuadrado** (más adelante hablaremos del caso en que los extremos de las patas son los vértices de un rectángulo general). Al tratar de apoyarlos sobre una superficie S , que no es plana, ocurre que tres de ellos, digamos a , b y c , lo hacen, pero el cuarto, d , queda en el aire. Supondremos que la superficie S es suficientemente regular. Que no tiene escalones ni pliegues. Para quien conozca el lenguaje, es el gráfico de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}.$$

*Recuerdo haber leído de Dalmiro Saenz: Como es difícil escribir sobre uno mismo escribiré sobre una mesa.

En este caso, S divide al espacio en dos regiones separadas por ella

$$S^+ = \{(x, y, z) : z > f(x, y)\} \quad \text{y} \quad S^- = \{(x, y, z) : z < f(x, y)\}.$$

Con esta notación, tenemos $a \in S$, $b \in S$, $c \in S$ y $d \in S^+$.

La cuestión es si podemos encontrar otra ubicación cercana para la mesa en la que sus cuatro patas se apoyen sobre S . Con ese fin, comenzamos con un procedimiento matemático. En el espacio, y manteniendo la recta \overline{ab} como eje, rotamos el cuadrado $\square abcd$ en el sentido que empuja el vértice c a través de S , hasta que el punto d alcance la superficie, cosa que hará en algún punto d' .

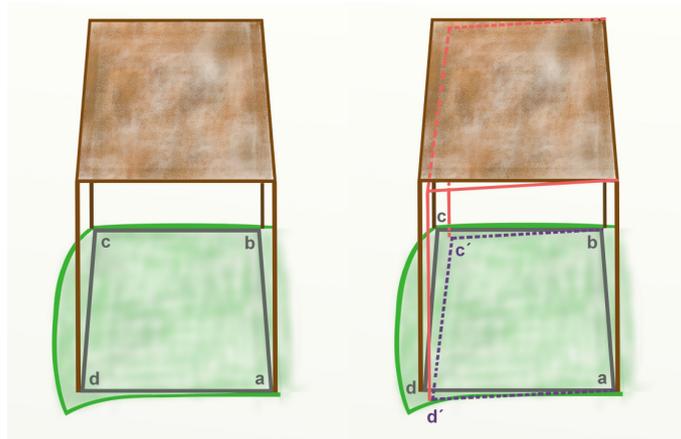


Figura 1*

Aunque este movimiento no es físicamente posible, ya que el punto c debería atravesar la superficie, nos permite determinar el punto d' . La síntesis del resultado es la siguiente.

a, b quedan fijos

$$c \in S \mapsto c' \in S^-$$

$$d \in S^+ \mapsto d' \in S$$

Una vez encontrado el punto d' , se destacan dos triángulos planos congruentes cuyos vértices pertenecen a S :

$$\triangle abc \quad \text{y} \quad \triangle d'ab$$

(Cuando los vértices de una figura plana Q pertenecen a S , que no es plana, en general no estará Q contenida en S . En estos casos diremos que Q *apoya* en S). Ambos son triángulos isósceles rectángulos y sus catetos son congruentes al lado del cuadrado original.

*Las ilustraciones de las Figuras 1-4 son de Natalí Sofía Bocco <na_tulita@hotmail.com>

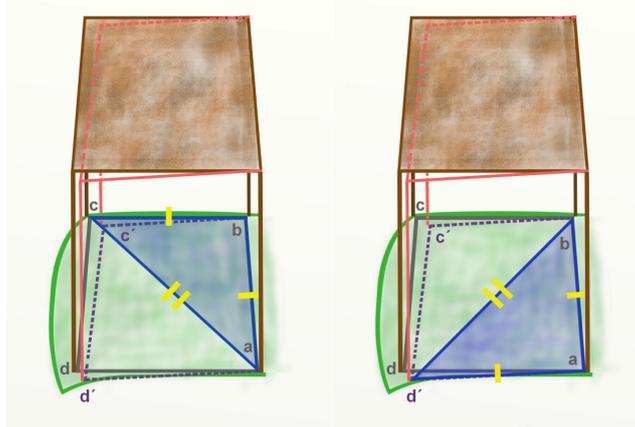


Figura 2a

Ahora hacemos un segundo movimiento como muestra la Figura 2b.

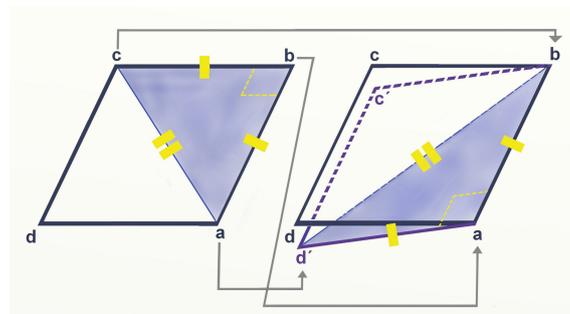


Figura 2b

Se trasladan los vértices del triángulo $\triangle abc$, isósceles y rectángulo en b , arrastrándolos sobre S , hacia los vértices del triángulo congruente $\triangle d'ab$

$$\left. \begin{array}{l} a \mapsto d' \\ b \mapsto a \\ c \mapsto b \end{array} \right\} \text{ en } S.$$

Entonces, como el cuarto vértice del cuadrado debe acompañar obligatoriamente a los otros tres,

$$d \in S^+ \mapsto c' \in S^- .$$

En efecto, los puntos a, b, c determinan un cuadrado cuyo cuarto vértice es d y los puntos d', a, b determinan otro cuadrado que se completa con c' . Pero nuevamente nos encontramos con una imposibilidad física; el extremo de una pata pasaría de un punto en S^+ a un punto en S^- , lo que significa atravesar S . Esa es, sorprendentemente, la solución del problema. Puesto que las otras tres patas se están deslizando sobre S en todo momento, cuando la cuarta llega a tocar S y antes de atravesarla, tenemos la mesa apoyada correctamente en la superficie, sobre sus cuatro patas.

§2. Los peros

La primera sección contiene inexactitudes. Para algunas afirmaciones faltan hipótesis y, puestas éstas, faltarán demostraciones. Pero creo que es interesante y comprensible para alumnos de escuela media. Quiero abogar por una posición heterodoxa. Tal parece que no podemos enseñar si las cosas no están perfectas en todos sus detalles. Como si tuviésemos miedo de que un matemático nos esté mirando. Cuando enseñamos, el primer compromiso es con el alumno y el segundo con la Matemática. En este punto quiero recordar las palabras de Pedro Puig Adam:

Es importante que el maestro sepa más de lo que debe enseñar.

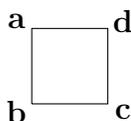
Pero no menos importante es que sepa callárselo.

El argumento presentado anteriormente tiene dos pasos: el primero en que “obtenemos d' luego de rotar el cuadrado $\square abcd$ alrededor de la recta \overline{ab} ”, y el segundo cuando “arrastramos sobre S los vértices del triángulo orientado $\triangle abc$ hasta llegar al triángulo orientado congruente $\triangle d'ab$ ”. Ambos pasos tienen algunos “peros” matemáticos.

En el primer paso, no es siempre cierto que girando el cuadrado sobre su eje \overline{ab} el punto d encontrará la superficie S y, en caso de encontrarla, tampoco es cierto que esto ocurra en un solo punto. Por ejemplo, consideremos en \mathbb{R}^3 una semirecta D con origen en 0 que forma un ángulo α con el semieje negativo de las z con $\pi/6 < \alpha < \pi/4$. El cono S generado por la rotación de la directriz D alrededor del eje z se puede describir como gráfico de una función continua

$$f(x, y) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Consideremos un cuadrado



Dado que $\alpha > \pi/6$ resulta que es posible colocar el cuadrado de modo que a esté en el vértice del cono S y además b y c estén en S (si α fuera muy pequeño, digamos $0 < \alpha < \pi/8$, luego de colocar a en el vértice y b en el cono, c quedaría siempre en el aire). Sin embargo, el cuarto vértice d estará en el plano perpendicular a \overline{ab} por el origen pero este plano sólo corta a S en a porque $\alpha < \pi/4$. Por lo tanto la rotación de d alrededor de \overline{ab} no encuentra a S y hace que d quede girando en el aire.

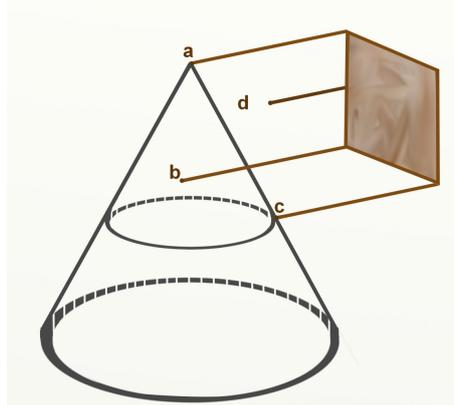


Figura 3

Deberá haber alguna hipótesis sobre S que evite esta situación.

En el segundo paso, hay una cuestión de orientación. Los triángulos y demás figuras planas sumergidos en el espacio Euclídeo tridimensional tienen dos caras y hay que cuidarse, mientras se pasa de un triángulo a otro congruente deslizándose apoyado en la superficie S , de que la cara que mira “hacia arriba” no quede mirando “hacia abajo”. Eso sería incompatible con nuestro problema (pues la mesa quedaría enterrada patas para arriba) y no es imposible que suceda. Doy un ejemplo. Consideremos que la superficie es la media esfera de radio 1 correspondiente a los $z \geq 0$, la cual es el gráfico de la siguiente función continua

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

El triángulo rectángulo isósceles orientado

$$T_1 = \Delta(-j)ij$$

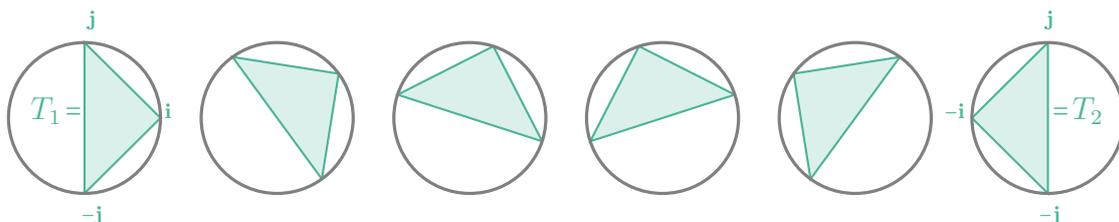
con

$$i = (1, 0, 0) \quad j = (0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 1)$$

se puede desplazar hacia su congruente orientado

$$T_2 = \Delta j(-i)(-j)$$

por el borde de la semiesfera preservando la orientación.



También es posible llevar, sobre la media esfera S , el triángulo T_1 al triángulo orientado $T_3 = \triangle(-j)(-i)j$ dejando fijos los vértices agudos $\pm j$ y deslizando el vértice del ángulo recto i por la esfera. Sin embargo aquí se cambia la orientación.

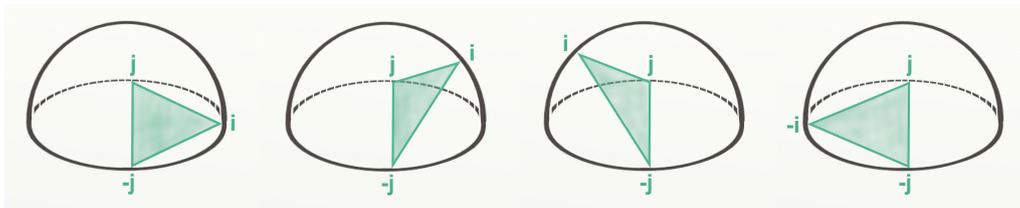


Figura 4

En ambos casos, T_1 fue desplazado a un triángulo congruente sin salirnos de la superficie S , pero en el primer caso lo hicimos preservando la orientación mientras que en el segundo la cambiamos. No queremos hacer el segundo paso cambiando la orientación para no terminar con la mesa dada vuelta. Necesitamos definiciones más precisas que describan y controlen estas situaciones.

Por último, nuestro argumento finaliza afirmando que para pasar de S^+ a S^- hay que atravesar la superficie S , y esto requiere de un uso del Teorema de los valores intermedios de Bolzano que deberá ser explicitado.

§3. Movimientos rígidos

Consideraré a un triángulo T como un subconjunto de \mathbb{R}^3 y llamaré T^* al conjunto de sus vértices, que deberán ser tres puntos no alineados, suficientes para determinar al triángulo y al plano al que pertenecen. Una *congruencia* entre dos triángulos T_1 y T_2 es una biyección ϕ entre T_1^* y T_2^* tal que, para todo $x, y \in T_1^*$, $\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|x - y\|$. Dos triángulos son congruentes si existe una congruencia entre ellos. Esta es una relación de equivalencia.

Dado $T^* = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$, para cada ordenamiento de estos puntos, por ejemplo $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ se define el vector $\mathbf{n} = (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{q})$ que resulta normal al plano determinado por T , al igual que $-\mathbf{n}$. Su norma es dos veces el área de T . Un cálculo elemental muestra que $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y cualquier permutación par dará el mismo resultado. Con una permutación impar de los vértices, por ejemplo $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r})$, $\mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{q} = -\mathbf{n}$. Elegir un sentido de circulación por el borde del triángulo equivale a elegir una cara. *Orientar* un triángulo es elegir un orden (cíclico) para sus vértices o, equivalentemente, elegir un sentido en la recta normal al plano del triángulo. Adoptaremos la notación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ para representar al triángulo orientado. O cualquiera de sus equivalentes: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$

El movimiento en el espacio de un cuerpo rígido, se modeliza con un *movimiento rígido*. Así se llama un mapeo

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}), \quad a \leq t \leq b, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{F}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

que representa la posición del punto x en el instante t . La condición de rigidez consiste en que cada par de puntos mantienen su distancia a lo largo del tiempo:

$$\|\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1) - \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad a \leq t \leq b.$$

Esto es, para cada t , \mathbf{F}_t es una *isometría*, lo que implica en particular continuidad respecto de x . Para que el mapeo sea un movimiento rígido, se requiere también continuidad respecto de t , como una aceptación del principio de que *Natura non facit saltus*.

Una *isometría* entre dos espacios métricos (E, d) y (E', d') es una aplicación $\varphi : E \rightarrow E'$ que conserva distancias.

$$d'(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y).$$

Se sabe que una isometría entre espacios euclídeos es la composición de una traslación con una transformación ortogonal: $y = f(x) + b$. Una transformación ortogonal, cuyo determinante sólo puede ser 1 ó -1 , conserva o invierte la orientación del espacio en uno u otro caso respectivamente. Aquellas que conservan la orientación se llaman rotaciones. Puesto que el determinante es una función continua de las entradas de la matriz y \mathbf{F}_a es la identidad, la parte lineal de todas las transformaciones \mathbf{F}_t correspondientes a un movimiento rígido tendrán determinante 1. Son entonces composición de traslación con rotación. Las llamaremos *transformaciones rígidas*.

Una transformación afín en \mathbb{R}^n queda determinada por su comportamiento en $n + 1$ puntos afinmente independientes. Con el dato adicional de la conservación o no de la orientación del espacio, para una isometría bastarán n puntos. Luego, para una transformación rígida basta con n puntos independientes.

Una congruencia entre dos triángulos se extiende de manera única a una isometría entre los planos que ellos determinan. Pero una isometría entre dos planos se puede extender de dos maneras a una isometría en \mathbb{R}^3 . Una de ellas conserva orientación y la otra la invierte. Esto significa que una congruencia se puede extender de dos maneras a una isometría del espacio y una de ellas es una transformación rígida. En consecuencia, dados dos triángulos congruentes existe una transformación rígida que lleva uno sobre el otro.

Entre dos triángulos congruentes, sin embargo, puede haber varias congruencias. Por ejemplo, si son isósceles, hay al menos dos.

Dentro del plano, en \mathbb{R}^2 , la situación es diferente. Las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^2 son rotaciones y reflexiones respecto de una recta (la reflexión central $x \mapsto -x$ es una rotación de ángulo π). ellas son, salvo traslación, todas las isometrías. Las rotaciones son las rígidas. Si el plano no es mirado dentro de \mathbb{R}^3 , hay triángulos congruentes que no se identifican por medio de una transformación

rígida. Por ejemplo, $\{\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, \mathbf{0}\}$ y $\{2\mathbf{j}, -\mathbf{i}, \mathbf{0}\}$ aceptan como única congruencia la biyección

$$\mathbf{0} \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \mapsto -\mathbf{i}, \quad 2\mathbf{j} \mapsto 2\mathbf{j}.$$

En \mathbb{R}^2 se extiende a una isometría solamente con la reflexión $(x, y) \mapsto (-x, y)$. En cambio, mirada en \mathbb{R}^3 , esta reflexión plana se extiende con dos isometrías lineales cuyas matrices son:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera es rígida. En \mathbb{R}^2 hay triángulos congruentes que no se unen por un movimiento rígido en el plano.

Triángulos orientados moviéndose sobre una superficie con la cara hacia arriba", están obligados a un comportamiento similar al de los triángulos en el plano.

§4. Presentación formal

Deberemos considerar las proyecciones en \mathbb{R}^3 : $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que seleccionan la coordenada i -ésima. Por ejemplo, $\pi_3(x, y, z) = z$. También consideraremos la proyección $\pi_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\pi_0(x, y, z) = (x, y)$. Confiados en la claridad del contexto, confundiremos (x, y) con $(x, y, 0)$ y usaremos la notación $\mathbf{p}_0 = (x, y, 0)$ para $\pi_0(\mathbf{p}) : \mathbf{p}_0 = \mathbf{p} - \pi_3(\mathbf{p})\mathbf{k}$. Por supuesto, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ constituyen la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Dado un triángulo orientado $T = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ que apoya sobre S y "mira hacia arriba", esto es tal que

$$\pi_3(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1) > 0,$$

llamaremos un *movimiento rígido de T sobre S* a un movimiento rígido $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$, $a \leq t \leq b$, tal que $\mathbf{F}_t(T) := \langle \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1), \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_2), \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_3) \rangle$ apoya sobre S y mira hacia arriba para todo $t \in [a, b]$.

Para facilitar la lectura, cada vez que haya un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden ℓ , orientado hacia arriba, elegiré entre las tres maneras equivalentes de escribirlo aquella que deja el ángulo recto en segunda posición. Lo llamaremos TRIO, por abreviatura de triángulo rectángulo isósceles orientado.

Las dos suposiciones implícitas en la Sección 1 son las siguientes.

H1.: Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ es un TRIO que apoya sobre S y además $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} \in S^+$, entonces existe un único punto $\tilde{\mathbf{d}} \in S$ tal que $\langle \tilde{\mathbf{d}}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ es un TRIO apoyado en S y el cuarto punto " $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{d}' + \mathbf{b} - \mathbf{a} \in S^-$.

H2.: Si $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ y $T' = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \rangle$ son dos TRIOs apoyados en S , entonces existe un movimiento rígido $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$, $a \leq t \leq b$, de T sobre S tal que $\mathbf{F}_b(T) = T'$.

Teorema 1. *Bajo las hipótesis H1 y H2, si $\square pqrs$ es un cuadrado de lado ℓ tal que el TRIO $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ apoya sobre S y $\mathbf{s} \in S^+$, entonces existe un movimiento rígido de T sobre S que termina en un TRIO $T' = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \rangle$ cuyo cuarto vértice $\mathbf{s}' = \mathbf{p}' + \mathbf{r}' - \mathbf{q}' \in S$. Luego el cuadrado $\square \mathbf{p}'\mathbf{q}'\mathbf{r}'\mathbf{s}'$ apoya sobre S .*

Demostración. H1 asegura la existencia de un único punto $\tilde{\mathbf{s}} \in S$ tal que $\langle \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ es un TRIO apoyado en S y $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{q} - \mathbf{p} \in S^-$. Entonces, por H2, existe un movimiento rígido $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$ de T sobre S , definido en un intervalo $[a, b]$ tal que $\mathbf{F}_b(T) = \langle \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$.

Llamemos $h(t)$ a la altura de $\mathbf{F}_t(\mathbf{s})$ respecto de S . Esto es,

$$h(t) = \mathbf{F}_t(\mathbf{s}) - f(\pi_0(\mathbf{F}_t(\mathbf{s}))).$$

Claramente h es una función continua en el intervalo $[a, b]$.

Nótese ahora que $h(t) > 0$ sii $\mathbf{F}_t(\mathbf{s}) \in S^+$, $h(t) < 0$ sii $\mathbf{F}_t(\mathbf{s}) \in S^-$ y $h(t) = 0$ sii $\mathbf{F}_t(\mathbf{s}) \in S$. Entonces, $h(a) > 0$ porque $\mathbf{F}_a(\mathbf{s}) = \mathbf{s} \in S^+$ y $h(b) < 0$ porque $\mathbf{F}_b(\mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{q} - \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{r}} \in S^-$. Luego, por la continuidad de h , el teorema del valor intermedio de Bolzano asegura la existencia de un $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

Por lo tanto, la restricción de \mathbf{F} al intervalo $[a, c]$ con $T' = \mathbf{F}_c(T)$ es el movimiento cuya existencia se afirma en la tesis. \square

§5. Condiciones suficientes

Para verificar, bajo condiciones adecuadas, la validez de H2, el procedimiento es constructivo. Y para construir un movimiento rígido de T sobre S , siendo $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ un TRIO, basta con definir (ya que una transformación rígida queda determinada por tres puntos independientes), una terna de trayectorias continuas sobre S , $T(t) := \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t) \rangle$, $t \in [a, b]$, de forma tal que $T(a) = T$ y $T(b) = T'$. Además, para cada t , $T(t)$ debe ser un TRIO. Esta construcción se realiza punto por punto. Para cada t , primero se ubica $\mathbf{p}(t)$, luego $\mathbf{q}(t)$ y, por último, $\mathbf{r}(t)$. En el camino irán surgiendo condiciones sobre S .

Para \mathbf{p} y \mathbf{q} pertenecientes a S , el segmento orientado $\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ no puede ser vertical. Definiremos su argumento como el argumento de su proyección en \mathbb{R}^2 , $\arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \arg(\mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0)$.

Dados $\mathbf{p} \in S$ y θ , la existencia de un punto $\mathbf{q} \in S$ tal que $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \ell$ y $\arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \theta$ está asegurada por el teorema de Bolzano, no así la unicidad. En efecto, si $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$, hay que considerar la diferencia entre las funciones $f(\mathbf{p}_0) \pm \sqrt{\ell^2 - t^2}$ y $f(\mathbf{p}_0 + t\mathbf{u})$ en el intervalo $[0, 1]$, dependiendo el signo $+$ ó $-$ de que sea $f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{u}) \geq 0$ ó $f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{u}) < 0$. Entonces el teorema de Bolzano proveerá un punto $\tau \in (0, 1]$ tal que $f(\mathbf{p}_0 + \tau\mathbf{u}) = f(\mathbf{p}_0) \pm \sqrt{\ell^2 - \tau^2}$. Hecho esto, el punto $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_0 + \tau\mathbf{u}, f(\mathbf{p}_0 + \tau\mathbf{u}))$ es una solución del problema.

Teorema 2. *Si $\mathbf{p} \in S$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, existe $\mathbf{q} \in S$ tal que $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \ell$ y $\arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \theta$.*

La figura 5 muestra con un gráfico que q puede no ser único.

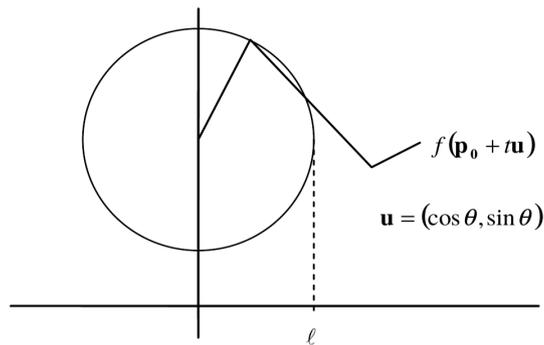


Figura 5

Habrá que admitir la unicidad para tener dependencia continua. Para mejor referencia, la enunciaremos junto con la existencia que ya demostramos.

H3.: Dado $p \in S$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, existe un único punto $q \in S$ tal que $\|q - p\| = \ell$ y $\arg(\vec{pq}) = \theta$.

Teorema 3. *Bajo la hipótesis H3, $q = \phi_1(p, \theta)$ es un mapeo continuo.*

Demostración. Supondremos que $\theta > 0$, caso en el que siempre nos podremos situar eligiendo una rama adecuada del argumento. Se debe probar que, dada (p_n, θ_n) convergente hacia (p, θ) , necesariamente $q_n = \phi_1(p_n, \theta_n) \rightarrow q = \phi_1(p, \theta)$. Y para ello basta probar que toda subsucesión de $\{q_n\}$ tiene a su vez una subsucesión que converge hacia q . Sea pues dada una subsucesión de $\{q_n\}$ a la que seguiremos llamando $\{q_n\}$. Como $\|q_n - p_n\| = \ell$ y $\{p_n\}$ es convergente, $\{q_n\}$ debe ser acotada en el cerrado S . Se deduce que tiene una subsucesión $\{q_{n_k}\}$ convergente hacia un punto $q' \in S$ para $k \rightarrow \infty$. Ahora bien, $\{p_{n_k}, \theta_{n_k}\}$ subsucesión de la sucesión convergente $\{(p_n, \theta_n)\}$ converge necesariamente al mismo límite (p, θ) . Entonces, por la continuidad de la norma y del argumento,

$$\begin{aligned} \|q' - p\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_{n_k} - p_{n_k}\| = \ell \text{ y} \\ \arg(q' - p) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \arg(q_{n_k} - p_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{n_k} = \theta. \end{aligned}$$

Pero, por la unicidad, estas dos relaciones demuestran que $q' = q$, lo que completa la prueba. \square

Si aplicamos **H3** con el argumento $\theta + \pi$ (módulo 2π), tendremos otro único punto en la dirección opuesta. Invito al lector a mirar esta cuestión de la manera siguiente:

Dado cualquier plano vertical que pase por un punto $p \in S$ consideremos en él el círculo C de centro p y radio ℓ . El punto más alto (*cenit*) $p + \ell k$ y el más bajo (*nadir*) $p - \ell k$ de este círculo lo dividen en dos semicírculos C_1 y C_2 . $C \cap S$ tiene exactamente dos puntos, uno en cada uno de los semicírculos señalados: $q_1 \in C_1$

y $\mathbf{q}_2 \in C_2$. Estos dos puntos dividen a C en dos arcos: $C^+ \ni \mathbf{p} + \mathbf{k}$ y $C^- \ni \mathbf{p} - \mathbf{k}$. Resulta además que $C^+ \subset S^+$ y $C^- \subset S^-$. Este punto de vista es quien da origen a la condición que permite la validez de **H2**.

Dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ con $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \ell$, consideramos el círculo $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, de centro \mathbf{q} y radio ℓ en un plano perpendicular a $\mathbf{q} - \mathbf{p}$. El cenit y el nadir del círculo (que son extremos de la función π_3 restringida a $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y se alcanzan en las intersecciones con el plano determinado por los puntos \mathbf{p}, \mathbf{q} y $\mathbf{q} + \mathbf{k}$) lo dividen en dos semicírculos, $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y $R_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ caracterizados por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}} &\Leftrightarrow \pi_3 [(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p} - \mathbf{q}] > 0, \\ \mathbf{x} \in R_{\mathbf{p}\mathbf{q}} &\Leftrightarrow \pi_3 [(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p} - \mathbf{q}] < 0. \end{aligned}$$

Asumiremos que la superficie S satisface la siguiente hipótesis.

H4.: Dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ con $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \ell$, $S \cap C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ tiene exactamente dos puntos: $\mathbf{r} \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y $\mathbf{r}' \in R_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, que dividen al círculo $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ en dos arcos: $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ \subset S^+$ y $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^- \subset S^-$.

Esta hipótesis define dos mapeos: $\mathbf{r} = \phi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $\mathbf{r}' = \phi'_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Con la misma técnica que en el Teorema 3 se demuestra:

Teorema 4. Los mapeos ϕ_2 y ϕ'_2 son continuos.

Teorema 5. La hipótesis **H4** implica la hipótesis **H2**.

Demostración. Se trata de construir un TRIO $T(t) = \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t) \rangle$, con t en algún intervalo $[a, b]$, que comience con $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ y termine con $T' = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \rangle$.

Sean $\theta_0 = \arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}})$ y $\theta_1 = \arg(\overrightarrow{\mathbf{p}'\mathbf{q}'})$. Si $\theta_0 \neq \theta_1$, con una elección adecuada de la rama del argumento, podemos suponer que $\theta_0 < \theta_1$. Sea $\sigma(t)$, $\theta_0 \leq t \leq \theta_1$ cualquier trayectoria continua simple en \mathbb{R}^2 que une \mathbf{p}_0 con \mathbf{p}'_0 . Definimos:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(t) = (\sigma(t), f(\sigma(t))) \\ \mathbf{q}(t) = \phi_1(\mathbf{p}(t), t) \\ \mathbf{r}(t) = \phi_2(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) \end{cases}, \quad \theta_0 \leq t \leq \theta_1$$

En este caso es inmediato verificar que $T(t)$ genera un movimiento rígido de T apoyado sobre S que termina en T' . Todos los mapeos son composición de mapeos continuos.

Si fuera $\theta_0 = \theta_1$, se parametriza σ en cualquier intervalo y sólo se cambia la definición de $\mathbf{q}(t) = \phi_1(\mathbf{p}(t), \theta_0)$. \square

Teorema 6. La hipótesis **H4** implica la hipótesis **H1**.

Demostración. La traslación $M(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{b}$ y su inversa $N(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$ establecen una biyección entre $L_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ y $R_{\mathbf{b}\mathbf{a}}$. Una parametrización con el ángulo central de cualquiera de estos arcos, digamos $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow L_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$, con $\gamma(-\pi) = \mathbf{l}$ y $\gamma(\pi) = \mathbf{k}$,

el nadir y el cenit, induce un orden lineal $<$ que se traslada también al arco R_{ba} por la biyección. Obviamente la biyección resulta creciente para este orden.

Por **H4** existe un único punto $\tilde{d} = \phi'_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in R_{ba}$ tal que $\langle \tilde{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ es un TRIO apoyado en S . Su cuarto vértice es $\tilde{d} + \mathbf{b} - \mathbf{a} = N(\tilde{d})$.

Puesto que $\mathbf{d} = M(\mathbf{c}) \in R_{ba} \cap S^+$ y $\tilde{d} \in R_{ba} \cap S$, tenemos $\tilde{d} < \mathbf{d}$. La aplicación de la traslación creciente N nos da $\tilde{d} + \mathbf{b} - \mathbf{a} < NM(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$. Esto es, $\tilde{c} < \mathbf{c} \in S$. Luego $\tilde{c} \in S^-$. \square

§6. Mesas rectangulares

Invito a mirar nuevamente la figura 1. El primer movimiento de rotación con eje \overline{ab} nos dejaba de frente a dos triángulos isósceles: $\triangle abc$ y $\triangle d'ba$. El posterior movimiento de arrastre sobre S para trasladar el primer triángulo sobre el segundo, llevaba el lado ab sobre $d'a$. Si partimos de un rectángulo en vez de un cuadrado, el primer movimiento produce dos triángulos rectángulos no isósceles (escalenos les decía la maestra). Los lados ab y $d'a$ son distintos.

La necesaria modificación de la hipótesis **H2**, cambiando TRIOs por triángulos rectángulos con catetos desiguales es falsa. Sobre el final de la Sección 2 se mencionó el ejemplo de los triángulos $\{\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, \mathbf{0}\}$ y $\{2\mathbf{j}, -\mathbf{i}, \mathbf{0}\}$ quienes, siendo congruentes, no se pueden unir por un movimiento rígido en el plano. Si pensamos al plano como superficie S en el espacio tampoco se podrán unir si se exige al movimiento rígido que actúe *sobre* S .

Que esta demostración no sirva, no nos habilita a decir que no hay un método similar que permita estabilizar mesas rectangulares.

HUGO ALVAREZ

Universidad Nacional de San Luis (UNSL).

Ejercito de Los Andes 950, D5700HHW, San Luis, Argentina.

(✉) halvarez@unsl.edu.ar

Recibido: 18 de febrero de 2018.

Aceptado: 2 de abril de 2018.

Publicado en línea: 11 de mayo de 2018.

Algo más sobre mesas inestables

Nota editorial por Leandro Cagliero

LA muy lamentable noticia del fallecimiento del Profesor Hugo Alvarez nos sorprendió cuando estábamos haciendo los ajustes para la publicación de su artículo *Una mesa inestable*. Esto nos llevó a tomar la decisión de publicarlo casi textualmente como fue enviado a nuestra revista y es por ello que queremos incluir en esta nota algunos de los detalles que veníamos conversando.

El problema discutido en el artículo de Hugo tiene una rica historia y bibliografía, en el artículo [1], publicado en Math. Intelligencer en 2007, podemos encontrar bastante información. Uno de los resultados demostrados allí es el siguiente.

Teorema 1. Dado un rectángulo R (que corresponde a los extremos de las patas de la mesa que queremos estabilizar) y una función continua $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (cuyo gráfico representa la superficie donde apoya la mesa) existen cuatro puntos a, b, c y d sobre el gráfico de g tales que el rectángulo $\square abcd$ es congruente a R . Más aún dado un punto $p \in \mathbb{R}^2$ podemos elegir los puntos de modo que el centro de $\square abcd$ esté en el eje vertical que pasa por p .

Es necesaria la hipótesis de que g sea continua, la Figura 1 nos muestra una superficie en la que no se podría estabilizar una mesa.

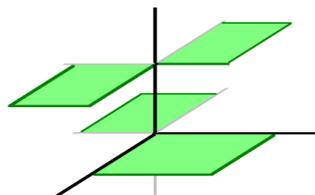


Figura 1

Los autores de [1] obtienen este teorema como consecuencia de un importante resultado de G. Livesay [3] que tiene el siguiente resultado como corolario.

Teorema 2. Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea θ un ángulo menor o igual a 90° . Entonces existen dos diámetros de la esfera S^2 que forman un ángulo θ y tales que f tiene el mismo valor en los 4 extremos de los dos diámetros.

La demostración del Teorema 1 a partir del Teorema 2 es básicamente la siguiente. Primero podemos asumir que las diagonales del rectángulo R tienen longitud 2. Ahora llamamos θ a la medida del ángulo entre las diagonales de R y aplicamos

el Teorema 2 a la función $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Obtenemos dos diámetros de la esfera que se cruzan en un ángulo igual a θ , por lo cual sus 4 extremos forman un rectángulo congruente a R . Dado que en estos 4 puntos la función f tiene el mismo valor, digamos r , resulta que si trasladamos verticalmente estos 4 puntos una distancia r obtendremos 4 nuevos puntos a, b, c y d sobre el gráfico de g que forman un rectángulo congruente a R .

El Teorema 2 generaliza lo que originalmente había probado F. J. Dyson para $\theta = 90^\circ$ en [2].

Referencias

- [1] Baritomba, Bill; Löwen, Rainer; Polster, Burkard; Ross, Marty; *Mathematical table-turning revisited*, Math. Intelligencer **29** (2007), no. 2, 49–58. <https://arxiv.org/pdf/math/0511490v1.pdf>
- [2] Dyson, F. J.; *Continuous functions defined on spheres*, Ann. of Math. (2), **54** (1951), 534–536.
- [3] Livesay, George; *On a theorem of F. J. Dyson*, Ann. of Math. (2), **59** (1954), 227–229.