UNA PROPUESTA: INCORPORAR ALGUNOS CONCEPTOS DE GRAFOS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Teresa Braicovich.
Universidad Nacional del Comahue. Argentina.
teresabraicovich@jetband.com.ar

Nivel educativo: desde inicial a universitario.
Palabras clave: grafos – recorridos – coloreo – árboles.

Resumen

Debido a que el tema grafos no se encuentra en las currículas escolares, llevamos a cabo desde hace ya algunos años varias investigaciones en distintos niveles educativos y en diferentes contextos sociales con el fin de evaluar la viabilidad de introducirlo. A partir de ello hemos podido concluir que el trabajar con algunos conceptos de grafos ayuda a los alumnos en varios aspectos dentro del proceso de enseñanza. Muchos docentes desconocen este tema, otros sólo tienen un mínimo conocimiento del mismo e incluso algunos, aún cuando manejan más conceptos de esta temática no saben cómo presentarlo a sus alumnos. Debido a esto, el objetivo del dictado de este curso es transferir el tema, haciendo hincapié en las actividades y metodología a utilizar de acuerdo a las edades de los niños con quiénes se trabaje. Por último, cabe agregar que con estos encuentros se busca generar en los asistentes la inquietud de profundizar en el estudio de esta teoría en el futuro y movilizarlos a enseñar el mismo a sus alumnos.

1. Introducción

Puede observarse en los distintos niveles educativos, incluida la enseñanza universitaria, las serias dificultades de los estudiantes para lograr un aprendizaje significativo. Es probable que esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo; podemos tomar las palabras de Moisés Coriat (2004): "*No es tan importante saber muchas cosas como saber cómo aprender cosas nuevas*". También debemos mencionar lo difícil que resulta a los docentes despertar el interés de los alumnos.

Probablemente una respuesta a la problemática anteriormente planteada, sería plantear situaciones donde el alumno tenga la posibilidad de explorar, descubrir, crear, ensayar, probar, generar hipótesis y conjeturas, discutirlas y analizarlas. En este sentido, a partir de investigaciones[4] realizadas hemos concluido que se puede presentar la teoría de grafos como una manera de "*pensar matemáticamente*", conceptualizando situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. Destacamos que "*Pensar matemáticamente supone buscar conexiones y haciendo conexiones se construye la comprensión matemática. Sin ellas, los estudiantes tienen que aprender y recordar demasiados conceptos y destrezas aislados. Con conexiones, pueden construir nuevos conocimientos sobre conocimientos previos*" (NCTM, 2003, pág. 278)

Cabe aclarar que no hay necesidad de ser un experto en grafos para usar conceptos de esta teoría con cierta soltura, por lo que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto. Podemos citar nuevamente a Coriat: "*Por medio de los*

[4] Distintos trabajos de integrantes de los Proyectos de Investigación *Adjunción en Grafos* y *El operador line sobre grafos cordales y de comparabilidad*, proyectos ejecutados y subsidiados por la Universidad Nacional del Comahue, con informes de avance y final aprobados. Períodos 2004-2007 y 2008 hasta la fecha, respectivamente. www.uncoma.edu.ar

grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos".

2. Pertinencia de la propuesta

La planificación y el desarrollo de las investigaciones llevadas a cabo tienen como marco teórico las teorías constructivistas, las cuales consideran al alumno con una desarrollada capacidad de gestionar su propio aprendizaje; de usar su conocimiento, habilidades previas y seleccionar estrategias de aprendizaje adecuadas en la tarea que se encuentra trabajando. Los procesos de aprendizaje que se inducen en las clases tienen como objetivo facilitar al alumno nuevas posibilidades de pensar, sentir y valorar, procesos que deberían hacer que el alumno sea capaz de actuar y juzgar de manera satisfactorias en situaciones nuevas que le puedan ser planteadas. Para que esto realmente sea así, es necesario que sean construidos los nuevos contenidos del quehacer y del pensamiento, éste es el aspecto dinámico del proceso de construcción: hacer que el alumno busque e investigue, para que así pueda crear una nueva forma de actuar o de pensar por propio impulso.

El tema grafos es relativamente nuevo y no se encuentra, en general, en las currículas de ninguno de los niveles educativos, en él queda aún mucho por descubrir. Atendiendo a esto podemos citar a Paenza (2008): *"En definitiva, uno nunca llega al punto de poder usar su creatividad. No parece haber nada por hacer, como si todo estuviera contestado, todo dicho…y no solo no es así, sino todo lo que hay por descubrir o inventar es de un volumen increíble. Miles de matemáticos en todo el mundo piensan problemas cuya solución se ignora, y no sólo hoy, porque hay preguntas que se plantearon hace cuatrocientos años y aún no se sabe que decir al respecto. Es hora, entonces, de buscar diferentes maneras de seducir…"*

Por último en este punto cerraremos la idea citando a Rosentein y otros (1997), quien da algunos argumentos para introducir conceptos de Grafos en las currículas de los distintos niveles educativos, los que presentamos a continuación:

- Es aplicable pues en los últimos años varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- Es accesible, pues en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental para trabajar con los grafos de manera correcta.
- Es atractivo, se pueden plantear situaciones muy motivadoras para los alumnos.
- Es adecuado, a los estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y a los que no les va bien en esta disciplina les puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.

3. Contenidos a desarrollar

Es muy amplia la variedad de contenidos que se desprenden de la teoría de grafos y más aún, la cantidad de ejemplos posibles; para acotarlos, en función del tiempo permitido por este curso se seleccionan aquellos que dan el puntapié inicial para empezar a comprender esta teoría.

Nos centraremos tanto en el desarrollo teórico, abordando los aspectos históricos, como en narrar las experiencias propias que resultan muy significativas para transmitir y motivar la búsqueda de nuevos conocimientos en cada participante desde el ámbito personal y en la transmisión a sus alumnos. Cada docente generará sus propias herramientas para llevar al aula, pero se ofrece la experiencia para la graduación de los contenidos.

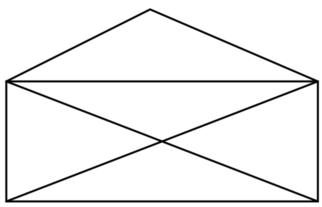
El curso tendrá como eje las motivaciones históricas de los cuatro grandes problemas que dieron origen a la Teoría de Grafos, los mismos se presentan de manera sucinta a continuación:

Recorridos Eulerianos.

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez*? Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

- *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino euleriano cerrado.*
- *Un grafo conexo contiene un camino S_{ab} que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si a y b son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto*.

El problema euleriano está relacionado directamente con el de las figuras unicursales, que son las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. Un entretenimiento muy conocido y relacionado con este concepto es el comúnmente denominado: "*figura del sobre*", que se presenta a continuación:

▪ 

Grafo que representa al juego del sobre

Como en este grafo hay sólo dos vértices de grado impar, existe camino euleriano abierto, para dibujar la figura sin levantar el lápiz ni repetir aristas debe comenzarse el trazado en uno de los dos vértices inferiores y finalizar en el otro.

Planaridad y Coloreo de Grafos.

Los grafos planares son aquellos que pueden dibujarse en el plano de manera que sus aristas sólo se corten en vértices del grafo. En los grafos planares conexos la diferencia entre la suma del número de vértices y de regiones y el número de aristas es igual a 2 (vértices + regiones – aristas = 2). Este concepto es el correspondiente al conocido pasatiempo en el que se pregunta si es posible proveer de luz, agua y electricidad, a tres casas, de forma tal que las respectivas redes de distribución, supuestas en un mismo plano, no se intersecten. Contestar a esta pregunta equivale a determinar si el grafo determinado es planar, como el mismo no lo es, se puede afirmar que no es posible que las redes de distribución no se superpongan.

Un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes, el número mínimo de colores con el que puede ser coloreado es denominado el número cromático del grafo. Es importante destacar que para colorear cualquier grafo planar es suficiente con cuatro colores. El problema que parece haber dado origen a este tema es el mencionado por Moebius en 1840 y es consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas, que dice: "*Supuesto que cada país está constituido por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituidas por un solo punto) todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países limítrofes tengan colores distintos*". Este problema tuvo en vilo por más de un siglo a los más famosos matemáticos del mundo, recién fue demostrado en 1976 por Appel y Haken.

Árboles.

Son grafos conexos que no tienen ciclos. En los árboles de n vértices hay siempre un número igual a (n-1) aristas. El concepto de árbol surgió en estudios sobre redes eléctricas y también en otros referidos a química, esto fue aproximadamente 100 años después de la aparición del primer escrito de Euler, que fue mencionado anteriormente. En la actualidad tiene muchas aplicaciones en algoritmos para computación.

Un árbol minimal cubriente de un grafo G es el árbol de menor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo G y un árbol maximal cubriente de un grafo G es el árbol de mayor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo G y

Recorrido hamiltoniano.

Es un recorrido que pasa una y solo una vez por cada uno de los vértices del grafo. Tiene aplicaciones en muchos problemas, el más conocido, sea probablemente el denominado "El viajante de Comercio".
Como motivación histórica podemos decir que un pasatiempo conocido en la India Antigua era considerar el desplazamiento de un caballo en un tablero de ajedrez de forma que incida exactamente una vez en cada una de las casillas, puede o no pedirse que el caballo vuelva a la casilla de la cual partió. La búsqueda de soluciones les interesó a varios matemáticos, entre ellos a De Moivre, Euler y Vandermonde, los que dieron en el Siglo XVIII distintos métodos para obtenerlas. El Reverendo Kirkman analizó en poliedros la posibilidad de recorrer todos los vértices incidiendo exactamente una vez en cada uno de ellos utilizando las diagonales y/o lados del mismo. Más tarde, el famoso matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) inventó un juego (Icosian Game) que en 1859 lo vendió por 25 guineas a un fabricante de Dublín. En un dodecaedro regular -poliedro 3 regular, con 12 caras y 20 vértices- cada vértice representaba una ciudad. Como el dodecaedro es incómodo de manejar, Hamilton lo reemplazó por un grafo plano isomorfo al del dodecaedro, de allí que a los recorridos que inciden exactamente una vez en cada uno de los vértices se les llame recorridos hamiltonianos.
Este último tema es aún hoy un problema abierto, pero es importante que los docentes, sobre todo de la enseñanza media, cuenten con herramientas de este tipo. Cabe aclarar que los alumnos no necesitan una base matemática importante para poder comprenderlo y de esta manera tienen una visión distinta de la matemática, pues tienen la posibilidad de comprender que no está "*todo resuelto*" en esta disciplina, creencia que, en general, es muy fuerte en ellos.

4. Reflexión final

En este curso, como seguramente será heterogéneo con respecto a los participantes, se parte considerando que los asistentes desconocen totalmente el contenido a desarrollar referido a grafos, que no han trabajado previamente con conceptos de esta teoría, ya que por el tipo de actividades que se plantean esto es posible.

Como docentes debemos siempre atender a la posibilidad de realizar innovaciones, por supuesto con el sustento y justificación adecuados, en las currículas, es decir enseñar a nuestros alumnos temas nuevos, mostrarles una matemática distinta, concluimos citando a Paenza (2007, pág. 21), quién dice:
"*La mayoría de la gente piensa (con razón, porque ésos son los elementos con los que cuenta) que la matemática "está toda inventada" o que es algo "cuadrado" que uno va, estudia, y no aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas)". Sin embargo, no sólo no es así, sino que la matemática anda por la vida como la mayoría de las ciencias: sabiendo algunas cosas (pocas)e ignorando otras (muchas)…. Se trata de una historia que quiero empezar así: "Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aún aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a los que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía hace ya cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan aburridas e inexplicables. Peor aún: de difícil aplicación"…Todo un detalle de lo que se trabaja en la actualidad….y en los últimos 2 ó 3 siglos…. ¿Quién dijo que se sabía "todo"? el solo hecho de que "aceptemos" esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la "matemática real", la que investiga porque no sabe, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que mostrar, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar*."

Bibliografía:

Ausubel, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, México.

Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

Braicovich, T.; Caro, P; Cerda, V.; Osio, E.; Oropeza, M.; Reyes, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos.* Editorial Educo. Neuquén.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 7 (2), 33-115.

Cognigni, R.; Braicovich, T.; Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 23. 109-125. Universidad Nacional de Córdoba.

Coriat, M. (2004) Algunos usos escolares de los grafos. UNO. *Revista de Didáctica de la Matemática* 36, 8-21. Universidad Complutense de Madrid.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.

Chiappa, R. (1989). Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 4(1), 37-44. Universidad Nacional de Córdoba.

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

Kenney, M. and Hirsh, C. (1991). *Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Menéndez Velázquez, A. (1998). Una breve introducción a la Teoría de Grafos. *SUMA*: *Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* 28, 11-26.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 3". Siglo XXI. Editores Argentina. Buenos Aires.

Paenza, A. (2008). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 100". Siglo XXI. Editores Argentina Buenos Aires.

Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
Santaló, L. (1993). *Matemática* 1. *Iniciación a la creatividad*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.
Scaglia, S., Renzulli, F., Gotte, M. (2008). Propuesta para mejorar la demostración en el nivel terciario. Actas de VII CAREM. Santa Fe. Argentina.
Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman. New York.