PUNTOS MEDIOS Y SUS DIVERSAS CONEXIONES

María del Carmen dos Santos Farías Trivel
Escuela Técnica Superior - Rivera, Uruguay
maria2santosf@gmail.com

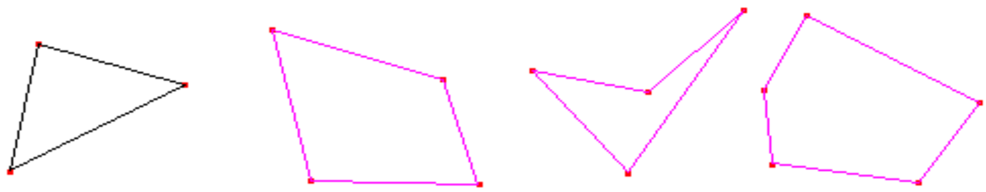
Nivel educativo: Medio
Palabras claves: cuadriláteros, triángulos, puntos medios, diagonales.

Resumen

Esta propuesta se inicia con conceptos generales referidos a polígonos. Luego, como un andamio, se consideran los puntos medios de los lados de triángulos llegando al concepto de paralela media y deduciendo propiedades referidas a longitudes y áreas de figuras determinadas al considerar todas las paralelas medias del triángulo. A partir de ello se coloca el foco en los cuadriláteros y el paralelogramo de Varignon y basados en la visualización, optimizada si se usa un software como por ejemplo Cabri II Plus, se deducen varias propiedades, algunas de las cuales se demuestran usando conceptos básicos. Se plantean otras conexiones con algunos problemas y ejercicios.

1- CONCEPTOS GENERALES.

Antes de abordar específicamente el tema podríamos referirnos a la definición de polígono y en particular a la de polígono convexo.



No convexo convexo

Esta idea intuitiva debe estar respaldada por una formulación más precisa, que puede darse de distintas formas. De acuerdo al contexto, alguna de esas definiciones puede ser más adecuada que las otras.

Elon Lages Lima define **polígono** como *una línea poligonal cerrada sin auto-intersecciones*; es decir cada lado es un segmento de recta que tiene solo un punto en común con el lado anterior y con el siguiente, pero no con los demás.

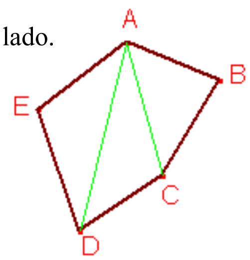
A veces designamos con la palabra ***polígono*** *la región del plano limitada por esa línea poligonal cerrada sin auto intersecciones*.

(Por ejemplo cuando hablamos de área de un polígono, queda claro que nos estamos refiriendo a la región poligonal, no a la línea que la limita.)

Análogamente, dos **vértices** son **adyacentes** (o consecutivos) si pertenecen al mismo lado.

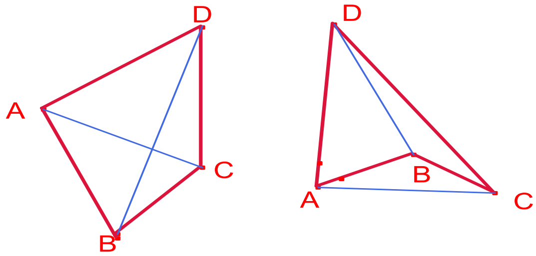
Se denominan **diagonales** a los segmentos determinados por vértices no adyacentes.

Por ejemplo los segmentos AC y AD son 2 diagonales del pentágono.



A pesar de parecer trivial la observación de que algunas diagonales del pentágono (o de otros polígonos de mayor número de lados) no siempre se intersecan, hemos comprobado que esta evidencia causa conflicto, al punto de necesitar resignificar el concepto de diagonal, pues lo habitual es que la imagen mental asociada sea el de las diagonales de los cuadriláteros convexos , que siempre se intersecan.

Por ejemplo, si consideramos los cuadriláteros ABCD, sus *lados* son AB, BC, CD, DA y sus *diagonales* AC y BD.

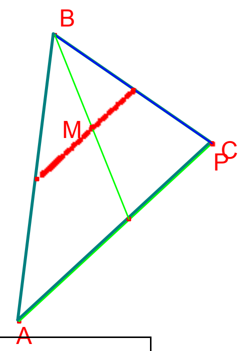


A partir de los ejemplos anteriores y teniendo en cuenta sus diagonales, se pueden clasificar en :

- *Cuadriláteros convexos* : si tienen ambas diagonales interiores
- *Cuadriláteros no-convexos*:si tienen una diagonal interior y otra exterior.

2- TRIÁNGULOS, PUNTOS MEDIOS, PARALELA MEDIA y ÁREAS…

Representemos un T(ABC), un punto P que pertenezca al lado AC, el segmento BP y su punto medio M . **¿Qué ocurre al variar el punto P? ¿cuál es el conjunto de todos los puntos medios de los segmentos BP?**



Si realizamos esta actividad con algún software, por ejemplo Cabri, (no es imprescindible) observamos que dicho conjunto es un segmento de recta paralelo al lado AC y cuyos extremos son los puntos medios de los lados AB y BC. Además al comparar longitudes es notoria la relación entre la longitud de dicho segmento y la del lado AC.

Por lo experimentado se puede inducir que:

> Si en un triángulo consideramos los puntos medios de dos de sus lados, el segmento que determinan es **la paralela media del triángulo**.
> Dicho segmento es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Dijimos que no es imprescindible el uso de algún software, pues trabajando con diversos materiales concretos, o lápiz y papel, o papiroflexia, es posible arribar a la misma conclusión. La ventaja de trabajar con primer procedimiento es que permite la visualización de regularidades en variados ejemplos, en menos tiempo; así la conjetura inicial adquiere "más fuerza"

Esta experimentación que posibilita intuir relaciones y luego generalizar, si bien no tiene el valor de una demostración formal, permite llegar a esta fase de abstracción de modo más natural y significativo.

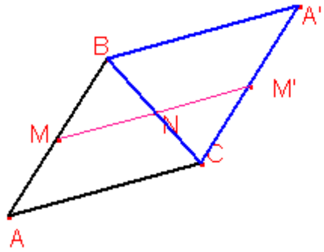
Para demostrarla se puede proceder de la siguiente manera:

- Simetrizar el T (ABC) respecto a N, punto medio del lado BC. Por el paralelismo de rectas simétricas y propiedades de simetría, se tiene que :

C_N (A)= A' (AB) // (A'C)

C_N (B)= C $\rightarrow$ y $\rightarrow$ **<u>(ABA'C) paralelogramo*</u>**

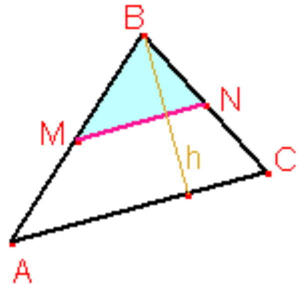
d(A,B) = d (A',C)



Como C_N (M)= M' se deduce **<u>MM' // AC y d(M, N) = ½ d(A,C) *</u>**

- Si ahora comparamos **área** de los T(ABC) y T(MBN) , tenemos que

ár T (ABC) = d(A,C) . h . ½ ([2])

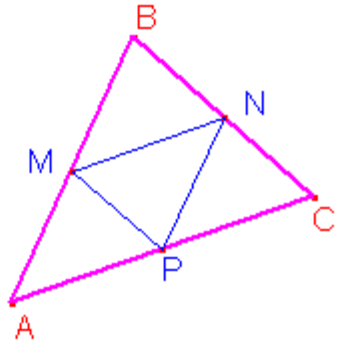


Cómo el segmento MN es paralela media del T(ABC)

d(B,G)= ½ d (B,H) por lo tanto

ár T (MBN) = d(M,N) . ½ h . ½ $\rightarrow$ **ár T (MBN) = ¼ ár T(ABC)**

Los triángulos tienen *3 paralelas medias*, que lo dividen en 4 triángulos de igual área pues por razonamiento análogo:

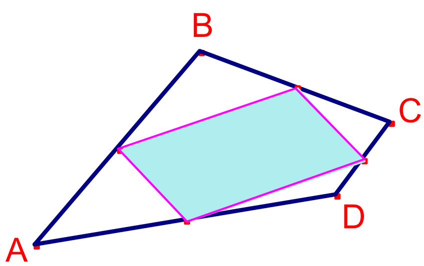


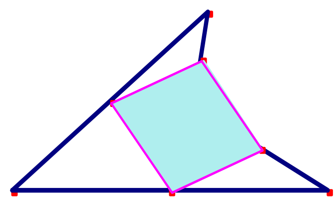
árT(MBN)= ár T(NCP)= árT(MPA)= ¼ ár T(ABC),

en consecuencia ár T(MNP) = ¼ (ABC)

3 - CUADRILÁTEROS Y PARALELOGRAMO VARIGNON

Experimentemos proponerle a los alumnos investigar qué figuras se determinan cuando se consideran *los puntos medios de los lados de un cuadrilátero*. Nuevamente la visualización (con o sin computadoras!) juega un papel fundamental para relacionar conceptos previos con los resultados que se obtienen en cada ejemplo considerado, así como para llegar a la conclusión que :



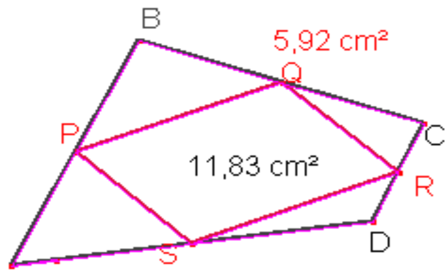


[2] notamos con h medida de la altura respecto al vértice B

La figura formada por los puntos medios de los lados de un cuadrilátero *(considerados en el mismo sentido que la figura inicial),* **es un paralelogramo y su área es la mitad que la de aquel.**

El siguiente teorema, atribuido a Pierre Varignon (1654-1722), resulta muy simple y causa sorpresa la fecha tardía de su publicación en 1731

Insistimos en que la visualización no es la demostración, y muchas veces nuestra visión nos engaña, ya sea porque las figuras que usamos no son las mas adecuadas o lo que nos "muestra" el computador son aproximaciones. Por ejemplo



Entonces a demostrar!!

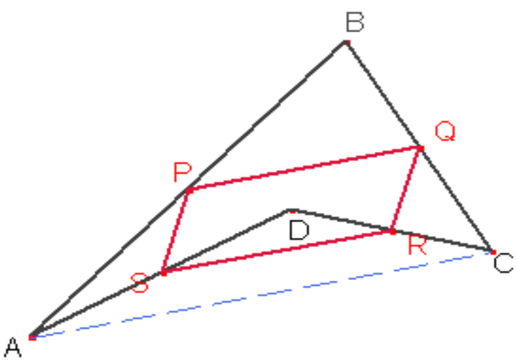
Recordemos que el segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad que la de dicho lado.

Considerando los triángulos (ABC) y (CDA) se sabe que

- los segmentos PQ y SR son paralelos a la diagonal AC, por lo tanto **PQ // SR**
- miden la mitad que AC, es decir **d(P,Q) = d(S,R)**

$\rightarrow$**(PQRS) es un paralelogramo** [3].

Si el cuadrilátero fuera no convexo, los puntos medios de sus lados determinan igualmente un paralelogramo. (la demostración. es análoga a la anterior)



En cuánto al **área de los polígonos,** podemos considerar:

ár (PQRS) = àr (ABCD) - (ár (APS) + ár(QCR) + ár(PBQ) + ár (RDS))

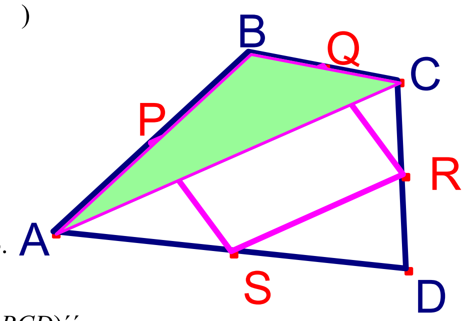
ár(PQRS) = ár (ABCD) - (¼ ár(ABD)+ ¼ ár(BCD)+ ¼ ár(ABC)+ ¼ ár(CDA)

ár(PQRS) = ár (ABCD) - (¼ ár(ABCD) + ¼ ár(ABCD))

ár(PQRS) = ár (ABCD) - ½ ár(ABCD)

ár(PQRS) = ½ ár(ABCD)

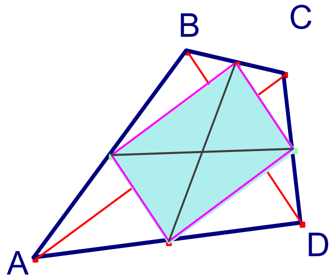
También se cumple para otros cuadriláteros no convexos y este procedimiento que seguimos en la demostración también es válido.

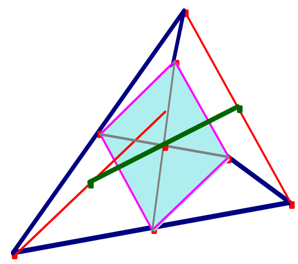


[3] También conocido como ´´ *paralelogramo Varignon del cuadrilátero (ABCD)*´´

4 – 'ENCUENTROS' ENTRE **DIAGONALES y PUNTOS MEDIOS**

> **Los segmentos** determinados por **los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero, y** los determinados por **los puntos medios de sus diagonales,** son concurrentes y se bisecan entre ellos.





Es decir:

El centro del paralelogramo Varignon (O) es punto medio del segmento determinado por los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero (ABCD).

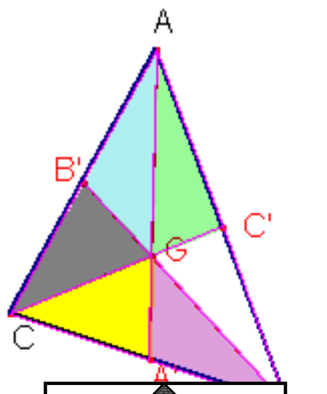
La relación se mantiene si el cuadrilátero es no convexo. Si el cuadrilátero inicial ABCD es un paralelogramo, O coincide con el centro del ABCD

5 – CLÁSICOS Y …OTRAS CONEXIONES CON PUNTOS MEDIOS

Estas propuestas pretenden estimular los razonamientos inductivos, formular conjeturas, generalizar, plantearse nuevas situaciones que tiendan puentes entre conceptos matemáticos, investigar, resignificar definiciones y propiedades, y también demostrar.

1. Representa un cuadrilátero (ABCD) convexo y considera M, N, P, Q, los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente.
   a) ¿Qué condiciones debe cumplir (ABCD) para que (MNPQ) sea un rombo, un rectángulo o un cuadrado?

   b) INVESTIGA si existe alguna relación entre los segmentos determinadas por los puntos medios de las diagonales AC y BD, y los determinadas por los puntos medios de los lados del (MNPQ).



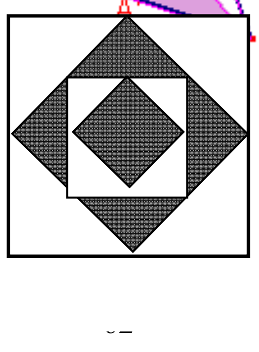
2. En un T(ABC), A', B' y C' son los puntos medios de los lados.

Probar que los segmentos AA' , BB' y CC' son concurrentes.

(**G** se denomina **baricentro del triángulo**)

b) Formula una conjetura acerca de las áreas de los 6 triángulos que quedaron determinados Y LUEGO demuéstrala.

3- Considera un cuadrado grande blanco, señala los puntos medios de los lados, únelos y colorea de negro el cuadrado que se forma. Sigue la secuencia alternando con blanco y negro.



a) de qué color es la región central en el paso 10? Y en el paso n?

b) Cuántos □ ◇ hay en el paso 7 ? Y en el 14? Generaliza para n

c) Qué pasaría si el cuadrado original se cambiase por un triángulo?

Cuántos triángulos blancos hay en un paso cualquiera? Y triángulos negros?

d) Y si el cuadrado original se reemplazara por otro cuadrilátero?

BIBLIOGRAFIA

- COXETER, H y GREITZER, S.(1967). *Geometry Revisited.* New York: Random House.
- LAGES LIMA, E. (2001). *Matemática e Ensino.* Rio de Janeiro: Coleçao do Profesor de Matemática.
- PUIG ADAM, P.(1980). *Curso de Geometría Métrica*.(15ª ed.). Madrid: Gómez Puig.
- STACEY, K y GROVES, S. *Resolver problemas: Estrategias.* Madrid: Narcea, 1999.