APROXIMACIONES RACIONALES DE RAÍCES CUADRADAS, DE LA ANTIGÜEDAD A NUESTROS DÍAS

Alejandro López Rosso
Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación,
Instituto de Formación Docente de Mercedes, Soriano, Uruguay.
aleydelia@gmail.com

Enseñanza Media-Magisterio

El objetivo de la ponencia es mostrar la importancia de la aproximación de raíces cuadradas en la resolución de problemas y analizar desde un punto de vista geométrico tres algoritmos para hacerlo. Dos de ellos provienen de la cultura Babilonia, y el otro es el que tradicionalmente se enseñaba en enseñanza primaria hace unos años.

Para Tales la cuestión primaria no era qué sabemos, sino cómo lo sabemos.
Aristóteles

Introducción. Algoritmos: ¿Enseñarlos o no?

Para la mayoría de nuestros alumnos, la palabra “algoritmo” tiene connotaciones más bien negativas. No los culpo. “Ocho y cinco trece, dejo el 3 y me llevo el uno” “Seis por cuatro veinticuatro al treinta y dos ocho, bajo el cinco” “Tomo los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente” Son algunas de las frases que recuerdo de mi niñez. Hoy por hoy la enseñanza de los algoritmos está fuertemente cuestionada. Este año en un foro del curso “Historia de la Matemática” surgió el tema del algoritmo de la raíz cuadrada. Los cursillistas (todos profesores egresados) se dividieron en dos categorías. Por un lado los que nunca lo aprendieron (en general los más jóvenes), por otro lado los que sí lo aprendieron. De éstos últimos, muchos lo habían olvidado y otros que lo recordaban, no tenían idea de por qué se hacía como se hacía.

Es evidente que podemos aprender a aplicar un algoritmo, sin conocer en absoluto su fundamentación. Esto lo confirma la cara de sorpresa primero y asombro después que ponen, por ejemplo los estudiantes de magisterio, cuando le explicamos por qué se deja un lugar a la derecha en la multiplicación o “se baja” otra cifra en la división.

Cuando pregunto, por qué ya no se enseña el algoritmo para extraer la raíz cuadrada a menudo recibo dos respuestas. “¿Para qué? Eso lo hace la calculadora!” . Cierto! Entonces ¿para qué enseñamos a dividir o sumar, o derivar? No digo que haya que dejar de enseñar esto, pero la razón para dejar de enseñar aquello no puede ser meramente que se “puede hacer con calculadora”.

La otra respuesta es: “es muy difícil, no vale la pena”. Puede ser, pero sinceramente, no creo que sea mucho más “difícil” que el algoritmo de la división.

Algoritmo: ¿comienzo o fin del problema?

Realizar el curso “Lógica y Matemática discreta” me hizo ver los algoritmos bajo un nuevo ángulo. Llegar al algoritmo era el problema, y no tanto utilizarlo.

¿Cómo hago para hallar, de forma eficiente, el producto de 21x13? Algunos amigos me han mandado asombrados un video sobren como multiplicar con rayitas, (http://www.youtube.com/watch?v=_0B-kXMEsUk) “viste qué bueno!” me dicen…sinceramente creo que es interesante pero me gustaría saber qué pensarían de las rayitas si en la escuela nos enseñaran ese método y tuviéramos que hacer 1345x432! Sinceramente “nuestro” algoritmo es mucho más eficiente. ¿No nos asombra que alguien haya inventado una forma de efectuar productos tan grandes que sólo requiera conocer unos pocos resultados de memoria (o en una tabla… ese es otro debate)? ¿No será que nunca nos planteamos *ese* problema? El algoritmo de la multiplicación aparecería como una respuesta genial para un problema real. El problema es que lo aprendimos como una receta aburrida para resolver problemas aun más aburridos

Muchas veces enseñamos rápidamente algunos algoritmos, con la idea de que nuestros alumnos puedan resolver “problemas interesantes”. Creo que lo más interesante puede ser el algoritmo. El problema de trazar una mediatriz con regla y compás, me parece tan interesante como el de ubicar un foco que equidiste de tres esquinas de una plaza triangular y ciertamente más real. Todos saben trazar la mediatriz (“apoyo-en-un-extremo-marco-arriba-marco-abajo” etc.…) sin embargo cuando le pedimos que tracen la mediatriz de un segmento en el borde, quedan mirándonos como que hicimos trampa… “no se puede, porque no puedo marcar abajo”…

Aproximaciones de la raíz cuadrada en Babilonia.

Los babilonios vivieron en Mesopotamia, en unos claros de tierras fértiles entre los ríos Tigris y Éufrates, alrededor de 2000 a.C. Desarrollaron la escritura y contaban según un sistema sexagesimal, es decir, en base 60. Los babilonios fueron los pioneros en el sistema de medición del tiempo la cual ha sobrevivido hasta nuestros días. Lo que podríamos llamar textos matemáticos babilonios se pueden clasificar en dos categorías: las tablas numéricas y las tablillas de problemas. Las primeras destacan uno de los aspectos más asombrosos de las habilidades de los cálculos de los babilonios: la construcción de tablas para ayudar a calcular. Las segundas contaban con una colección de ejercicios similares a los que podemos encontrar hoy al final de cada capítulo de un libro de texto. Algunos problemas van acompañados de una figura geométrica acompañada de números. No se trata de construcciones geométricas, son simplemente figuras que ilustran el enunciado y que no forman parte de la solución del problema.

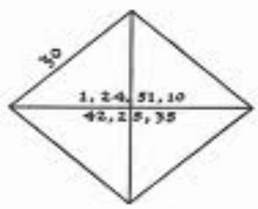
En el ejemplo de la derecha se observa una tablilla 1200 años antes a la época que se estima que vivió Pitágoras.

En ellas aparece un cuadrado con sus dos diagonales y tres números a = 30, b = 1; 24, 51, 10 y c = 42; 25, 35. Claramente los números “a” y “c” corresponden al lado y diagonal, lo que sorprende es el número “b” que en sistema decimal es 1,414212963 y corresponde a una aproximación del número que nosotros escribimos $\sqrt{2}$ con 6 cifras exactas.

Si bien los babilonios habían desarrollado un sistema de medida, valores tan exactos son prácticamente imposibles de obtener mediante medición aún en nuestros días.

A continuación presentaremos dos métodos que los Babilonios utilizaban para aproximar raíces cuadradas junto con una interpretación geométrica.

Luego haremos lo propio con el “algoritmo actual” que se enseñaba hace unos años en nuestras escuelas y liceos.



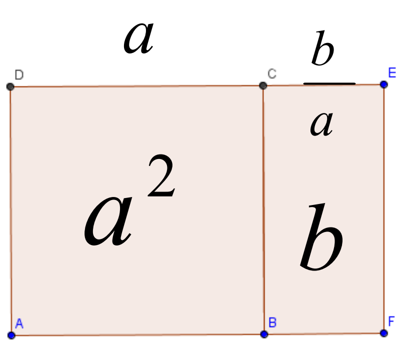
Algunos conceptos previos

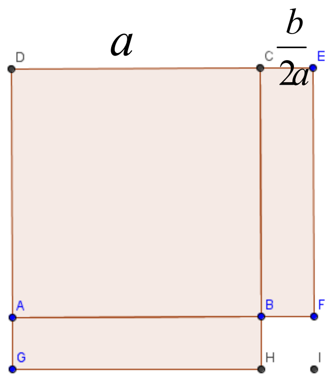
El "hilo conductor" será la interpretación geométrica de algunos procedimientos algebraicos, en caso de trabajarlo con estudiantes, conviene comenzar mostrar algunos ejemplos de "algebra geométrica", la mayoría trabajados en ciclo básico. Básicamente lo que haremos es interpretar el producto de dos números como el área de un rectángulo los tenga por medida de sus lados. De éste modo, extraer la raíz cuadrada de un número N puede interpretarse como calcular la medida del lado de un cuadrado de área N. Esperamos que el lector comprenda que por tratarse de un trabajo muy breve daremos prioridad a las ideas antes que a la "rigurosidad".

Primer algoritmo.

Para aproximar la raíz cuadrada de un número N escribían $N = a^2 + b$ luego $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \dfrac{b}{2a}$. A continuación presentamos una posible interpretación

Si consideramos un rectángulo de área N, "formado" por un cuadrado de área a y un rectángulo de área b, dividendo éste último en dos rectángulos de la mitad del ancho y "añadiéndolos" al cuadrado, obtenemos una figura de área N. El valor al que llegaban, es por lo tanto, una aproximación por exceso, lo cual se puede apreciar fácilmente en la figura.
Si trabajamos con números naturales, la mejor aproximación corresponde al mayor valor de "a" cuyo cuadrado no exceda N. Si bien de ésta manera no se obtiene un número muy exacto, es una muy buena forma de estimar el valor de la raíz, aun para nosotros. Por ejemplo $\sqrt{53} = \sqrt{49+4} \cong 7 + \frac{4}{98}$ que podemos estimar "mentalmente" como 7 y 4 centésimos.
El lector puede analizar la variante de escribir $N = a^2 - b$ y $\sqrt{N} \cong a - \frac{b}{2a}$, la cual también utilizaban los babilonios y ver cuándo conviene utilizarla.





Segundo algoritmo babilonio

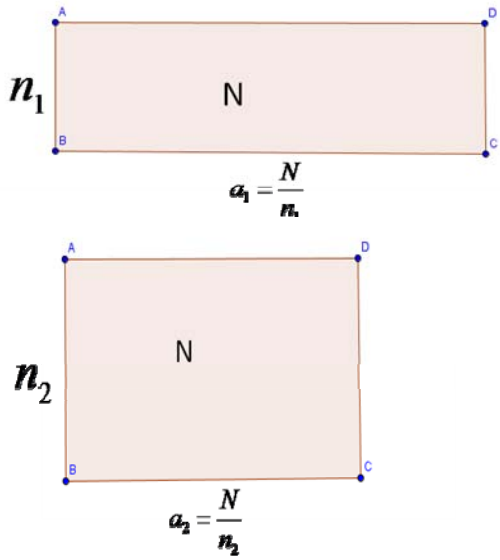
Otra forma de calcular $\sqrt{N}$ era hacer una primera aproximación de la misma a la que llamaremos n_1 .

A partir de esta calculaban $a_1 = \frac{N}{n_1}$. La segunda aproximación es la media aritmética entre n_1 y a_1, es decir $n_2 = \frac{(n_1 + a_1)}{2}$. Calculando $a_2 = \frac{N}{n_2}$ se obtiene $n_3 = \frac{(n_2 + a_2)}{2}$. Éste procedimiento puede continuarse obteniendo aproximaciones "tan buenas" como uno desee. Por ejemplo para calcular raíz de 2:

$$n_1 = 1, a_1 = \frac{2}{1}, n_2 = \frac{a_1 + n_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5, a_2 = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}, n_3 = \frac{a_2 + n_2}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

Interpretación geométrica

Dado n_1, el valor de a_1 corresponde al otro lado de un rectángulo de área N. En cada iteración, vamos calculando valores de n_i y a_i que son lados de rectángulos cada vez más “cercanos” a un cuadrado de área N. Por lo tanto, con cada iteración obtenemos una mejor aproximación de $\sqrt{N}$. Incluso podemos acotar el error puesto que $|\sqrt{N} - n_i| < |n_{i-1} - a_{i-1}|$.
Además de ser un método muy fácil de recordar, (más aun teniendo en cuenta ésta interpretación) brinda muy buenas aproximaciones. En el caso de $\sqrt{2}$, n_4 nos da 6 cifras exactas y n_5 iguala la exactitud de una calculadora científica.



Algoritmo “actual”

Francamente no sé con certeza cuándo o quién inventó el algoritmo que se enseñaba en nuestras escuelas y liceos hasta no hace mucho tiempo. Por falta de espacio aquí los remito a una de las tantas páginas donde aparece (entre otras cosas) una explicación del mismo: http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_de_la_ra%C3%ADz_cuadrada

Interpretación geométrica.

Sin dudas que “nuestro” algoritmo es uno de los más curiosos que aparecen en la enseñanza primaria y casi diría, secundaria. A continuación veremos brevísimamente una interpretación que ayuda a esclarecer algunos de los pasos. Sugiero, estudiar la explicación primero y efectuar algunas pruebas antes de seguir.

Para hallar la raíz cuadrada de N, consideramos un cuadrado de lado N, la idea es ir construyendo cuadrados de lado cada vez mayor que estén incluidos en N. Supongamos que N =4567 (para facilitar la explicación, fácilmente se puede extender a un número de cifras cualquiera). Lo primero que buscamos es la primera cifra de la raíz. Como nuestro número es del orden de los “miles” su raíz será del orden de las decenas. La cifra buscada es el mayor valor cuyo cuadrado sea menor que 45. Es decir 6.

Luego se resta el cuadrado de 6 a 45, (en realidad el cuadrado de 60 a 4567) obteniendo el número 967. Dicho valor es el área del gnomon diferencia entre el cuadrado de área 4567 y el cuadrado de lado 6. Ahora la idea es encontrar el valor de las unidades. Es decir ¿cuántas unidades puedo sumar a 60 para obtener un cuadrado de área menor que N? Debe cumplirse que $(60+b)^2 \leq 4567$.

Desarrollando obtenemos $(120+b).b \leq 4567-3600$. De ahí que el algoritmo "manda" que busquemos la mayor cifra b tal que multiplicada por el número obtenido de agregarla a 2x6, sea menor que 967.

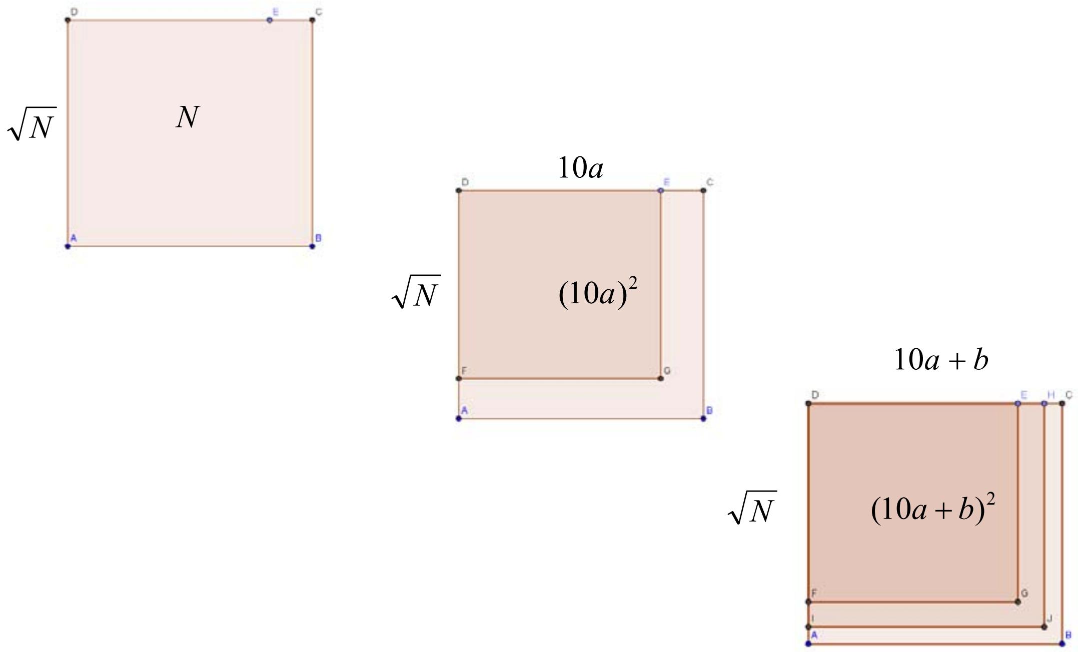
En general, si N es un número de cuatro cifras. Después de hallar la primera cifra debemos buscar b tal que $(10a+b)^2 \leq N$ Luego

$$100.a^2 + 10.2a.b + b^2 \leq N$$

$$10.2a.b + b^2 \leq N - 100.a^2$$

Por lo tanto buscamos el mayor valor de b tal que verifique

$$(10.2a+b).b \leq N - 100.a^2$$



Para obtener las cifras decimales, luego de hallar las unidades, debemos "medir" el área que queda en décimas, por lo que al resto debemos multiplicarlo por 100 o como dice el algoritmo "agregar dos 0".

Conclusión

Luego de haber pensado en éstos algoritmos como verdaderas soluciones al problema de aproximar la raíz cuadrada, me parecen geniales cada uno de ellos y dignos de estudiar, para ver en ellos una cuota interesante de creatividad y belleza, además de profundizar en algunos aspectos de nuestro sistema de numeración. Creo así mismo que no tiene ningún sentido, hoy por hoy, aprenderlo a modo de "receta" para calcular raíces cuadradas. Terminando como empezamos creo que en el tema de los algoritmos "*la cuestión primaria no es qué sabemos, sino cómo lo sabemos*".

Bibliografía

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Dalcín, M. y Olave, M. (2010). Materiales del Curso de actualización en Historia de la Matemática. Montevideo: Departamento de Matemática-Consejo de Formación en Educación.

TeleVisión Educativa (2007). *Los babilonios y la raíz cuadrada*. Telesecundaria Nº 121. México. Disponible en http://www.youtube.com/watch?v=iP-FXYpixjY&feature=related.