APORTES SUSTANTIVOS DE LA MATEMÁTICA A LA MÚSICA, DE LOS GRIEGOS A LA ACTUALIDAD

Lic. Marcelo Monferrato (Arg. / R.O.U.), Dra. Samira Abdel Masih (Arg.)
Universidad Abierta Interamericana, Facultad de Tecnología Informática, Depto. de Matemática
mmonferrato@yahoo.com.ar; abdel.masih@hotmail.com

Nivel educativo: Medio, Terciario, Docentes y estudiantes de Matemática y Música

A lo largo de los siglos las Matemáticas han explicado, demostrado e incluso condicionado el desarrollo de la Música, siendo ambas expresiones, Música y Matemática, el resultado de la más pura abstracción humana. La naturaleza de esta relación puede explicarse en términos históricos, sociales, físicos o genéticos pero, a sabiendas de que todos y cada uno de estos tópicos merecerían una exposición propia, el trabajo presentado se propone enunciar una breve reseña de los puntos más sobresalientes de esta interesante y duradera relación.

Asimismo, se brindan los puntales para la elaboración de juegos, propuestas y talleres por parte de los docentes del área de Matemática, así como un acercamiento hacia las ciencias exactas para el aficionado a la música, todo ello en un marco de completa integración entre arte y ciencia.

Nota de los Autores: Se han eliminado del presente documento todos los gráficos e imágenes inherentes a la presentación del tema, con la intención de dar cumplimiento a las normas para la presentación de los trabajos. Los agregados visuales que complementan nuestra labor forman parte de un archivo .ppt que queda a disposición de quien necesitara revisarlo y serán expuestos durante la conferencia que aquí proponemos.

Aportes sustantivos de la Matemática a la Música, de los Griegos a la Actualidad

"La matemática es música para la mente;
la música es matemática para el alma."
(Anónimo)

La afinación y las escalas

Si bien tanto la música como la matemática se venían desarrollando en las distintas civilizaciones desde los comienzos de la humanidad, con presencia demostrable en cuanta civilización nos detengamos a observar, no nos es posible hablar de la existencia de nexos de unión entre ambas hasta que aparecen los primeros signos de teorización, tanto en las matemáticas como en la música.

En este sentido, son los griegos, a través de la escuela Pitagórica, quienes establecen los primeros pasos en pos de relacionar números y notas musicales. Para los griegos, la música era esencialmente melódica, y microtonal, lo que significa que se contaba con muchos más sonidos que los doce hoy establecidos en la escala tradicional occidental.

No es casualidad, pues, que ambos nombres provengan de vocablos griegos. Música proviene de *musiké*, expresión que significa "de las musas", y matemática proviene de *mathema*, que significa "aquello que se aprende".

Pitágoras, quien además de un brillante matemático fue también músico (tocaba la lira), se interesó por descubrir alguna relación numérica entre aquellos tonos que sonaban “armónicos”. Lo que Pitágoras descubrió fue que al dividir la cuerda en ciertas proporciones, ésta era capaz de producir sonidos placenteros al oído.

Pitágoras encontró que al dividir una cuerda a la mitad producía un sonido que era una octava más agudo que el original; que cuando la razón era 2:3 se producía una quinta (la distancia de Do a Sol, por ejemplo) y que otras razones sencillas producían sonidos agradables. Esto tiene una explicación física, y es que al vibrar, una cuerda no sólo produce una onda de la longitud de la misma, sino que además produce armónicos cuya longitud de onda corresponde a 1/2, 1/3, 1/4... de la longitud original de la cuerda. Muchos de estos armónicos son incluso imperceptibles al oído humano, pero cuando se tocan al unísono dos sonidos que comparten muchos de estos armónicos, como es el caso de Do y Sol, se producen vibraciones que resultan agradables al oído humano.

En sus experimentos, realizados con un instrumento de una cuerda de aquella época (denominado monocordio), Pitágoras definió tres razones que producían intervalos agradables:

Diatessaron (cuarta perfecta): razón 3/4
Diapente (quinta perfecta): razón 2/3
Diapasón (octava): razón 1/2

Sin embargo, y a pesar de la importancia de estas teorías en lo que hace a la relación entre frecuencias y longitudes de una cuerda, estas ideas no fueron completadas hasta el siglo XVII, cuando Marin Mersenne definió algunas teorías sobre la frecuencia de una cuerda que vibra.

Mersenne, quien hoy día es más recordado por el descubrimiento de los números primos que llevan su nombre y las teorías sobre los mismos, estableció una fórmula muy ajustada para la razón principal de un semitono, siendo la misma $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}}$ (aproximadamente 1,059732672…) y mucho más precisa que la razón 18/17 (aproximadamente 1,058823529), utilizada por aquel entonces y hasta el día de hoy y definida por Vincenzo Galilei, padre del ilustre Galileo.

Es Mersenne quien, gracias a sus descubrimientos, provee a los músicos de valiosas reglas para afinar, que terminan dando origen a la escala temperada, la cual es adoptada por grandes músicos como Johann Sebastián Bach, con el fin de resolver problemas de afinación y brindar al músico la capacidad de modular entre tonalidades sin necesidad de modificar la afinación de sus instrumentos. En otras palabras, se garantizaba al músico que un *Sol #* (sol sostenido) sonaría igual que un *La b* (la bemol).

De todas maneras, esta evolución desde la afinación pitagórica a la temperada, pasando por la afinación denominada justa, tomó siglos y fue siempre acompañada de los cambios surgidos en la relación entre música y matemáticas. Muchas de las afinaciones utilizadas durante ese tiempo tienen su origen en la utilización de las matemáticas para el cálculo de los intervalos, aunque no necesariamente siguiendo los principios pitagóricos.

En 1722 Johann Sebastian Bach compone la primera parte de "El clave bien temperado", obra cuya segunda parte sería presentada en 1740 y consistente en dos ciclos de preludios y fugas en todos los tonos mayores y menores de la gama cromática.

Un ejemplo de escala logarítmica: el Pentagrama

Atentos a lo explicado en el punto anterior sobre las conclusiones obtenidas por Pitágoras, llegamos rápidamente a la conclusión de que la manera en que percibimos las notas de la escala musical corresponden a

Ahora bien, a los efectos de hacer más práctica la comprensión de las escalas y la notación musical, el hombre ha debido "linealizar" estas frecuencias. La solución le llega de la mano de los logaritmos, desarrollados por John Napier en el año 1614. Así, al momento de asignar la división de un intervalo de octava (por ejemplo de un DO al siguiente) lo hace en 12 intervalos, que representan un semitono cada uno de ellos. En otras palabras, cada semitono es una doceava parte de la octava, pero al mismo tiempo, cada una de esas partes, no se corresponden con la longitud de la cuerda dividido 12, sino con una doceava parte como exponente de 2! Veamos el siguiente ejemplo:

La nota LA central del piano se corresponde con una frecuencia de 440 Hz. Vale decir, una cuerda que vibra a una frecuencia de 440 Hz emite un sonido que identificamos como LA. El siguiente LA de la escala, o sea una octava más agudo, se corresponde con una frecuencia de 220 Hz. Pero para encontrar las 12 notas entre ambos, debemos dividir la frecuencia original (440) por 2^1/12, 2^2/12, 2^3/12 y así sucesivamente (aquí se propone trabajo y desarrollo en excel para los presentes).

De la misma manera, en la escritura usual de música en hojas de líneas pentagramadas, se ha optado por asignar la misma distancia (altura) a cada una de las notas (con distancia en progresión geométrica, como ya se ha visto) consistiendo en otro buen ejemplo de la aplicación de logaritmos a la música.

La Melodía y las transformaciones geométricas

La composición se basa fundamentalmente en la creación de una línea melódica que es seguida por un acompañamiento. A los fines de otorgar un determinado carácter a la composición, la melodía se varía, se cambia de tonalidad, se repite en fragmentos, o bien se la ejecuta en más de una voz, en líneas paralelas.

Todos estos procedimientos están basados en el plano geométrico, y puede establecerse una similitud entre las transformaciones musicales y las transformaciones geométricas básicas. Así, la forma musical más básica, que es la repetición, es similar a la traslación, al igual que ciertas formas de modulación.

Otro tanto pasa con la rotación o la reflexión, pues qué son sino transformaciones geométricas las que encontramos en la mayoría de las melodías populares, en términos de recolocación de las notas, preservando la forma y tamaño de la melodía inicial.

Las transformadas de Fourier y la Música

Hablar de Música es hablar de sonido, ya sea como arte de combinar los mismos o como medio de transmisión para la música. Y si hablamos de sonido, estamos hablando de vibraciones del aire.

Es el resultado de estas vibraciones lo que hace que nuestros oídos perciban el sonido. Estas vibraciones pueden ser interpretadas como ondas periódicas más o menos complejas, según la naturaleza del sonido que las produce.

Durante mucho tiempo, y especialmente en los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos y músicos, entre los que se puede nombrar a Marin Mersenne, Daniel Bernoulli, la familia Bach, Jean-le-Rond d'Alembert, Leonhard Euler, y Jean Baptiste Joseph Fourier, se vieron desvelados por entender cómo era que una cuerda podía vibrar con un número de distintas frecuencias al mismo tiempo.

De todos ellos fue Fourier, matemático francés, quien a principios del siglo XIX ideó la manera de descomponer sistemas complejos de ondas en series de senos y cosenos. Este descubrimiento ha posibilitado la creación de instrumentos musicales como los sintetizadores y también ha favorecido el desarrollo de la teoría acústica y el análisis del espectro sonoro.

La sucesión de Fibonacci presente en la Música

Descrita por primera vez en Europa por Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, se trata de una sucesión en la que cada número es la suma de los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89…

Esta sucesión, que resulta interesante por su relación con la proporción áurea, ha demostrado ser no solo interesante a la vista, sino también al oído. Ejemplos de ellos son las estructuras de las sonatas de Wolfgang Amadeus Mozart, la quinta sinfonía de Ludwig Van Beethoven, y la obra de Franz Schubert o Claude Debussy, de quienes no se puede afirmar que la hayan usado de manera intencional.

Otro es el caso de autores como Bela Bártok, Olivier Messiaen o Karlheinz Stockhausen, quienes se han valido de manera consciente de la sucesión de Fibonacci para la composición de su obra. En el caso específico de Bártok, él mismo desarrolló una escala de denominó "de Fibonacci", y en su obra "Música para Cuerdas, Percusión y Celesta", la sucesión se hace presente en toda la estructura de la misma: durante los primeros 55 compases se crea una tensión que concluye 34 compases más tarde. De modo similar, para cada una de estas partes, se las subdivide en sus predecesores en la sucesión, haciendo uso de un sonido apagado (en los 34 primeros compases más los 21 finales) y un sonido más notorio y brillante en los 21 más 13 compases centrales).

Teoría de la probabilidad

La creación de obras musicales en base a sucesos aleatorios se remonta al siglo XI, cuando Guido d'Arezzo describió una técnica de composición basando la distribución de las notas de una melodía en la aparición de las vocales en un texto.

También se afirma que, en 1777, Wolfgang Amadeus Mozart compuso diversas partes para poder generar valses en base a los números arrojados por dos dados, sin necesidad de ser músico e incluso sin saber nada acerca de composición, y si bien se discute su autoría, la obra pertenece a su catálogo.

Ya en el siglo XX, los principios de la probabilidad y la estadística fueron explotados por autores como Iannis Xenakis, dando origen a términos como "música estocástica", si bien el término no debe orientarnos a pensar que la música compuesta por Xenakis es azarosa, sino más bien una reacción al determinismo imperante en la primera mitad del siglo XX, que también está relacionado con las series matemáticas y que fuera ampliamente utilizado por Arnold Schönberg y sus discípulos Alban Berg y Anton Webern.

Iannis Xenakis ha aplicado diversas teorías y principios matemáticos en su obra, como la distribución aleatoria de puntos en un plano, la cadena de Markov, la teoría cinética de gases de Maxwell-Boltzmann o las distribuciones de Poisson y Gauss.

Escuchar la obra de Xenakis con una postura abierta y libre de prejuicios nos permite disfrutar de una experiencia que ejemplifica lo que puede ser la comunión de la música y las matemáticas.

La actualidad

Hoy día la relación entre música y matemáticas se materializa a través de software, a la vez que se avanza en modelos teóricos de la música basados en la teoría de conjuntos, los elementos fractales o los principios de la topología.

La teoría de clases o Pitch Class Set theory

Durante el siglo pasado, diferentes compositores y teóricos desarrollaron una teoría basada en los conjuntos pero enfocados a la música. Esta teoría cada vez más común se le llama comúnmente *pitch class set theory* y dentro de la amplia literatura disponible sus exponentes más conocidos son Allen Forte, Milton Babbit y John Rahn.

La utilidad de la teoría de conjuntos en la composición de obras musicales es tan amplia como controversial, y originalmente enfocada al análisis, sus utilidades en la composición son realmente vastas. Actualmente se están generando programas que apuntan hacia la cartografía sonora, esto es, formalizar una representación digital de una obra, independientemente del género, estilo o época en que la misma fuera compuesta. Su principal motor es la ejecución de algoritmos matemáticos, cuyo objetivo es el identificar patrones y correlacionar los distintos objetos de acuerdo a sus características propias. Estas modernas técnicas nos ayudan además a revelar información que difícilmente podríamos captar a simple vista.

El Topos de la música (Música y Topología)

Finalizamos esta reseña mencionando el invaluable trabajo de Guerino Mazzola, matemático y musicólogo suizo, cuya obra merecería una disertación propia, y de quien nos limitaremos a mencionar que su obra, Topos of Music, utiliza las bases de la topología para entender la música, describiendo topologías aplicables a ritmos, armonías o melodías. Sus modelos están siendo usados por investigadores de vanguardia en Europa y Norteamérica para el diseño de nuevo software de música.

Los Autores:

Samira Abdel Masih: Doctora en Ciencias Matemáticas. Investigadora y Docente Universitaria, con vasta experiencia como oradora y jurado de simposios y conferencias de diversos continentes. Autora del libro: *Siria Histórica, Cuna de la Ciencia* (Buenos Aires, 2004)

Marcelo Monferrato: Licenciado en Matemática, Analista de Sistemas, Profesor Superior en Matemática y Astronomía, Profesor Superior de Teoría y Solfeo. Se ha desempeñado en diversas áreas del conocimiento a la par que desarrolla investigaciones de manera independiente y realiza conciertos como guitarrista experimental.

Bibliografía:

Sagastume Berra, A. E. (1961). *Fundamentos Matemáticos de la Música*. Buenos Aires: Revista de la Unión Matemática Argentina.
Brindle, R. (1966). *Serial Composition*. Londres: Oxford University Press.
Grassi, N. (1975). *Teoría Completa de la Música*. Buenos Aires: Ricordi.
Benson, D. (2005). *Mathematics and Music*. Escocia: Department of Mathematical Sciences, King's College, University of Aberdeen, Scotland, UK.
Monferrato, M., Abdel Masih, S. (2009). *Análisis de la Ecuación de Onda en los Instrumentos de Cuerda*. Buenos Aires: Universidad Abierta Interamericana.