

# LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: UNA MIRADA EN BUSCA DE UNA RENOVACIÓN

Alejandra Pollio

Universidad de Montevideo – Uruguay

apole3@gmail.com

Enseñanza Media – 1º de Bachillerato

## Resumen

La función es un objeto complejo del saber matemático cuya aprehensión conceptual no resulta una cuestión sencilla ni evidente para los estudiantes. Hay investigaciones que nos muestran que los estudiantes no se apropian del concepto de función, la dificultad que tiene la propia noción y la dificultad de los estudiantes para comprenderla.

En esta conferencia se presentará una secuencia didáctica que tiene por objetivo renovar una enseñanza buscando que la noción evoluciones a medida que se van desarrollando cada una de las situaciones.

La secuencia está integrada por cuatro situaciones. En este trabajo presentaremos la última de las situaciones, que cierra la secuencia. En cada una de estas actividades se requiere de los alumnos que hagan un tratamiento y/o la conversión de un registro a otro. La noción central, en juego, en estas actividades es la de variación, ya que las nociones de imagen, preimagen dominio y conjunto de llegada fueron evolucionando en las situaciones anteriores. Todas ellas son las que forman el nicho ecológico donde vive la noción y son las que deberían estar presentes a la hora en que los alumnos elaboren su propia definición de función.

La función es un objeto complejo del saber matemático cuya aprehensión conceptual no resulta una cuestión sencilla ni evidente para los estudiantes. Hay investigaciones que nos muestran que los estudiantes no se apropian del concepto de función, la dificultad que tiene la propia noción y la dificultad de los estudiantes para comprenderla.

Desde una perspectiva epistemológica y pedagógica en Anna Sierpinska(1992) destaca que comprender un concepto significa ser capaz de contestarse las preguntas: ¿Qué dice la definición de función? y ¿De qué trata esa definición? ¿A qué hace referencia la definición de función? Pero además se debe poder identificar el concepto, ampliar el rango de aplicaciones del mismo, así como también poder decir cuando se está en presencia de una función y cuando no.

La autora nos propone, entre otras cosas, motivar a los estudiantes a buscar regularidades frente a los cambios, a propósito de los cambios poder decir cómo algo cambia así como también cómo cambia. Hacer aparecer primero las funciones como una herramienta para modelizar situaciones de la vida real, dando la oportunidad, también, de adquirir cierta flexibilidad en uso de los distintos modos de expresión y de representación de las función.

Luisa Ruiz Higuera (1998) hace un análisis desde un enfoque epistemológico y didáctico de la definición de función, la identificación de las funciones a partir de su representación gráfica y de su expresión algebraica, el empleo de la función en situaciones de modelización.

En el análisis de la definición de función dada por los estudiantes, Ruiz Higuera hace notar que la definición personal difiere de la definición formal; utilizan los términos aplicación o correspondencia omitiendo la existencia del conjunto dominio, conjunto imagen, unicidad de la imagen. Manifiestan, además una concepción de la noción de función como un proceso algorítmico de cálculo entre números y en la cual la presencia de incógnitas e indeterminadas es mucho más fuerte que la de la variable.

Los argumentos manejados por los alumnos para identificar una función son la concepción del gráfico como una especie de ideograma, que no tiene en cuenta sus propiedades de variabilidad y el

conocimiento que tienen de su expresión algebraica y su forma que evidencian una fuerte dependencia entre una función y su expresión analítica.

En las situaciones de modelización, los alumnos intentan determinar cómo varía algo ignorando qué es lo que varía en la situación, no logrando determinar las variables pertinentes de la situación y ni observar el cambio de modo global a través del gráfico. También, el hecho de que los alumnos no tienen en cuenta los conjuntos inicial y final evidencia la falta de significación y de relevancia dada a dicha tarea.

Ismenia Guzman(1990) en su investigación “El rol de los registros de representación en la apropiación de la noción de función” nos aclara que para que los alumnos se apropien del concepto de función hacen faltan dos condiciones. La primera tiene que ver con la distinción entre los elementos relativos a cada uno de los registros, que están relacionados con los aspectos conceptuales expresados por la relación de correspondencia. La segunda, los pasajes entre registros que confrontan dos representaciones del objeto función. Dejando en evidencia la naturaleza de cada registro y la independencia de los diversos registros.

En las conclusiones de la investigación, se constata que la enseñanza y el aprendizaje de la noción exigen que las distintas representaciones (gráfica, tabular, algebraica u otra) estén ligadas entre ellas. Es por esto que para apropiarse de dicho concepto se requiere el conocimiento y la utilización de los diferentes registros de representación, entre ellos: gráfico, algebraico, tabular, lenguaje verbal. Por lo tanto las actividades que ayudarán a franquear las dificultades son aquellas que corresponden a un trabajo interno de las representaciones, en sus registros respectivos y a la articulación entre los registros.

Tomando como marco estos tres enfoques anteriormente presentados es que nos proponemos presentar una propuesta de enseñanza sobre el concepto de función con el fin de favorecer la conceptualización y el aprendizaje de este concepto que enfatice el sentido y significado de modo que los alumnos de 1º Bachillerato en Uruguay logren darle un significado que les permita manejarlo y hacer las transferencias necesarias. Esta secuencia tiene por finalidad renovar una enseñanza. La secuencia de actividades tiene en cuenta desde el punto de vista matemático los conceptos de variable, imagen, preimagen, unicidad de la imagen, conjuntos de partida y llegada y desde el punto de vista cognitivo la estructura de las actividades considera los diferentes registros tabular, gráfico, algebraico, verbal en el tratamiento y la articulación de ellos. Finalmente, las actividades buscan que los alumnos pongan en juego las capacidades de identificar y argumentar lo que es y lo que no es una función, discriminar entre incógnita y variables, comparar, interpretar y aplicar modelos.

La definición desde la que partimos es la dada por Dirichlet (1805-1859) en 1837. Esta definición dice: *“Si una variable  $y$  está relacionada con la variable  $x$  de tal manera que siempre se atribuya un valor numérico a  $x$ , hay una regla según la cual queda determinado un valor único de  $y$ , entonces se dice que  $y$  es una función de la variable independiente  $x$ ”*.

Esta definición tiene la característica de presentar las nociones de variables, variable independiente, unicidad de la imagen, nociones fundamentales para la conceptualización del objeto función. Hacemos notar que no están presentes las nociones de conjunto de partida y de llegada ya que el concepto de “conjunto” estaba lejos de tener significado en la época de Dirichlet. Es por este motivo que complementando esta definición y desde un enfoque más moderno, también tomaremos como referente la

definición dada E. Lages Lima (“Curso de Análise.Vol 1”, 1999) esta dice: *Uma função  $f: A \rightarrow B$  consta de três partes: um conjunto  $A$ , chamado o domínio da função(ou o conjunto onde a função é definida) um conjunto  $B$ , chamado o contradomínio da função,ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento  $x \in A$ , um único elemento  $f(x) \in B$ , chamado o valor que a função assume em  $x$*

Esta definición, tiene la característica de destacar además de las nociones expresadas por Dirichlet, agrega dominio, condominio y explicita más la idea de “asociar”. También usa un lenguaje simbólico para presentar la función y las imágenes lo que resulta de mucha importancia para el trabajo con el

La secuencia está formada por 4 situaciones. En este trabajo presentamos esta situación, que cierra la secuencia, que consta de cuatro actividades presentadas cada una de ellas en un o más registros, estos son lenguaje natural, algebraico, gráfico, tabular e icónico.

En cada una de estas actividades se requiere de los alumnos que hagan un tratamiento al interior del registro así como también una conversión de un registro a otro. La noción de variación está en juego en tres de las cuatro actividades, ya que las nociones de imagen, preimagen dominio y conjunto de llegada fueron evolucionando en las situaciones anteriores. Todas ellas, además de otras que no están en objetivo de este trabajo, son las que forman el nicho ecológico donde vive la noción

**ACTIVIDAD 1** Esta actividad está presentada en el registro verbal y consta de tres ítems

*Un importador de reproductores MP3 de 1Gb sabe que si el precio de venta de cada unidad es de US\$ 130 no vende ninguno. Por cada baja US\$10 en el precio, las unidades que puede vender aumentan 30 unidades. El importador llegaría a un precio final de US\$ 90.*

1. *Muestra cómo varía el número de unidades vendidas cuando varía el precio. Escribe con tus palabras cómo es la variación del número de unidades vendidas en relación al precio*

La noción matemática en juego en esta actividad es la variación de la relación entre el precio y el número de unidades vendidas y luego escribir con sus palabras dicha variación Esta tarea es poco conocida por los alumnos de este nivel, lo que puede resultar una dificultad para ellos. La actividad requerida a los alumnos es una interpretación del enunciado para describir la variación del número de unidades en función del precio. La respuesta adecuada sería que por cada dólar de disminución se venderían 3 unidades más. Para llegar esta conclusión ellos deben visualizar que el enunciado ya les da la variación del precio y la del número de unidades vendidas y que para dar la variación de la situación debería hacer el cociente entre ambas variaciones. Otra posible acción de los alumnos es la elaboración de una tabla. Esta acción involucra una conversión del registro verbal al registro tabular, sin ser requerida, pero de todos modos algo bastante lógico ya que la tabla les permite visualizar más la variación. Se prevé escribirán la variación como una proporcionalidad inversa. Tal vez escriban que si se disminuye el precio, el número de unidades aumenta, no dando valor alguno.

2. *Escribe una expresión algebraica que represente la relación entre el precio y el número de unidades vendidas. Muestra los planteos que has hecho para llegar a la expresión. Identifica cuál es la variable independiente, la variable dependiente y en qué conjunto numérico varía cada una de ellas.*

Las nociones puestas en juego en este ítem son aquellas que el propio ítem pide identificar :las variables independiente y dependiente y los conjuntos de Partida y de llegada. La actividad requerida y explicitada es la de un pasaje del registro verbal al registro algebraico, pasaje éste que puede representar una dificultad. Las variables que se prevé utilizarán para la expresión serían  $x$  y  $f(x)$  y la expresión genérica  $f(x)= ax + b$ . La asignación de la variable independiente en este caso es arbitraria ya que se pide una expresión que represente la relación entre el precio y el número de unidades. Esto es que la  $x$  puede representar tanto el precio como el número de unidades. De todos modos suponemos que tomarán el precio como variable independiente y el número de unidades como variable dependiente por la manera en que esta presentada la actividad, pues el enunciado dice *si el precio de venta de cada unidad de US\$ 130 no vende ninguno*, el precio está dado en primer término.

Las posibles acciones de los alumnos para hallar la expresión algebraica pueden ser variadas .Una posible estrategia es apoyarse en la tabla de valores, si la hicieron y plantearse un sistema. En la identificación de las variables, una omisión posible es que digan cuales son pero no lo que representa cada una. En la identificación de los conjuntos numérico donde varía cada una de las variables podrían ser expresados como intervalos esto es el precio varía en el intervalo  $[90,130]$  y las unidades en el intervalo  $[0,120]$ , o bien que expresen que el precio varía en el conjunto  $\{90,100,110,120\}$  y las cantidades en  $\{0,30,60,90,120\}$  o bien una combinación de ambas ya que el precio podría variar en el intervalo  $[90,130]$  y las unidades en  $\{0,30,60,90,120\}$ . Lo importante a destacar en este punto, en el momento de la puesta en común, es la discusión de dichos conjuntos numéricos en el modelo que se está planteando .

3. *Con esta nueva actividad estarías en esta situación frente a una función. Explica por que. Identifica el conjunto dominio*

La noción de función es la puesta en juego en esta actividad. En la explicación de los alumnos, se espera, que ellos involucren las nociones de variables independiente y dependiente, unicidad de la imagen, relación o correspondencia. Para identificar el conjunto Dominio, dependerá de la variable independiente elegida y lo que surgió de la discusión en el ítem anterior con respecto a los conjuntos donde varían las variables. Las explicaciones dadas por los alumnos operarán como validación del conocimiento.

**ACTIVIDAD 2** Esta actividad está presentada en el registro algebraico y consta de dos ítems

1. *Halla los valores de "m" y "n" de modo de encontrar un polinomio de la forma  $A(x) = mx + n$ , con las siguientes condiciones:  $A(0) = 390$  y  $A(90) = 120$ . Muestra todos tus planteos*

El valor numérico de un polinomio es el contenido matemático en juego. El tratamiento dentro del registro algebraico es la actividad requerida en este ítem. Se espera que los alumnos hagan alguno de los siguientes planteos:

$$(1) \left. \begin{array}{l} A(0) = 390 \\ A(0) = m(0) + n \end{array} \right\} \Rightarrow 390 = m(0) + n \Rightarrow n = 390 \quad (2) \left. \begin{array}{l} A(90) = 120 \\ A(90) = m(90) + n \end{array} \right\} \Rightarrow 120 = m(90) + n$$

De (1) y (2) se deduce que  $n = 390$  y  $m = -3$  entonces  $A(x) = -3x + 390$

Segundo Planteo: saben que A (0) les permite hallar el valor de n sin hacer ningún planteo y luego trabajar con el m aplicando el cálculo de un coeficiente angular por ser una expresión de primer grado

Podría haber la posibilidad que se mezcle estrategias de los planteos anteriores

2. El polinomio que encontraste, ¿puede servirte para definir una función? En caso afirmativo, muestra la representación algebraica de ella e indica conjunto Dominio y conjunto de Llegada.

La noción de función es nuevamente la noción en juego en este ítem. La argumentación es la actividad cognitiva en juego, que será esta la que dejará ver el estado de comprensión de los alumnos.

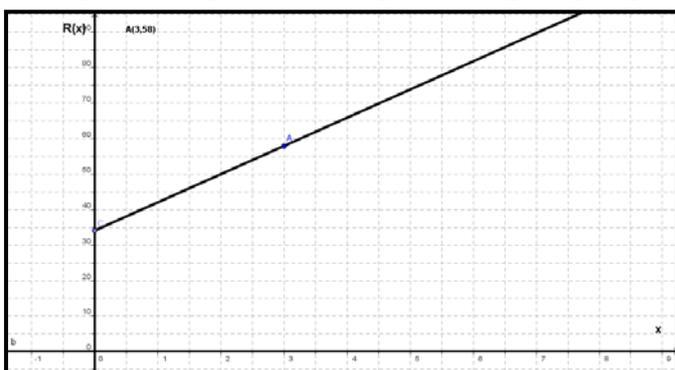
Se prevé que los alumnos contesten afirmativamente, diciendo que la expresión  $A(x) = -3x + 390$  o  $f(x) = -3x + 390$  sea la representación algebraica de la función.

Con respecto a los conjuntos Dominio y de Llegada se espera que expresen que son ambos el conjunto de los números reales. No se descarta la posibilidad que se apoyen en los conjuntos de la actividad 1. Nuevamente aquí, las discusiones e intercambio entre los alumnos, moderadas por el docente, puede resultar muy enriquecedoras ya que permitiría consolidar e institucionalizar en forma local las nociones de conjunto Dominio y de Llegada.

Compara las actividades 1 y 2, ¿qué puedes comentar? Redacta.

En este ítem se pretende que visualicen que hay dos funciones en las que las expresiones algebraicas que las representan son las mismas siendo los conjuntos Dominio y de Llegada distintos. Es importante destacar, que en la primera actividad se está dentro de una situación contextualizada en la que se destaca el uso de la función como modelo.

**ACTIVIDAD 3** Esta actividad tiene 4 ítem y los registros gráfico, verbal y tabular son los que presentan los distintos ítem. La gráfica adjunta representa la relación entre el peso (en Kg) de los documentos a enviar por una empresa de correo privado “Rápida” y el gasto (en dólares) de envío.



a) Halla la expresión algebraica que representa el gasto de envío de la empresa “Rápida”,  $R(x)$ , donde  $x$  es el peso en Kg. de los documentos. Describe cómo varía el gasto en

En este ítem hay que hacer una lectura y una interpretación del gráfico para poder hallar la expresión algebraica, por lo que se requiere de una conversión del registro gráfico al algebraico. Se espera que se identifique la expresión  $ax + b$  con la representación gráfica. Los pares de correspondientes entre el peso y el gasto son los recursos a usar para hallar la expresión. Esto serían (2,50) y las coordenadas del punto A(3,58) presente en el gráfico. Se pretende que quede escrita la expresión  $R(x) = 8x + 34$ . Las estrategias por poder hallarla pueden ser, las ya utilizadas en la actividad anterior, esto es plantear y

resolver un sistema de ecuaciones o bien recurriendo a cálculo de la pendiente. Puede suceder que intente identificar la imagen del 0, ya que es una técnica que está muy vinculada para hallar expresiones de este tipo. Con respecto a la variación, se pretende una estrategia sería apoyarse en la expresión analítica y utilizar la pendiente 8 para explicar que por cada kilogramo demás del envío el gasto aumenta en 8 dólares. Un posible error que se prevé es que utilicen un par de correspondientes y efectúen el cociente entre ellos.

b) En la misma gráfica anterior, representa la función que modela los gastos de envío de otra empresa de correo privado "Inmediata" que cobra los documentos que envía de acuerdo a su peso y cuyos datos se exhiben en la siguiente tabla (donde "x" representa el peso en Kg.):

<b>Peso en kg</b>	$0 < x \leq 0,5$	$0,5 < x \leq 1$	$1 < x \leq 1,5$	$1,5 < x \leq 2$	$2 < x \leq 2,5$	$2,5 < x \leq 3$	$3 < x \leq 3,5$	$3,5 < x \leq 4$
<b>Costo en US\$</b>	20	30	40	50	56	62	68	74

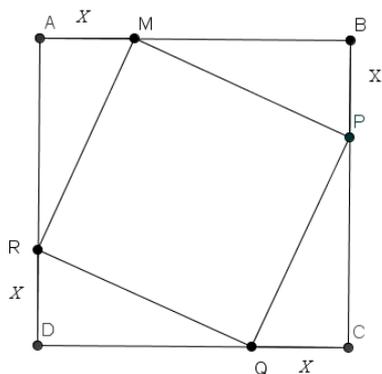
En este ítem, la tarea es realizar la representación gráfica de la función dada en su representación tabular. La tarea implica en primer lugar efectuar la lectura y la interpretación de la tabla para poder hacer la representación gráfica. La actividad requerida en la tarea es la conversión del registro tabular al registro gráfico. La dificultad que puede presentar esta tarea es la forma en que está presentada la tabla, ya que es una función escalonada y deben saber leer los intervalos y asignar las imágenes.

c) Suponiendo que en la tabla anterior están dados todos los datos de la empresa "Inmediata", ¿cuál es el conjunto dominio de la función que modela los gastos de la empresa Inmediata?

En este ítem, la tarea consiste en dar el dominio de la función que es la noción en juego de la tarea. La actividad requerida para llevar a cabo dicha tarea es la de conversión del registro tabular al registro numérico. Para ello, la lectura y la interpretación hechas en el ítem anterior resultan fundamentales. Se espera que la respuesta a este ítem sea dada en forma de intervalo, esto es (0,4)

#### ACTIVIDAD 4

Dado un cuadrado ABCD de lado 4 cm y un cuadrilátero MPQR inscrito en el cuadrado



1. Encuentra cómo varía el área del cuadrilátero MPQR a medida que varía "x", buscando dos formas distintas de mostrar dicha variación.
2. Indica qué valores puede tomar la "x".
3. Indica entre qué valores puede variar el área del cuadrilátero MPQR.
4. Busca una expresión matemática que represente dicha variación.
5. Puedes determinar en esta situación una función. De ser así explica por qué e indica las nociones que la definen.

Esta actividad , que cierra la secuencia, tiene la característica de tener todas las nociones que le dan vida a la noción de función: imagen, unicidad de la imagen, preimagen, dominio, conjunto de llegada, variación .Los estudiantes se verán exigidos a hacer conversión de registros, del icónico al tabular, o bien del icónico al algebraico , del algebraico al gráfico .También un tratamiento dentro de un mismo registro ya que las propias tareas planteadas , sin explicitarlo, de alguna manera lo requieren.

El final de la actividad así como toda la secuencia busca que los alumnos elaboren su propia definición de la noción de función de manera tal que estén presentes todas las nociones que le dan significado así como también den lugar a la noción en su status de objeto matemático.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. Boyer, C(1987).Historia de La Matemática .Madrid. Alianza Universidad Textos
2. Duval,R (1995). Semiosis et pensée humaine.Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Editions Scientifiques Européennes.Suisse
3. Guzman, I (1990), Le Rôle des representations dans l'appropriation de la noción de fonction. Tesis Doctoral. Strasbourg Publication.URMA
4. Lages Lima ,E.(1999),Curso de Análise.Vol 1,Río de Janeiro. IMPA
5. Ruiz Higuera,Luisa .(1994) .La Noción de función: análisis epistemológico y didáctico.Universidad de Jaen .Jaen Servicio De Publicaciones e Intercambio Científico.
6. Sierpiska,A .(1992). The concept of function:Aspects of epistemology and pedagogy. En E. Dubinsky y G. Harel.Mathematical Association of America Notes .Vol.25, pp. 25- 58.USA.