¿QUÉ TIENEN EN COMÚN LOS LOGARITMOS, FIBONACCI, LAS ELECCIONES NACIONALES, LOS ESTADOS DE CUENTAS Y UN SEÑOR LLAMADO BENFORD?

Gustavo Aguilar – Ramón Sellanes
gustavo@geogebra.org.uy – proferamon@adinet.com.uy
Instituto de profesores ‘Artigas’ –Montevideo Uruguay

Tema: Pensamiento probabilístico-estadístico
Modalidad: Taller
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Logaritmos, aplicaciones. Benford, sucesiones.

Resumen

Iniciando con la historia de los logaritmos, se intentará entender por qué eran tan útiles e importantes que algunos matemáticos dedicaron su vida entera a calcular una tabla de logaritmos. Se mostrará para qué se usaban, se calcularán a modo de ejemplo algunas multiplicaciones y potencias utilizando una tabla de logaritmos.

Unido a los logaritmos se hablará de cómo surge una ley muy extraña, que choca con la intuición: la “ley de Benford”. Se enunciará dicha ley, se expondrá una parte teórica y ejemplos en casos y aplicaciones de la ley de Benford en las matemáticas y la vida cotidiana. Como ejemplo se verificará que hay sucesiones numéricas que cumplen dicha ley. Además se mostrarán variadas aplicaciones de esta ley como ser: controlar estados de cuentas y resultados de elecciones nacionales.

Una breve introducción histórica

El descubrimiento de los logaritmos, está asociado a la necesidad de facilitar los cálculos trigonométricos de fundamental importancia para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto.

Los logaritmos fueron inventados con el propósito de facilitar las cuentas, así para realizar una multiplicación o división de dos números con la ayuda del logaritmo pasamos a sumar o restar otros números, y sabido es, que es más fácil sumar o restar que multiplicar o dividir.

Los orígenes del descubrimiento o invención de los logaritmos se remontan hasta Arquímedes en la comparación de las sucesiones aritméticas con las geométricas. Para comprender mejor esto hagamos la siguiente tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

A los números de la primer sucesión, que es aritmética, los llamamos *logaritmos*; a los de la segunda sucesión, que es Geométrica, los llamamos *antilogaritmos.*

La regla de Arquímedes, según expresa Hoeben, dice que "*para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado*".

Esta comparación de dos sucesiones vuelve a aparecer en el siglo XVI, en los trabajos del matemático alemán Miguel Stifel. La tabla dada por él contiene los enteros desde –3 hasta 6, y las correspondientes potencias de 2.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	¼	½	1	2	4	8	16	32	64

A los números de la sucesión superior los denominamos *exponentes.*

Pero para ser realmente aplicables los logaritmos al cálculo numérico, le faltaba a Stifel todavía un medio auxiliar importante, las fracciones decimales; y solo cuando se popularizaron éstas, después del año 1600, surgió la posibilidad de construir verdaderas tablas logarítmicas.

En una parte de su libro Stifel hace la siguiente observación: "*Se podría escribir todo un libro nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mí mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados*". Mas adelante agrega: "*La adición es la sucesión aritmética correspondiente a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquella corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada*".

Por ejemplo si se tuviera que multiplicar 2 por 16, solo tendría que sumar los números de la sucesión aritmética que se halla encima de éstos, es decir 1 y 4, obteniéndose 5. Debajo de éste encontramos el número 32 de la sucesión geométrica, que es el resultado de la multiplicación. Para efectuar una división se realiza una sustracción. Así 256 dividido 32, se hace 8-5=3, debajo del cual se ve el número 8, que es el resultado de la división. La potenciación llamada por Stifel "*multiplicación por sí mismo*", se efectúa por la suma "*consigo mismo*" del correspondiente número aritmético. Es decir, para 4^3 se suma tres veces el número 2, que es el correspondiente en la sucesión aritmética del número 4. O sea 2+2+2=6 debajo del cual encontramos el 64, lo que significa que este número es el cubo de 4. La radicación se obtiene mediante la división. Así la raíz cúbica de 64, se obtiene dividiendo el número 6, que es el correspondiente número aritmético de 64, por 3. Es decir 6/3=2, debajo del cual encontramos el 4.

Además de Stifel, otros matemáticos también abordaron el tema; durante la última parte del sigo XVI, Dinamarca llegó a ser un importante centro de estudios sobre problemas relacionados con la navegación. Dos matemáticos daneses, Wittich y Clavius, mediante la fórmula descubierta por Vieta: $sen\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{senx+seny}{2}$ y el uso de tablas trigonométricas para abreviar los cálculos, convirtieron un producto en una suma.

Este recurso de cálculo sirvió probablemente de inspiración al escocés John Napier, cuyo nombre latinizado es Neper, en la deducción de un método más sencillo. Formó una serie geométrica con una razón muy próxima a 1. Es decir en lugar de potencias de 2 como usaba Stifel, utilizó como razón $1\text{-}10^{-7}$. El espacio entre potencias sucesivas de dicho número es muy pequeño. Por ser un número menor que 1 su serie geométrica va hacia atrás desde un número grande a otros cada vez más pequeños. De hecho él empieza con 10^7 y luego lo multiplica por potencias sucesivas de $1\text{-}10^{-7}$. Si escribimos Naplog x para el logaritmo neperiano de x, éste tiene la curiosa propiedad de que

$$Nap\log 10^7 = 0$$
$$Nap\log 10^7(1-10^{-7}) = 1$$

Así sucesivamente. El logaritmo neperiano satisface la ecuación:

$$Nap\log(10^7 xy) = Nap\log(x) + Nap\log(y)$$

Esto puede utilizarse para agilizar los cálculos, porque es fácil multiplicar o dividir por una potencia de 10, pero no es elegante. No obstante, es mucho mejor que la fórmula trigonométrica de Vieta.

La siguiente mejora llegó de la mano de Henry Briggs, éste reemplaza el concepto de Napier por una más simple: el logaritmo de base 10. $y = \log_{10} x$, que satisface la condición $x = 10^y$. Ahora

$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$

Si queremos hacer una multiplicación que involucre números con varios dígitos por ejemplo $153{,}7822 \times 433{,}5$, primero buscamos los logaritmos en una tabla de dichos números y los sumamos, luego haciendo el antilogaritmo obtenemos el producto deseado, salvo por una imprecisión en la última cifra.

$$\left.\begin{array}{l}\log_{10} 153{,}7822 = 2{,}18690607 \\ \log_{10} 433{,}5 = 2{,}636989102\end{array}\right\} \xrightarrow{+} 4{,}823895172 \overset{Anti\log}{\Rightarrow} 66664{,}58376$$

Este algoritmo, si uno adquiere práctica en el uso de las tablas de logaritmos es más fácil que hacer las multiplicaciones.

Los logaritmos hicieron posible que los matemáticos hicieran cálculos de forma rápida y exacta. Veinte años de esfuerzo, por parte de un matemático, en un libro de tablas ahorraron decenas de miles hombres-años de trabajo posterior. Los beneficios de una idea tan simple han sido incalculables.

El propósito al mencionarlos, más allá del reconocimiento merecido, es para comprender el extendido uso de las tablas de logaritmos para todos los cálculos, y comprender el descubrimiento de una ley empírica a la cual nos referimos en el siguiente párrafo.

Ley de Newcomb-Benford

En 1881 el astrónomo y matemático inglés Simon Newcomb observó que las primeras páginas de las tablas de logaritmos que se encontraban en la biblioteca universitaria estaban más gastadas que las últimas. Como estas páginas están relacionadas con los números cuyos primeros dígitos son pequeños (1,2,...etc.), concluyó correctamente que la frecuencia con que aparecían los diferentes dígitos era distinta y enunció verbalmente una relación o ley logarítmica: *"la ley de probabilidad de ocurrencia de números es tal que las mantisas de sus logaritmos son equiprobables"*.

El asunto fue rápidamente olvidado hasta 1938, cuando Frank Benford, un físico de la compañía General Electric, se dio cuenta del mismo patrón en el desgaste de las hojas de las tablas de logaritmos, y estudió 20.229 números provenientes de 20 muestras de todo tipo: constantes físicas, pesos atómicos de los elementos químicos, longitudes de ríos, estadísticas de béisbol, direcciones de personas, incluso cifras sacadas de portadas de revistas. A partir de estos datos extraídos del mundo real, comprobó que la probabilidad de que un número en una serie de datos comience por el dígito *d* es:

$$P(D_1 = d) = \log_{10}(1 + d^{-1})$$

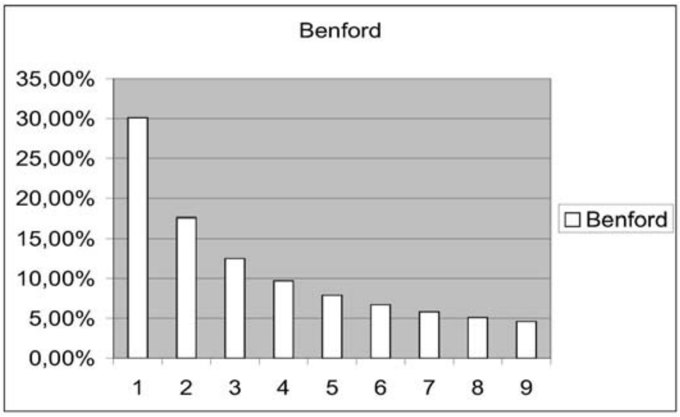
Donde D_1 representa la variable aleatoria "*primer dígito*" y d es un dígito cualquiera entre 1 y 9.

Lo anterior es una distribución de frecuencia ya que

$$\sum_{d=1}^{d=9} \log_{10}(1 + d^{-1}) = \log_{10} \prod_{d=1}^{d=9} \left(\tfrac{d+1}{d}\right) = \log_{10} 10 = 1$$

En porcentajes las frecuencias son:

D1	Benford
1	30.1%
2	17.6%
3	12.5%
4	9.7%
5	7.9%
6	6.7%
7	5.8%
8	5.1%
9	4.6%



La ley se sigue cumpliendo si cambiamos las unidades de medida, es decir es invariante frente a multiplicaciones por constantes no nulas, por ejemplo el largo de los ríos lo podemos pasar de kilómetros a pulgadas y la ley se sigue cumpliendo, la superficie de los países de kilómetros cuadrados a millas cuadradas, o yardas cuadradas y seguirá cumpliendo la ley.

Una manera de interesante de convencerse del cumplimiento de dicha ley es la siguiente: supongamos que la distribución del primer dígito sea uniforme, es decir que todos los dígitos aparecerán en la misma cantidad. Y como debe ser invariante frente a multiplicaciones entonces cuando multipliquemos por 2 por ejemplo, todos los números que empezaban con 1 ahora comenzarán con 2 o 3. Pero para todos los que empezaban con 5,6,7,8, y 9, al multiplicar por 2, empezarán todos con 1, esto sugiere que si la distribución de los dígitos era uniforme, entonces después de multiplicar por 2 deja de ser uniforme. El patrón que debe mantenerse es uno que tenga mayor frecuencia inicial el 1, seguido del 2 y así sucesivamente.

La ley de Benford se generaliza para los dígitos siguientes, segundo, tercero, etc. De la siguiente manera, para el segundo dígito:

$$P(D_2 = d) = \sum_{k=0}^{k=9} \log_{10}(1 + \frac{1}{10k + d})$$

No importa tanto la expresión, sino lo que importa observar son los valores que muestran en la siguiente tabla

d	$P(D_1 = d)\,\%$	$P(d_2 = d)\,\%$	$P(D_3 = d)\,\%$	$P(D_4 = d)\,\%$
0		12	10.18	10.02
1	30.1	11.4	10.14	10.01
2	17.6	10.9	10.1	10.01
3	12.5	10.4	10.05	10.01
4	9.7	10	10.02	10
5	7.9	9.7	9.98	10
6	6.7	9.3	9.94	9.99
7	5.8	9	9.9	9.99
8	5.1	8.8	9.86	9.99
9	4.6	8.5	9.83	9.98

Como se puede ver en los dígitos tercero o cuarto la distribución es aproximadamente la uniforme.

Aplicaciones

Esta ley solo pasaría a ser un interesante resultado anecdótico si no tuviera alguna aplicación. El Contador y Matemático Mark Nigrini, quien actualmente trabaja en

Dallas, hizo la primera aplicación práctica de la ley de Benford. La idea que usó es que, si alguien está tratando de falsificar datos, inexorablemente tendrá que inventar algunos números. Cuando lo haga, según afirman algunos estudios psicológicos, la tendencia es a que la gente, usará con más frecuencia los números que empiezan con 5, 6 o 7, y no tanto los que empiezan con 1 o 2. Esto es suficiente para violar la ley de Benford y por tanto quedar en evidencia, lo que podría ser usado, por los gobiernos para decidir hacer una auditoria de esos números. Aunque la ley no es infalible, servirá para determinar los posibles sospechosos. Como comentario anecdótico los primeros que usaron los experimentos de Nigrini, aprovecharon para poner a prueba la declaración de impuestos de Bill Clinton. Y se concluyó que, si bien había más redondeos que los esperados, no parecía habar ningún fraude al fisco.

La percepción de la credibilidad de los estados financieros de la información de inversiones de los mercados se encuentra en estos últimos años en su punto más bajo, debido a los estados financieros de hace unos años de las empresas como Enron, WorldCom, Tyco, Global Crossing. Esto aumenta la responsabilidad de los auditores para elaborar de forma más eficaz y eficiente los procedimientos de auditoría para la detención de fraude. Esto ha favorecido el uso sofisticado de herramientas estadísticas, como el análisis digital usando la ley de Benford, que se ha visto facilitado a su vez por el aumento de técnicas de auditora asistida por ordenador.

Otra aplicación reciente de la ley de Benford ha sido el análisis de las elecciones electorales que se ha llevado a cabo en distintos países.

Referencias bibliográficas

- Paenza, A.(2007). *Matemática….¿Estás ahí? Episodio 3.* SigloXXI Editores Argentina S.A.
- Miller Steven & Takloo Ramin (2006). *An Invitation to Modern Number Theory* Princeton University Press.