HACIENDO MATEMÁTICA: APRENDER PROBABILIDADES JUGANDO TORNEOS CON DADOS A PIEDRA, PAPEL O TIJERA.

Pezzatti, Laura - Blanc, Pablo - Tornay, Martín - Vacas Vignolo, Martín - Ramos, Ricardo - Demartino, Francisco
laurapezzatti@gmail.com - pablobce@gmail.com - pocacapo@gmail.com - martinvacasvignolo@gmail.com - ricardoramos85@hotmail.com - demartino.francisco@gmail.com
Universidad de Buenos Aires, Argentina

Tema: I.5 - Pensamiento relacionado con la Probabilidad.
Modalidad: T
Nivel educativo: Nivel Medio
Palabras clave: Juego – Exploración – Estrategia – Debate

Resumen

Consideramos que el aprendizaje de la matemática debe ser a través del camino de la exploración, la formulación de preguntas y la discusión de soluciones. Para esto proponemos trabajar con la metodología que se denomina fenómeno-concepto-terminología, Gellon et al(2005).
Primero observamos y nos familiarizamos con el fenómeno, luego al entender como funciona adquirimos el concepto y finalmente le ponemos nombre. En esta línea será la actividad que proponemos para este taller como un ejemplo de cómo llevar efectivamente esta metodología al aula.
La idea es proponer el siguiente juego: los alumnos jugarán torneos de "piedra, papel o tijera" con dados. Ellos se armarán sus propios dados eligiendo el poliedro que más les guste y qué tendrá en cada cara. En esta actividad se espera que surjan naturalmente conceptos relacionados con el cálculo de probabilidades, con la independencia de los sucesos, de probabilidades conjuntas, de probabilidades condicionales, esperanzas.
Se espera que la propuesta tenga tres etapas: la primera en la cuál los docentes tendrán el rol de alumnos en la actividad propuesta, la segunda en la cuál se debatirán posibles escenarios de la misma y la tercera en la cuál se hará una reflexión acerca de la propuesta didáctica en general.

Toda propuesta didáctica lleva consigo la visión que tenemos de lo que pretendemos enseñar. De este modo nuestra visión sobre "¿Qué entendemos por matemática?" impactará sobre qué temas elegimos enseñar, cómo los introducimos, qué actividades les planteamos a nuestros alumnos y en qué rol nos ponemos (y ponemos a nuestros alumnos) en nuestras clases.

Furman et al (2011) proponen ver a las Ciencias Naturales como una moneda. Nosotros creemos que esta visión se aplica perfectamente a nuestra mirada de la matemática. Veamos entonces a la matemática como una moneda con sus dos caras. La primer cara de la moneda la identificamos con el conjunto de conocimientos que a lo largo de toda la historia diferentes científicos han ido elaborando. Por ejemplo: los conceptos de función, probabilidad, límite y la teoría que se conoce al respecto. Es decir, esta primera cara de la moneda, se refiere a ver a la matemática como producto. La segunda cara de la moneda tiene que ver con un conjunto de competencias o habilidades que son necesarias para hacer matemática, es decir, se relaciona con el proceso a través del cual se genera este producto. Por ejemplo: la exploración, la búsqueda de regularidades, la formulación de preguntas, la argumentación, el debate de ideas. ¿Por qué eligen esta analogía los autores? "En primer lugar, porque tiene dos caras. Pero también porque dichas caras son inseparables. No existe una sin la otra". Es decir que no podemos pensar la enseñanza de la matemática como alguna de estas dos caras por separado, sino que tanto los temas que elegimos abordar, como su introducción y las actividades que proponemos a nuestros alumnos, como así también cómo las llevamos adelante en nuestras clases y qué intervenciones hacemos, no pueden escapar de en todo momento pensar en que estas dos caras estén presentes. En el caso de la matemática, podemos agregar a la metáfora una tercera cara. Una que se puede separar pero que no se debe olvidar y es la de la aplicación a otras áreas del conocimiento. Esta es muy importante para la matemática, para su historia y su desarrollo y en nuestro caso puede ser una gran herramienta para motivar a los alumnos.

En la mayoría de los colegios hoy en día, sobre todo a nivel secundario, está más presente la visión de la matemática como producto. Vendemos a nuestros alumnos un producto totalmente acabado donde el aprendizaje apunta mayormente a memorizar algoritmos y repetirlos, donde el rol del alumno es pasivo y el docente es el que posee el conocimiento y lo transmite directamente a sus alumnos (método transmisivo). Más aún, en general se introducen muchos términos generándole al alumno la sensación de que el conocimiento es "aprender nombres" o "repetir fórmulas". Freire (1970) define este tipo de educación como la educación bancaria, en donde los docentes depositan los conocimientos en los alumnos, como si depositaran un cheque en el banco. Esto se da dentro de un contexto de educación vertical, donde el educador es quien enseña y el educando es quien aprende.

Si bien el método transmisivo pudo tener sus frutos en décadas anteriores cuando la información era algo realmente privilegiado o cuando aún no teníamos máquinas de cálculos tan potentes como lo son las actuales computadoras, hoy en día contamos tanto con información (y en gran cantidad) a sólo un click, calculadoras y computadoras que nos permiten hacer cuentas largas y complicadas en sólo segundos, entonces ¿tiene sentido hoy en día focalizar nuestra enseñanza de la matemática como producto?

D.Perkins (2012) hace referencia a que en la actualidad educamos a nuestros jóvenes para un mundo desconocido con lo cuál debemos preguntarnos "¿Qué vale la pena aprender valioso para la vida a la luz de lo desconocido?" El autor propone un aprendizaje hacia lo que llama "amateurismo experto" haciendo hincapié en las grandes compresiones y no en comprensiones especializadas.

En el último siglo muchos autores se han dado cuenta de esta limitación del método de transmisión tradicional y han ofrecido múltiples propuestas didácticas como ofertas alternativas al método de transmisión tradicional. Sin embargo, a pesar de la extensa bibliografía al respecto, notamos que hay una dificultad a la hora de llevar estos nuevos métodos teóricos a la práctica de nuestras clases, en donde aún se ve muy arraigado el método de transmisión tradicional, sobretodo en años superiores.

Es por esto que en este trabajo queremos introducir apenas un tip que puede ser muy útil a la hora de pensar nuestras clases, y el sólo hecho de tenerlo en cuenta puede aportar un cambio significativo para nuestros alumnos y una enseñanza/aprendizaje de la matemática más cercana a la visión de la misma como producto y como proceso.

Este tip lo describen en su libro Gellon et al (2005) como "fenómeno-concepto-terminología". De esta manera, en primer lugar observamos y nos familiarizamos con el fenómeno, luego entendemos cómo funciona adquiriendo el concepto y finalmente le ponemos nombre (terminología).

La actividad que proponemos para familiarizarnos con este tip es una actividad introductoria para una posible primera clase de probabilidades.

Descripción de la actividad durante el transcurso del taller (2 horas)

I) Presentación (5 minutos)

II) <u>Primera Parte</u>*: Los docentes en el rol de alumnos*

Descripción del juego: consiste en jugar un torneo de piedra, papel y tijera con dados (que eventualmente podrían ser cualquier poliedro). Para eso cada grupo podrá elegir entre diferentes dados o crearse su propio dado dependiendo del nivel en el que se encuentre en el torneo.

Cada cara del dado tiene uno de los elementos: piedra, papel o tijera. Al igual que en el juego "piedra, papel o tijera", la piedra le gana a la tijera, la tijera le gana al papel y el papel le gana a la piedra. Cada vez que dos dados se enfrenten, el ganador será obtenido por la regla anterior. Podría haber empate en cuyo caso se vuelven a tirar los dados.

Una vez que se les cuente esto a los “alumnos” se les repartirán dados y etiquetas con los diferentes elementos para que puedan construir sus dados y empezar a hacer conjeturas. La pregunta inicial sería *"¿cuál será el mejor dado para enfrentar a 5 tijeras y 1 piedra?"*

En todo momento para poder hacer y/o probar conjeturas y sacar conclusiones los “alumnos” podrán utilizar todas las herramientas de las que dispongan: calculadoras, computadoras, planillas de excel, etc., además de los dados.

Después de unos 5 o 10 minutos para que cada uno individualmente se familiarice con el juego, se formarán grupos de 3 o 4 personas para empezar a jugar el torneo de dados.

Los niveles que se han seleccionado para esta ocasión son los siguientes:

(R=piedra, S=tijera, P=papel)

<table>
<tr><th></th><th>Nivel 1</th><th>Nivel 2</th><th>Nivel 3</th><th>Nivel 4</th><th>Nivel 5</th></tr>
<tr><td>A enfrentar:</td><td>5 R - 1 S</td><td>4 S - 2 R</td><td>3P – 2R - 1S</td><td>2R-2S-2P</td><td>3P-2S-1R</td></tr>
<tr><td>Opciones:</td><td>5P-1S \ 5P-1R</td><td>5R-1S \ 4R-2P</td><td>6P \ 6S \3S-2P-1R</td><td colspan="2">Mismo dado para los dos niveles, a elección, antes del nivel 4.</td></tr>
</table>

Ganador: entre todos los equipos que lleguen al nivel 5 el gran ganador del torneo será el equipo que logre ganarle con su dado a la mayor cantidad de equipos restantes.

Una vez que todos sepan en qué consiste el torneo que tienen que jugar tendrán un tiempo para explorar e ir eligiendo qué decisión tomarán en cada nivel.

En este momento podría surgir la pregunta de “¿cuántos tiros haremos para decretar al ganador?”, es decir si se jugará al mejor de 1, 3, 10 o 100 tiros. De surgir esta pregunta por parte de varios grupos será conveniente dejarla abierta unos minutos para que ellos mismos a través del análisis y el debate se pongan de acuerdo, siempre guiados por “los docentes”, en un n conveniente para el torneo.

Además, de acuerdo a las diferentes elecciones que tendrán que hacer en cada nivel, irá surgiendo la necesidad de medir de algún modo la performance de los diferentes dados en cada ocasión.

Puesta en común del juego (15 minutos)

Para que la actividad se transforme más fuertemente en una actividad formativa es muy importante guiar una puesta en común en donde salgan a la luz las ideas y conceptos matemáticos que queremos transmitir.

En esta etapa lo primero es atender las preguntas que puedan haber surgido de los diferentes grupos y debatir sobre las diferentes estrategias que tuvo cada grupo en los diferentes niveles. Se espera que surjan ideas relacionadas con la cantidad de tiradas más conveniente para que salga el ganador (ley de los grandes números), la necesidad de medir que tantas chances tiene un dado de ganar o perder frente a otro (probabilidades puntuales) y la necesidad de reunir conjuntamente esta información.

Otra pregunta que puede haber surgido anterior al torneo o en este momento es la del puntaje, ¿es un gano o pierdo y si se empata se tira de nuevo o puntuamos con 0, 1 y 2 a perder, empatar y ganar? Al debatir sobre cómo cambia el juego al cambiar esta regla, surgen nuevas necesidades para medir la performance de los dados y aparece el concepto de esperanza.

Podría también surgir la idea de dados equivalentes. En este sentido puede generar un buen debate estudiar si los dados "3 piedras, 2 papel y 1 tijera" y "3 papel, 2 piedras y 1 tijera" son o no equivalentes.

Si bien esta parte es fundamental a la hora del aprendizaje de nuestros alumnos, en este taller se hará más corta pues se supone que los docentes cuentan con el conocimiento matemático correspondiente y sólo se utilizará para mostrar la puesta en escena del debate.

III) Segunda parte: Volvemos al rol de docentes (15 minutos)

En esta parte la idea es analizar qué ventajas y desventajas nos brinda una actividad de este estilo. Se espera que en esta parte salgan ideas como las planteadas anteriormente. También se espera que se pueda debatir sobre dos cuestiones no casuales de este trabajo: la elección del tema "probabilidades" y el formato lúdico.

Dinello et al (2006) define las actividades lúdicas como una rama de la didáctica que tiene como propósito generar expectativas, interés y motivación hacia el aprendizaje, el contenido del aprendizaje y las formas del aprendizaje. En este sentido, podemos decir que una actividad lúdica como la que presentamos, además de abordar temas teóricos, genera en el alumnado una motivación extra ya que, como afirma Szczurek et al (2000), permite simular situaciones reales en las que los alumnos puedan ver de forma concreta la necesidad de manejar ciertos conceptos matemáticos que les serán de gran utilidad a la hora de enfrentarse a diversas situaciones.

Sin embargo creemos que proponer sólo una actividad lúdica no es suficiente. Un alumno puede jugar sólo por diversión sin nunca llegar a ver (o si quiera estar interesado en ver) ideas de fondo presentes en el juego. Es por esto que en paralelo con la actividad lúdica propuesta se necesita de un esquema didáctico que permita a los alumnos poder pasar de estar jugando a estar aprendiendo matemática. Es aquí donde se incorpora el rol fundamental del docente en esta actividad, para poder generar en los alumnos las inquietudes necesarias para abordar el fenómeno que se quiere estudiar y guiar las ideas de los alumnos hacia una posible respuesta.

Lo otro que queremos destacar es la elección de abordar el tema de probabilidades. En la mayoría de los cursos, ya sea por el orden de los temas establecidos en la currícula o por falta de tiempo, la enseñanza de la Probabilidad suele quedar relegada. Sin embargo, el uso que de ella hacen otras materias y su presencia en múltiples ámbitos de la vida cotidiana en la sociedad actual es relevante. La constante aparición de nociones probabilísticas y estadísticas en los medios de comunicación (por ejemplo, el pronóstico meteorológico) es una clara evidencia del desarrollo de esta rama de las matemáticas y sus interconexiones con otras ramas del conocimiento.

La probabilidad brinda la estimulante posibilidad de que el alumno comience a familiarizarse con la idea del modelado matemático de situaciones reales. Permite trabajar con situaciones cotidianas desde muy temprano en la escuela, dando la posibilidad quitarle a la matemática el karma de ser una ciencia determinista y proponiendo usarla para manejar situaciones inciertas, en procesos complejos de toma de decisión.

Además la teoría de la probabilidad no brinda las “recetas” para construir modelos. La validez del modelo construido estará dada por el grado en que los resultados que éste predice se ajusten a los resultados que el fenómeno real produce.

Disponer de herramientas que permitan al individuo comprender y manejar la incertidumbre, para disminuir el riesgo de tomar decisiones equivocadas, es una necesidad que tendría que ser satisfecha por un programa educativo, sería sin dudas, según las palabras de Perkins “un conocimiento valioso”.

IV) Tercera parte: Charlamos sobre “el tip”... fenómeno-concepto-terminología o “la importancia del orden” (15 minutos)

Convencidos de la importancia de enseñar la matemática como proceso que nos brinda la posibilidad de que nuestros alumnos desarrollen diferentes capacidades cognitivas relacionadas con el quehacer matemático y que, más aún, pueden servirles en otros contextos de la vida en esta parte haremos hincapié en que no es necesario proponer todas las clases una actividad como la que acá presentamos, sino que solamente con una vuelta de tuerca, o más bien una vuelta de orden en las actividades que proponemos o en las clases expositivas, es un gran cambio y aporta al hecho de aprender/enseñar matemática con una visión de la misma como producto y como proceso.

Cerraremos este taller con uno o dos ejemplos concretos de cómo utilizar el “tip del orden” o “fenómeno-concepto-terminología” con una actividad cualquiera de un libro.

Este ejemplo es ofrecido en su charla Ted “Las clases de matemática necesitan un cambio de imagen” por Dan Meyer.

Problema textual del libro:

Un tanque de agua tiene forma de prisma con base un octógono regular. El lado del octógono es de 11,9cm y la altura del prisma es de 36cm.

a) ¿Cuál es la superficie de la base del prisma?

b) ¿Cuál es el volumen del tanque de agua?

c) Si echamos agua en el tanque a una velocidad de 1.8oz/seg ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse?

Problema con vuelta de tuerca:

O mejor aún mostrar el video de un tanque de agua llenándose lentamente... y entonces los alumnos mismos se preguntaran “ufff ¿cuánto tarda esto en llenarse?”.

De este modo los alumnos empezarán a debatir sobre qué cosas son importantes para responder esta pregunta. “¿Tendrá que ver el tamaño?” “¿Qué cosas necesito para comparar los tamaños?” “¿Qué medidas tengo que tomar?”

Así en el del problema textual del libro las preguntas y datos que nos brinda hace que se transforme en un mero ejercicio de reemplazo de datos en una fórmula adecuada, con lo cuál el único requisito es tener a mano el producto “volumen de un prisma con octógono de base”.

En el problema reformulado, sin embargo se hacen presentes también habilidades como la exploración, la formulación de preguntas, el debate de ideas. Además las preguntas surgen por una necesidad de estudiar un cierto fenómeno.

Lo único que hemos hecho para permitir esta transformación es dar vuelta el orden, primero ponemos la pregunta abierta que queremos resolver, después la necesidad de responderla hará que surjan preguntas intermedias y/o que nos lleva a considerar que datos necesitamos tener.

Citando a Albert Einstein “Procuro no cargar mi memoria con datos que puedo encontrar en cualquier manual, ya que el gran valor de la educación superior no consiste en atiborrarse de datos, sino en preparar el cerebro para pensar por su propia cuenta y así llegar a conocer algo que no figure en libros".

Referencias bibliográficas

Calero Pérez, M. (2003). Educar Jugando. Ediciones Alfaomega. México. pp 23

Deslauriers L, Schelew E, & Wieman C (2011) Improved Learning in a Large-Enrollment Physics Class. Science 332.

Dinello, R. (2006). La actividad lúdica y ludopatías actuales. Revista Internacional del Magisterio. Editorial Magisterio. España. Pp 8

Furman M, Podestá M.E. (2009) La aventura de enseñar Ciencias Naturales. Aique. Buenos Aires.

Freire, P. (1970). Pedagogía del oprimido. México: Siglo veintiuno editores, SA.

Gellon G, Rosenvasser E, Furman M, Golombek D (2005) La ciencia en el aula. Paidós. Buenos Aires.

Medina, A. (2006) La didáctica: Disciplina pedagógica aplicada. Editorial Prentice Hall. Madrid.

Meyer, D (2010) Maths class need a makeover. http://www.ted.com/

Perkins D (1995) La escuela inteligente. Gedisa, Barcelona.

Schoenfield A (1992) . Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A.Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334–370). Macmillan, New York.

Szczurek citado por Iztúriz y otros (2000). Juegos instruccionales sobre la temática de amenazas naturales y riegos socio-naturales”. UPEL-El Paraíso. Caracas. 1021. pp 3.