DIFICULTADES ALREDEDOR DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDEA DEL INFINITO: UNA EXPERIENCIA DE CLASE

Cecilia Crespo Crespo, Liliana Homilka, Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" –Buenos Aires – Argentina
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología de Avanzada – México D. F. – México
crccrespo@gmail.com, lhomilka@gmail.com, patricialeston@gmail.com
Nivel medio
Palabras claves: infinito, construcción del conocimiento, discontinuidades, asíntotas

Resumen

Este trabajo presenta los resultados de una experiencia llevada a cabo con alumnos de escuela media que muestra la existencia de ideas construidas fuera de escenarios escolares y que llegan al aula de matemática, obstaculizando la construcción de conocimientos matemáticos. La reflexión se realiza desde el enfoque socioepistemológico, ya que este marco teórico considera a la problemática de estudio de la matemática educativa como el análisis de los fenómenos que ocurren cuando el saber matemático que se construye socialmente fuera de la escuela entra en el sistema de enseñanza.
Se describe una situación de clase en donde se presentaron a un grupo de estudiantes funciones racionales solicitándoles sus caracterizaciones. Surgieron discusiones entre las alumnas, que compartían por un lado, un bagaje común de conocimientos adquiridos a lo largo de la escolaridad, y por otro, códigos comunes, por su edad, su nivel económico y social, una cultura compartida.
De la lectura de los diálogos se observa que el infinito dificulta el consenso: se mezcla el deber con el pensar, el comprender con el aceptar, el cumplir con el discutir. El infinito los coloca en una situación donde ninguno tiene razón (o al menos no sabe si la tiene) por lo cual el consenso llega de la mano de la necesidad de aprobar una materia. Las ideas que se generan como resultado de esos diálogos tienen sólo un fin utilitario, pero no modifican lo que se sabe, lo que se cree, lo que se entiende.

Introducción

Este trabajo presenta los resultados de una experiencia llevada a cabo con alumnos de escuela media que muestra la existencia de ideas construidas fuera de escenarios escolares y que llegan al aula de matemática, obstaculizando la construcción de conocimientos matemáticos. Se describe una situación de clase en donde se presentaron a un grupo de estudiantes funciones racionales solicitándoles sus caracterizaciones. A partir de ella, surgieron discusiones e intercambios de ideas entre las alumnas, que comparten por un lado, un bagaje común de conocimientos adquiridos a lo largo de la escolaridad, y por otro, códigos comunes, por su edad, su nivel económico y social, una cultura compartida.

De acuerdo a la naturaleza de las ideas asociadas al infinito, puede entenderse que la idea intuitiva de infinito es anterior al infinito matemático (Lestón, 2008). La primera se obtiene fuera del sistema escolar, lejos de la institución y por lo general, sin intencionalidad explícita de transmisión de ideas matemáticas. Las relaciones de intercambio que se dan en la vida cotidiana no siempre tienen intención de enseñanza como se entiende en el sistema escolar ni son siempre controladas, de manera que un niño puede llegar a desarrollar una serie de ideas de las cuales no hay constancia hasta que no sean evocadas en una situación (didáctica o no) desarrollada a tal fin o hasta que surjan naturalmente provocando un "error" en la clase. La segunda, la idea matemática del infinito, se presenta en la escuela, en un escenario escolar generado con el fin de transmisión de conocimientos. Algunos docentes, intencionalmente, presentan a los alumnos situaciones que provoquen la necesidad de discusión de este concepto y lo formalizan a fin de darle el "status" de conocimiento científico.

Marco teórico

La reflexión que presentamos en este trabajo se ha realizado desde el enfoque socioepistemológico, ya que este marco teórico considera a la problemática de estudio de la matemática educativa como *"el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, construido socialmente fuera de la institución escolar se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza"*. (Farfán, 2003, p.5). De esta manera, es posible asumir la importancia que tienen las formas de comunicación originadas en escenarios no académicos de la sociedad actual, y que los alumnos llevan a escenarios académicos, como el aula de matemática. "*Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa*" (Barbero, 2006, p.3). Esta idea parece cada vez más vital, ya que llama la atención a buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se los construyen (Crespo Crespo, 2007). La escuela pasa a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única, se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento

La socioepistemología hace aportes fundamentales para poder explicar la forma en que el conocimiento surge de las interacciones sociales de una cultura particular. *"Mientras* [las aproximaciones epistemológicas tradicionales] *asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana, la socioepistemología plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales"* (Lezama, 2005, p. 341)

Una experiencia de clase trabajando con funciones racionales

La siguiente experiencia se desarrolla en el transcurso de una clase de 4º Año Ciencias de un colegio de la Ciudad de Buenos Aires. Si bien el objetivo de la clase no era provocar una discusión como la que a continuación se describe, la temática desarrollada provocó el desencadenamiento de algunas ideas que permiten ilustrar lo que ocurre cuando el infinito intuitivo y lo que han ido aprendiendo del infinito matemático y de la matemática en general se mezclan con un infinito como valor al que tiende un límite.

La discusión se dio durante una clase en que se comenzaba a introducir la idea de funciones continuas y discontinuas pero sin haber trabajado previamente la unidad de límites. En el currículum de 4º Año, los alumnos estudian funciones racionales, como uno de los tipos de funciones, pero no se profundiza en el estudio del análisis matemático, que es un contenido de 5º Año.

Hasta ese momento los estudiantes han trabajado con representaciones gráficas de funciones (sin conocer la expresión funcional de las mismas) y en función de lo que observan pueden decir si es o no continua, si hay asíntotas verticales o "agujeritos" (discontinuidades puntuales). Este trabajo se hace durante el segundo año de escuela media (14-15 años) dentro de la unidad de Funciones y Generalidades. El objetivo de esa unidad es simplemente que los estudiantes reconozcan a partir de una gráfica si la representación corresponde a una función, definen el dominio, la imagen, los intervalos de positividad y negatividad, el conjunto de ceros y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. También se trabaja con la existencia o no de puntos donde la función no está definida y si existen en ese punto asíntotas o discontinuidades puntuales.

Diseño de la actividad

La clase se desarrolló a partir del estudio de tres funciones, a partir de las cuales se esperaba extrapolar condiciones para poder identificar las características que la representación gráfica de las mismas iban a tener.

Las funciones que se analizaron fueron:

$$a.\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$b.\ f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$c.\ f(x) = \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-2x-3}$$

Como primer punto, se discutió el dominio de estas funciones. La unidad anterior, destinada al estudio de funciones polinómicas, había abierto la discusión al definición de dominio de una función y a las condiciones que provocaban que las funciones polinómicas estuvieran definidas en todo el conjunto de los números reales.

Para el caso de estas funciones, se discutió con el grupo si el dominio iba a volver a ser el conjunto de los números reales o existían valores para los cuales la función no estaba definida. Surge como consecuencia el problema de la división por cero, frente a lo cual los estudiantes "postulan" que no se puede dividir por cero por lo cual hay que eliminar las raíces de los denominadores.

La fundamentación de porqué no se puede dividir por cero surge desde dos perspectivas distintas: la negación que han escuchado a lo largo de toda su escolaridad *"no se puede dividir por cero"* o por el resultado que la calculadora no encuentra. Algunas de las justificaciones fueron:

> *"No se puede dividir por cero porque es como repartir entre nada... no tiene sentido"*
>
> *"Nunca se puede dividir por cero porque la calculadora da MATH ERROR"*

Luego de discutir porqué no se podía dividir por cero, se avanzó a la discusión de qué ocurría en ese punto que estábamos extrayendo del dominio para el caso de la función a. Y en ese momento comenzó la discusión en donde todas las ideas sobre infinito, continuidad, densidad, reaparecieron.

Se acordó primero que ese punto podía generar dos cosas: una asíntota vertical o una discontinuidad puntual: esas son las dos formas de discontinuidad que ellas conocen.

Se realizó entonces una tabla para ver qué ocurría alrededor de ese punto.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

x	f(x)
-5	0,571428571
-4	0,5
-3	0,4
-2	0,25
-1	0
0	-0,5
1	-2
2	no existe
3	4
4	2,5
5	2
6	1,75
7	1,6
8	1,5

Tabla 1

Pero al momento de hacer la gráfica, surgió la necesidad de observar qué ocurría cuando nos acercábamos más la valor x=2, por lo cual, se realizó otra tabla.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

x	f(x)=(x+1)/(x-2)
1,6	-6,5
1,7	-9
1,8	-14
1,9	-29
1,99	-299
1,999	-2999
1,9999	-29999
2	no existe
2,0001	30001
2,001	3001
2,01	301
2,1	31
2,2	16
2,3	11

Tabla 2

Al volcar los resultados hallados en la tabla a una gráfica, aparece una nueva dificultad.

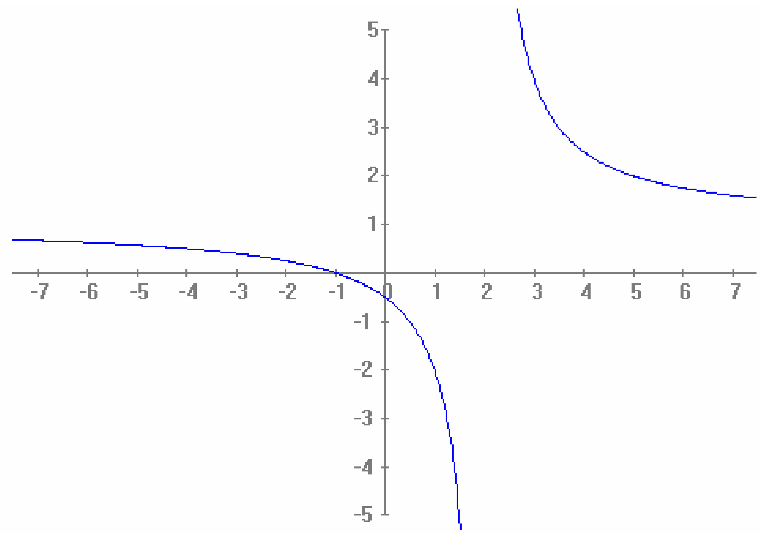

Gráfico 1

Los estudiantes reconocen que en x=2 hay una asíntota vertical (lo reconocen por la forma). El conflicto es ¿qué quiere decir que hay una asíntota?

La definición que los estudiantes presentan es:

> *"Hay una asíntota vertical cuando tenés un valor que genera una recta (acá x=2) al cual la función se va pegando pero nunca toca, porque como acá, no existe el resultado en la función"*

Sin embargo, a pesar de que esta idea es la idea que los estudiantes tienen desde 2º año, surgieron las preguntas que suelen aparecer en función a esta temática.

> *Alumna A: "Es imposible que nunca toque, en algún momento se juntan, nomás por el espesor del lápiz"*
>
> *Alumna B: "Pero no podés pensar en el espesor del lápiz, es en teoría, pensá que es como un lápiz pero sin espesor"*
>
> *Alumna A: "Pero si yo estoy viendo que es asíntota en la gráfica, la gráfica se dibuja, y cualquier línea que se vea tiene espesor, no tiene sentido, no se puede seguir infinitamente. Es como lo de las paradojas de Zenón: la distancia se acaba, el movimiento existe, Aquiles pasa a la tortuga. Es lo mismo, entre el punto que te pares de la recta y dos, la distancia se acaba, en algún momento se tocan"*
>
> *Alumna B: "No es lo mismo, porque es en teoría, lo otro es en la práctica"*

Sin convencerse, la alumna terminó por aceptar que la asíntota y la función no se intersecan en ningún punto.

Después de estudiar este ejemplo, se pasó al siguiente.

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$

Se realizó la misma discusión del dominio y se determinó que debía extraerse al valor x=-1 dado que provocaba una división por cero.

De manera análoga a lo que se había hecho en el punto anterior, se realizó una primera tabla con valores enteros, y una segunda tabla con valores cada vez más próximos a x=-1, para ver qué ocurría en las cercanías de ese punto.

Primera Tabla

x	f(x)
-8	-9
-7	-8
-6	-7
-5	-6
-4	-5
-3	-4
-2	-3
-1	no existe
0	-1
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7

Tabla 3

Segunda Tabla

x	f(x)
-0,4	-1,4
-0,5	-1,5
-0,6	-1,6
-0,7	-1,7
-0,8	-1,8
-0,9	-1,9
-0,99	-1,99
-0,999	-1,999
-0,9999	-1,9999
-1	no existe
-1,0001	-2,0001
-1,001	-2,001
-1,01	-2,01
-1,1	-2,1
-1,2	-2,2
-1,3	-2,3
-1,4	-2,4

Tabla 4

Se realizó a continuación una gráfica de la función

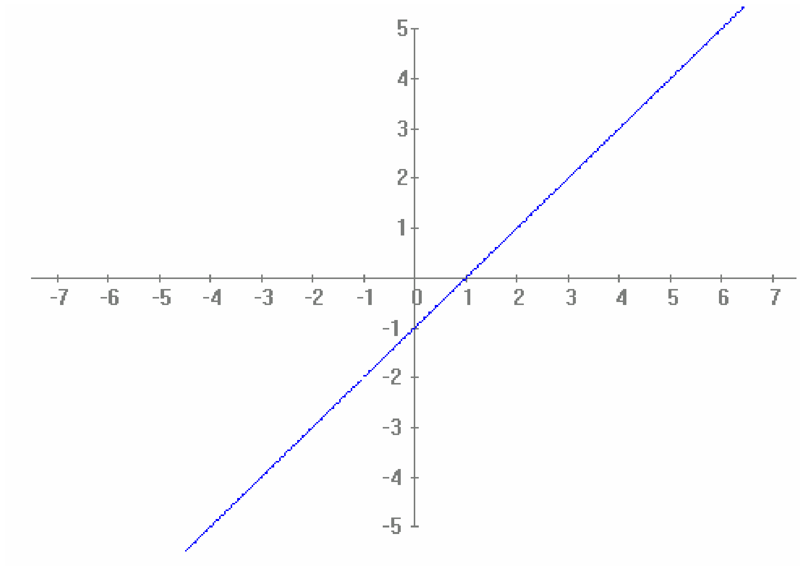

Gráfico 2

Y la gráfica aparece como una recta con un “agujerito”. Y nuevamente surgen las dificultades.

> *Alumna A: “¿Porqué ahora sí se ve el agujerito? ¿No era que el lápiz no tiene espesor? Además, supuestamente entre dos puntos de una recta hay infinitos, si saco uno solo no se ve, no se puede ver”*
>
> *Alumna B: “Pero es en teoría, es así, se marca para que entiendas que ahí falta un punto, no importa si se ve o no se ve, vos tenés que saber que es discontinua, entonces lo marcás agujereado para acordarte que ahí falta un punto”*
>
> *Alumna A: “Entonces es cualquiera: cuando querés que se vea, se ve; cuando no querés que se vea, no se ve... Es cualquier cosa...”*
>
> *Alumna B: “Bueno, no importa, es todo teórico, en realidad tampoco es que hay infinitos puntos entre dos cualquiera, eso es teoría”*

El resto de los estudiantes toman partido por una u otra, en distintos momentos, algunas aceptan lo que se les presenta, otras dudan pero finalmente aceptan. Aún las que no se convencen, terminan por aceptarlo, por el sólo hecho de que es un medio para aprobar la materia.

Una de los estudiantes aboga por el argumento de la alumna A (que por lo general se pregunta y cuestiona todo hasta convencerse) y recuerda la teoría de Geometría que estudiaron en primer año:

> *Alumna C: “¿Quién era el que estudiamos de Geometría, que tenía los 13 libros?”*
>
> *Alumna D: “Euclides”*
>
> *Alumna C: “Bueno, ahí decía que un punto es lo que no tiene partes. Entonces A tiene razón, no se ve, así como no se ven las líneas, porque las líneas tenían una sola dimensión, no tenían espesor, entonces tampoco sé si toca o no la asíntota, porque la asíntota tampoco se ve”*

Alumna B: "Bueno, pero con ese criterio, no podría ver tampoco la función, y entonces no tiene sentido nada. No podés tomar todo al pie de la letra, si no, no hagás nada y listo"

Alumna A: "Sí bueno, está bien, no importa. La teoría dice una cosa y yo hago lo que me sirve en cada caso... No es muy claro, me parece, pero no importa"

Evidentemente, todo se mezcla: lo que se ve, lo que se dice, lo que se hace, lo que hay que hacer... Ninguna de los estudiantes presenta una idea consistente en sí misma, pero todas terminan aceptando lo que se les presenta. El contrato didáctico las obliga, pero todo se mezcla. Y seguramente siga mezclado.

Comentarios finales

En esta experiencia se relata una situación de clase en donde se presentaban a un grupo de estudiantes las funciones racionales. A lo largo del desarrollo de la clase surgen discusiones entre las alumnas, que comparten por un lado, un bagaje común de conocimientos adquiridos a lo largo de la escolaridad, y por otro, códigos comunes, por su edad, su nivel económico y social, una cultura compartida.

De la lectura de los diálogos se observa que el infinito dificulta el consenso: se mezcla el deber con el pensar, el comprender con el aceptar, el cumplir con el discutir. El infinito los coloca en una situación donde ninguno tiene razón (o al menos no sabe si la tiene) por lo cual el consenso llega de la mano de la necesidad de aprobar una materia. Las ideas que se generan como resultado de esos diálogos tienen sólo un fin utilitario, pero no modifican lo que se sabe, lo que se cree, lo que se entiende.

La forma en que se tratan las funciones, el trabajo con límites, provocaran en los modelos que los alumnos se han formado, inconsistencias en más de una ocasión: los conceptos se confunden, las propiedades y definiciones se aprenden y aplican, pero poco significan. Evidencia de esto es la dificultad general que presentan los alumnos en la primera aproximación que tiene ante el estudio del análisis matemático.

Este trabajo, muestra la existencia de conceptos que, como el infinito, se construyen fuera de la escuela y cuando entran en el aula de matemática, se manifiestan de manera conflictiva, si no se exploran las construcciones previas. El proceso de construcción del infinito en la escuela, se ve influido por ideas intuitivas y extraescolares que reaparecen generando obstáculos epistemológicos que se ponen en evidencia al enfrentar ideas relacionadas al infinito escolar.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2006). Dinámicas urbanas de la cultura y cultura escolar. En *Nuevos tiempos y temas en la agenda de política educativa. La escuela vista desde afuera*. Buenos Aires, Argentina.

Crespo Crespo, C. (2001). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad*. En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15 (1) (pp. 529-534). México.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado sin publicar. CICATA-IPN, México.

Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: un camino de filiaciones y rupturas. En J. R. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 16 (1). (pp.5-10). Santiago de Chile: Ediciones Lorena.

Homilka, L. (2008). *Influencia de las prácticas docentes en la visión de estudiantes y profesores de matemática acerca de la matemática en el aula y las decisiones didácticas*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa sin publicar. Cicata-IPN, México.

Lestón, P. y Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En L. Díaz, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17 (1) (pp.404-410). México.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de Maestría en Matemática Educativa sin publicar. Cicata-IPN, México.

Lezama. J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Relime*, 8 (3), 339-362.