

## ESTUDIO Y ANÁLISIS DE DIFICULTADES DETECTADAS EN EL TEMA “ECUACIONES CON PARÁMETROS- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON PARÁMETROS”

Irma Zulema Martínez<sup>1</sup>, Jorge Félix Almazán<sup>2</sup>, Marta Lucía Lentini<sup>1</sup>, María Cristina  
Lentini<sup>1</sup> y Crespo Sergio Hernán<sup>3</sup>.

[irmart@unsa.edu.ar](mailto:irmart@unsa.edu.ar) - [jalmazan@unsa.edu.ar](mailto:jalmazan@unsa.edu.ar) - [lentinim@unsa.edu.ar](mailto:lentinim@unsa.edu.ar) -  
[lentinic@unsa.edu.ar](mailto:lentinic@unsa.edu.ar) - [screspo@ucasal.net](mailto:screspo@ucasal.net)

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta. Argentina

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Argentina

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Salta. Argentina

Tema: I.1 - Pensamiento Algebraico.

Modalidad: Comunicación breve

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: dificultades - estrategias – enseñanza-aprendizaje

### Resumen

*Los autores de este trabajo docentes del área Matemática, integrantes de proyectos de Investigación del CIUNSa: Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta, tales como: “Estudio y análisis de los factores que influyen en la deserción de los alumnos...estrategias de retención” nos abocamos al estudio de algunas de las distintas variables intervinientes en esta temática, estudiando por ello, algunas de las dificultades frecuentes que cometen los alumnos. Este equipo docente que se desempeña en el dictado de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, asignatura de primer año de las carreras del Profesorado en Matemática y de Licenciatura en Sistema, viene observando, tanto en clases teóricas como prácticas y a través de los años, que los estudiantes tienen dificultades frecuentes, en algunos temas del programa, por ello realizaron actividades para detectarlas y estudiarlas. En esta ocasión expondremos lo referido a la enseñanza del tema “Ecuaciones con parámetros - Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros” Observando que algunas dificultades frecuentes: • Interpretación de consignas. • Planteo y resolución de problemas • Empleo acertado del lenguaje simbólico, y/o gráfico de una situación problemática Proponiendo también estrategias tendientes a favorecer la enseñanza-aprendizaje*

### Introducción

Siendo los autores de este trabajo integrantes de proyectos de Investigación del CIUNSa, tales como: *Estudio y análisis de los factores que influyen en la deserción de los alumnos de las Carreras del Profesorado de Matemática y de la Licenciatura de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la U.N.Sa para proponer estrategias de retención* y también miembros de *la Comisión de Estudio de la Permanencia y Deserción* de la Secretaría Académica de la Universidad Nacional de Salta, es que nos abocamos al estudio de algunas de las distintas variables intervinientes en esta temática, siendo estudiado por ello, algunas de las dificultades frecuentes que cometen los alumnos.

Por ello, este equipo docente que se desempeña en el dictado de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, asignatura de primer año de la universidad del plan de estudios del Profesorado en Matemática y de Licenciatura en Sistema, de la Facultad de Ciencias Exactas, viene observando, tanto en clases teóricas como prácticas y a través de los años, que los estudiantes tienen serias dificultades para cursar y aprobar las primeras materias de la carrera y buscando con diversas acciones revertir esta situación para lograr un mejor rendimiento estudiantil. Las mismas se manifiestan en ciertas actividades del proceso enseñanza – aprendizaje como trabajos en grupos, exposiciones, consultas, pero sólo nos quedan registradas las de las evaluaciones escritas como lo son los exámenes parciales y finales (las otras quedan en el anecdotario)

Observamos que algunas dificultades se exteriorizan con frecuencia en:

- \* La interpretación de las consignas. Una vez decidido el procedimiento a seguir, resuelven. Con la solución encontrada, no distinguen entre una solución factible y/o acertada y una errada, sacando una conclusión, pudiendo ser ésta una conclusión correcta o absurda (por ej.: distancia negativa)
- \* El planteo y resolución de problemas, pues no relacionan los conceptos pertinentes a cada caso. Un ejemplo común serían aquellas situaciones problemáticas donde intervienen sistemas con parámetros, en donde no logran diferenciar el conjunto solución del conjunto de valores admisibles en los parámetros
- \* El empleo acertado del lenguaje simbólico, gráfico y/o representaciones esquemáticas de una situación problemática (por ej: posición relativa de rectas y plano en el espacio)

## **Desarrollo**

El objetivo que nos planteamos fue seguir analizando algunos de los errores y dificultades que se manifiestan en algunos de los temas de la asignatura antes mencionada

Considerando que los errores de los estudiantes no son casuales y que están basados en conocimientos y experiencias previas, existiendo diferentes causas que los motivan. Así, pueden asociarse a dificultades en el sistema didáctico, que pueden ser de origen:

- Didáctico: dependen de la elección de actividades que realiza el docente
- Epistemológico: concepciones constitutivas del conocimiento que impiden el acceso a un conocimiento nuevo.

- Ontogenético: provienen de las limitaciones del alumno en un momento de su desarrollo, desarrollando conocimientos que son propios a sus medios y sus objetivos.

Por otra parte, los errores forman parte del proceso de construcción del conocimiento pudiendo ser éstos el impulso provocador de un avance, transformándose así en un elemento que sirve para construir e innovar el proceso de aprendizaje.

Por tanto, el error no tiene el rol simplificado que uno quiere hacerle jugar en ciertas ocasiones. No es sólo el efecto de la ignorancia, de la indecisión o del azar, como suponían las teorías conductistas del aprendizaje, sino que es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta de una manera equivocada o no apropiado a una nueva situación.

Además, estos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre sí por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente aunque no necesariamente correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones. Estos errores no son forzosamente explicables. Sucede que no desaparecen de inmediato o en corto tiempo, sino que resisten, persisten, resurgen, se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso.

Adhiriendo a lo que sostiene Michéle Artigué (1995) *existen grandes dificultades para que los alumnos alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos del pensamiento que son el centro de la educación matemática*. Afirma además que *la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aún si tiene otras ambiciones se centra en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar las competencias que en ese campo se han adquirido* nos motiva a reflexionar constantemente sobre nuestra práctica áulica.

En la bibliografía se encuentra una clasificación de las formas de aprendizaje cognitivo de acuerdo a:

*Memorizar la información*, que es el estadio más simple que permite el uso de reglas mnemotécnicas

*Comprender las relaciones*, semejante al aprendizaje significativo de Ausubel

*Aplicación de técnicas*, requiere metodologías de enseñanza distintas a la de memorizar la información.

*Aplicación de técnicas genéricas*, se diferencian de la categoría anterior ya que son independientes del ámbito.

Los errores y dificultades que hemos analizados fueron seleccionados de exámenes finales, correspondientes al turno febrero de 2012, de los alumnos regulares. Se optó particularmente éste, dado que es en el que se presentan más alumnos.

Se seleccionó un determinado ejercicio, del que exhibiremos los resultados obtenidos, con una posible explicación de porqué se pueden haber producido y eventuales propuestas de superación para que la situación de enseñanza aprendizaje, del tema en particular, sea conveniente en el futuro, favoreciendo a mejorar el rendimiento.

### Análisis

El ejercicio seleccionado es una aplicación de la unidad que trata “Ecuación de la recta en  $R^2$  y  $R^3$ - Ecuación del plano - Problemas entre rectas y planos - Ángulos – Distancias” y presenta distintos ítems para evaluar

Dada la recta de ecuación:  $r \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 \end{cases}$  y el plano  $\pi: a x + b y + c z + d = 0$ ,

**estudie** los distintos casos para determinar la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ , **dando** una interpretación gráfica de cada uno de ellos

De los alumnos que se presentaron a examen, este problema no fue resuelto por el 30%. Consideramos que no fue por desconocimiento de la temática porque ya a estos alumnos se les presentaron situaciones similares para su resolución en actividades anteriores a esta ocasión por lo que estimamos que podría influir el aspecto emocional.

Los restantes, en cuanto a:

- *la interpretación de las consignas*
  - el 70% interpreta, con algunos errores, la consigna y de éstos, sólo el 15% lo hace correctamente. Del porcentaje restante, *y una vez decidido el procedimiento a seguir, resuelven y con la solución encontrada dan una conclusión*
    - \* 45 % resuelven en forma mecánica sin justificación alguna

- \* 55 % determinan analíticamente en forma correctamente la posición relativa entre recta y plano
- *el planteo y la resolución del problema, no relacionan los conceptos pertinentes a cada caso.*
  - \* Sólo el 15 % relaciona los conceptos involucrados en esta aplicación (por ejemplo, el de producto interno)
  - \* 45% despejan la incógnita en función de los parámetros correctamente
- *el uso acertado del lenguaje simbólico, gráfico y/o representaciones esquemáticas de una situación geométrica (posición relativa de rectas y plano en el espacio)*
  - \* 55% interpretan gráficamente de manera correcta
  - \* 15% presenta una reproducción memorística
- *respuesta que debían presentar (conclusión)*
  - \* El 40 % lo hace correctamente

Ilustramos algunas de estas situaciones en el siguiente ejemplo se observa, de las características antes citadas que:

- *trabaja en forma mecánica repitiendo procedimientos, vistos anteriormente, no relacionado los conceptos pertinentes al caso*
- *llega a una etapa en su desarrollo no sabiendo como continuar para poder dar respuesta a lo pedido*
- *da una interpretación geométrica que no relaciona con el estudio analítico que intenta realizar*
- *poco preciso el lenguaje simbólico*

3. 
$$\textcircled{1} \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \Pi: ax + by + cz + d = 0$$

Es de la recta que pasa por  $P = (x_1, y_1, z_1)$  y tiene la dirección  $u = (u_1, u_2, u_3)$

si  $P$  verifica  $\textcircled{2}$ , entonces  $P \in \Pi$   
 y si  $N = (a, b, c)$  Normal del plano es  $\perp$  a  $u$   
 $\times \langle N, u \rangle = 0$ , la recta está contenida en el plano

$$\begin{cases} a(x_1 + \lambda u_1) + b(y_1 + \lambda u_2) + c(z_1 + \lambda u_3) = -d \\ \text{incógnita: } \lambda \end{cases}$$

en  $\textcircled{2}$  reemplazamos los valores de  $x, y$  y  $z$  de  $\textcircled{1}$

Si la ecuación admite solución

- Sol. única [A]
- Infinitas Soluciones [B]
- No Admite Solución [C]

en  $\textcircled{2}$   $ax + by + cz + d = 0$

$ax = -by - cz - d, \quad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$

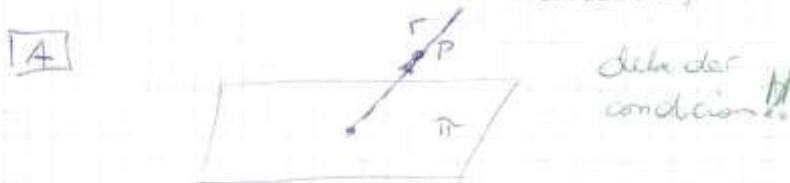
$\Pi = \left\{ \left( -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}, y, z \right) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$\left( -\frac{d}{a}, 0, 0 \right) + \left( -\frac{b}{a}y, y, 0 \right) + \left( -\frac{c}{a}z, 0, z \right)$

$\Pi: \left( -\frac{d}{a}, 0, 0 \right) + y \left( -\frac{b}{a}, 1, 0 \right) + z \left( -\frac{c}{a}, 0, 1 \right)$

Es Vectorial

direcciones



## Conclusiones

Frente a lo analizado, estimamos que para la situación de enseñanza – aprendizaje, el docente debe tener presente los errores frecuentes observados para realizar un cambio en su práctica áulica, identificando y remarcando aquellos conceptos que han sido equivocadamente empleados.

En el caso estudiado, en cuanto a la dificultad de entender la consigna, estimamos que se debió a que el problema fue planteado en forma genérica ya que los alumnos trabajan con mayor precisión cuando se presentan en distintas actividades problemas numéricos y/o concretos.

Acerca de la resolución en forma mecánica, sin justificación alguna, entendemos que estos alumnos sólo llegaron a memorizar la información sin llegar a la etapa de análisis. En la resolución de sistema con parámetro se confunde la solución del problema con los posibles valores del parámetro (no distingue variable de parámetro), entendiendo que quizás esta dificultad tenga sus raíces en conceptos previos no consolidados.

Teniendo en cuenta la experiencia comentada, estimamos conveniente presentar en todas las actividades, que sea posible, del proceso enseñanza – aprendizaje situaciones genéricas con más frecuencia junto con las concretas para propiciar la analogía y el análisis reflexivo, tendiendo a lograr que los alumnos lleguen a procesos mentales superiores.

Para lograr una actitud del alumnado más interesada y con el objeto de acrecentar su motivación, sería conveniente presentar más situaciones problemáticas empleando procesos de modelización que supone, en primer lugar, reconocer cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno considera, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico - matemático

También deberá tenerse en cuenta el contexto en el que se proponen los problemas y la producción de conocimientos dado que en la situación de enseñanza - aprendizaje, éste juega un importante papel.

Por último, en este tipo de análisis hacemos notar que se observaron, para un mismo problema, aun estableciéndose pautas para su corrección, diferencias en la misma, aún realizada por la misma persona. Esto nos lleva a reflexionar también sobre el tema evaluación, como variable exógena al alumno.

### **Bibliografía**

- Artigué, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Ingeniería en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Alagia, H., Bressan, A. y Sadosky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. (Libros del Zorzal, Bs As)
- Gómez, P. (1995). *Profesor: no entiendo. Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia en las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México
- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de la Matemática*. En Kilpatrick J.; Gómez, P. y Rico, L. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, México
- Sadosky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.