ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES POLINÓMICAS CUADRÁTICAS

MARÍA FERNANDA MEJÍA PALOMINO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2 004

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES POLINÓMICAS CUADRÁTICAS

MARÍA FERNANDA MEJÍA PALOMINO

Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Matemáticas - Física

Directores
LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
EVELIO BEDOYA MORENO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2 004

Nota de aceptación

Director

Evaluador

Evaluador

Santiago de Cali, 28 de septiembre de 2004

A Quienes
Amo:
Dios,
Mi madre Beatriz,
Mi hermano Milton,
Mi abuelo Fernando,
Mi tía Adela,
...

AGRADECIMIENTOS

A mis dos directores, al profesor Evelio Bedoya por su dedicación, apoyo y generosa orientación y a la profesora Ligia Amparo Torres por ayudarme y animarme a continuar y culminar. A mis dos evaluadores: la profesora Rocío Malagón por sus aportes en la delimitación del problema y demás sugerencias y al profesor Jorge Arce por sus orientaciones, correcciones e ideas.

Al grupo de Educación Matemática y Nuevas Tecnologías (**EM&NT**) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, en especial a los profesores Edinsson Fernández, Rubén Darío Lozano y a la compañera Erika Martínez, por sus solícitos aportes y participación.

A los estudiantes de grado 9-1, a las profesoras Mariela Agudelo y Elvira Durán y directivas de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, por su participación y apoyo en la implementación de las actividades.

A todos mis profesores y compañeros de la Universidad del Valle quienes contribuyeron a mi formación profesional.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

La incorporación de las Nuevas Tecnologías Informáticas (**NTI**) en el aula de matemáticas permite el desarrollo de múltiples investigaciones en Educación Matemática que arrojan reportes favorables de su uso (Duham y Dick, 1994). A pesar de los resultados de las investigaciones, la incorporación y uso de las **NTI** en la escuela sigue siendo objeto de resistencia, especialmente por parte de aquellos que tienen la creencia que la esencia del saber matemático está en los procedimientos con manipulaciones algebraicas de lápiz y papel, un ejemplo de esos conocimientos (procedimental y conceptual) encasillados a este tratamiento, es la factorización de expresiones polinómicas.

Por las características de la enseñanza tradicional de la factorización de expresiones polinómicas y su aparente disociación de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas, se propone en este trabajo diseñar, implementar y analizar una propuesta de enseñanza – aprendizaje. El propósito de esta propuesta es generar un aprendizaje significativo y rescatar algunos procedimientos y conceptos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas desapercibidas en la enseñanza tradicional. El desarrollo de este trabajo esta mediado por la metodología del Análisis Didáctico, en donde se evalúan los efectos de la implementación de la propuesta.

PALABRAS CLAVES: Factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, Calculadoras Graficadoras Algebraicas, Análisis Didáctico y Unidad Didáctica.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la humanidad ha traído consigo el avance tecnológico, impactando en los diferentes contextos como la ciencia, la vida diaria y la educación. Las denominadas Nuevas Tecnologías Informáticas (**NTI**) como las Calculadoras Graficadoras Algebraicas, al permitir obtener distintos sistemas de representación de objetos matemáticos, generan un cambio en el modo de hacer matemática y se postulan como herramientas adecuadas para ambientes educativos. Las expectativas que suscita la implementación de las **NTI** en la educación, requiere determinar sus contribuciones, limitaciones y uso efectivo, promoviendo la investigación, desarrollo y formación de docentes, con el propósito de lograr su adecuada implementación en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas (MEN, 1998, p. 34).

Para favorecer cambios favorables al incorporar las **NTI** en la Educación Matemática, no sólo se requiere de los acondicionamientos físicos, sino de modificaciones en las actividades de enseñanza y aprendizaje, ya que al continuar con las actividades tradicionales, generalmente elaboradas para ser resueltas con el uso del lápiz y papel, los resultados con el uso de las **NTI** van a ser similares en comparación a otras tecnologías y no se obtendrán razones para sustentar su uso. Lo que se debe pretender con las actividades a diseñar es rescatar las nuevas posibilidades de tratamiento del objeto matemático que genera en este caso el uso de la Calculadora Graficadora Algebraica, sin descartar el uso de otras tecnologías, ya que lo realmente se quiere es promover la comprensión de los conceptos y procedimientos en cuestión.

La intencionalidad de este trabajo, mediado por un Análisis Didáctico♣ es mostrar el diseño de algunas actividades que involucran el uso de Calculadoras Graficadoras Algebraicas para la enseñanza de conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas para alumnos de 9º grado de la Educación Básica Secundaria de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. La implementación de las actividades tiene como objeto promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades matemáticas minimizadas en las prácticas tradicionales de enseñanza y lograr un aprendizaje significativo que le permita estar en capacidad de aplicar sus conocimientos matemáticos a su posterior aprendizaje y vida diaria. La elaboración del proyecto se apoya en algunas investigaciones y propuestas sobre el uso de las **NTI** en la enseñanza del álgebra, como las de Kaput y Balacheff (1996), Kakol (1997), Arcavi y Hadas (2000), Bedoya (2002), Carulla y Gómez (1999), Yerushalmy y Gilead (1997), MEN (1999), Demana y Waits (2000), Kutzler (2000), entre otros.

Antes de iniciar la elaboración de este trabajo y como mediadores de la concertación en la práctica, se han formulado algunas preguntas preliminares, que han guiado el desarrollo de este trabajo. A continuación se exponen:

- ¿Cuáles son las principales dificultades, errores de los estudiantes en el aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas?¿Cuáles de las diferentes perspectivas didácticas actuales sobre el desarrollo del álgebra permiten descubrir alternativas no convencionales e innovadoras para la enseñanza

♣ El "Análisis Didáctico" incluye la selección o diseño, implementación, análisis y evaluación de actividades y unidades didácticas para la enseñanza de un determinado tópico de la matemática y para el desarrollo e innovación curricular local (institucional y del aula).

de la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas?¿Cómo utilizar las nuevas tecnologías informáticas como las Calculadoras Graficadoras Algebraicas de tal manera que faciliten o apoyen la comprensión y construcción significativa de los conocimientos (conceptos y procedimientos) relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas?

La indagación a estas preguntas se aborda mediante la metodología del Análisis Didáctico, estructurando el trabajo de la siguiente manera: en el primer capítulo se muestran algunos de los aspectos que perfilan el problema, presentándose las justificaciones, objetivos y antecedentes. En el segundo capítulo se presentan algunos referentes teóricos y conceptuales acerca del Análisis Didáctico y el desarrollo de tres de sus componentes en torno a la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas: el Análisis de Contenido, de la Tecnología y Cognitivo. El tercer capítulo, presenta el Análisis de Instrucción, en donde se muestra como la información de los diferentes componentes del Análisis Didáctico se inmiscuyen en el diseño de la Unidad Didáctica. En este capítulo se incluye la descripción de la puesta en práctica, algunas de las características de la población, contexto de los participantes y las técnicas e instrumentos de recogida de datos. El cuarto capítulo presenta el análisis de los resultados (Análisis de Actuación) de cada una de las actividades y finalmente se presentan las conclusiones.

Es importante determinar que este trabajo de grado se inscribe en el campo de problemas y estudio de interés de la Línea de Formación e Investigación "Educación Matemática y Nuevas Tecnologías" (**EM&NT**) del Área de Educación Matemática del Instituto de

Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Esta Línea se preocupa por el estudio de los problemas didácticos, curriculares y relacionados con la formación inicial y permanente de educadores matemáticos en relación con los contenidos matemáticos escolares propuestos en los currículos nacional (**MEN**) y local (institucional y de aula), su naturaleza epistemológica, su fenomenología, sus múltiples representaciones y relacionados con sus procesos didácticos (de enseñanza, aprendizaje y evaluación) y de desarrollo e innovación curricular, cuando todos estos problemas y procesos son considerados en ambientes que incorporan las nuevas tecnologías informáticas como instrumentos o recursos de representación múltiple, visualización y modelización.

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema objeto de investigación en este trabajo se ubica en una problemática general que alude a la falta de significado y uso de los conceptos y procesos algebraicos por parte de los estudiantes que cursan los primeros años de álgebra en la educación secundaria. Es decir, la falta de comprensión de un referente, campo de problemas, fenómenos que modelan estos conceptos y la carencia transmisión de un saber a un contexto diferente en el que se han construido estos conceptos o procedimientos. Evidenciándose en la tendencia a memorizar reglas, que permiten realizar manipulaciones algebraicas con lápiz y papel, de las cuales no se tiene una clara distinción de su utilidad en situaciones problemas ni en otras actividades diferentes a la ejercitación de destreza de cálculo algebraico (Kieran, 1994).

Uno de los tópicos del álgebra caracterizado por el manejo exclusivo de manipulaciones algebraicas de lápiz y papel, ejecutados a partir de reglas que generalizan los procedimientos a seguir, es la factorización de expresiones polinómicas. En la enseñanza tradicional las reglas dadas, son reforzadas al ejecutar una lista de ejercicios similares, conllevando a que el estudiante aprenda de memoria algoritmos, sin la interpretación y sin la compresión significativa de lo que efectúa, como también la desconexión de los conocimientos previos que ya poseen.

Con esta forma de enseñanza son pocos los estudiantes que conectan sus conocimientos anteriores con los nuevos, distinguiendo las características de las expresiones polinómicas a factorizar, logrando aplicar exitosamente la regla particular correspondiente. Los otros estudiantes, los que no conectan los nuevos conocimientos con los que ya saben, son los que no tardan en confundir las reglas y las transformaciones recién "aprendidas", dando por válidas algunas que no lo son, olvidando otras que si son posibles, y dando lugar, en definitiva a una lista de errores de cálculo algebraico (Grupo Azarquiel, 1993, p. 137). Estos aspectos estudiados evidencian un tratamiento poco significativo, que impide entender las razones que hacen lícitas o no lícitas las transformaciones de expresiones algebraicas, lo que muestra una falta de comprensión de las propiedades y transformaciones posibles de estos objetos matemáticos.

El manejo exclusivo de reglas algorítmicas para la factorización de expresiones polinómicas ha separado este concepto y sus procedimientos de otros, como la relación entre los ceros de una función con los factores, desfavoreciendo el trabajo articulado de diferentes sistemas de representación. La desconexión entre diferentes conceptos y procedimientos, también se refuerza en la presentación de los contenidos de los textos escolares, que inducen la presentación de la factorización a una serie de casos algorítmicos, sin relación entre estos y sin relación con otras representaciones fuera de la algebraica. La carencia de otras formas de representación en este proceso, como la gráfica, se manifiesta en algunos de los errores que comenten los alumnos en el álgebra (Palarea y Socas, 1997, p. 22). Por tanto, lo conveniente para la enseñanza de la factorización de expresiones polinómicas sería el trabajo combinado de más de un sistema de representación, conectando distintos conceptos y procedimientos de una manera adecuada, dando coherencia a todo ese bagaje de conocimientos matemáticos que el alumno tiene que aprender.

Es importante resaltar los resultados del trabajo realizado por Sánchez (1997) con un grupo de estudiantes de grado 6º de bachillerato de México, en el cual, se identifican algunas concepciones erróneas relacionadas con temas afines a la factorización de expresiones polinómicas, entre los que tenemos:

- La factorización es un procedimiento (exclusivo) para expresiones cuadráticas,
- en las factorizaciones los números que intervienen son enteros,
- las raíces se obtienen sólo
- aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, y
- la gráfica de un polinomio no proporciona información para su factorización.

Estas concepciones erróneas presentadas por el grupo de estudiantes, ratifican la tendencia en la enseñanza del álgebra a trabajar exclusivamente con representaciones algebraicas de los conceptos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas, como también, centrándose en expresiones algebraicas típicas como las cuadráticas con coeficientes enteros. Lo anterior promueve dificultades en el tratamiento general de la factorización.

Recientemente con la incorporación de las Nuevas Tecnologías Informáticas (**NTI**) al currículo de matemáticas como las Calculadoras Graficadoras Algebraicas como *TI–92 plus* y *Voyage 200* y software como *Derive*, *Maple* y *Matemática*, se genera un nuevo campo de investigación, dado que ellas por si solas no garantizan un aprendizaje significativo, requiriéndose de actividades o de Unidades Didácticas que las incorporen adecuadamente. Las **NTI** se caracterizan por permitir articular o interrelacionar múltiples registros de representación e incluir un potente sistema computacional algebraico (CAS[♣], por su sigla en inglés) que realiza manipulaciones de expresiones algebraicas tales como: factorizar polinomios, derivar simbólicamente una función, hallar su antiderivada, hallar la expresión en fracciones parciales de una función racional, etcétera.

Este campo de indagación con **NTI** se convierte en un campo privilegiado para potenciar procesos de comprensión de procedimientos y conceptos asociados con a la factorización de polinomios. Hasta hace algunos años las manipulaciones algebraicas eran una capacidad que podían efectuar sólo las personas, esto cambia al surgir las **NTI,** que efectúan de manera eficaz y con mayor prontitud estos cálculos. Por ello, algunos afirman que su uso llevarán al desuso inevitable de algunas técnicas algebraicas de papel y lápiz, así como sucedió con los cálculos efectuados con las tablas de los logaritmos y la extracción de la raíces cuadradas de números no cuadrados perfectos, que hoy en día ya están en desuso (Demana y Waits, 2000). Por lo tanto la importancia de su incorporación, entre otros aspectos, radica en posibilitar el empleo del tiempo en la argumentación y justificación, capacidades que estas herramientas por sí solas no hacen.

La sobrevalorada importancia de las manipulaciones algebraicas de lápiz y papel otorgado durante mucho tiempo en la enseñanza del álgebra, infunde en muchos el miedo al uso de las **NTI** en la escuela**,** ya que creen que se va a debilitar y a desaparecer las habilidades de efectuar cálculos a lápiz y papel. Lo que muestra una mirada parcial y débil sobre la

[♣] Por su sigla en inglés Computer Algebraic Systems incorporación de estos instrumentos, reduciéndolos únicamente a instrumentos de cálculo. Una de las posibilidades de adecuada utilización de los **NTI** es su empleo equilibrado con las otras maneras de efectuar cálculo (mental y con lápiz y papel) facilitando una amplia comprensión de los objetos matemáticos a estudiar (Kuztler, 2000). Es decir, estas herramientas tecnológicas en el aula de clase pueden convertirse en instrumentos mediadores del aprendizaje y no simplemente herramientas para efectuar cálculos.

Esta última idea anotada, se manifiesta en la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (**MEN**) de Colombia al iniciar desde 1998 un proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al currículo de Matemáticas, dotando para su ejecución de Calculadoras Graficadoras Algebraicas (como la *TI-83 y TI-92 plus*) a instituciones educativas públicas de distintos departamentos del país. A partir de esto se abren las puertas a innovaciones en el aula, en donde es necesario modificar las decisiones sobre qué enseñar y cómo enseñar. Extendiéndose un nuevo campo de experiencias que requiere de creatividad y de Conocimiento Didáctico para diseñar actividades que incorporen adecuadamente las **NTI** y faciliten la comprensión de conceptos, dotando de significados las manipulaciones algebraicas y rescatando conexiones con otros conceptos y procedimientos relacionados. Con estas necesidades y nuevos requerimientos, se presenta en este trabajo el Análisis Didáctico para el diseño de algunas actividades que involucran la incorporación de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas *TI-92 Plus* y *Voyage 200* para la enseñanza y aprendizaje de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas siendo implementadas en estudiantes de noveno grado de las Escuela Normal Superior Farallones de Cali. El problema planteado se formula bajo la siguiente pregunta:

¿Cuáles actividades al emplear las Calculadoras Graficadoras Algebraicas facilitan en el alumno el aprendizaje de los conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas?

1.2. JUSTIFICACIÓN

La importancia del trabajo que aquí se presenta se puede abordar desde dos perspectivas específicas, de una parte desde el contenido mismo: la factorización de expresiones polinómicas de segundo grado, que nos lleva a una mirada curricular, y la otra, la importancia de implementar en el aula herramientas tecnológicas como mediadoras del aprendizaje de las matemáticas, en particular en el contenido objeto de estudio.

La factorización de expresiones polinómicas conlleva a una mirada mucho más general que alude a la producción, reconocimiento y caracterización de expresiones equivalentes. Lo que significa, que tal habilidad y desempeño está asociada a un problema de comprensión de tal temática. Este tipo de comprensión tiene que ver con la manipulación procedimental de tales expresiones, reconociendo las propiedades de la igualdad y de las expresiones que posibilitan tal manipulación, pero aún más allá de los aspectos procedimentales está la manera como se concatenan los conceptos involucrados en este contenido y las diversas representaciones asociadas a estos, en este caso se trata de explicitar la relación entre factores, resultados de un proceso de factorización y los ceros de una función cuadrática, así como la visualización y manipulación de gráficas.

Los estándares, lineamientos, plan de área de la institución donde se realiza la experimentación dan cuenta de la pertinencia del trabajo de este contenido (ver anexo A: Análisis Curricular). Es allí donde este tratamiento diferente a lo tradicional de abordar la factorización redimensiona este trabajo.

Es así como Demana y Waits (2000) nos dicen:

> Algunos reformadores han dicho que no es ningún requisito indispensable el enseñar la factorización. Creemos que están equivocados. El tema matemático de factorización es principal y de mayor importancia. Debe permanecer en el plan de estudios. Sin embargo, en la factorización pesaba una reserva mental o el ejercicio tedioso de papel y lápiz, que a menudo escondieron la matemática subyacente, más bonita. ...Con un **CAS** un polinomio puede factorizarse al instante. Lo que es importante y estaba a menudo perdido en la niebla de tediosos cómputos, era reconocer lo que los factores pueden decirnos acerca del comportamiento de la expresión. ¡El tema del concepto de factorización es importante! Un **CAS** integrado en el plan de estudios, quiere decir que pueden enseñarse los mismos temas en menos tiempo y puede dedicarse más tiempo a nuevas y mejores matemáticas, a la comprensión, la demostración, la resolución de problemas, etcétera.

Por tanto, las actividades que se les brinden a los estudiantes, son las que determinan que habilidades se quieren desarrollar en ellos. Los procesos de pensamiento útiles no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, son los más valiosos que se les puede brindar a los estudiantes ante una civilización rápidamente mutante (De Guzmán, 1993, p. 6). Se espera desarrollar en los estudiantes destrezas diferentes a las que las máquinas pueden hacer, fomentando lo que realmente nos hace diferentes a ellas.

♣

Considerando lo anterior, se realiza en este trabajo un Análisis Didáctico teniendo en cuenta el microentorno♣ social o ambiente didáctico (de enseñanza, aprendizaje y evaluación), las diferentes representaciones de los objetos matemáticos que nos ocupan y que se pueden articular y configurar respectivamente con la ayuda de las modernas tecnologías, en particular con el uso de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas como las TI-92 plus y/o *Voyage200*. Los análisis previos sugeridos por el Análisis Didáctico se concretan en el diseño e implantación de estas actividades, acordes a la pregunta que formula el problema y se aborda en este trabajo.

Finalmente, se evalúan los resultados observados y obtenidos en la práctica. De esta manera se busca reflexionar y analizar críticamente las actividades de enseñanza tradicionales, que empobrecen el contenido, significado e importancia escolar de la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas y ser fuente de motivación y capacitación para profesores en formación o en ejercicio en la elaboración de actividades innovadoras, enriquecedoras y cercanas a los contextos sociales, culturales, educativos y personales de sus alumnos.

♣ Un microentorno está conformado por los contextos de orden cultural, social, económico, político, matemático, etc. en el cual se encuentra inmersos los actores del sistema educativo.(MEN, 1999, p. 24).

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo General

- Favorecer la comprensión de conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas en estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria, mediante algunas actividades con el uso de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas, diseñadas e implementadas bajo un Análisis Didáctico.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Identificar y describir los fundamentos didácticos, teóricos y prácticos para el diseño e implementación de actividades didácticas de factorización de expresiones polinómicas cuadráticas utilizando Calculadoras Graficadoras Algebraicas.

- Determinar los alcances y limitaciones[♣] del uso de la Calculadora Graficadora Algebraica para la enseñanza y aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas.

[♣] Cuando se menciona alcances y limitaciones, se hace desde la perspectiva de la actividad del estudiante con el conocimiento matemático, en éste mismo, en otras ciencias y en el contexto sociocultural.

- Proponer una Unidad Didáctica para la enseñanza y aprendizaje significativo de los conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones algebraicas polinómicas cuadráticas.

- Valorar los resultados de la puesta en práctica de las actividades, proporcionando información útil para otras investigaciones o estudios en el aula relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.

1.4. ANTECEDENTES

En esta sección se describen algunos de las experiencias en el aula y tipos de actividades relacionados con el problema de investigación, que permiten contextualizar las diferentes perspectivas que han sido abordadas para la enseñanza de la factorización de expresiones polinómicas. Dadas las características de los trabajos hallados durante la revisión bibliográfica efectuada para la realización de esta sección, se ha determinado organizarlos teniendo en cuenta la tecnología utilizada. Inicialmente se presentan los trabajos que requieren de la utilización del lápiz y el papel o materiales manipulables, determinados como tecnologías tradicionales (por su precedencia en los ambientes educativos) y posteriormente se presentan las experiencias o actividades que han utilizado las **NTI**.

1.4.1. Utilizando Tecnologías Tradicionales

Como punto de partida en la revisión bibliográfica efectuada en este trabajo, se realizó una revisión de los trabajos de grado de estudiantes de la Universidad del Valle del plan de licenciatura en Matemáticas y Física. El trabajo de mayor relación es el elaborado por Gómez y Torres (1993) titulado "Una alternativa para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la factorización de polinomios y las fracciones algebraicas". En este trabajo se aplica el método heurístico para el diseño de un material didáctico, en donde el alumno construye sus propias ideas y por ende el conocimiento mediante la presentación de situaciones problemáticas concretas. Aunque el material fue expuesto a un grupo de estudiantes sin conocimientos de polinomios, no se presentan un análisis detallado de los resultados y observaciones. Al igual que este trabajo se intenta evitar el método tradicional de enseñanza para la factorización de expresiones polinómicas, para ello se apoyan en la aritmética, la geometría y la teoría de conjuntos, haciendo uso del lápiz y papel para crear situaciones que están guiadas por preguntas que van encauzando al alumno a una conclusión.

En el artículo "Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: "secuencias de Tunja" de John Mason., se sugiere un nuevo tratamiento de la factorización de expresiones algebraicas. El reto es asegurar que a los alumnos se les invite a usar sus capacidades para detectar patrones y expresar generalidad, de manera que se pueda llegar al álgebra con una mente diferente ya que las expresiones que van a manipular no son impuestas sino que son el resultado de una generalidad hecha y no cálculos carentes de significado con letras que no tienen sentido (1999, p. 233).

En la exposición de su artículo utiliza secuencias de casos particulares de números enteros y expresiones algebraicas a los cuales llama secuencias de Tunja. Con ellas logra desarrollar la capacidad de generalización asociada a la capacidad de agrupar, ordenar y conjeturar con la intención de que los estudiantes descubran reglas de manipulación, de modo que las expresiones sobre las que trabajan y las reglas que usen sean sus propias expresiones de generalidad y no simplemente reglas dadas por el profesor o el texto. Con las secuencias de Tunja se puede incitar a los estudiantes a observar cómo funciona la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.

Otros autores sugieren trabajar con materiales manipulables desde un modelo geométrico que relaciona el área de rectángulos con la expresión factorizada de una expresión algebraica cuadrática. Uno de ellos es Dreyfous (1996), que ofrece materiales manipulables "*Algeblocks*" (un conjunto de bloques) con los cuales los estudiantes pueden construir las reglas de factorización. El método de Peck y Jencks (1988)[1] que hace explícito los vínculos de la aritmética con la notación no numérica del álgebra utilizando material manipulable, permite expresar el producto de dos números naturales y llegar a generalizaciones que conlleva al uso de la letra y a la generación de una expresión algebraica cuadrática factorizada. La Figura 1 muestra el proceso adaptado con el material manipulable.

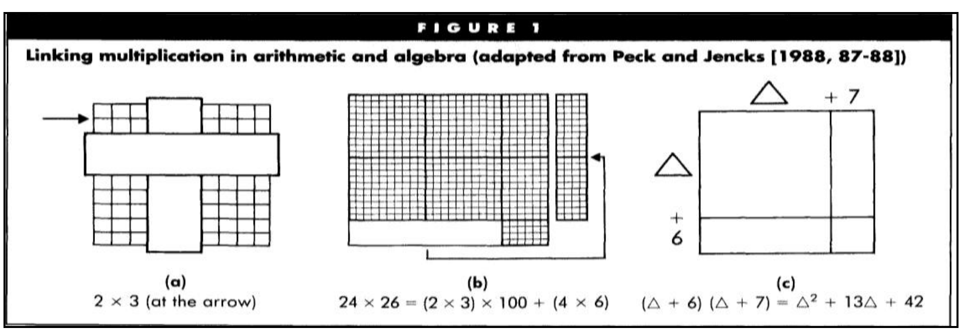


Figura 1. Método de Peck y Jencks

[1] PENCK, Donald y JENCKS, Stancey. (1988) "Reality-Arithmetic Algebra. En: Journal of Mathematical Behaviour". April pp. 85-91. Citado en: KIERAN, Carolyn. (1991) Helping to make the transition to Algebra. En: Research in to Practice. March pp. 49-51.

De la misma manera textos escolares como Alfa 8, sugieren actividades con el uso del material manipulable elaborado por el estudiante en cartulinas de colores, que utiliza para construir rectángulos en donde la magnitud de uno de sus lados se puede representar como x. Los diferentes rectángulos se organizan para obtener otro rectángulo con lados de mayor magnitud. Al hallar su área se obtiene una expresión polinómica cuadrática en forma desarrollada o estándar dada al sumar el área de cada uno de los rectángulos que lo conforman y una expresión factorizada que se obtiene como el producto de las magnitudes de los lados. El siguiente es un ejemplo extraído de Alfa 8 en donde la Figura 2 se construye a partir de rectángulos azules con lados de longitud x, rectángulos verdes con lados de longitud x y 1 unidad y cuadrados amarillos con lados de longitud de 1 unidad. Las expresiones del área obtenidas son: $12x^2 + 23x + 10 = (3x +2) (4x + 5)$, mostrándose la equivalencia de las expresiones al desarrollar el producto indicado en la expresión factorizada y al aplicar los métodos de factorización obtenidos con este material.

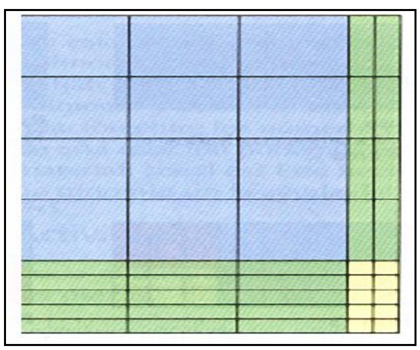


Figura 2. Factorización con el uso de material manipulable.

Las dos últimas propuestas se caracterizan en utilizar material manipulable, encasillando el valor de la x a un sólo valor que se obtiene al medir, restándole a la letra o símbolo el carácter variacional que pueden tomar en las expresiones algebraicas. El material concreto permite facilitar la ejecución de las reglas algorítmicas para hallar la expresión factorizada, pero puede constituirse en un obstáculo para comprender otros conceptos como el de función.

Otros autores centrados en las manipulaciones algebraicas proponen procedimientos simples y generales para factorizar cualquier expresión polinómica cuadrática, algunos de ellos son:

- Biazey (1993) muestra un método para factorizar cualquier expresión cuadrática de una variable, método mejorado por Hoosain (1994),
- Meeks (1997) propone utilizar la fórmula cuadrática para reducir el tiempo en la enseñanza de la factorización de expresiones polinómicas, conectando sus soluciones con los factores y viceversa, usando la propiedad de los factores nulos (para un número real p y q, p*q=0, si y sólo si p=0 o q=0),
- Bosse (2000) preocupado por los fracasos de los ejemplos casuales presentados por el profesor en el aula de clase, propone algunas estrategias para hallar ecuaciones cuadráticas con ceros racionales y factorizables en los reales y
- Glaister (1993) propone utilizar para ecuaciones cuadráticas: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 > |ac|$, la reducción de la formula cuadrática para hallar la raíz positiva: $x_i = -c/b$.

1.4.2. Utilizando las NTI

Uno los trabajos relacionados con la enseñanza de la factorización de expresiones polinómicas y con el uso de las **NTI** se retoma del artículo no publicado: “El graficador como apoyo a la comprensión de conceptos algebraicos” de Sánchez (1997). Su propósito es mostrar como la función de graficación de una Calculadora Graficadora puede ser realmente útil para mejorar las conexiones de conceptos relacionados con el proceso de factorización. Los resultados de su trabajo son obtenidos al entrevistar y aplicar un cuestionario a 35 estudiantes de grado 6º de bachillerato de México cuyas respuestas ponen de manifiesto su limitada comprensión de la factorización de expresiones polinómicas, ya que mantienen aisladas sus ideas sobre conceptos íntimamente relacionados. Por ejemplo, no utilizan la gráfica de un polinomio para estimar raíces y/o factorizar. En la segunda fase se diseñaron actividades con la calculadoras graficadoras enfocadas a mejorar la comprensión. Según el autor, los resultados de estas actividades fueron alentadores.

Desde la aritmética se presenta el trabajo de García y Mora (2002) que parte de una situación problemática que hace uso de una la calculadora graficadora algebraica (TI 92) que permite la exploración dirigida al descubrimiento y formulación de conjeturas. Se utilizan la instrucción Factor ( ) de la aplicación Home de la calculadora TI-92, que permite obtener los factores de un número entero, facilitándoles a los alumnos el descubrimiento de características comunes que le dan la posibilidad de plantear conjeturas. La experiencia permitió la participación activa de los alumnos en la exploración matemática, en contraste a la recepción pasiva que promueve un conjunto de hechos y algoritmos que conllevan a restricciones impuestas por las dificultades de los cálculos manuales.

Bajo la perspectiva de la generalización, Ruthven (1989) presenta algunas actividades con el uso de una calculadora graficadora algebraica. Una de las actividades se centra en la relación de la aritmética y la factorización algebraica; evaluando diferentes valores de n para la expresión $an^2 + bn + c$, con a, b y c fijos en una Calculadora Graficadora Algebraica.

El objeto es hallar patrones de comportamiento en los resultados para dirigir al estudiante a predecir la factorización de la expresión. Otra de las actividades se centra en el uso de la graficación de familias de parábolas relacionándose la forma simbólica con la gráfica de un polinomio y dada la expresión algebraica predecir el comportamiento gráfico. También se muestra que utilizándose algunas funciones de manipulación algebraica de una Calculadora Graficadora Algebraica, como factorizar, expandir y simplificar, se puede inducir a los estudiantes a obtener la expresión factorizada y verificar la igualdad en expresiones como $(a+n)(a+m)$ y $a^2+(m+n)a+mn$. Complementado las anteriores actividades con el uso de las representaciones numéricas y gráficas se puede desarrollar el teorema del factor. Para ello se propone graficar en la misma ventana la expresión algebraica cuadrática con cada uno de los factores, explorándose además las relaciones entre los signos de los factores y del polinomio.

Aprovechando las posibilidades de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas de obtener rápidamente diferentes gráficas en la misma pantalla, son diversos las actividades en la que se proponen explorar los cambios de las gráficas. Uno de estos trabajos son las actividades propuestas Edwards (1996) y Owens (1992) en donde se miran los cambios gráficos al variar los parámetros a, b y c de la expresión $y = ax^2+ bx +c$. El trabajo de Hurwitz (1995) en donde se exploran los cambios de las gráficas $y_1 = ax^2$ y $y_2= -bx - c$, para determinar el número de raíces y deducir el discriminante de la ecuación $y=ax^2 +bx +c$ con $a >0$, es un método distinto al de hallar los interceptos de la gráfica con el eje x. Otro trabajo son las actividades propuestas por Craine (1996) en donde se aproxima la fórmula cuadrática al estudio de las ecuaciones y funciones mediante las variaciones gráficas y el trabajo de Goel y Reid (2001) en la que describen cinco actividades en donde las gráficas obtenidas por una **NTI** ayudan a que el estudiante descubra el teorema fundamental del álgebra.

Bajo la perspectiva de los Organizadores del Currículo, se retoma la Unidad Didáctica elaborada por Rico, Segovia y Bedoya (2000) titulada "Introducción a la función Cuadrática". En relación con la factorización de expresiones polinómicas, se retoma la forma factorizada de la función cuadrática y se intenta establecer sus relaciones con otras formas simbólicas y su gráfica, en particular se conecta la relación de los factores con los cortes con el eje x. En general la Unidad Didáctica se caracteriza por asignarle significado a los conceptos y procedimientos a través de establecimiento conexiones internas en los sistemas de representación (formas simbólicas, traslaciones y dilataciones en los gráficos) y externas (parámetros de las formas simbólicas y características de la expresión gráfica), posibilitando simplificar procedimientos gracias a lo anterior y a la utilización de la Calculadora Graficadora Algebraica.

Las anteriores son algunas de las experiencias en el aula y actividades propuestas relacionadas con la factorización de expresiones polinómicas, en los que se muestran sus diferentes tratamientos y relaciones con otros conceptos y procedimientos, desde diferentes perspectivas de enseñanza. Algunas de ellas fueron fuente de ideas para la elaboración de las actividades que se presentan en este trabajo.

Al comparar las publicaciones internacionales y nacionales, la gran mayoría de las propuestas de actividades para el aula con el uso de las **NTI** y la factorización de expresiones polinómicas son internacionales, sin embargo no se descarta que a nivel nacional existan otras trabajos que no se hayan retomado en la consulta al igual que otros internacionales. Aunque se realizó una amplia búsqueda bibliográfica, es posible que la falta de acceso a los trabajos nacionales se deba a varias razones: que no estén publicados, que los medios de difusión nacionales de estas innovaciones no sean las adecuadas o sea el resultado de la falta de investigación, formación de docentes, equipo adecuado que aún no cubre la totalidad del país. Se debe tener en cuenta que la incorporación de las **NTI** viene paulatinamente cubriendo las aulas, el **MEN** está trabajando en ella, creando diferentes medios de difusión como su página Web, documentos como los lineamientos curriculares, dotación de **NTI** a diferentes instituciones e involucrando las universidades públicas del país para crear espacios para la formación de profesores.

Esta propuesta innovadora en la enseñanza del álgebra se vincula a la línea de Formación **EM&NT** del grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle que se presenta y se sustenta en los siguientes capítulos, uniéndose a los propósitos del **MEN** y alentando otras posibles investigaciones y diseños de actividades.

2. ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

2.1 EL PAPEL DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EL CURRÍCULO

Este trabajo se enmarca en la propuesta metodológica concebida en el ámbito académico como Análisis Didáctico, tomándose de la variedad de definiciones el estructurado por los estudios realizados en Didáctica de la Matemática del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico del Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada. El término Análisis Didáctico que se asume se define como un procedimiento centrado en un contenido y contexto determinado, con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades o Unidades Didácticas de enseñanza y aprendizaje, así como el desarrollo de proyectos curriculares o de investigación con base al Conocimiento Didáctico Matemático (Gómez, 2002a p.2; Gómez y Rico 2002a, p. 20 y Bedoya 2002, p. 42). Dadas las características de este trabajo, el Análisis Didáctico provee las herramientas necesarias para el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de la factorización de expresiones polinómicas con el uso de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas. Por lo cual, al asumirse esta perspectiva se ha desarrollado un trabajo que se estructura bajo cada uno de los componentes que integran en su conjunto el Análisis Didáctico.

El Análisis Didáctico se constituye con las distintas actividades de concreción del modelo didáctico, pensado y fundamentado, metodológica y teóricamente desde la doble perspectiva del conocimiento curricular y didáctico, esto es, desde los Fundamentos del Currículo (global y local) y de la Didáctica de las Matemáticas. Su objetivo es la formación profesional (teórica y práctica) de los educadores matemáticos, el desarrollo, innovación y concreción de los currículos locales y el mejoramiento de la actividad o práctica profesional concreta de los profesores de matemáticas (Bedoya, 2002).

Para efectuar el Análisis Didáctico se proponen cuatro componentes: el Análisis Matemático o de Contenido, el Análisis Cognitivo, el Análisis de Instrucción y el Análisis de Actuación (Gómez y Rico, 2002a, p.34). En este trabajo se ha determinado un análisis más específico y extenso de las **NTI**[•] retomando los resultados de su uso y efectos en la educación matemática de investigaciones en el aula, especificándose un nuevo componente: el Análisis de la Tecnología. También al considerarse un conocimiento específico del currículo que cubre al grupo de estudiantes participantes de esta propuesta, se incluye otro componente adicional: el Análisis Curricular.

Para aclarar o especificar algunos detalles del desarrollo de los componentes del Análisis Didáctico se describen a continuación algunos de los aspectos a tratar en cada uno de ellos:

- **Análisis Curricular:** se revisa el currículo de matemáticas que abriga al grupo de estudiantes participantes desde tres niveles de concreción: el *nacional* retomándose algunos de los documentos del Ministerio de Educación Nacional,

[•] Nuevas Tecnologías Informáticas

el *institucional* que se determina en la revisión del proyecto educativo institucional y el plan de estudios de matemáticas de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali y el *del aula* en la que se tienen en cuenta el plan área, los libros de texto Alfa 8 y Alfa 9 y los cuadernos de álgebra de los grados 8º y 9º de uno de los estudiantes.

- **Análisis Matemático o de Contenido:** es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula teniendo en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico) (Gómez, 2002b, p.285). La *estructura conceptual* es la descripción, a nivel de conceptos, procedimientos y algunas de sus relaciones, de la estructura matemática en cuestión, teniendo en cuenta los diferentes *sistemas de representación* y el *análisis fenomenológico* que consiste en la identificación de las subestructuras correspondientes a la estructura matemática, de los fenómenos organizados por ellas y de la relación entre subestructuras y fenómenos (Gómez y Rico, 2003, p. 34). En esta componente también se tiene en cuenta el conocimiento científico matemático que media al conocimiento matemático escolar y algunos aspectos históricos-epistemológicos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.
- **Análisis Cognitivo:** el desarrollo de esta componente consiste en la revisión y descripción de algunas investigaciones relacionadas con las dificultades y errores de los alumnos en tareas relacionadas con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Este análisis permite prever las actuaciones de los escolares en el desarrollo de las actividades de enseñanza y aprendizaje que en

este trabajo se proponen (Gómez, 2002b, p. 272). Algunos de los trabajos que se retoman para la elaboración de este componente son el de Socas (1997), Gallardo y Rojano (1998), Camacho y et al. (1996), Palarea y Socas (1997), Sánchez (1997) y Ruiz (1998).

- **Análisis de la Tecnología:** consiste en la revisión bibliográfica, de las investigaciones en educación matemática con relación al uso de las **NTI** en particular con el uso de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas y la enseñanza del algebra, incluyéndose la justificación curricular del uso de la tecnología en la educación colombiana. Algunos de los documentos consultados para el desarrollo de esta componente fueron: Demana y Waits (2000), Hitt (2000), Kissane (1999), Kuztler (2000), MEN (1999), Moreno (2002), Kaput (1992), Gómez (1997), entre otros
- **Análisis de Instrucción:** consiste en la realización, descripción y justificación de todos los procesos en el diseño, planificación e implementación de la Unidad Didáctica o actividades. De la variedad de tareas compatibles con los Análisis Cognitivo, Curricular, de la Tecnología y de Contenido se procede a seleccionar y justificar algunas de esas tareas para ser incorporadas en el diseño de las actividades o Unidades Didácticas de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002b, p. 288).
- **Análisis de Actuación:** Se centra en la descripción de la manera como los estudiantes abordan las tareas (p. 284). Los resultados son descripciones sistemáticas de la comprensión de los escolares con el propósito de proporcionar información que sea útil para el inicio de un nuevo ciclo del análisis didáctico. Esta descripción debe hacerse, por un lado, en términos de las tareas que los

escolares han resuelto. Las tareas efectuadas pueden ser indicadores del conocimiento adquirido en ese ciclo del análisis didáctico y de las dificultades y obstáculos que los escolares no superaron (Gómez y Rico, 2002b, p. 45). Esta componente es presentada en la sección análisis de los resultados.

La elaboración e integración de cada uno de los anteriores componentes da en su globalidad lo que se ha denominado Análisis Didáctico, del cual, se espera en parte, obtener el diseño de actividades en torno a la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Las actividades o Unidad Didáctica que se proponen no corresponden a la única posibilidad deducible del Análisis Didáctico. Las riquezas de las estructuras matemáticas desde la perspectiva didáctica y la complejidad de los procesos cognitivos necesarios para su comprensión implican una gran variedad de diseños que son compatibles con un mismo Análisis Didáctico (Gómez, 2002a, p. 7).

En cuanto a la manera de abordar los componentes del Análisis Didáctico, Gómez y Rico (2002a) consideran que el contenido matemático es el eje central y por lo tanto el Análisis Matemático o de Contenido se considera como el punto de inicio y de referencia en el proceso. Dado que se considera que las herramientas conceptuales y metodológicas en las que se basa el Análisis Didáctico, adquieren sentido cuando se utilizan para analizar los diferentes significados de la estructura matemática. El Análisis Matemático junto con los Análisis Curricular, de la Tecnología, Cognitivo y de Instrucción permiten previamente diseñar las actividades y planificar la gestión de clase (prever actuaciones de los estudiantes).

Dado que durante la puesta en práctica de las actividades, los procesos cognitivos de los estudiantes para construir el conocimiento matemático pueden ser diferentes a lo esperado, se requiere que el profesor o el investigador realicen durante la gestión de la clase nuevos ciclos del Análisis Didáctico. Reformulándose parte de lo planificado para la clase, conllevando a diseñar nuevas actividades centradas en otros objetivos y contenidos que aborden las dificultades, obstáculos y errores no previstos (Gómez, 2002a, p. 44). Posteriormente se procede a efectuar el Análisis de Actuación que utiliza las observaciones, registros de las producciones y actuaciones de los estudiantes de la puesta en práctica y los otros análisis para evaluar la actuación de los alumnos y producir una descripción de su estado cognitivo que alimenta una nueva iteración del ciclo (Gómez, 2002a, p. 6).

Los procesos efectuados para el desarrollo del Análisis Didáctico pueden ser dispendiosos, ya que en ocasiones se cuenta con una amplia información. Un ciclo termina cuando el profesor o el investigador lo decidan, según las condiciones de su trabajo. Por lo cual los diferentes Análisis Didácticos en torno a un contenido matemático en particular, conformarán los cimientos para nuevos ciclos del Análisis Didáctico en los que se espera puedan ser mejorados con los resultados del Análisis de Actuación de la propuesta anterior.

2.2 ANÁLISIS DIDÁCTICO, ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO Y UNIDADES DIDÁCTICAS

Al efectuar cada uno de los componentes del Análisis Didáctico se pone en juego una serie de conocimientos que, en conjunto, se denominan Conocimiento Didáctico. Este Conocimiento Didáctico está compuesto por unas herramientas teóricas y conceptuales que

Rico (1997) denomina Organizadores del Currículo. Por lo tanto, se definen como Organizadores del Currículo, aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de Unidades Didácticas (Rico y Segovia, 2001, p.102). Son considerados elementos teóricos y metodológicos, mediadores, articuladores del Análisis Didáctico y sistemas de conocimientos que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos escolares (Bedoya, 2002, p.55).

Por lo cual, un organizador del currículo no puede considerarse simplemente como un ítem producto de la inspiración de un grupo de personas. Un organizador del currículo cumple con varias características; como ser objetivo, estar disponible en fuentes de información en la que sea posible profundizar y crear un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, propiciar un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático y brindar unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Con respecto a las Unidades Didácticas, los Organizadores del Currículo establecen distintos marcos de estructuración, con una base objetiva de interpretación y discusión. Mientras que en el conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas, se da una estructura mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores ha dicho contenido (Rico, 1997, pp. 46-47).

Para Rico y Segovia (2001) los Organizadores del Currículo deben proporcionar criterios para:

- Organizar y estructurar cada uno de los campos conceptuales.

- Organizar y secuenciar las dificultades que se prevén en cada caso.
- Delimitar los campos de aplicaciones y fenómenos en que se va trabajar
- Determinar los preconceptos y errores previsibles, así como si conexión con la estructura del campo conceptual.
- Conectar cada campo conceptual con algún momento relevante en la historia (p. 102).

Teniendo en cuenta las anteriores aportaciones, el grupo de investigación de Pensamiento Numérico Algebraico a clasificado los organizadores del currículo en: errores, dificultades y problemas u obstáculos de aprendizaje; diversidad de representaciones y modelización; fenomenología de los conocimientos implicados; diversidad de materiales y recursos para la enseñanza; y evolución histórica de cada campo (Gómez, 2001, p. 5). Cada uno de los diferentes componentes del Análisis Didáctico se ven mediados por los anteriores organizadores del currículo.

2.2.1 Los sistemas de representación y la comprensión

En este apartado se presentan algunas consideraciones teóricas en relación al organizador del currículo: "diversidad de representaciones" y la actividad de aula (Unidad Didáctica). En primer lugar se abordan algunos aspectos referentes a la comprensión y el papel de las representaciones en este proceso. En aras de justificar la importancia de explicitar una reflexión acerca de la comprensión en la actividad investigativa que incumbe este trabajo, se retoma la idea de comprensión de Hiebert y Carpenter (1992, p.67)[2] concretada en los siguientes términos:

---

[2] Hiebert, J. & Carpenter, T.(1992), Learning and teaching with understanding. En: Grouws, D. A., (ed.), Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan Publishing Company. Tomado de Romero, Isidoro. (2001) Representación y comprensión en el pensamiento numérico. En: Cuarto

> Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes.

De acuerdo con lo anterior, los procesos de comprensión de un objeto matemático están mediados por la forma de manipulación y coherencia de las representaciones externas con las internas (por el número de conexiones), lo que significa que es importante observar y movilizar las interrelaciones entre las diversas representaciones de un objeto determinado. Diversos autores como Duval, Goldin, Kaput y Rico aportan elementos teóricos diferentes a este tema. En nuestro caso estos aportes han permitido la reflexión en torno a las diferentes representaciones de los conceptos y procedimientos relacionados con la factorización y su papel en la comprensión de este objeto matemático.

Simposio de la Sociedad española de Investigación en educación Matemática. Universidad de Huelva publicaciones. pp. 35 - 46

Se entenderá por representación a una configuración de algún tipo (Palmer, 1977)[3]. Según Goldin y Kaput (1996) existen dos tipos de representaciones, mencionadas en el párrafo anterior: las internas y las externas:

Una representación interna se refiere a las posibles configuraciones mentales de los individuos y una representación externa se refiere a personificaciones físicas, configuraciones observables como las palabras, gráficos, cuadros, ecuaciones, o micromundos computacionales. Éstos son en principio accesibles a la observación por cualquiera conocimiento apropiado. Desde luego la interpretación de representaciones externas como pertenecientes a los sistemas estructurados, y la interpretación de sus relaciones representadas, no son "objetivas" o" "absolutas" pero si dependen de las representaciones internas del individuo(s) que hace la interpretación (p. 398).

Por lo cual, se entenderá como sistema de representación, un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto. Esta definición va ligada a la definición de Kaput (1992) de sistema de notación: sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)" (p. 523).

---

[3] Palmer, S. E. (1977). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization.* Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates. Tomado de Goldin, G y Kaput, J. (1996) A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. En: Theories of Mathematics learning. Estados Unidos de América. LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, PUBLISHERS. p. 398

Desde el campo teórico presentado por Duval (1999), se determina que las representaciones semióticas además de permitir la comunicación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma (p. 14). Las representaciones mentales se efectúan como una interiorización de las representaciones semióticas y dadas la pluralidad de sistemas semióticos se produce un aumento en las capacidades cognitivas de los sujetos y por ende de sus representaciones mentales (p.15). Para él, no puede haber comprensión sino se distingue el objeto de su representación, ya que un objeto puede darse a través de representaciones muy diferentes, para ello es necesario utilizar más de dos representaciones diferentes de un mismo objeto (p. 13). Desde esta perspectiva, uno de los requerimientos cognitivos necesarios y fundamentales de la actividad matemática es el poder cambiar de sistema de representación.

Ante la variedad de las representaciones externas de un objeto matemático, Rico (2000) ha determinado que cada representación pone manifiesto algunas de sus propiedades revelantes y aunque cada sistema de representación destaca alguna propiedad importante del concepto representado, a su vez puede dificultar la comprensión de otras propiedades (Castro y Castro, 1997, 103). Desde una perspectiva cognitiva, se ha determinado que cada concepto o estructura matemática necesita para su total comprensión del empleo adecuado y combinado de más de un sistema de representación (Rico, 2000).

En este trabajo se acogerá el concepto de sistemas de representación dado por Kaput (1992) y se retoma los 4 tipos de actividades matemáticas que propone en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que Gómez y Carulla (2001) han ejemplificado en torno a la función cuadrática. Con base a estos ejemplos, se dan algunos relacionados con la factorización de las expresiones polinómicas cuadráticas, propuestos como tareas en la Unidad Didáctica presentada en este trabajo:

- *Transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos.* Se genera cuando se procede a transformar una expresión polinómica cuadrática factorizada a una expresión polinómica cuadrática estándar o desarrollada.
- *Traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de* notación. Se genera cuando se relacionan los valores de "2" y "3" de la expresión simbólica factorizada $y = (x - 2).(x - 3)$ con los cortes de la gráfica con el eje x, y con las filas de la tabla cuyo valor de la variable dependiente es "0".
- *Construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones.* Se refiere al proceso de representar, dentro de un sistema de representación matemático una situación que no está descrita en estos términos. Por ejemplo al hallar las medidas de un rectángulo de tal forma que, teniendo un perímetro fijo, se obtenga la mayor área posible.
- *Consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o "entidades cognitivas" que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.* Un ejemplo de esta actividad se puede dar cuando el sujeto pasa de ver la factorización como un procedimiento para obtener una expresión equivalente a la expresión desarrollada a ver la factorización como

la expresión que determina el número de ceros de una función (Teorema Fundamental del Algebra).

Las tres primeras actividades se relacionan con la utilización de los sistemas de representación, son detectables en los resultados de los estudiantes, mientras que la última se refiere a la manera como un manejo procedimental puede evolucionar y servir de base para la construcción de una visión conceptual de los objetos y las relaciones matemáticas, relacionada con los procesos cognitivos de aprendizaje del sujeto. Esta última actividad es considerada la de mayor complejidad, a la cual se llega con el trabajo de las otras actividades y se espera se llegue en todo proceso de enseñanza- aprendizaje.

2.2.2 Unidad Didáctica

Una Unidad Didáctica es "una programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos". Constituyen la concreción de las directrices curriculares y didácticas centradas en un grupo de estudiantes en un contexto determinado en relación a un contenido matemático (Bedoya, 2002, p. 87). Cada una de las actividades de aprendizaje se planifica en secuencia, incluyéndose la evaluación, para facilitar a los alumnos construir el conocimiento matemático (Gómez, 2002a, p. 7).

Se considera que la Unidad Didáctica es el punto de confluencia entre la teoría y la práctica, puesto que lleva tras de sí toda una reflexión sobre el "modelo didáctico" que se quiere plasmar en el aula. Se constituye en un conjunto de ideas e hipótesis de trabajo que incluyen tanto los contenidos de la disciplina y los recursos necesarios para el trabajo como las metas de aprendizaje y estrategias para ordenar y regular en la práctica escolar los diversos contenidos de aprendizaje (Fernández y et al, 1999, p.14). Bajo la anterior definición una Unidad Didáctica es una "hipótesis de trabajo" con la que se espera que mediante una secuencia de actividades, se alcancen un aprendizaje significativo de las habilidades, actitudes y conceptos que se consideran deseables para los alumnos (p. 29).

El diseño de una Unidad Didáctica se realiza en la selección y organización de los contenidos; el desarrollo y control de los procesos de enseñanza; la observación y seguimiento de los procesos de construcción, la adquisición del conocimiento, la modificación y evolución de los esquemas o estructuras cognitivas, y la asignación y comprensión de significados por parte de los alumnos; requiriéndose también, el análisis, valoración y evaluación de todos los procesos anteriores, logros y resultados y al tratamiento de los errores y dificultades. Todo conlleva a que el profesor aplique sus conocimientos didácticos y reflexione en torno al conocimiento matemático escolar y sus efectos de ser enseñado y aprendido (Bedoya, 2002, p. 55).

Al hacer referencia al diseño de actividades, no se restringe sólo a actividades inéditas, la estructura matemática genera multitud de tareas, disponibles en libros de textos, literatura de investigación e innovación curricular. El problema se centra en seleccionar y justificar un grupo de tareas que estén en coherencia con los contenidos y objetivos propuestos al inicio del ciclo y con los resultados de los Análisis Matemático, Curricular, Cognitivo y de la Tecnología (Gómez y Rico, 2002b, p. 40). Las actividades seleccionadas para conformar la Unidad Didáctica dan cuenta de los contenidos, objetivos y demás aspectos de los distintos procesos del Análisis Didáctico.

2.3 ALGUNOS DE LOS COMPONENTES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO Y EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Se exponen a continuación los Análisis Matemático, de la Tecnología y Cognitivo con relación al problema de investigación, permitiendo conocer algunos de los aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, necesarias para el diseño de las actividades que se proponen en este trabajo. Los Análisis de Instrucción, Curricular y de Actuación con relación al problema de investigación se abordan en los capítulos siguientes.

2.3.1 Análisis Matemático

El Análisis Matemático, es el análisis de la estructura matemática a tratar, desde la perspectiva del conocimiento matemático escolar. Se tiene en cuenta la estructura conceptual, los sistemas de representación, los modelos (análisis fenomenológico) y una reflexión histórica epistemológica de los conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.

2.3.1.1 La factorización de expresiones polinómicas cuadráticas y las matemáticas escolares

Al efectuar la revisión de diferentes libros de textos de álgebra, se encuentran diversas definiciones del término factorización de expresiones algebraicas. Algunas de estas definiciones son las siguientes:

- es el proceso que consiste en hallar los factores primos en que se puede descomponer una expresión algebraica (Bedoya y Londoño, 1985, p. 138).
- Es la operación inversa a la multiplicación (Barnett y Uribe, 1988, p. 83; Bellman y et al., 2000, p. 471)
- Es convertir la expresión algebraica al producto de otras expresiones algebraicas (Camargo y et al. 2002, p. 139).
- Es el proceso inverso de la multiplicación, en donde se dice que un polinomio está completamente factorizado cuando esta escrito como el producto de sus factores primos. (Barnett, 1978, p. 43)

Revisando las anteriores definiciones, al afirmarse que la factorización es sólo hallar un producto de factores irreducibles, descarta la posibilidad de equivalencias con otras factorizaciones de factores no primos. Convertir una expresión en forma de producto de otras expresiones algebraicas o considerarla sólo como el proceso inverso de la multiplicación, no garantiza una factorización completa de la expresión algebraica. Por lo cual, es necesario tomar un definición que incluya las factorizaciones tanto de factores primos y no primos, por esa razón en la elaboración de este trabajo se toma la última definición presentada por Barnett (1978).

Es pertinente tener en cuenta que la factorización de un polinomio depende del anillo de polinomios considerado (Suárez, 1994, p. 170). Por ejemplo, $x^2 + 1$ no se puede factorizar en el anillo de los Reales, es decir, es irreducible o primo, mientras que en el anillo de los Complejos tienen dos factores primos. En los primeros años de la enseñanza del álgebra en la educación básica secundaria, la factorización de las expresiones algebraicas se considera en el anillo de los reales, por lo tanto no todas las expresiones algebraicas se pueden convertir en un producto de expresiones de la forma $(x - a)$.

En los libros de texto la factorización es presentada como un contenido independiente, algunas veces como una unidad, en la que se les muestran diferentes técnicas para efectuar la factorización a través del lápiz y papel. Algunos libros antes de introducir las técnicas, intentan que los estudiantes las construyan a partir de algunas actividades como las que utilizan material manipulable para construir rectángulos y al hallar su área obtener la expresión factorizada (Bellman y et al.. 2000 y Camargo y et al. 2002). Posteriormente, en otras lecciones se retoma como un método para resolver ecuaciones y desigualdades, junto con la propiedad del producto nulo para hallar los ceros de una expresión, también es utilizada al efectuar operaciones con fracciones algebraicas y para expresar áreas y volúmenes.

Según Kieran (1994) desde finales del siglo XIX cuando el álgebra se introduce como materia escolar, hasta el momento han permanecido casi inalterables sus contenidos y su secuencia, conservando su carácter estructural[♣]. La factorización de expresiones es un ejemplo de los aspectos estructurales del álgebra superior tradicional que permanece como una actividad regular en la enseñanza del álgebra.

[♣] Estructural se refiere a un conjunto de operaciones que se hacen, no sobre números, sino sobre expresiones algebraicas

Para determinar la expresión factorizada de una expresión polinómica se encuentran el saber escolar diversos métodos, algunos de ellos se exponen en la Figura 3. El uso de estos métodos no es equilibrado, las manipulaciones de lápiz y papel por medio de técnicas son las de un uso mayor. Se muestra un ejemplo de un método con la utilización de la Calculadora Graficadora Algebraica TI-92 plus, sin descartar otros **NTI** que pueden realizar funciones similares.

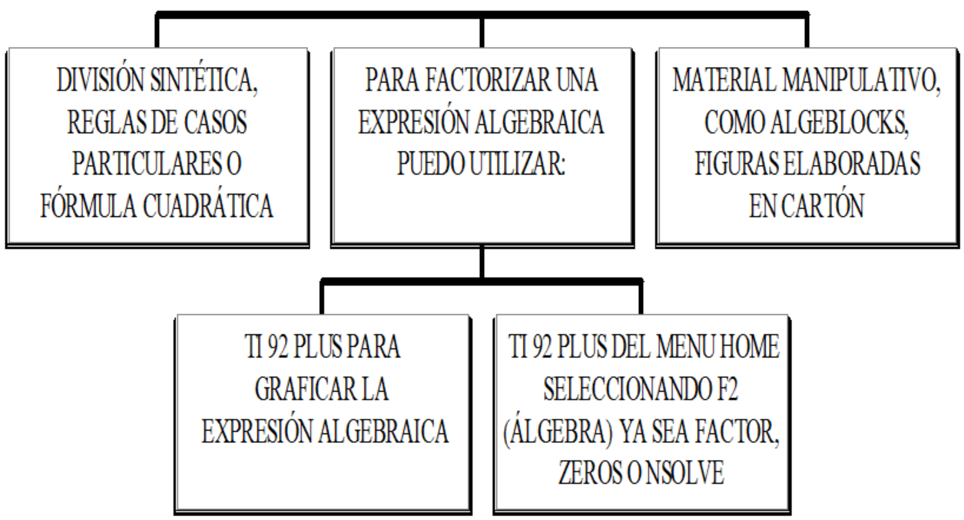


Figura 3. Métodos para factorizar una expresión algebraica.

Es usual que los profesores en práctica elaboren su plan de ejecución con base a los libros de texto (Kieran, 1994), considerando que lo que allí se presenta es lo pertinente a enseñar. Sin embargo dentro del saber sabio o conocimiento científico matemático, se encuentran diversos teoremas y corolarios relacionados con la factorización de expresiones polinómicas, que en los libros de textos son presentados de manera informal y sin ser explícitos, pasando desapercibidos u olvidados, descartando otros aspectos de interés. Por lo cual, en esta sección se exponen algunos de estos teoremas con la intención de guiar, hacer evidente las conexiones de la factorización con otros conceptos y ratificar su importancia en la enseñanza del álgebra (ver Tabla1).

Tabla 1. Teoremas y corolarios extraídos de Suárez (1994).

TEOREMAS	**COROLARIOS**
$F \subset K$ cuerpos **Del residuo:** Si $f(x) \in F[x]$, es un polinomio, $a \in K$ entonces $f(a)$ es el residuo de dividir $f(x)$ por x-a en $K[x]$.	$a \in K$ es un cero si $f(a) = 0$ - **Del factor**: $a \in K$ es un cero de $f(x) \in F[x]$, si sólo si x-a es un factor de $f(x)$ en $F[x]$ - Sean $a_1, a_2, \ldots a_r$ en K; entonces $a_1, a_2, \ldots a_r$ son ceros de $f(x) \in F[x]$, si sólo si $f(x)$ es divisible por $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x-a_3)$. - Un polinomio $f(x) \in F[x]$ de grado n si tiene a lo sumo n ceros distintos en K.
Fundamental del álgebra: todo polinomio en los complejos de grado $n \geq 1$ tiene por lo menos un cero real o complejo	De este se sigue: - Si $f(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ en los Complejos **(C)** entonces $f(x)$ se factoriza en n factores lineales en $C[x]$
De factorización única: Todo polinomio $f(x) \in F[x]$ con grado >0 puede expresarse en la forma $f(x) = cp_1(x)p_2(x)\ldots p_r(x)$ donde $c \neq 0$ en F y los $p_i(x)$ son polinomios mónicos irreducibles en $F[x]$.	

Las anteriores proposiciones se han determinado para polinomios, entendiéndose por ellas como las expresiones de la forma: $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 \ldots = \sum a_k x^k$, $a_i \in F$, (Ayres, 1969, p. 124).

En el álgebra escolar se asumen varios sistemas de representación con relación a la factorización de expresiones polinómicas. En las actividades que se presentan en este trabajo algunos de estos sistemas de representación toman algunas características especiales por el uso de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas:

- **Sistema de Representación Gráfico:** se acota a las representaciones en el plano cartesiano, asumiéndose su lenguaje y reglas sintácticas (ver Figura 4). Una de las facilidades de la graficación con la Calculadora Graficadora Algebraica es obtener varias gráficas simultánea y rápidamente, favoreciendo ver los cambios de las parábolas al variar uno de sus parámetros, tomando como base para las descripciones los elementos de la gráfica (vértice, convidad, ramas, puntos y ceros), facilitándole al estudiante formular conjeturas sobre el comportamiento de los diversos elementos de la parábola (Edwards, 1996, p. 144).

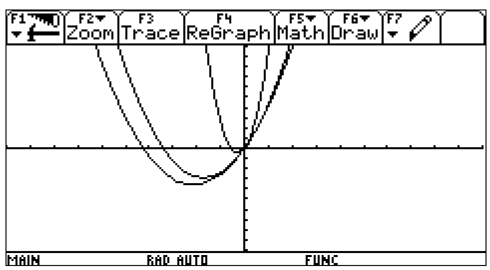


Figura 4. Representación gráfica de $y = ax^2+bx+c$ obtenidas al variar "a" en una TI-92 plus.

- **Sistema de Representación Numérico:** se relaciona con los valores numéricos que toma la expresión (ver Figura 5). Estos a veces se agrupan en tablas, permitiendo visualizar la relación entre parejas de datos, proporcionando una visión cuantitativa y discreta de fácil interpretación. Esta información puede ser parcial e insuficiente puesto que de ella difícilmente se extraen las características globales de dependencia desde una perspectiva funcional, a menos que se conozca el modelo o tipo de dependencia (Moreno, 1998, p. 161). Utilizando las Calculadoras Graficadoras Algebraicas u otra **NTI** se obvia lo anterior, ya que su uso permite encontrar rápidamente la expresión algebraica que más se ajusta a la tabla de valores, evitando los excesivos cálculos que subyacen en las regresiones. El uso de **NTI** permiten hallar valores numéricos como los ceros, máximos, mínimos y otros puntos de interés de la gráfica facilitando interacciones poco usuales en la enseñanza (ir del sistema de representación gráfico al numérico).

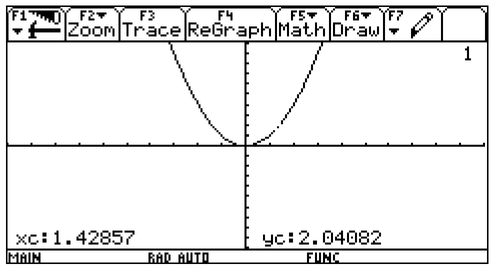


Figura 5. Obtención de valores numéricos a partir de una gráfica en una TI-92 Plus.

- **Sistema de representación simbólico:** en este sistema de representación se utiliza el lenguaje propio del álgebra, ajustándose a las reglas que conforman la estructura algebraica (ver Figura 6). Las representaciones simbólicas para las expresiones polinómicas de usual tratamiento en la enseñanza del álgebra son: la estándar o desarrollada, la factorizada y la canónica, en donde se puede mirar sus equivalencias y el significado de cada uno de sus parámetros (Carulla y Gómez, 1999, p. 9). Las fórmulas o representaciones simbólicas, cuando es posible establecerlas, permiten obtener las características globales de la dependencia con mayor precisión que otras representaciones, pero con mayor dificultad. El lenguaje algebraico presupone conocer el significado de los símbolos y operaciones que se utilizan (Moreno, 1998, p. 161).

En relación con otros sistemas de representación, es el de mayor énfasis en los cursos de álgebra en la enseñanza tradicional, reforzado por la creencia en los estudiantes del poder de las operaciones formales con expresiones algebraicas. Según Sierpinska (1989b)[4] el álgebra aunque solucionó el obstáculo epistemológico de la diferenciación entre números y magnitudes, trajo consigo otros, como concebir las únicas relaciones dignas de estudio aquellas que podían ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones (Ruiz, 1998, pp. 62 y 63). Respecto al uso de la calculadora graficadora algebraica, gracias a la incorporación de un **CAS** se pueden manipular expresiones, ya sea para factorizarlas, multiplicarlas, derivarlas o integrarlas.

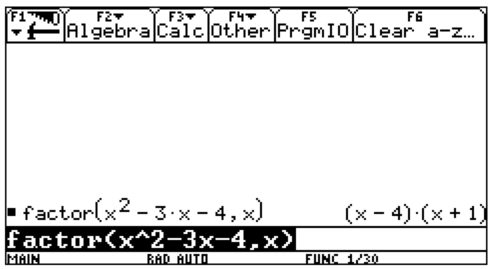


Figura 6. Factorización en una TI-92Plus.

- **Sistema de representación geométrico:** el lenguaje utilizado es el geométrico al igual que los conceptos. En la enseñanza del álgebra las expresiones factorizadas se relacionan con áreas de figuras geométricas o volúmenes de sólidos. Aunque la parábola geométricamente es una cónica, esta retoma en los cursos de cálculo junto con su representación simbólica del foco, por lo cual se descarta de las actividades. Dado que el área y volumen son ejemplos de dependencia entre diferentes elementos (lados, ángulos), a partir de la modelación de situaciones relacionadas con áreas se obtienen expresiones polinómicas cuadráticas cuya representación gráfica da origen a una sección de una

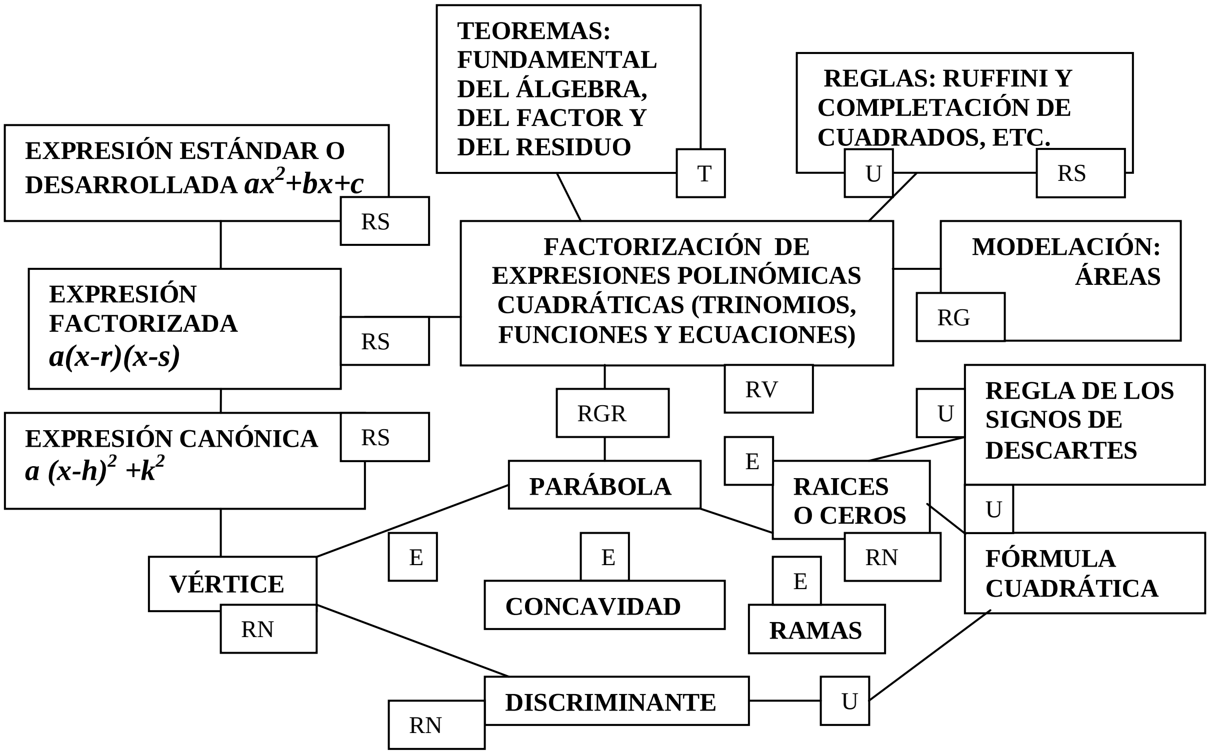
[4] SIERPINSKA, A. (1989b). On 15-17 years old students conceptions of functions, iteration of functions and attractive points. Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, preprint, 454. Citado por: RUIZ, Luisa. (1998) La noción de Función: análisis Epistemológico y Didáctico. Universidad de Jaén.1 edición.

parábola cóncava hacia abajo, involucrando problemas de optimización - el área máxima (Bedoya y et al., 2000, p.12).

- **Sistema de representación verbal:** el lenguaje natural hace parte de la comunicación necesaria para el desarrollo de cualquier tipo de actividad humana, dentro del quehacer matemático como en cualquier campo específico de estudio tiende a caracterizarse por un matiz especializado. Para la elaboración de las actividades el lenguaje natural es mediador que permite expresar los comportamientos y variaciones observados y representar situaciones del mundo real y de las matemáticas, modeladas por otros sistemas de representación (Carulla y Gómez, 1999, p. 10).

En cuanto a los fenómenos físicos, algunas situaciones se pueden modelar mediante expresiones polinómicas cuadráticas; como la caída libre, el movimiento parabólico, las formas arquitectónicas de construcciones como templos y puentes, el tratamiento de problemas de áreas de figuras geométricas y superficies reflectantes con sección parabólica como lámparas y lentes. (Bedoya y et al., 2000, p. 12 y 13). Sin embargo, respecto al concepto de la factorización no existe ningún problema o fenómeno que la genere, por lo cual se toman los fenómenos modelados por las expresiones cuadráticas, ya que la factorización es una de sus formas simbólicas.

Para determinar algunas de las diversas relaciones desde la perspectiva del álgebra escolar de los conceptos y procedimientos con respecto a la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas se presenta en la Figura 7 un diagrama de su estructura conceptual.



Convenciones: **E**: Elementos de la parábola, **U**: Se usa o se utiliza para, **T:** Referente Teórico, **RN**: representación numérica, **RG**: Representación geométrica, **RGR**: Representación gráfica, **RS**: Representación simbólica, **RV**: Representación verbal

Figura 7. Diagrama conceptual que esquematiza la estructura conceptual de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.

Dentro del término expresiones polinómicas cuadráticas se incluyen las ecuaciones, funciones y trinomios, cuya especificidad en este trabajo no se da, ya que el interés se centra en la factorización. Los conceptos y procedimientos se han ligado a través de una línea indicando las relaciones más cercanas, sin embargo no se descartan otras relaciones como el de la parábola con las expresiones simbólicas, el de la expresión factorizada con el uso de reglas, etc. En la estructura se tienen en cuenta las diversas representaciones, la parábola - representación gráfica, las expresiones factorizada, estándar o desarrollada y la canónica - representaciones simbólicas, los ceros y el vértice - representación numérica, áreas - representación geométrica, las reglas de manipulaciones algebraicas - representaciones simbólicas, considerándose la representación verbal como la que esta mediando a todas las anteriores representaciones, por cual se ha puesto en el punto de inicio de todas las relaciones. Se ha designado un cuadro en donde se exponen los teoremas y corolarios del conocimiento científico matemático como aquello media la matemática escolar (referente teórico).

Para especificar un poco con respecto a los conceptos y procedimientos tenidos en cuenta para la elaboración de las actividades, se listan algunos de ellos, que no son explícitos en la estructura conceptual:

- ***Conceptos:*** Rectángulo**,** área**,** expresión polinómica cuadrática (funciones, ecuaciones y trinomios)**,** parábola**,** factorización**,** plano cartesiano**,** ceros**,** vértice y concavidad.

- ***Procedimientos:*** Variación de uno de los parámetros de una expresión polinómica cuadrática, utilización de las características gráficas de la parábola en la solución de problemas, determinación del vértice, concavidad y ceros de una parábola, graficación de expresiones polinómicas cuadráticas**,** descripción del comportamiento de las parábolas y construcción de expresiones polinómicas cuadráticas factorizables.

2.3.1.2 Aspectos histórico-epistemológicos de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas

En este apartado se presenta algunas reflexiones histórico-epistemológicas del desarrollo de algunos conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, en las que se encuentra que la factorización de expresiones polinómicas se caracteriza por aparecer como herramienta en la resolución de ecuaciones, adquiriendo importancia como objeto matemático en la teoría de polinomios. Independientemente de la factorización, se muestra la evolución de algunos conceptos relacionados con las expresiones polinómicas cuadráticas como ecuación, función y polinomios.

- Las ecuaciones cuadráticas surgen desde civilizaciones como Babilónicos, egipcios y griegos en los contextos aritméticos y geométricos, para solucionar problemas cotidianos (Bedoya y et al, 2000 p. 16). Igualmente, las concepciones de dependencia también se remontan a esas épocas, los babilónicos estudiaron problemas relacionados con la astronomía como variaciones continuas tales como la luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales. Los griegos dieron a conocer las nociones de mayor influencia negativa en la evolución del concepto de función: la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la disociación entre número y magnitud (Ruiz, 1998, pp. 107-108).
- Hacia el siglo III Diofanto de Alejandría introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega *arithmos*, que significa número. Los problemas de álgebra prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería *"la teoría de ecuaciones"*. (Del Campo y et al, 2004).
- En el siglo VIII y IX, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita *x*, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces

cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio[5]. Uno de los árabes desatacados es Muhammad ibn Musa alKhwarizmi (780-850), con su libro *“Al-gebr w’al-muqabalh”.* En él, presenta la solución de seis tipos de ecuaciones que agotan todas las posibilidades de ecuaciones lineales y cuadráticas con raíz positiva (Boyer, 1986, p. 298). La novedad de su libro está en la variedad de métodos para resolver problemas típicos, que se extiende en forma paralela a los problemas que tienen la misma estructura (Vasco, 1985). Sus soluciones se basan en la completación del cuadrado, descartando los valores negativos de las raíces y de los coeficientes de la ecuación cuadrática (Allaire y Bradley, 2001, p. 308).

- En cuanto al trabajo de los matemáticos chinos se han encontrado diversos métodos para resolver ecuaciones de segundo grado, así como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Chu Shih- Chieh en su libro *“Espejo precioso de los cuatro elementos”* (1303) explica un método de transformación para ecuaciones, que el llama el *fan fa*, y cuyo fundamento debe haber aparecido en China mucho antes. Este método se conoce en Occidente con el nombre de “*método de Horner*” (Boyer, p. 267).
- El pensamiento de la edad media estuvo precedido por la idea de explicación racional de los fenómenos, por lo tanto a partir del siglo XII, las matemáticas tienden a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza. El desarrollo de la noción de Función se beneficia con aportaciones muy significativas de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. Filósofos como Grosseteste y Bacon, aseguran que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar fenómenos naturales (Ruiz, pp.111-112). En esta época se destaca Nicolás Oresme (1323-1382) con su obra “*De*

[5] Algebra. Al-Jwarizmi. Fibonacci. Abel. Números complejos. Historia Disponible en Internet en: http://html.rincondelvago.com/algebra_4.html

configurationibus qualitatun et motuum" donde desarrolla su teoría sobre latitudes de las formas (Moreno, 1998, p. 158). Oresme fue el primero en hacer un bosquejo primitivo de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones, el objetivo del gráfico era representar por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que depende de otra magnitud análoga. Estas intensidades estaban representadas por segmentos (Ruiz, p.113).

- Durante los siglos XV y XVII se distinguen dos direcciones fundamentales de desarrollo que benefician el desarrollo del concepto de función: un perfeccionamiento del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como rama particular dándose el estudio de las funciones trigonométricas. En esa época se destaca Galileo (1564 – 1642) quien hace un intento de establecer relaciones funcionales, buscando los resultados y las relaciones que provienen de la experiencia más que las que provienen de la abstracción (pp.116 –117).
- En el siglo XVI, Vieta fue el primero en utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado (distinción entre parámetro e incógnita) (Boyer, p. 387). Sin embargo como adopto un álgebra básicamente sincopada (aunque ya existían otros simbolismos), no lo logró escribir todas las ecuaciones cuadráticas bajo la forma única de $ax^2 +bx +c= 0$ (p. 386). Observó claramente las relaciones de los términos en la ecuación cuadrática (Mónica) y las raíces: el hecho de que el coeficiente del término en x es el negativo de la suma de las raíces y que el término constante es el producto de las raíces (Acevedo y Falk, 1997, p.57).

- Hasta finales del siglo XVI el método preferido para solucionar ecuaciones cuadráticas fue el de completar cuadrados (p.69), la primera vez que aparece la factorización como método de solución de algunas soluciones cuadráticas es en la obra de Harriot *"Artis analyticae praxis"* (1631) *(*p.57*)*
- A principios del siglo XVII, comienza a surgir una concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto incidirá notablemente en la evolución de la noción de función. El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat (1601-1665) y a Descartes (1586 – 1650) el descubrimiento del mundo de la representación analítica, traduciendo cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente (Ruiz, p.118). El libro de geometría de Descartes contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la *regla de los signos* para contar el número de raíces verdaderas y falsas de una ecuación.
- El surgimiento en las Matemáticas de la geometría Analítica aligeró la formación del análisis infinitesimal. Se convirtió en un elemento imprescindible para la construcción de la Mecánica de Newton, Lagrange y Euler. En las Matemáticas del s. XVII, este nacimiento significó la aparición de las primeras posibilidades para la creación del análisis de las variables. La primera etapa en la existencia del análisis fue la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió como una parte independiente de las matemáticas, casi simultáneamente de dos modos diferentes: en la teoría de las fluxiones de Newton y sus sucesores ingleses, y en cálculo de los diferenciales de Leibniz. En cuanto a utilización de la palabra función, aparece por primera vez en un manuscrito de Leibniz (Methodus tangetium inversa, seu de functionibus en 1673) usándose en el mismo sentido corriente que describe la función de un organismo, o en una máquina (pp. 121 –123).

- S. XVIII, Jean Bernouilli y Euler (a quien se le atribuye la notación actual f(x)) (Moreno, 1998, p. 158). Con ellos el concepto de función se desprende de muchas concepciones accesorias y toma una forma analítica (p. 125).
- Thomas Carlyle (1775-1881) utilizando el plano Cartesiano construye la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ para todos los valores reales de b y c, mostrando además cuando las soluciones no son reales (Allaire y Bradley, p. 308).
- Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) su tesis doctoral venía a demostrar que toda ecuación polinómica f(x) =0 tiene al menos una raíz, con los coeficientes reales o complejos. Su demostración se basa en consideraciones geométricas, lo que no resultaba del todo satisfactorio, publicando después dos nuevas demostraciones, pugnado por encontrar una demostración puramente algebraica (Boyer, p. 631).
- La teoría de conjuntos de Cantor se produjo en los últimos años del siglo XIX sirviendo de base a la actual teoría de funciones de variable real, a la topología, el álgebra, el análisis funciones, etc. Las definiciones actuales del concepto de función se basan formalmente en la noción general introducida por Dirichlet. (Ruiz, p. 133).

2.3.2 Análisis Cognitivo

Los aspectos cognitivos que aborda este trabajo aluden a los problemas de comprensión del sujeto de los objetos matemáticos en términos de dificultades y errores. Se han seleccionado aquellos relacionados con las tareas de la factorización de expresiones polinómicas y en particular con el tipo actividades que se proponen en este trabajo. Estos resultados de otras puestas en práctica de actividades de enseñanza, dan pautas para prever las actuaciones de los estudiantes en la fase de implementación de las actividades propuestas (Gómez y Rico, 2002b).

Las dificultades presentadas por los estudiantes suelen ser de diferente naturaleza, según Socas pueden ser clasificadas en las siguientes:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas (1997, p. 126).

Las dificultades son inevitables y forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático. Las dificultades de procedencia diferente se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en el alumnado, mediante errores. Para superar las dificultades es necesario en los procesos de enseñanza hacerlos explícitos para facilitarle al estudiante incorporar un saber nuevo (Palarea y Socas, 1997, p.17).

Muchas de las dificultades que presentan los alumnos en álgebra y que ponen de manifiesto en los errores que comenten, pueden ser explicadas como una falta de coordinación de registros de las representaciones (Palarea y Socas, 1997 p.22). Para algunos autores los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un sistema, y como un mayor problema, cuando hay una elección inadecuada de un sistema de representación al resolver un problema matemático (Hitt, 1998, p.14).

Algunas investigaciones como la de Gallardo y Rojano (1998) han determinado áreas de dificultad en el aprendizaje del álgebra elemental surgidas en el corte didáctico que se origina en el paso de la aritmética al álgebra. Los resultados de estas investigaciones centran las dificultades en:

- el significado de las letras
- el cambio a una serie de convenciones diferentes de las usadas en aritmética
- el reconocimiento y uso de estructuras (Palarea y Socas, 1997, p. 10)

Para Rico (1995) los errores hallados en las prácticas de enseñanza pueden contribuir en el proceso de aprendizaje, creando la necesidad de preverlos en vez de culpabilizar a los alumnos, teniéndose en cuenta que hacen parte de cualquier proceso de instrucción y no ocurren al azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente basado sobre conocimientos adquiridos previamente. Los errores al ser las expresiones de los alumnos reflejan el carácter incompleto de su conocimiento y permite a sus compañeros o a su profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o comprender por si mismo aquello que estaba mal.

Una de las mayores dificultades radica en la adquisición del lenguaje algebraico, un lenguaje que permite la manipulación de lo desconocido, indispensable para la comunicación del pensamiento matemático. El lenguaje algebraico opera en dos niveles: el semántico y el sintáctico, siendo el sintáctico la principal causa de dificultades asociadas al uso de la notación formal (Fernández, 1997, p. 86). Algunos de estos errores que se presentan frecuentemente en los estudiantes relacionados con la factorización y la manipulación de expresiones algebraicas son los siguientes:

- Errores de naturaleza algebraica, en donde el signo igual no relaciona expresiones equivalentes. Errores que se ven reforzados, por la clasificación de los temas presentados en los libros de texto y tradicionalmente enseñados en el álgebra, como: productos notables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y factorizaciones $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ Esta distinción temática no permite ver el sentido bidireccional del signo igual (Palarea y Socas, 1997, p. 21).
- Errores de procedimientos, como el mal uso de la propiedad distributiva, como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (p. 21).
- Errores debidos a falsas generalizaciones sobre números, en la solución del problema: $(x-7)(x-5) = 0 \Rightarrow (x-7)=0$ ó $(x-5)=0$ los alumnos lo generalizan, dando el siguiente resultado $(x-a)(x-b)=k \Rightarrow (x-a)= k$ ó $(x-b)= k$ (Camacho y et al, 1996, p.104)
- Errores ocasionados del paso de la aritmética al álgebra como la lectura de las operaciones (en la aritmética vertical y en el álgebra horizontal), la naturaleza dual de la igualdad (en aritmética para relacionar un problema con su respuesta numérica y en el álgebra como operador y equivalencia), la polisemia de la incógnita en una misma ecuación y confusiones en reglas para enteros positivos (Gallardo y Rojano, 1998, pp. 167-168).
- Uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos, como al utilizar fórmula cuadrática en $x^2 - 3x - 6 = 0$ escriben $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-24}}{2}$ ignorando los signos de los coeficientes de la ecuación (Camacho y et al. p.108)

Respecto a la tendencia a trabajar en la enseñanza tradicional con representaciones prototípicas se ha retomado el trabajo de Sánchez (1997), cuyos resultados han sido presentados en el primer capítulo de este trabajo, manifestando la desconexión de diferentes conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas.

Dado que en el diseño de las actividades se ha tomado el tratamiento gráfico como medio para relacionar diversos conceptos con los de la factorización de expresiones polinómicas, se toman en cuenta algunas de las investigaciones respecto a los problemas de enseñanza-aprendizaje de las funciones, sintetizada por Ruiz (1998), en el cual se describen algunas de las dificultades, errores y creencias de los estudiantes con relación a la representación gráfica de la función:

> Del trabajo de Leinhardt y et al. (1990)[6] y el de Bell y Janvier (1981)[7] se encuentra que los estudiantes siempre tienen presente un deseo de regularidad, manifestada al no considerar como gráficos de funciones los gráficos irregulares, al manifestar sus preferencias por las correspondencias uno a uno, a su fuerte tendencia a la linealidad y a su inclinación a unir puntos en las gráficas. Está tendencia a observar la gráfica como puntos individuales se manifiesta de varias formas: lo discreto de datos continuos, su falta de utilización del modelo de un gráfico para determinar su ecuación y su desproporcionado énfasis en los puntos singulares tales como máximos y mínimos y no en intervalos.

[6] Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, grphs, and graphing: Task, Learning, and Teaching. Review of Educational Research. 60.1. 1-64 Citado por: RUIZ, L. (1998) La noción de Función: análisis Epistemológico y Didáctico. Universidad de Jaén.1 edición.

[7] Bell, A., y Janvier, C. (1981). The interpretation of grapas representing situacions. For the leraning of Mathematics, 2, 1, 34-42 Citado por: RUIZ, L. (1998) La noción de Función: análisis Epistemológico y Didáctico. Universidad de Jaén.1 edición.

Según Hitt los estudiantes manipulan coherentemente las transformaciones de representaciones en un mismo sistema de representación, sobre todo en el nivel algebraico, pero muestran una carencia de articulación cuando se trata de convertir una representación de un sistema a otro, por ejemplo del gráfico al algebraico (1998, p.19). Duval (1988), señala que la conversión del sistema algebraico al gráfico es más fácil que el inverso, es decir, del gráfico al algebraico.

El excesivo tratamiento gráfico ha conllevado a que los estudiantes olviden tener en cuenta otros sistemas de representación como el simbólico y numérico, que proveen de otras características del objeto matemático en estudio (Lacaste y Pascual, 1998, p. 12 y Carulla y Gómez, 1998, p. 1). Se ha encontrado que el uso per se de las gráficas por parte de los profesores y la falta de comprensión generada en los estudiante, pone en evidencia algunas dificultades con relación a su uso: los estudiantes tienden a considerar las gráficas únicamente como ábaco[♣], ignorando otro usos, no superando la lectura punto a punto y dificultándoseles la lectura de intervalos (Lacaste y Pascual, 1998, p. 12, p. 116). Para ampliar las dificultades con relación a la gráficas Asp, Dowsey y Stacey (1993), en una experiencia en el aula utilizando un software de graficación ANUGraph encuentran que los errores más frecuentes se relacionan con cambios de las coordenadas, las escalas, ubicación de puntos con valores negativos y puntos por fuera de la cuadrícula.

Con relación al uso de las calculadoras, se dice que cual sea la tecnología que medie las representaciones del objeto matemático, se tiene algunos errores inherentes. Las

[♣] El uso de la gráfica como ábaco se da cuando se usa para evitar cálculos al dar directamente resultados mediante una manipulación elemental.

Calculadoras Graficadoras Algebraicas suelen proveer errores en sus representaciones debido a problemas técnicos, como generar curvas en zigzag cuando es la representación de una curva lisa (píxeles), generar resultados equívocos al ingresar la sintaxis de entrada inadecuada y ocasionar confusiones en estudiantes novatos en notación algebraica debido a las diferencias de la sintaxis de la calculadora de entrada con las usada en las matemáticas (por ejemplo, usando ^ para los exponentes y letras en mayúscula).

2.3.3 Análisis de la Tecnología

En este apartado se presenta algunos de los resultados de investigaciones y trabajos con respecto al uso de las **NTI** en la educación matemática y en particular en la enseñanza del álgebra en la escuela. Se espera justificar su incorporación en la enseñanza del álgebra, específicamente en el diseño e implementación de las actividades para la enseñanza de la factorización de polinomios de segundo grado que se presentan en este trabajo. Inicialmente se muestra de manera general, las diversas funcionalidades de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas utilizadas y posteriormente se justifica las pertinencia de la implementación de las **NTI** en el currículo de matemática.

2.3.3.1 Aspectos generales de las funciones de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas

Lo que se ha denominado en este trabajo como Nuevas Tecnologías Informáticas (**NTI)** agrupa implementos y programas computacionales como micromundos, sistemas de simulación, sistemas tutoriales, programas de inteligencia artificial, aplicaciones de telemática y las calculadoras (Gómez, 1997). Esta distinción se hace, para no utilizar sólo el término de tecnología, usado por muchos autores y que sólo hace referencia a las más recientes, en este caso a las **NTI,** omitiéndose otras tecnologías como el lápiz y el papel, que por el carácter invisible que han tomado, pasan desapercibidas en las actividades matemáticas en las que se les da lugar.

En el diseño e implementación de las actividades se utilizó como **NTI** las Calculadoras Graficadoras Algebraicas TI-92 plus y Voyage 200. Estas calculadoras se distinguen por incorporar un sistema algebraico computacional (**CAS**) y gráfico que abarca cuatro amplias áreas de funcionalidad, descritas por Demana y Waits (2000):

- Aritmética exacta en los conjuntos racional, real, y complejo.
- Software de graficación que agrupa la graficación de funciones, relaciones, y superficies en 3D.
- Dar soluciones numéricas.
- Computar álgebra simbólica para la manipulación (y solución) de expresiones algebraicas (ecuaciones).

Además de estas funciones, la TI- 92 plus y Voyage 200, incluyen otros programas como un Sistema de Geometría Dinámica (Cabri Geometry), en el que pueden construirse figuras geométricas de acuerdo con las reglas de la geometría euclidiana (puntos, segmentos, circunferencias...), y la geometría analítica (ejes de coordenadas, ecuaciones...), un editor de texto, un editor de programas y una hoja de cálculo (Waits, 2003). Estas funcionalidades permiten que el usuario transforme en tiempo real figuras o gráficas, suministrando diferentes representaciones y relaciones matemáticas en diferentes registros, facilitando su articulación y obteniéndose diferentes ejemplos en corto tiempo (Lupiañez y Moreno, 2001). La capacidad de incorporar en una calculadora programas como los **CAS** y sistemas de geometría dinámica, de fácil manipulación para usuarios no expertos en matemáticas ni en informática, hacen que sean instrumentos llamativos para un uso en la educación matemática, además de ser económicos y portátiles en comparación a otros implementos como los computadores.

2.3.3.2 Argumentos a favor y a disfavor del uso de las NTI

Debido a la imposibilidad de avanzar sin las manipulaciones algebraicas de lápiz y papel, era necesario dedicar un tiempo considerable en la enseñanza del álgebra a destrezas en el dominio y ejecución de técnicas para lograr efectuarlas, uno de esos casos es la factorización de expresiones polinómicas. Con la creación del **CAS**, las destrezas para efectuar cálculos pierden su dominio (no su importancia) en la enseñanza del álgebra, considerándose que es más importante enseñar a pensar, capacidad solo de las personas, que a calcular, capacidad que hoy se comparten con las máquinas.

Sin embargo para muchos la implementación de un **CAS** acarrea riesgos en el desarrollo y aprendizaje de las matemáticas. Para ejemplificar algunos de los argumentos detractores del uso de las **NTI**, De Guzmán (1991) expone algunos:

- Si las calculadoras hubiesen estado disponibles en el siglo XV se tendría un pálido reflejo de si misma, ya que las Matemáticas son el arte de evitar cálculos por fuerza bruta mediante el desarrollo de conceptos y técnicas que nos permitan viajar más ligeramente.
- El uso de las máquinas puede conducir a la atrofia de las facultades humanas correspondientes, del mismo modo que el coche ha minado la capacidad de las personas para usar sus piernas. ¡Tal vez el tipo de reacción que ha hecho tan popular el ejercicio en años recientes convertirá a su debido tiempo el ejercicio de la aritmética mental en una forma de terapia mental!
- Un computador o una calculadora dan una respuesta demasiado pronto, sin insistir de la necesidad de pensar primero. Despoja al estudiante del placer de encontrar por sí mismo la solución y del gozo de hallar por sí mismo la victoria ante la dificultad.

Acorde al segundo argumento presentado por De Guzmán, algunos indican que el uso del **CAS** como herramienta para enseñar álgebra limita las habilidades de papel y lápiz. Hasta el momento, las investigaciones no han arrojado resultados que aprueban dichas argumentaciones. Según la revisión de estudios con respecto al uso de **CAS** en la escuela, realizada por Blume, Heid y Hollebrands (2002), se encuentra que los estudiantes que usaron **CAS** comprendieron los conceptos de función y variable, al resolver problemas fueron más flexibles en la búsqueda de soluciones y obtuvieron comprensiones conceptuales globales mejores o iguales que de aquellos que no lo usaron. Resultados que indican que el uso adecuado de un **CAS** en la enseñanza de álgebra no elimina las habilidades mentales y de lápiz y papel, necesarias para que el estudiante interprete la racionalidad de los resultados obtenidos con la **NTI** y desarrolle y comprenda conceptos y/o destrezas (Demana y Waits, 2000).

Con base en los resultados de investigaciones centradas en el impacto del uso del **CAS** en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Ahorran tiempo en la realización de prácticas rutinarias, permitiendo entender otros aspectos matemáticos.
- Se favorece la compresión significativa del uso de símbolos y sus manipulaciones
- Y se refuerzan las tradicionales manipulaciones simbólicas (Heid, 2002a).

Aunque los resultados son favorables al uso de **CAS**, su empleo se ve detractado por la tendencia a considerar la esencia de las matemáticas en las manipulaciones simbólicas, por la falta de ejemplos para los profesores de planes de estudio con el uso eficaz de **CAS**, por la creencia de que su uso regular perjudica la adquisición de habilidades de manipulación simbólica y por su no utilización en las pruebas de estado (Heid, 2002a).

Estos comentarios ponen en evidencia la necesidad de investigación con relación a los impactos de las **NTI** en el currículo de matemáticas, ya que su uso por sí sólo en la enseñanza de las matemáticas no es garantía de ningún beneficio en comparación con otras tecnologías. El uso inadecuado de las **NTI** convierte cualquier argumento detractor en una afirmación y la experiencia de su implementación en lo que no se esperaba, según Zheng se generarían los siguientes resultados:

- Propicia en los estudiantes la ausencia del entendimiento conceptual.
- La percepción procedimental de un problema matemático de aquellos estudiantes que no pasan por un desarrollo estructural exitoso en el aprendizaje del algebra podría ser reforzado.
- Algunas veces la información de la calculadora puede ser engañosa.
- Las diferencias entre la notación convencional y la notación de la calculadora pueden confundir a los estudiantes.
- Los estudiantes pueden desarrollar un comportamiento indeseable en la resolución del problema.
- Los estudiantes pueden concentrase sólo en el uso de las **NTI** y por ejemplo llegar generalizar el método de ensayo y error para la solución de cualquier problema transformándolo en algo táctico (1998, p.1).

Es necesario tener en cuenta, que cual sea la tecnología que se use para las actividades matemáticas, estas tienen inherente dificultades relacionadas con la inexactitud o errores en las representaciones de objetos matemáticos y con el aprendizaje de procedimientos para la ejecución de sus funciones. Para el profesor o el investigador es fácil reconocer las inexactitudes y errores de las tecnologías, sin embargo para el estudiante no es fácil. Por tal razón para propiciar un uso adecuado de la tecnología es necesario mostrarle al estudiante las ventajas y desventajas de su uso (p.5).

Para ampliar lo anterior, se retoma una lista elaborada por Hitt (2000), presentada en la Tabla 2, subdivida en los aspectos positivos y negativos del uso y no uso de las **NTI**. Estos resultados fueron obtenidos en experiencias con profesores de la educación media de matemáticas y puede esperarse que se extiendan a otros usuarios como los estudiantes.

Tabla 2. Aspectos negativos y positivos del uso de las NTI en la educación matemática.

Aspectos negativos	▪ **Sin NTI** ▪ Errores hechos en procesos algebraicos no son fácilmente percibidos. ▪ Procesos algebraicos no promueven interacciones con las representaciones geométricas
	▪ **Usando NTI** ▪ Promueven la investigación de una respuesta a través del método de ensayo y error ▪ Inhibe el pensamiento analítico en la fase de representación gráfica ▪ En algunos casos, se trivializa el problema volviéndolo rutinario
Aspectos Positivos	▪ **Sin NTI** ▪ El pensamiento analítico y algorítmico son promovidos en la resolución de problemas desde un punto de vista algebraico. ▪ **Usando NTI** ▪ Permite la construcción geométrica de una situación dada. ▪ Permite la visualización de los resultados producidos en procesos algebraicos. Algunas veces el estudiante puede visualizar su error ▪ La representación gráfica ayuda a predecir resultados ▪ La manipulación simbólica permite concentrarse en tareas más complejas, promoviéndose posteriormente el aprendizaje conceptual. ▪ Incrementa el interés por el aprendizaje matemático.

2.3.3.3 Las posibilidades de un uso adecuado de las NTI

La implementación de la Calculadora Algebraica en la escuela secundaria, se hace semejante a la incorporación de las Calculadoras Aritméticas en la escuela elemental, para algunos peligrosa e innecesaria. Sin embargo, Kissane (1999) relata algunas de las experiencias en la que se han obtenido resultados exitosos y propone algunas formas de uso adecuado que no acabaría con otras formas de cómputo como las de lápiz y papel o mental:

- Usar las calculadoras en algunas ocasiones después de realizar las manipulaciones algorítmicas para verificar los resultados, o
- Para el desarrollo de competencias aritméticas y algebraicas, ya que estas pueden tener lugar en ambientes con lápiz y papel, cálculo mental y con calculadora, trabajo que puede ocurrir simultáneamente. Es el profesor o el estudiante quienes deciden qué tipos de tecnologías pueden usar en un tiempo particular.

Uniéndose a esta preocupación de cómo usar adecuadamente las **NTI,** Kutzler (2000) plantea una analogía entre las maneras de calcular con las de transporte o movimiento. Con ella pretende determinar cuándo es oportuno realizar cálculos mentales, de lápiz y papel y con **NTI**. La Tabla 3 resume la analogía.

Tabla 3. Analogía entre las maneras de calcular y de movimiento.

Movimiento / Transporte	**Matemática**
Físico	*Intelectual*
Caminar	Cálculo mental
Ir en Bicicleta	Cálculo de papel y lápiz
Conducir Carro	Cálculo con **NTI**
Usar silla de Ruedas	Cálculo con **NTI** que permite compensar una debilidad.

Dado que las **NTI** reducen la dependencia para recordar y procesar algoritmos, su uso en alumnos con dificultades para comprender y recordar, sería semejante a una silla de ruedas, permitiéndole estar al nivel de la clase. Las diferentes maneras de transporte son comparadas con las tres maneras de cálculo, valorados en distintos niveles.

En relación con la correcta selección de los métodos de cómputo, se presenta una técnica pedagógica llamada de golpe blanco / golpe negro. Consiste en dividir un curso en dos partes. En la primera sección (golpe blanco) los cómputos son realizados mentalmente o con papel y lápiz. En la segunda sección (golpe negro) los cómputos deben hacerse con las **NTI** (Demana y Waits, 2000). Para Waits (2003) es necesario que antes de que el estudiante use las **NTI**, tenga un tiempo considerable con la graficación y manipulaciones algebraicas hechas con lápiz y papel entendiendo bien el proceso. Esta situación es diferente a la de solicitar manipulaciones hechas en papel y lápiz durante todo el bachillerato, propiciándose un balance entre las diferentes tecnologías y formas de computo.

Para Gómez (1997) las **NTI** ubicadas en un sistema didáctico como el de Balacheff[8] (Figura 8) desempeñan diferentes papeles en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por un lado, son parte del medio y pueden apoyar la acción del agente didáctico en el diseño de la situación que define el encuentro entre el sujeto y el medio. Y por otro lado, pueden jugar un papel en el tipo de problemas que el sujeto puede afrontar, en la capacidad del sujeto para transformar unos problemas en otros, en los sistemas de representación utilizados por el sujeto y en los esquemas de validación que éste utiliza.

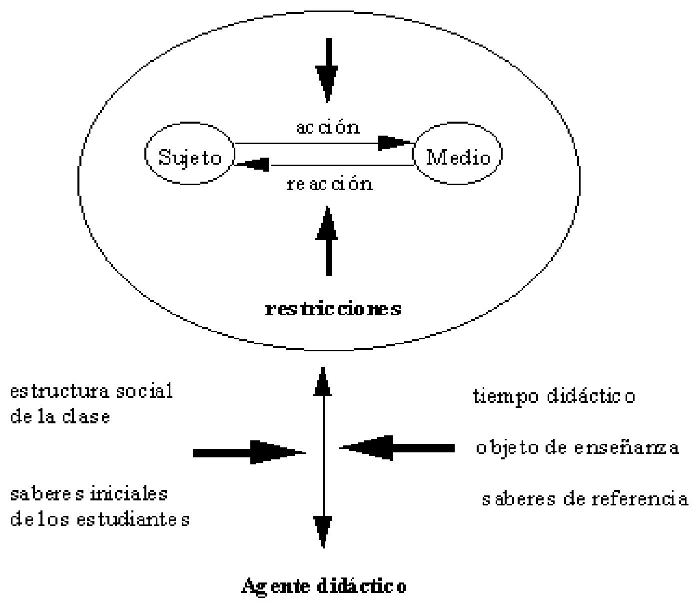


Figura 8. Sistema Didáctico. Tomado de Balacheff [8].

Desde una perspectiva teórica, Kutzler (2000), determina que el uso apropiado de **NTI** generaría cuatro aspectos importantes para la educación matemática:

---

[8] Balacheff, N. Conception, propriété du système sujet / milieu. (Grenoble, 1996). Documento no publicado. Citado por: GÓMEZ, Pedro (1997) Tecnología y educación matemática. Informática Educativa, Vol. 10, Nº 1, pp. 93-111. Disponible en Internet: <http:// www.colciencias.gov.co/cg97co/does/tecnomat.htm>

- La *trivialización* se refiere aquellos funciones que realiza **NTI** en unos pocos segundos como: graficar, derivar y otros cálculos aritméticos y algebraicos.
- La *experimentación* se divide en varias fases. Inicialmente a los datos obtenidos o dados se les aplica algoritmos conocidos, produciéndose ejemplos. Al observar los ejemplos obtengo propiedades que se expresan como conjeturas. Demostrando la conjetura, obtengo un teorema que conduce a nuevos algoritmos. El uso de estas tecnologías en el aula permitirían crear un ambiente adecuado para la experimentación.
- La *visualización* se utiliza primordialmente para estudiar la correspondencia entre las representaciones algebraicas y gráficas.
- La *concentración* es comparada con la construcción de una casa, en donde los pisos son los conocimientos que debe adquirir el alumno. Para construir el siguiente piso es necesario que el anterior esté terminado. Pero si el anterior piso no esta terminado, la tecnología se hace semejante a un andamiaje, sobre el piso incompleto, permitiendo construirse el siguiente. Es decir, se espera que en algún momento el estudiante supere sus dificultades, pero mientras estén, el uso de **NTI** permite acceder a un nuevo conocimiento.

2.3.3.4 Las NTI como instrumentos de amplificación y reorganización del conocimiento matemático

Dado que el conocimiento que genera la calculadora es diferente al que se desarrolla con el lápiz y papel, su empleo se puede analizar como un instrumento de amplificación, ya que aumenta las posibilidades de razonamiento y como un instrumento reorganizador, en tanto que ofrece una forma distinta de trabajar con las matemáticas (Moreno, 2002, p. 94, Lupiañez, 2000, p.36 y Arcavi, 2003). En la Tabla 4 se resume la metáfora empleada por Moreno al referirse a las anteriores posibilidades de uso de la calculadora.

Tabla 4. La calculadora como instrumento amplificador y reorganizador del aprendizaje

Entenderla como instrumento	Metáfora	Porque
i. de amplificación	Es una lupa	Amplifica lo que ya puedo ver.
ii. de re-organización cognitiva	Es un microscopio	Podemos ver lo que no era posible sin ella. Conocimiento nuevo

Estas posibilidades constituyen dos etapas inseparables de un mismo proceso. Creándose una sinergia entre el estudiante y la calculadora, que le permitirá trabajar a un nivel de complejidad matemática que puede ser totalmente inalcanzable sin dicha tecnología (2002, p. 94).

Dado que las **NTI** ofrecen nuevas posibilidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, han sido consideradas como un prototipo de tecnología cognitiva, al permitirle al estudiante "trascender las limitaciones de la mente…el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas" (Pea[9], 1987, p. 91), propiciando el paso a un nivel alto de procesos matemáticos. Por tanto, se considera que las **NTI** logran cambios cognitivos que tienen que ver con tres características:

- La facilidad de tener a la mano diversas representaciones de un mismo concepto matemático y poder relacionarlas activamente unas con otras.
- La "manipulación" de objetos matemáticos y sus relaciones.

[9] PEA, Roy D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In Alan Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Citado por: HEID, Kathleen. (2002b) How theories about the leaning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in School mathematics: One perspective. En: Hempstead, Hemel (Eds.) The international Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. Vol. 9, Nº 2, p. 98

- El poder de conectar experiencias reales con formalismos matemáticos usando una combinación de toma de datos reales y simulaciones (MEN, 1998, p. 29)

Gracias a que las **NTI** permiten obtener múltiples sistemas de representación de objetos matemáticos, se convierten en instrumentos útiles en el aprendizaje de las matemáticas, al considerarse que para comprender un objeto matemático en toda su dimensión se requieren trabajar con los diversos sistemas matemáticos de representación (Rico, 2000). Según Kaput (1992), el aprendizaje se da gracias a la interacción de las operaciones mentales (donde se crean y desarrollan las estructuras mentales) y las operaciones físicas (donde se crean y manipulan los objetos pertenecientes a un sistema de representación dado). Afirmaciones que conllevan a la siguiente analogía: "las representaciones son "las redes" para "pescar" el objeto matemático" (MEN, 1999, p. 28).

Aspectos como los anteriores, hacen que algunos autores como Moreno y Rojano (1999) consideren incluir en la lista de las perspectivas de la enseñanza del álgebra el uso de las **NTI** en el aula. Hasta el momento, las investigaciones en educación matemática habían determinado cuatro perspectivas en la enseñanza del álgebra que le daban significado: patrones (numéricos y geométricos) de generalización y leyes que rigen relaciones numéricas, resolución de problemas específicos o clases de problemas, modelación de fenómenos físicos y enfoques sobre los conceptos de variable y función (Bednarz, N., Kieran, c. y Lee, L, 1996).

2.3.3.5 Experiencias en el aula que involucran la utilización de las NTI

Hasta el momento son múltiples y variados los resultados de experiencias con relación a la incorporación de las **NTI** en el aula y en particular en la enseñanza del álgebra, algunos ya han sido descritos en los antecedentes presentados en el primer capítulo de este trabajo. A continuación se presentan algunos de los resultados de otras experiencias con el uso de las **NTI** y que se han considerado pertinente presentarlos:

- Para Arcavi y Hadas (2000) los ambientes dinámicos que ofrecen las **NTI** acompañados de adecuadas actividades constituyen un laboratorio virtual en los que los estudiantes pueden jugar, investigar y aprender matemáticas. Las posibilidades que brindan las **NTI** hacen que las actividades sean innovadoras e irrealizables con otro tipo de tecnología, favoreciendo procesos y habilidades como la visualización, la experimentación, la retroalimentación, la sorpresa al abordar situaciones en contra de la intuición y la necesidad de prueba y justificación, generada por los resultados inesperados. Para ejemplificar las ventajas del uso de las **NTI** se toma como punto de partida un problema de de geometría, utilizando el software Geometry Inventor, con estudiantes de 9 a 10 grado en Israel.
- Kakol (1997), compara el método tradicional con el uso de calculadora graficadora para hallar las raíces de un polinomio. Con la ayuda de las gráficas obtenidas por la calculadora graficadora el alumno encuentra características distintas e imposibles de ver con el método tradicional en donde se necesitan manejar cálculos difíciles y engorrosos. A partir de casos particulares se plantean hipótesis y conjeturas, que luego fueron demostradas. La facilidad de obtener rápidamente diferentes gráficas,

permitió a los estudiantes descubrir su las matemáticas y sentir la necesidad de demostrar el teorema.

- Heid, Hollebrands y Iseri (2002) describen el trabajo exitoso de dos estudiantes de séptimo grado con el uso de un **CAS** al resolver un problema. El **CAS** les permitió investigar ampliamente, generar y comprobar sus conjeturas y efectuar algunas manipulaciones algebraicas que habían podido impedir su razonamiento. En este ambiente, los estudiantes trabajaron entre representaciones gráficas, numéricas y simbólicas, generando preguntas e influenciando su razonamiento matemático. La evidencia empírica fortaleció su confianza en sus argumentos y razonamientos, sin convertirse en la demostración a sus conjeturas.
- Gilead y Yerushalmy (1997) han investigado si la retroalimentación gráfica dada por un computador puede servir como medio para mejorar la habilidad de los estudiantes de operar expresiones algebraicas. La experiencia se dio con un grupo de estudiantes de grados 7-9 en Israel utilizando un programa de computador "The Function Supposer" que combina ambientes simbólicos y gráficos. El problema presentado consistía en resolver ecuaciones de la forma $ax+c= b(x+d)$, $ax^2 +c = x +n$, sin ninguna instrucción previa de métodos de solución. Los procedimientos de resolución utilizados por los estudiantes se caracterizaron por utilizar el concepto de función, gráficos, tablas y manipulaciones simbólicas. En algunos procedimientos gráficos usados para hallar la solución a una ecuación, no fueron lo suficientemente convincentes para los estudiantes, requiriéndose el uso de las manipulaciones algebraicas para dar confianza y disolver las dudas con relación a los resultados gráficos. Los problemas propuestos se caracterizaron por no ser resueltos directamente por la lectura de la pantalla requiriendo interpretaciones del resultado.

El uso de esta tecnología proporcionó ejemplos para analizar y razonar, generando una nueva forma de estudio de la resolución de ecuaciones.

3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

3.1 DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado se conjugan los aspectos teóricos de la propuesta de Análisis Didáctico, mediante la concatenación de sus componentes, cuya expresión prioritariamente se da en la elaboración de la Unidad Didáctica. Inicialmente, el Análisis Matemático determina la relación de conceptos y procedimientos en torno a la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas desde el saber matemático escolar, bajo el referente del conocimiento matemático científico. Los diferentes modelos, fenómenos y sistemas de representación permiten ampliar el conocimiento de los conceptos y procedimientos relacionados, en este caso, con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas (Gómez y Rico, 2002a).

Dado que un discurso matemático se expresa en un lenguaje que se basa en uno o más sistemas de representación, las actividades matemáticas se describen en términos de los sistemas de representación (Gómez y Carulla, 1999, p. 6). Por lo cual, en el diseño de las actividades se tiene en cuenta los beneficios y dificultades que conlleva el uso de los diferentes sistemas de representación de un mismo objeto matemático. Castro y Castro (1997) advierten que el uso simultáneo y no controlado de los sistemas de representación, pueden acarrear problemas de comprensión, sin embargo, el uso de los diferentes sistemas de representación permiten conocer distintas propiedades del objeto matemático. Teniendo en cuenta lo anterior y buscando prever posibles actuaciones erróneas, se consideran algunas dificultades de los estudiantes en el manejo de un sistema de representación y en el conjunto de varios sistemas de representación (ver Análisis Cognitivo, capítulo 2). En la elaboración de las actividades se parte del supuesto de que los estudiantes tienen unas capacidades y conocimientos indispensables para el desarrollo exitoso de las tareas a realizar.

Dado que estas actividades no han sido elaboradoras por el profesor, sino por la estudiante investigadora y un grupo investigadores, la información que brinda el Análisis Curricular permite que las actividades no irrumpan y se adapten al contexto escolar, teniendo en cuenta las capacidades y conocimientos de los estudiantes, la opinión y colaboración de la profesora a cargo de la asignatura de álgebra del grado noveno y de otros docentes del área de matemáticas de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. En el análisis curricular (ver Anexo A) pone manifiesto el interés e infraestructura de la institución educativa, mostrándose apta para este tipo de trabajo de investigación, posibilitando su realización. La Escuela Normal Superior Farallones de Cali, es una de las instituciones vinculadas al proyecto a nivel nacional de incorporación de Calculadoras Graficadora Algebraica al currículo de matemáticas, contándose con el espacio adecuado y propicio para la implementación de la Unidad Didáctica.

La razón de utilizar las Calculadoras Graficadoras Algebraicas, se fundamenta en los resultados de investigaciones centradas en su uso en la enseñanza del álgebra. El Análisis de la Tecnología muestra algunos de estos trabajos, investigaciones y actividades, en donde se valoran la facilidad que brindan las **NTI** al obtener múltiples representaciones de un objeto y relaciones matemáticas en diferentes registros, posibilitando el diseño de actividades innovadoras para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el diseño de las actividades, el Análisis Matemático determina la estructura matemática, abarcando múltiples actividades compatibles a ella y diferentes relaciones de la factorización con los ceros, elementos de la parábola, etc. La información que brindan los otros componentes previos al Análisis Didáctico van perfilando las actividades, hasta concretar un grupo más reducido. Sin embargo, por las concatenaciones que se deben dar del paso entre una actividad a otra y por el tiempo de implementación determinada para el desarrollo de una Unidad Didáctica (2 a 3 semanas), el grupo de actividades nuevamente se reduce. Y en el momento de la puesta en práctica de la Unidad Didáctica, las condiciones y eventualidades, hacen que aún las actividades determinadas tengan variaciones o sean reemplazadas por otras, que no son improvisaciones, sino que hacen parte del conjunto de las posibles actividades que no fueron incorporadas.

3.1.1 Actividad de Introducción, Motivación y Diagnóstico

Esta actividad titulada "Exploración de áreas de rectángulos con perímetro fijo" pretende determinar las habilidades de los estudiantes con el manejo de la calculadora, en particular de las aplicaciones Cabri Geometry, Y=Editor y Gráficos (Graph) y de algunos conocimientos matemáticos necesarios para el desarrollo de las próximas actividades. Se espera que a partir de esta actividad se generen intereses, expectativas y motivaciones con respecto a los conceptos y procedimientos a tratar en las próximas actividades.

La actividad base se retoma de Kindt (1995) y Santos (2001), quienes con el uso de la Calculadora Graficadora consideran una solución gráfico-numérica de uno de los problemas de optimización más antiguos planteado por Euclides: “De todos los rectángulos con el mismo perímetro ¿Cuál de ellos tiene el área máxima?”. La actividad se rediseñó desviando la atención de sólo la optimización, a la relación de la expresión algebraica que modela la situación, a los valores numéricos del área y el lado AC y a la gráfica que generan estos valores. La construcción presentada a los estudiantes se retoma de Santos (2001), en donde a partir del desplazamiento del punto C del segmento AB que representa la mitad del perímetro se genera una familia de rectángulos, ya que la distancia de AC y CB representan la longitud de los lados.

De manera similar al programa utilizado por Santos, Cabri Geometry, permitió en la misma pantalla observar las variaciones de los rectángulos, los valores de los lados y el área y la graficación de los valores del área y un lado, que variaban simultáneamente al mover el punto C del segmento AB. El archivo construido, fue insertado en las calculadoras de cada uno de los estudiantes, previo al desarrollo de la actividad. A partir de la situación planteada, se determinan algunas preguntas que pretendían determinar si el estudiante relacionaba los diversos objetos que variaban en la pantalla, con la expresión polinómica cuadrática factorizada que modela el área de los rectángulo x(2-x).

La utilización de la Calculadora Graficadora Algebraica permite tomar valores numéricos del área y el lado AC del archivo en Cabri Geometry para crear un archivo en la aplicación Data/Matriz Editor que genera una nube de puntos que se grafica en Y=Editor (este archivo se insertó en las calculadoras de los estudiantes). La gráfica de la nube de puntos contrastada con la gráfica la expresión $–x^2 +2x$, busca relacionarla los valores del área con la expresión factorizada x(2-x). La expresión $–x^2 +2x$ fue dada a los estudiantes.

Una de tareas que se incluyen en esta actividad se retoma de Bedoya (2002), quien aprovechando la posibilidad de graficación simultánea de varias expresiones en la Calculadora Graficadora Algebraica, plantea una actividad, que consiste en suministrar a los alumnos (en la pizarra, en la pantalla del aula, en el papel o directamente en la pantalla de la calculadora graficadora), diversos diseños o configuraciones geométricas basadas en familias de parábolas a manera de ejemplos, como se muestra en la Figura. 14. A partir de lo observado, se generan tareas como describir en un lenguaje verbal, los patrones que se han seguido para realizar cada uno de estos diseños, intentándose reproducir configuraciones similares utilizando la calculadora, o deducir y obtener la expresión simbólica algebraica correspondiente a cada diseño o familia de parábolas. La tarea que se presenta en la Unidad Didáctica muestra las gráficas de diversas familias de funciones con su respectiva representación simbólica, buscándose que los estudiantes las observen y describan.

Contrario a las prácticas tradicionales de enseñanza centradas en sólo manipulaciones algebraicas, esta actividad con el uso de la calculadora, simuló un laboratorio virtual como lo ha denominado Arcavi y Hadas (2000), posibilitándose la experimentación, la visualización, la sorpresa y la retroalimentación. Las características de esta actividad hacen que las tareas desarrollen diversas habilidades, integrándose diversos sistemas de representación. Con base a las actividades planteadas por Kaput (1992) se propicia la construcción y verificación de modelos matemáticos, en este caso el área de la familia de rectángulos y la traducción de los sistemas de notación pasando de los sistemas de representación numérico al gráfico, del geométrico al numérico, del simbólico al numérico entre otros.

3.1.2 Actividades de Desarrollo

Las actividades de desarrollo diseñadas se dividen en tres: "Analizando expresiones cuadráticas equivalentes", "La relación de los ceros o raíces con los factores de una expresión cuadrática" y "Expresiones cuadráticas factorizables". Estas actividades se van encadenando tales que en conjunto dan el carácter de unidad, con el objeto de ir encauzando al estudiante al aprendizaje significativo de conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de las expresiones polinómicas cuadráticas. Como se ha mencionado en el primer capítulo, la factorización de expresiones algebraicas ha estado encasillada por muchos años en sólo en el manejo de reglas y procedimientos para ser efectuados con el uso del lápiz y papel, dándosele un carácter más procedimental que estructural. Aunque los procedimientos algorítmicos son importantes y no se pueden descartar de la enseñanza de las matemáticas, en estas actividades se ha considerado no sólo posibilitar estas habilidades, sino también las conexiones de diferentes conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, olvidadas en la enseñanza tradicional.

Coherentemente con la concatenación de las actividades, la actividad: “Analizando expresiones cuadráticas equivalentes”, retoma algunos de los valores del área, los lados y las expresiones algebraicas de la actividad inicial: “Exploración de áreas de rectángulos con perímetro fijo”, siendo presentados en una tabla. A partir de la graficación simultánea de las gráficas del área, junto con los valores presentados en la tabla y el desarrollo del producto indicado de la expresión factorizada por medio del lápiz y papel, se espera que los estudiantes comprendan la igualdad de las expresiones algebraicas, involucrando a su vez otros conceptos como el de parábola, dependencia de variables y área. Las tareas solicitadas tienen diversas posibilidades de solución o ejecución; a los estudiantes se les propone una forma, pero el desarrollo de ellas, no exige un único procedimiento. Se espera que los estudiantes integren diversas habilidades como la detección de patrones, manipulaciones algebraicas y manejo de la calculadora.

Las diversas utilidades de la Calculadora Graficadora Algebraica hacen que se generen diversas posibilidades para una misma tarea, por ejemplo el uso de pantalla dividida permite obtener dos aplicaciones en la misma pantalla, observándose las interacciones de una aplicación a otra. En algunas actividades se determinó dejar en la mitad de la pantalla la aplicación gráficos y en la otra la aplicación Y=Editor, relacionándose la expresión simbólica con la representación gráfica. Al cambiar el trazo de la segunda expresión digitada en Y=Editor, se observa al graficar simultáneamente las expresiones algebraicas equivalentes, la superposición de la segunda gráfica con trazo más grueso sobre la primera gráfica de trazo delgado. El uso de Trace complementa la tarea, al permitir verificar que los valores para ambas gráficas sean iguales, pasándose de lo global /representación gráfica a lo discreto /representación numérica. Otra posibilidad para observar la igualdad de las expresiones es obtener pantalla doble, esta modalidad permite el uso de dos pantallas independientes en las que se pueden visualizar a la vez la aplicación Gráficos (para otras aplicaciones no es posible). En cada pantalla se observa las gráficas para cada expresión y pasando de una aplicación a la otra se pueden explorar puntos ubicados en lugares similares.

En esta actividad las expresiones polinómicas cuadráticas reciben un tratamiento gráfico para mostrar su equivalencia, sin embargo se refuerza con el tratamiento algebraico. Para aquellos alumnos con destrezas en las manipulaciones algebraicas la equivalencia de las expresiones será más evidente en el desarrollo del producto de la expresión factorizada y la obtención de la expresión desarrollada, para los otros lo será la superposición de las gráficas de las expresiones o los valores de la tabla. Se espera que la conjugación de todos los anteriores procedimientos permita a los estudiantes comprender la equivalencia de las expresiones polinómicas cuadráticas trabajadas.

Al mostrarse la equivalencia de las expresiones algebraicas utilizando diferentes procedimientos, se equipara al estudiante para el desarrollo de próximas tareas, adquiriendo mayor autonomía con el manejo de la calculadora y el lápiz y papel. La conjugación de la tecnología tradicional/ lápiz y papel y la nueva tecnología/Calculadora Graficadora Algebraica hace que las destrezas de cada una, se liguen y mejoren en la interacción. La obtención de la expresión desarrollada a través del producto de la expresión factorizada por medio del lápiz y papel y la graficación simultánea de ambas expresiones, es una de las tareas que se retoman en cada una de las actividades posteriores, uniendo las dos tecnologías y desarrollando habilidades propicias para el desarrollo de las próximas actividades.

Continuando con la actividad "La relación de los ceros o raíces con los factores de una expresión cuadrática", debido a que en transcurso de las anteriores actividades el manejo de los estudiantes de las aplicaciones Y=Editor y Gráficos fue deficiente debido a su poca experiencia en la utilización de estos programas, se incluye en la primera tarea algunas instrucciones del manejo de la calculadora. La segunda tarea se relaciona con las gráficas de las expresiones factorizadas, en las que se espera hallen los ceros de la gráfica, relacionándolas con la expresión factorizada correspondiente y por medio del producto efectuado con lápiz y papel hallen la expresión desarrollada y grafiquen y comparen ambas expresiones. Debido a problemas técnicos en la instalación del programa que permitía obtener parábolas al azar, la actividad diseñada se modificó partiéndose de la expresión factorizada dada por los estudiantes, a la gráfica, de allí a los ceros, luego a la obtención de la expresión desarrollada por medio del producto efectuado con lápiz y papel y finalmente a la obtención de las gráficas de ambas expresiones. La tarea propuesta inicialmente parte de la representación gráfica /numérica/ simbólica, con la tarea modificada se parte de la representación simbólica/ gráfica/ numérica.

En cuanto a la actividad: "Expresiones Cuadráticas Factorizables", se retoma y se modifica una de las actividades presentada por Bedoya (2002), en la que se parte de la ejecución de un programa que genera parábolas al azar♣, en donde los estudiantes con base a la gráfica

♣ Este programa es de dominio público y se puede obtener en la página *web* de la *Texas Instruments Resources* http://www.ti.com/calc/.

de la expresión $y=x^2$, realizan transformaciones geométricas sucesivas hasta llegar a la expresión algebraica de la gráfica obtenida al azar. Este programa se modificó generando otros dos programas: parabol1( ) en el que se obtienen gráficas de expresiones factorizables al azar y parabol2( ) que genera parábolas de expresiones factorizables y no factorizables. Las parábolas obtenidas con ambos programas son tanto cóncavas hacia arriba como cóncavas hacia abajo (Ver Figura 9).

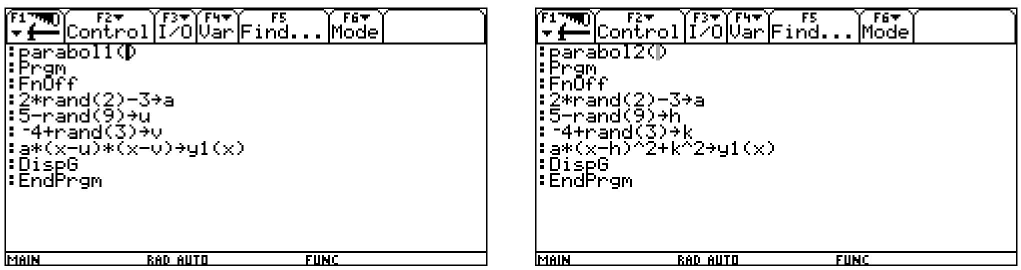


Figura 9. Programas parabol1 ( ) y parabol2 ( ).

Al utilizar los programas, se inicia trabajando con la expresión a(x –2)*(x-(-1)) donde se miran las variaciones de a cuando vale -1, -0.5, 1 y 2.5. El estudio gráfico de las variaciones de las expresiones cuadráticas es una de las tareas más recurrentes con las facilidades que brindan las **NTI**, presentados por diversos autores como por Hurwitz (1995), Edwards (1996), Owens (1992), Bedoya (2002), Ruthven (1989), entre otros. Con esta tarea se espera que los estudiantes al obtener las gráficas de la familia de parábolas, descubran que comparten los mismos ceros y que los valores negativos para a generan parábolas cóncavas hacia abajo y los valores positivos de a generan parábolas cóncavas hacia arriba, detectándose además que el valor absoluto de a produce cambios en la amplitud de la parábola.

Las tareas relacionadas con el programa parabol1( ) buscan que el estudiante halle los valores de *a, u* y *v,* donde *a* se determina con la concavidad o la abertura de las ramas y *u* y *v* son los valores de los ceros de la parábola obtenida al azar, de manera que se obtenga la expresión $a*(x-u)*(x-v)$. Para reducir el conjunto de valores de *a* se ha tomado sólo el conjunto de valores de -1 y 1, centrando la actividad en la relación de los valores de los ceros y los factores de la expresión $a*(x-u)*(x-v)$. Con la graficación de la anterior expresión junto con la del programa se espera que los estudiantes comprendan que la expresión hallada corresponde a la parábola obtenida al azar.

En cuanto al uso del programa parabol2 ( ) se busca que los estudiantes observen que no todos las parábolas cortan el eje x y que por tanto no todas las expresiones polinómicas cuadráticas son factorizables. Las parábolas originadas por el programa corresponden a la expresión polinómica cuadrática $a(x-h)^2+k$, en la que (h, k) son las coordenadas del vértice. Con este programa se les ha sugerido como tarea encontrar algunas parábolas dadas algunas de sus características, centrando la atención en aspectos como sus ceros, vértice y ramas de la parábola.

Con esta última actividad se concreta las anteriores actividades, de manera que los estudiantes comprendan que las gráficas de las expresiones polinómicas cuadráticas factorizables son aquellas que cortan el eje *x* y al obtener una parábola con cortes en el eje *x* es posible determinar la expresión cuadrática factorizable con los valores de los ceros y el valor de *a* cuyo signo lo determina la concavidad. La actividad también pretende distinguir algunos elementos de la parábola como el vértice, las ramas y los ceros, cuyas variaciones hacen que se obtengan diferentes parábolas y diferentes expresiones algebraicas, permitiendo reconocer que no todas las expresiones polinómicas cuadráticas son factorizables, que las parábolas pueden no tener ceros y si los tienen, es posible determinar una expresión factorizada con factores iguales (un sólo un cero), o factores diferentes (dos ceros distintos). Al implementar las actividades se espera distinguir expresiones polinómicas cuadráticas con los mismos ceros y los mismos factores cuya diferencia lo determina el valor de a como en la expresión $a(x -2)*(x-(-1))$, en donde a afecta la concavidad y amplitud de la parábola, además se busca reconocer expresiones algebraicas equivalentes por medio de la graficación simultánea y la observación de su superposición, la observación de algunos de sus valores, manipulaciones algebraicas[♣] o la asociación de todos procedimientos anteriores.

Las actividades también pretenden mejorar el uso de los estudiantes de las tecnologías tradicionales y nuevas en su interacción, tomándose de ambas, posibilidades enriquecedoras en el desarrollo de las actividades, ya que lo que se pretende es propiciar un aprendizaje significativo y no el uso de una tecnología en particular. El uso de la calculadora TI-92 Plus en estas actividades no es un condicionante para el desarrollo de las actividades, es posible incorporar otros programas de graficación y de geometría dinámica, cuyo uso modificaría algunos procedimientos. Sin embargo, el hecho de centrarnos en el uso de la calculadora TI-92 Plus o Voyage 200, determinó que las actividades tomarán algunas particularidades que sólo son posibles con el uso de ellas. Uno de las facilidades de las calculadoras TI-92

[♣] Sólo se trabajó el desarrollo del producto de la expresión factorizada para obtener la expresión desarrollada. No se ha introducido ningún algoritmo para hallar la expresión factorizada de la expresión nombrada como desarrollada.

plus o Voyage 200, son las diversas aplicaciones y las conexiones entre ellas, que permiten al usuario obtener una variedad de utilidades, no posibles con otras herramientas.

Acorde con las investigaciones en Educación Matemática, en las que se promueve el uso y articulación de diferentes sistemas de representación para generar la comprensión de los objetos matemáticos. En esta actividades se buscó diversas posibilidades de articulación de los sistemas de representación, por ejemplo el uso de los programas parabol1( ) y parabol2( ) relaciona la representación gráfica / numérica /simbólica, en vía contraria a la tradicional representación simbólica / numérica / gráfica. De la actividad de la familia de rectángulos se relaciona la representación geométrica / numérica / gráfica y en cuanto a la obtención de algunos valores del área y la búsqueda de puntos especiales de la parábola como los ceros se parte de la representación gráfica / numérico / algebraico y de igual manera se generan diversas conexiones con los sistemas de representación en las tareas propuestas. Así mismo, se dan al menos tres de las actividades que Kaput ha determinado con el uso y conexiones de los diversos sistemas de representación, ejemplificadas al comienzo de este capítulo y que se han desarrollado en las actividades propuestas.

3.2. UNIDAD DIDÁCTICA: "LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES POLINÓMICAS CUADRÁTICAS"

En este apartado se presentan las actividades que fueron implementadas en el grupo de estudiantes de noveno grado de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali y que constituyen la Unidad Didáctica. Las actividades han sido diseñadas para ser elaboradas por grupos de 2 estudiantes con disposición en todo momento de una Calculadora Graficadora

Algebraica (TI- 92 plus). Su desarrollo se enriquece con discusiones, en las que cada grupo expone sus argumentos a sus respuestas, descartándose o realzándose algunas de sus conclusiones.

Para la ejecución de esta Unidad Didáctica se han asumido algunos conocimientos previos necesarios para el buen desarrollo y comprensión de estas actividades como operaciones y propiedades de los números reales, manejo de procedimientos simbólicos como producto de polinomios, ecuaciones y funciones lineales, manejo del plano cartesiano y manejo de la Calculadora Graficadora Algebraica.

Para las actividades propuestas se han determinado los siguientes logros:

- Conexión de diferentes conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.
- Utilización y coordinación de diferentes sistemas de representación relacionados con expresiones polinómicas cuadráticas.
- Identificación de los cambios gráficos de familias de expresiones polinómicas cuadráticas al variar sus parámetros.
- Resolución de problemas a partir de las características y propiedades de la parábola (como representación gráfica de expresiones polinómicas cuadráticas).
- Relación de las raíces o ceros de expresiones polinómicas cuadráticas con sus factores.
- Análisis de familias de expresiones polinómicas cuadráticas factorizables en los reales.

- Reconocimiento de la equivalencia de expresiones polinómicas cuadráticas.

3.2.1 Exploración de áreas de rectángulos con perímetro fijo

Indicadores de logro:

- ✓ Identificar los términos variables y constantes de la situación planteada.
- ✓ Describir el cambio de la variación del área.
- ✓ Observar los cambios gráficos de variación de parámetros en las expresiones simbólicas de la función cuadrática

A.I.1. Observa los siguientes rectángulos elaborados en Cabri-Geometry con la mitad del perímetro igual a AB =2,00cm (perímetro = 4cm) (ver Figura 10).

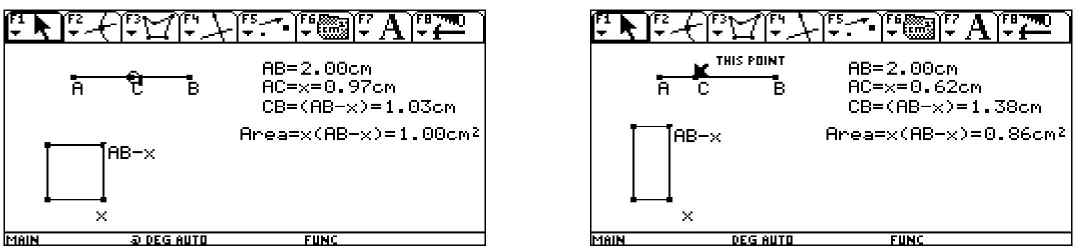


Figura 10. Rectángulos generados al mover C en el segmento AB.

Estas gráficas son algunos rectángulos que conservan el mismo perímetro, sin embargo son una pequeña muestra de una familia de rectángulos. En las gráficas se muestran los valores del área, la mitad del perímetro (AB) y los valores de los lados AC y CB de cada rectángulo.

Diríjase a la aplicación Cabri-Geometry y abra el archivo act11 del fólder fact. Encontrará en la pantalla una de las figuras anteriores. Tome el punto C del segmento AB y arrástrelo ( ). Describa que sucede al mover el punto C del segmento AB.

A. I. 2. ¿Por qué se expresa el área del rectángulo como $x(2-x)$?

A. I. 3. Abra el archivo act 12 del fólder fact, encontrará una imagen como la siguiente:

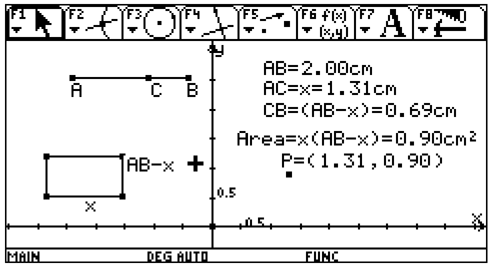


Figura 11.Variación del punto P al mover C en el segmento AB.

Observe el punto P en el plano cartesiano y mueva C del segmento AB ¿Qué representan las coordenadas de P? ¿Qué trayectoria describe P?

A. I. 4. La siguiente tabla muestra algunos valores del área y el lado AC, tomados al mover ver C del segmento AB. Verifíquelos: (En la Tabla 5 se presentan todos los valores, a los estudiantes sólo se les presentaron algunos datos).

Tabla 5.Algunos valores del lado AC y el área de la familia de rectángulos.

Área	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.84	0.8
Lado AC	0	0.15	0.42	0.47	0.64	0.73	0.80	0.92	0.96	0.99	1	0.99	0.97	0.96

Área	0.72	0.68	0.55	0.52	0.44	0.32	0.24	0.12	0.08	0
Lado AC	0.92	0.9	0.80	0.77	0.69	0.54	0.42	0.23	0.5	0

A. I. 5. Estos valores se pueden graficar (lado AC vs. Área) utilizando Y = Editor. Seleccione Plot 1 del listado y observe la nube de puntos que se obtiene. ¿Cómo es la gráfica? (La solución se ve en la Figura 12)

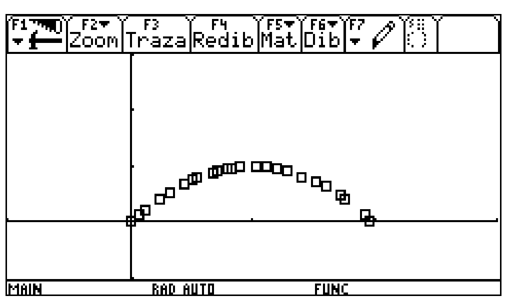


Figura 12. Nube de puntos del lado AC vs. Área de la familia de Rectángulos.

A. I. 6. La expresión simbólica que se ajusta a estos valores es $y = -x^2 + 2x$. Digite esta expresión en Y = Editor y observe la superposición de grafica de la expresión y la nube de puntos. ¿Coinciden? (La solución se observa en la Figura 13)

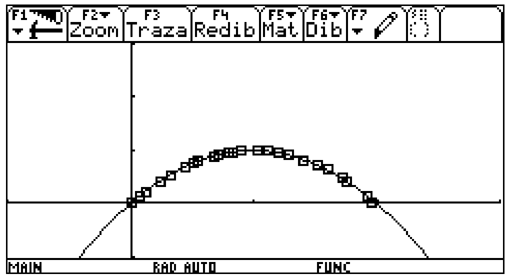
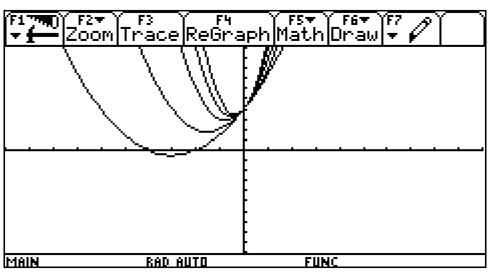
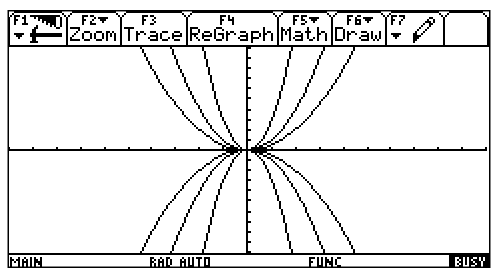


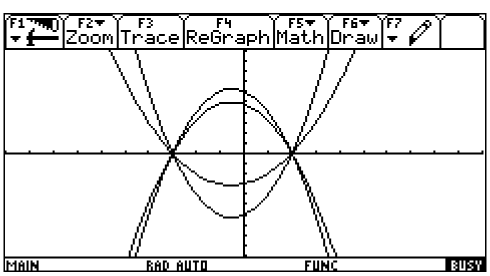
Figura 13. Superposición de la nube de puntos y la expresión $y= -x^2 +2x$.

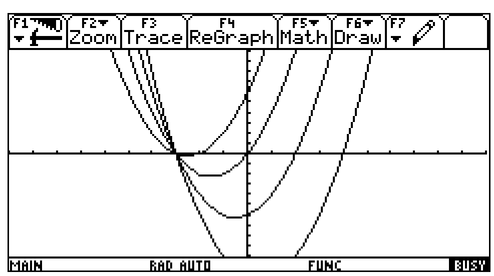
A. I. 7. Familias de parábolas. Observe lo que sucede al variar algunos valores en las expresiones simbólicas (ver Figura 14):



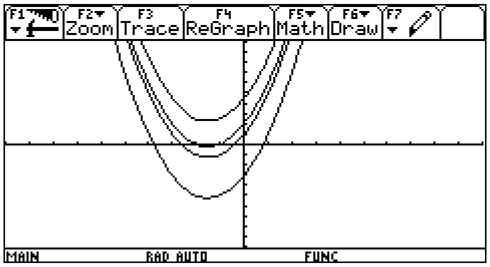


$Y = ax^2 + 3x +4$ con a = 0.5, 1, 2, 3 y 4 $Y = ax^2$ con a = 0.5, -0.5, 1, -1, 3 y –3

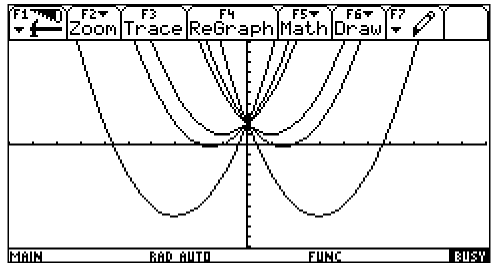




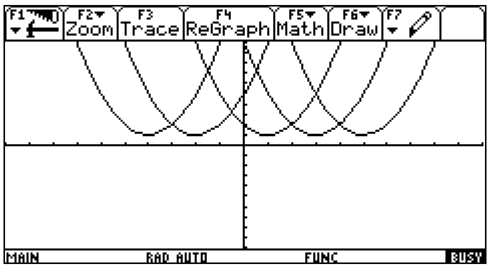
Y= a(x-2)(x+3) con a= 1. –1, 0.5 y –0.8   Y= (x –c)(x+3) con c = 4, 2,0 -2



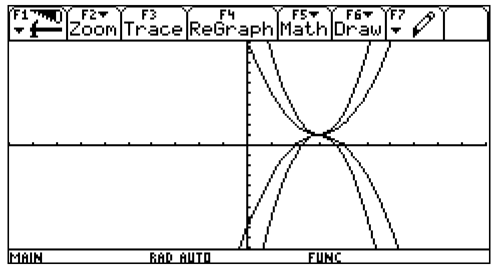
$Y = x^2 + 3x + c$ con c = 1,-3, 2 y 4.5



$Y = x^2 + bx + 2$ con b = 2,-2,3,-3,6 y –6



$Y = (x - h)^2 + 1$ con h = -4,-2, 1, 3 y 5



$Y = a(x - 3)^2 + 1$ con a = 1, -1 , -2 y 2

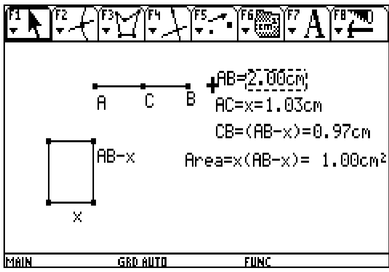
Figura 14.Familia de parábolas generadas al variar un parámetro de las expresiones polinómicas cuadráticas.

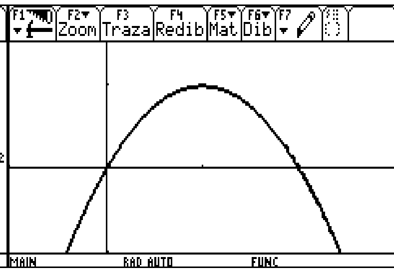
3.2.2 Analizando Expresiones Cuadráticas Equivalentes

Indicadores de Logro:

- ✓ Reconocer la equivalencia entre una expresión de la forma estándar $ax^2 + bx$ con una de forma factorizada $ax(x + b/a)$
- ✓ Identificar algunas de las características de la parábola.
- ✓ Determinar la información gráfica que suministran los factores en la expresión $ax(x + b/a)$

A. II. 1. Los valores de la siguiente tabla se obtuvieron de la exploración de rectángulos de la sesión I con segmento AB = 2,00 cm (ver Figura # 1). Observe las expresiones que representan el área en las columnas # 3 y # 4 de la tabla # 3 dada en términos de x.





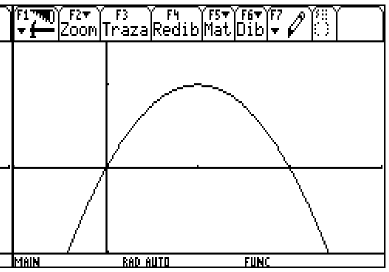


Figura #1 **Figura #2** **Figura # 3**

Figura 15.Variación del área de los rectángulos.

Tabla 6.Algunos valores del área y los lados AC y CB de la familia de rectángulos.

LADO AC	**LADO CB**	**AREA**	**AREA**
x	**(2 – x)**	**x(2-x)**	**$-x^2 + 2x$**
0 cm	2 cm	0 cm^2	0 cm^2
0.24 cm	1.76 cm		
0.34 cm	1.66 cm	0.57 cm^2	0.57 cm^2
0.48 cm	1.52 cm	0.73 cm^2	0.73 cm^2
1 cm	1 cm	1 cm^2	1 cm^2
1.14 cm	0.86 cm		0.98 cm^2
1.28 cm	0.72 cm	0.92 cm^2	0.92 cm^2
1.66 cm	0.34 cm		
2 cm	0 cm	0 cm^2	0 cm^2

Tabla # 3.

La expresión del área de la columna #3 esta factorizada mientras que la de la columna #4 está desarrollada. La Figura #2 corresponde a la gráfica de la expresión x(2-x) y la Figura #3 corresponde a la gráfica de $-x^2 + 2x$.

A. II. 2. Utilice pantalla dividida y grafique simultáneamente las expresiones del área x(2-x) y $-x^2+2x$ como se observa en la figura #4 y con F3 explore algunos puntos. Verifique y complete los valores en la tabla # 1. ¿Cómo son las gráficas de las expresiones del área? ¿Son las dos expresiones del área equivalentes? (Ver Figura 16).

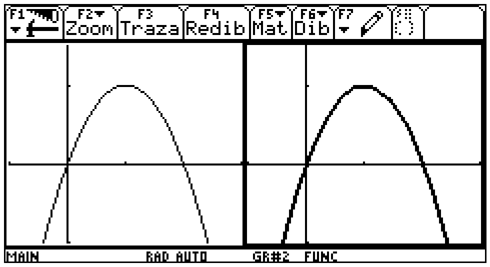


Figura # 4

Figura 16. Graficación de las expresiones x(2-x) y $-x^2+2x$.

Para desplazarse de una ventana a otra pulse 2nd APPS

3.2.3 La relación de los ceros o raíces con los factores de una expresión cuadrática

Indicadores de logro:

- ✓ Hallar los ceros o raíces de la parábola de la expresión factorizada (x-r)(x-s)
- ✓ Describir los cambios gráficos de la expresión al variar r y s en la expresión factorizada (x-r)(x-s)
- ✓ Determinar la información gráfica que suministran los factores en la expresión factorizada

A. III. 1. Pantalla doble: Presione la tecla MODE y luego F2. Seleccione división de pantalla izquierda -derecha (Split Screen left-right). Después seleccione gráficos (graph) en Aplic en divis. 1 (o Split 1 App) y en Aplic en divis 2 (o Split 2 App) y en número de gráficas seleccione 2. No olvide que para aceptar los cambios además de seleccionarlos debe presionar ENTER. Obtenga una ventana de la siguiente forma. (Ver Figura 17)

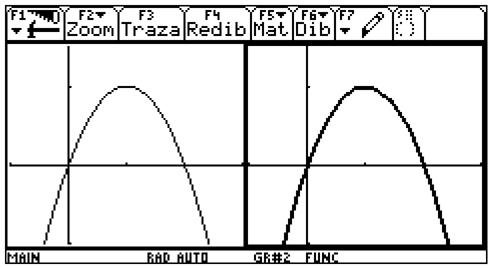


Figura #1

Figura 17. Pantalla doble en una TI-92 plus.

Para desplazarse de una ventana a otra pulse 2nd APPS

A. III. 2 Escriba una expresión de la forma (x-r)(x-s), grafíquela y responda las siguientes preguntas:

i. Complete la siguiente expresión (x – □)*(x – □). Cada espacio es uno de los valores de la abscisa del punto de corte de la gráfica con el eje x.

ii. ¿Cuáles serían los valores de r y s de la expresión cuadrática (x –r)*(x-s) que usted dio?

iii. Desarrolle el producto de (x-r)*(x-s)

iv. Grafique la expresión desarrollada obtenida (cambia el trazo de esta expresión) ¿Qué observas? ¿Qué se puede decir de la expresión factorizada y desarrollada?

3.2.4. Expresiones Cuadráticas Factorizables

Indicadores de logro:

- ✓ Describir los cambios gráficos al variar *a* en la expresión factorizada (*a(x –m)*(x-n)) o* desarrollada ($ax^2 +bx + c$)
- ✓ Obtener la información gráfica que suministran los factores en la expresión factorizada
- ✓ Reconocer gráficamente cuando una expresión es o no es factorizable en los Reales.

A. IV. 1. Utilizando la opción pantalla dividida en una grafique la familia de parábolas a(x –2)*(x-(-1)) donde a = -1, -0.5, 1 y 2.5 y en la otra muestre las expresiones algebraicas en [Y=] (Y = Editor).

Instrucciones de la TI- 92 Plus

Aplicación Y = Editor [◆] w

Aplicación gráficos [◆] R o selecciónelos en [APPS]

Al graficar las cuatro expresiones se debe observar lo siguiente:

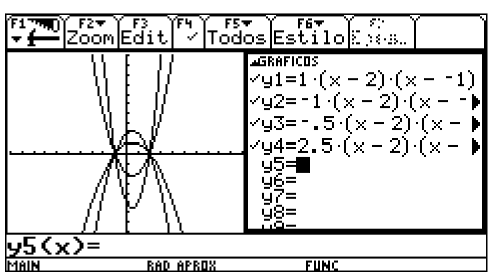


Figura 18. Graficación de la expresión a(x –2)*(x-(-1)) donde a = -1, -0.5, 1 y 2.5.

Conteste las preguntas:

i. Halle los ceros o raíces de todas las expresiones cuadráticas anteriores

ii. Describa lo que observa o sucede con las parábolas al variar *a*.

iii. Elija una de las expresiones cuadráticas factorizadas y efectué la multiplicación indicada.

iv. Grafique la expresión cuadrática “desarrollada” anteriormente. Diga qué observa y determine la relación de está gráfica con respecto a la gráfica de la expresión factorizada.

A. IV. 2. En la pantalla principal [HOME] digite parabol1( ) y presione [ENTER] para ejecutar el programa parábola 1. (Ver Figura 19)

Instrucciones de la TI- 92 Plus

Aplicación Home [◆] Q o selecciónelo en [APPS]

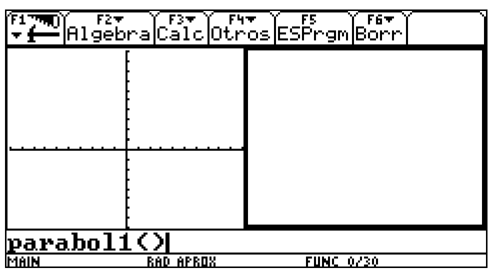


Figura 19. Ejecución del programa parabol1( ).

Espere unos segundos, debe aparecer una parábola en la aplicación [GRAPH] y en la otra ventana [Y=] la expresión algebraica correspondiente. Digite varias veces parabol1( ) en [HOME] y obtenga sucesivamente varias parábolas. Observe que algunas de ellas abren sus ramas hacia arriba y otras hacia abajo (ver Figura 20).

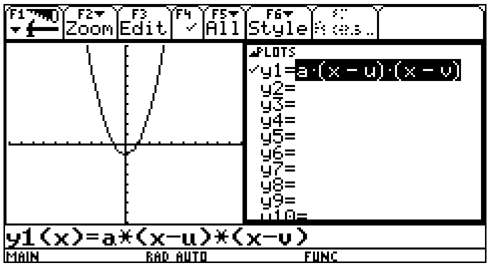


Figura #1

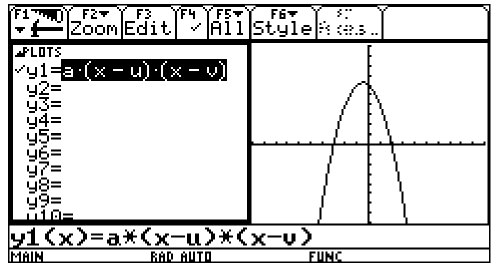


Figura # 2

Figura 20. Algunas de las parábolas obtenidas con parabol1( ).

Conteste las siguientes preguntas:

i. En cada una de las figuras anteriores (Fig. 1 y Fig. 2) diga si el signo de *a* es positivo o negativo. ¿Por qué? ¿En qué afecta el valor de *a* en la parábola correspondiente?

ii. Para facilitar los cálculos se ha asignado como valores de *a* solamente –1 y 1. Obtenga los valores tanto de los ceros o raíces *(u y v)* como de *a* de la parábola que usted obtuvo anteriormente y grafique la expresión $y_2 = a*(x-u)*(x-v)$ con los valores que halló.

iii. Observa y diga: ¿Cuál es la relación entre la gráfica que usted obtuvo y la dada por el programa parabo1( )?

A. IV. 3. En la pantalla principal [HOME] digite parabol2( ) y presione [ENTER] para ejecutar el programa parábola 2. Ejecute varias veces el programa de tal manera que obtenga (no importa el orden):

Instrucciones de la TI- 92 Plus

Aplicación Home [◆] Q

o selecciónelo en [APPS]

- Una parábola cuyas ramas abren hacia arriba y corta el eje x

- Una parábola cuyas ramas abren hacia abajo y corta el eje x
- Una parábola cuyas ramas abren hacia abajo y no corta el eje x

i. Haga un dibujo a mano alzada de cada una de ellas, indique la parábola que no corta al eje x y la que si lo corta, señalando el punto o los puntos de corte.

Observe la expresión de las parábolas obtenidas por parabol2( ) en Y = Editor. Los valores *(h , k)* son las coordenadas del vértice y el valor de *a* igual a 1 o –1 (ver Figura 21).

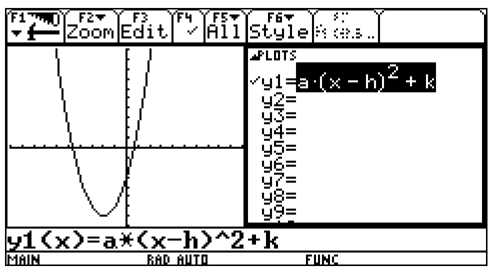


Figura 21.Parábola obtenida con parabol2( ).

A. IV. 4. Con respecto a lo trabajado responda:

i. ¿Cuándo la gráfica de una expresión algebraica cuadrática corta al eje x?

ii. ¿Cuándo una expresión algebraica de segundo grado se puede factorizar?

3.3 IMPLEMENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

3.3.1 Contextos y Participantes

En la elaboración del proyecto para el trabajo de grado se contactó a la profesora Elvira Durán, quien tenía cargo en año lectivo (2002 – 2003) el curso de álgebra para los grados noveno de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, aceptando disponer uno de sus grupos para la implementación de la Unidad Didáctica. Ante la disponibilidad, aceptación e interés de la institución y acorde al plan de estudios y el plan de área de matemáticas, se decide diseñar las actividades con las calculadoras graficadoras algebraicas en torno a la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Una de las ventajas de implementar las actividades en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, es contar con el equipo adecuado, ya que es una de las instituciones participantes del proyecto de incorporación de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas TI-92 plus al currículo de matemáticas propuesto y financiado por el MEN.

Para el año lectivo de (2003-2004) los cursos de álgebra para los grados noveno están a cargo de la profesora Mariela Agudelo. Ante esta circunstancia, nuevamente se contactó a la profesora Elvira Durán, con su ayuda y la de la profesora Ligia Amparo Torres, se le propone a la profesora Mariela Agudelo la implementación de las actividades y su incorporación en el desarrollo del proyecto, aceptando ceder el espacio y participar. Inicialmente la propuesta de implementación de la Unidad Didáctica sugería que la profesora Mariela las implementará, luego de entregársele un cuadernillo con la Unidad Didáctica y darles algunas orientaciones. El objeto de que la profesora Mariela fuera quien implementará la Unidad Didáctica pretendía conservar el contexto habitual y observar como la profesora incorporaba esta propuesta. Sin embargo, aunque ella manifiesta interés, no acepta implementar las actividades y sugiere que la estudiante investigadora a cargo de este trabajo sea quien realice las orientaciones, considerando pertinente y necesaria la adquisición de esta experiencia.

Una de las razones para seleccionar la Escuela Superior Farallones de Cali, además de contar con el material, el equipo, el espacio apropiado y su vinculación con la Universidad del Valle, es su interés en las investigaciones en Educación Matemática. Se contó no sólo con el apoyo y asesoría de la profesora Mariela Agudelo, sino de todas las profesoras del área de matemáticas y las directivas, quienes brindaron su apoyo y acogida.

La Escuela Normal Superior Farallones de Cali es una institución pública formadoras de maestros normalistas para los niveles de preescolar y Educación Básica Primaria. Ofrece cuatro niveles de Formación: Transición o Preescolar, Educación Básica, Educación Media Vocacional y Ciclo Complementario con énfasis en Educación Matemática. El énfasis afecta la totalidad del currículo, pero se expresa de manera particular en los diferentes niveles de formación a saber: de grado 0 al grado 7º, impregnando las actividades de formación de modo práctico, por medio del trabajo docente de los maestros en el área de Matemáticas y en la Práctica docente experimental investigativa desarrollada por los estudiantes del ciclo complementario en este nivel. A partir del 8º hasta 11º grado el currículo de la Normal se distribuye en un 80% destinado a las áreas obligatorias y un 20% a la formación pedagógica, el énfasis en este nivel se expresa en el privilegio de los campos de la comunicación y de los diversos lenguajes especializados incrementando gradualmente la atención al lenguaje objeto de la Educación Matemática (Ver Análisis Curricular- Anexo A) (Escuela Normal Farallones de Cali, 2000, pp. 110-111).

En cuanto a la selección de uno de los grupos de noveno para la implementación de la Unidad Didáctica, se tomó en cuenta la ayuda y criterio de la profesora Mariela Agudelo. Para ella uno de los mejores grupos de trabajo era el curso 9-4, pero observando los horarios, el grupo que contaban con una mejor distribución y con más bloques de dos horas era 9- 1, un curso de un nivel no mejor que 9-4, pero que ella consideraba se podía realizar un buen trabajo. Por lo cual se seleccionó el curso 9.01, al considerarse apropiado sesiones de más de una hora académica, ya que al inicio de cada sesión se requería de tiempo en la entrega de las calculadoras, hojas de trabajo y en el desplazamiento de los estudiantes hacia al salón, aminorando el tiempo del desarrollo de las actividades. El grupo de estudiantes de 9-1 está conformado por 7 hombres y 31 mujeres entre edades entre los 14 a 16 años.

3.3.2 Puesta en escena de la Unidad Didáctica

Esta Unidad Didáctica fue implementada durante las dos semanas comprendidas entre los días del 1 al 12 de diciembre de 2003. La intensidad horaria de implantación fue de 8 horas académicas (de 55 minutos cada hora). En el transcurso de la segunda semana los días lunes (día festivo) y miércoles (reunión de profesores) fueron días de no clase, por lo cual el día viernes se solicitó la siguiente hora para trabajar en un bloque de 3 horas académicas y finalizar la implementación de las actividades, ya que en los siguientes días se había planeado el desarrollo un laboratorio de matemáticas y dar inicio a las vacaciones navideñas (Ver Tabla 7).

El período de implementación de las actividades se determinó para esas semanas, ya que en el desarrollo del plan de área de la profesora, los estudiantes continuarían con la unidad de expresiones algebraicas equivalentes, en las que se incluye la factorización de expresiones algebraicas y dada las características de la Unidad Didáctica se consideró pertinente implementarlas previo al desarrollo de la unidad de expresiones algebraicas equivalentes.

En los días de implementación de las actividades, minutos antes de que los estudiantes llegaran al salón de trabajo, los profesores Evelio Bedoya, Edinsson Fernández, Mariela Agudelo y en una ocasión Rubén Darío Lozano y la estudiante investigadora, se disponían a organizar el salón, preparar las calculadoras (insertar archivos, borrar expresiones en Y=Editor, ajustar escalas, verificar el funcionamiento, etc.), ubicar la cámara, verificar el funcionamiento del viewscreen, el proyector y en ocasiones discutir con la profesora Mariela Agudelo las actividades realizadas o a realizarse.

En el desarrollo de las actividades, el Profesor Evelio Bedoya y Rubén Darío Lozano participaron como observadores, la profesora Mariela Agudelo ayudaba en el desarrollo de las actividades, a responder inquietudes y aclarar las dudas de los estudiantes y en algunas ocasiones intervenía en las orientaciones, mientras que el profesor Edinsson Fernández participó como camarógrafo y la estudiante investigadora quien hizo a la vez el papel de profesora suplente del grupo 9-1 durante el desarrollo de estas actividades.

Tabla 7. Cronograma de la implementación de la Unidad Didáctica.

SESIÓN	FECHA	ACTIVIDAD	DURACIÓN
1	Lunes 1 de diciembre de 2003	Exploración de áreas de rectángulos con perímetro fijo	110 minutos, es decir dos horas académicas comprendidas entre las 10: 55 a.m. a 12: 45 p.m.
2	Miércoles 3 de diciembre de 2003	Analizando expresiones cuadráticas equivalentes	55 minutos, es decir una hora académica de las 10:00 a 10:55 a.m.
3	Viernes 5 de diciembre de 2003	La relación de los ceros o raíces con los factores de una expresión cuadrática	110 minutos - dos horas académicas comprendidas entre las 6:45 a las 8: 35 a.m.
4	Viernes 12 de diciembre de 2003	Expresiones cuadráticas factorizables	165 minutos- tres horas académicas comprendidas entre las 6:45 a las 9:30 a.m.

Al ingresar los estudiantes y ubicarse en sus respectivos puestos, se procedía a entregárseles una calculadora designada desde la primera actividad y la hoja de trabajo. La organización de las parejas de trabajo la realizó la profesora Mariela Agudelo, se esperaba conservarán los grupos inalterables hasta el final de las intervenciones, sin embargo en el transcurso de las actividades, algunos estudiantes cambiaron de pareja o incluyeron un integrante más, generándose un grupo hasta de tres estudiantes.

Durante las sesiones el salón se organizó de dos maneras diferentes (ver Figura 22 y Figura 23). En la primera organización, se favoreció el trabajo en grupo, ya que no sólo trabajaban entre las parejas sino que se discutían con las otras parejas de la misma mesa (Video #1 Tiempo 20:40 a 28:31). Sin embargo, como algunos estudiantes se ubicaban a espaldas de las proyecciones y para observarlas debían ubicarse en una posición incómoda, se decidió cambiar la organización del salón y centrar su atención a las proyecciones. Con la nueva organización se inhibe el trabajo de las parejas con otras parejas y se dificulta el desplazamiento del camarógrafo, la estudiante investigadora y la profesora Mariela Agudelo para observar y suplir las inquietudes y dificultades de los estudiantes, así que nuevamente se retoma la organización inicial.

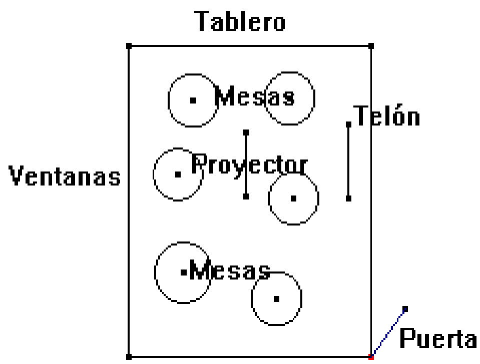


Figura 22. Organización del salón sesión I y sesión IV.

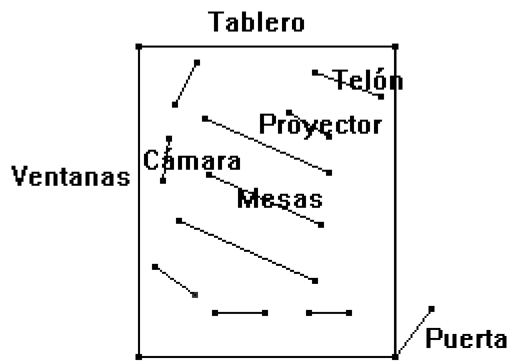


Figura 23. Organización del salón sesión II y sesión V.

En la Figura 22 las representaciones circulares corresponden a mesas de forma de hexágono regular. Para cada mesa por lo menos se ubican tres parejas de estudiantes. Mientras que en la segunda organización, las mesa se han organizado linealmente y los estudiantes se ubican de frente al telón de proyección. Las ventanas se ubican en la parte izquierda, el tablero en la zona superior y la puerta de ingreso al salón en la parte derecha inferior. Para cada sesión los estudiantes debían desplazarse de su salón de clase al salón destinado para el trabajo con las calculadoras (laboratorio de matemáticas), que se encuentra en el segundo piso de la institución. Al final de cada sesión se recogen las hojas de trabajo de los estudiantes, en algunas intervenciones por razones de tiempo fue necesario suprimir algunas actividades o realizarlas únicamente con las Calculadoras Graficadora Algebraicas y la discusión grupal sin la consignación por escrito en las hojas de trabajo.

3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

En la fase de implementación de las actividades se han determinado diferentes técnicas e instrumentos de recogida de datos. Se utilizaron registros escritos como: hojas de trabajo de la Unidad Didáctica realizada por los estudiantes, diario de campo elaborado por la estudiante investigadora, notas de campo realizado por los observadores, así como un registro visual a través de la grabación de video. En la primera sesión se utilizó grabación fonográfica, pero debido al excesivo ruido, se consideró pertinente omitirla. En cuanto a las notas de campo, en la primera sesión fueron realizadas por el profesor Evelio Bedoya y en la tercera sesión por profesor Rubén Darío Lozano, mientras que en la segunda y la última sesión no se tomaron notas de campo.

Previo al desarrollo de las actividades y al finalizar las sesiones se efectuaba una entrevista informal con la profesora Mariela Agudelo a cargo del curso de álgebra del grado 9-01. En ellas se discutían las actividades, las conductas de los estudiantes y la estudiante investigadora y se sugerían actividades, modificaciones en la organización, desarrollo y orientación de la Unidad didáctica. Algunas de estas entrevistas han sido grabadas en video y otras de ellas consignadas en el diario de campo.

En cuanto a las grabaciones de video se han elaborado unas tablas (ver Anexo C) en donde se describen los momentos de cada una de las intervenciones con su respectivo tiempo de ejecución. Los videos en comparación a los instrumentos y técnicas de recogida de datos, permiten observar la conducta de los estudiantes, los investigadores y la profesora Mariela Agudelo, en cada una de las intervenciones, permitiendo percatarse de algunos de los momentos que pasan desapercibidos. En comparación con las notas de campo y diario de campo se desligan de la subjetividad de quien las realiza.

Respecto a las hojas de trabajo de los estudiantes, se han elaborado algunas tablas en donde se clasifican las respuestas prototípicas de los estudiantes, mostrándose un ejemplo de una de estas respuestas (Ver Anexo B). En tabla, se anexa la frecuencia absoluta, el porcentaje de recurrencia de las respuestas y una descripción general. En cuanto el diario de campo y notas campo algunas de estas anotaciones, han sido incorporadas implícitamente en el análisis de los resultados.

Las técnicas utilizadas para el análisis de los datos bajo una investigación cualitativa, descriptiva e interpretativa, recogen datos de tipo cualitativo y cuantitativo. En algunos se ha considerado pertinente tomar el doble aspecto cuantitativo.- cualitativo de los datos como en el análisis de los resultados de las hojas de trabajo y los videos, mientras que para las notas de campo y el diario de campo sólo han sido analizadas bajo la perspectiva cualitativa.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4. 1 ACTIVIDAD Nº 1: “EXPLORACIÓN DE ÁREA DE RECTÁNGULOS CON PERÍMETRO FIJO”

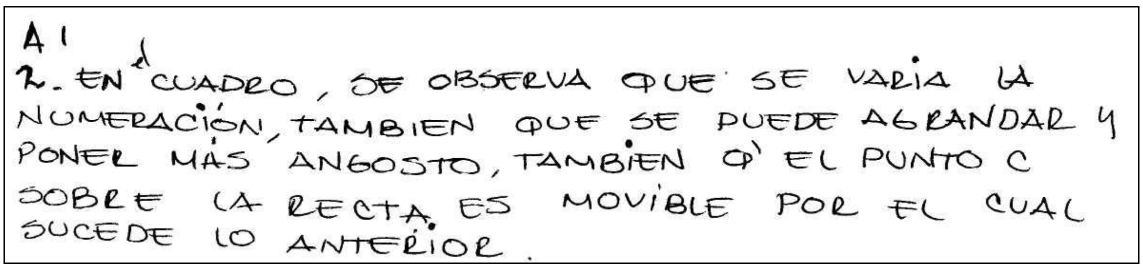
- Análisis de la tarea A.I.1.

En el desarrollo de la primera tarea A.I.1, fue claro para la mayoría de los estudiantes la relación entre el movimiento del punto C y la modificación de los objetos que se presentaban en la pantalla de la calculadora (valores de los lados, área, segmento AB y figura). En las descripciones presentadas para esta tarea, se observan que se centran en diferentes aspectos de variación, generándose varias respuestas; la de mayor recurrencia, 48.6%♣ de los estudiantes, dan descripciones en torno a dos de los aspectos variables de la construcción dada, dividiéndose en dos grupos: los cambios de la figura y el segmento AB y los cambios de la figura y las medidas (incluyéndose los valores del área). Sólo el 37.1% de los estudiantes incluyen en su descripción todos los aspectos de variación en la construcción, que se han clasificado en torno a la figura, segmento AB y medidas. En estas respuestas es usual mencionar los cambios, pero no mostrar la relación entre ellos.

♣ En esta actividad participaron un total de 35 estudiantes.

En esta tarea, la mayoría de las respuestas son descripciones más cualitativas que cuantitativas, por ejemplo uno de los aspectos en la descripción de los cambios se centraba en el movimiento hacia la derecha y hacia la izquierda del punto C en el segmento AB. En cuanto a los cambios de los rectángulos se utilizan expresiones como se agranda, se altera o se distorsiona, cambia la forma de la figura, cambia el ancho y el largo, se angosta y se alarga verticalmente o horizontalmente, disminuye o aumenta la figura, se amplía o se reduce, se alarga o se encoge; expresiones que en ningún momento se justifican con los valores numéricos de las medidas de los lados o el área. Así mismo, para las variaciones del segmento AB las descripciones se hacen con relación a la distancia del punto C en el segmento AB o en las medidas de los segmentos AC y CB, indicando que hay cambios en la distancia o en las medidas, sin contrastar con algún valor numérico.

Respecto a los cambios del área de la tarea A.I.1, las descripciones no son específicas, en algunas respuestas se incluyen expresiones como: "cambian las medidas" y otras hacen explícita la descripción, pero no se precisa cómo ocurren los cambios. Otros estudiantes intentan dar una explicación de la variación del área con respecto al movimiento del punto C, manifestando falsas generalizaciones, indicando que hacia la derecha el área aumenta y a la izquierda el área disminuye. Esta afirmación se da, sólo para la medida de uno de los lados del rectángulo, sin embargo, algunos no se percatan de eso y asumen este comportamiento para todas las medidas. La idea de que hacia la derecha las medidas aumentan puede ser un error fundamentado en la utilización de operadores en la recta numérica, en algunas ocasiones los desplazamientos vectoriales hacia la derecha indican un aumento, mientras que los de la izquierda generan una disminución. En cuanto a los valores máximos y mínimos del área, en ninguna de las respuestas los estudiantes muestran que cuando la figura es un cuadrado el área es máxima o cuando la figura tiende a ser un segmento el área es cero. Aunque en esta tarea no se hace explicita alguna referencia con respecto a estos valores, los estudiantes al interactuar con el archivo habían podido detectar estos valores. En cuanto a los cambios del área, se centran en el valor numérico, sin hacer referencia a ningún valor particular, ni efectuar comparaciones de las diferentes áreas de los rectángulos generados.



A 1
2. EN el CUADRO, SE OBSERVA QUE SE VARIA LA
NUMERACIÓN, TAMBIEN QUE SE PUEDE AGRANDAR Y
PONER MÁS ANGOSTO, TAMBIEN Q' EL PUNTO C
SOBRE LA RECTA ES MOVIBLE POR EL CUAL
SUCEDE LO ANTERIOR.

Figura 24. Utilización de la palabra recta en lugar de segmento.

En las descripciones se aprecia el uso de diversos términos que no dejan ver las precisiones de sus observaciones. Algunos estudiantes (17.14%) se refieren al segmento AB como si fuera una recta (ver Figura 24), mientras que otros referirse a los rectángulos obtenidos al variar C en el segmento AB, usan palabras como: figura (34.3%), cuadrado (25.7%), rectángulo (5.7%) y en algunas respuesta no se utiliza ningún término (34.3%). Con respecto a la utilización indebida de la palabra recta por la de segmento y la de cuadrado por la de rectángulo, indican que para los estudiantes no son distinguibles los términos, por lo cual los confunden o los tratan como si fueran palabras sinónimas. En cuanto al uso de la palabra cuadrado es posible que no acepten que un cuadrado sea un rectángulo, por lo cual evitan utilizar la palabra rectángulo, que para ellos excluiría el único cuadrado que se genera (ver Figura 25).

DESARROLLO:
A.1.
A medida de que uno va moviendo el punto c, hacia la izquierda, el ancho del cuadrado aumenta y si lo movemos hacia la derecha su largo aumenta y su ancho disminuye.

Figura 25. Respuesta de la A.I.1 en el que utilizan el término cuadrado al referirse a los cambios de la figura.

En cuanto a la notación, se encuentran algunos errores al denotar puntos, segmentos o el rectángulo. Es usual para denotar un punto usar una letra mayúscula, para denotar un segmento utilizar dos letras mayúsculas que indican los puntos extremos del segmento, agregándole una línea en la parte superior ($\overline{AB}$) o anteponiendo la palabra segmento. En algunas respuestas se denotan los puntos utilizando dos letras, de manera similar a la notación de segmento, combinado letras mayúsculas con minúsculas o utilizando una sólo letra en minúscula (ver Figura 26). La respuesta puede indicar un error de notación de puntos o quizás un error en la utilización de la palabra punto en vez de la palabra segmento. Estos errores se presentan en el 17.1% del grupo.

1 se ve que se cambia los puntos ac, el CB y el area de la Figora, al mover el punto C. se altera o se distosiona el rectángulo

Figura 26. Notación de puntos.

En cuanto la notación de la figura, en una de las respuestas de una pareja estudiantes (5.7%) se asume la etiqueta del lado derecho del rectángulo como su notación y no como uno de sus lados. Aunque en la parte derecha de la pantalla se mostraba la igualdad de la expresión CB = AB – x, ellos asumen AB –x como la etiqueta que diferencia el rectángulo. En la

Figura 27 se muestra la notación del rectángulo y se observa un error de notación de puntos.

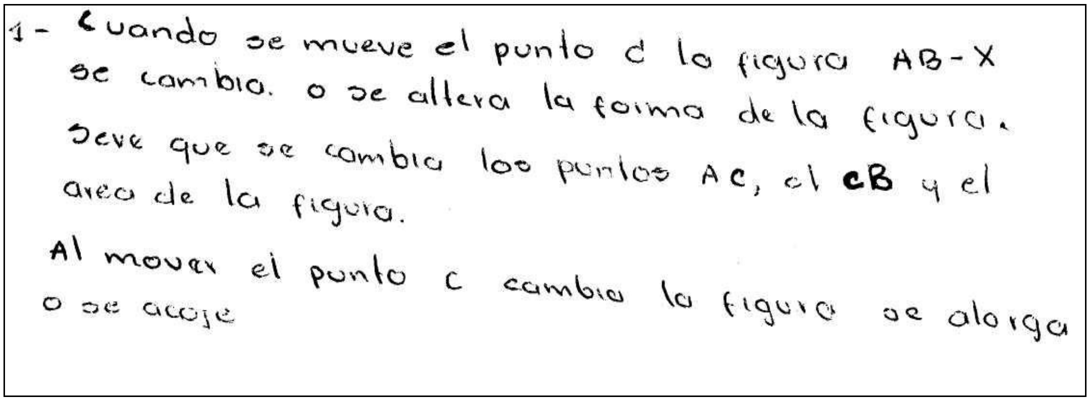

1- Cuando se mueve el punto c lo figura AB-X se cambio. o se altera la forma de la figura.
Seve que se cambia los puntos AC, el CB y el area de la figura.
Al mover el punto C cambio la figura se alarga o se acoje

Figura 27. Notación del rectángulo.

Una de las imprecisiones de la notación de segmentos se observó en una pareja de estudiantes (5.7%) que al referirse al segmento AB, agregan una coma entre A y B. En la mayoría de las respuestas de los estudiantes (60%), se omite referirse directamente al segmento AB, no requiriendo de alguna notación, en casi todas las respuestas (94.28%) se hace mención al punto C. De aquellos estudiantes que denotan el segmento AB, el 25.7% utilizan la notación adecuada para segmento, en cuanto a la notación de punto el 74.6% lo hace adecuadamente, en cambio para la notación de figuras ninguno otro a excepción de la pareja que cometió el error, utilizan notación. En el trabajo escrito de los estudiantes, se observa falta de rigurosidad en las notaciones, aunque se entiende a que hace referencia en algunas ocasiones las imprecisiones generan diversas interpretaciones en la búsqueda de coherencia en sus producciones. Por lo cual, se considera necesario retomar en este análisis este aspecto, poniendo en evidencia la necesidad de ir promoviendo en la enseñanza de las matemáticas, la adquisición de un lenguaje adecuado para sus escritos matemáticos (ver Figura 28).

A. I.2 Se puede observar que al arrastrar el punto c. del segmento A,B. nos damos cuenta q' va variando el area y sus lados deacuerdo a como se ubica el punto c dentro del segmento, tambien va disminuir o aumentar
2. Actividad • Cuando se cambia de posicion el ponto C, cambian las medidas de los segmentos * $\overline{AC}, \overline{CB}$ y su área.
Cuando se mueve el punto c del segmento $\overline{AB}$ las medidas de la figura se cambian. Cuando el punto c se mueve a la derecho se angosta y se alarga verticalmente, y si se mueve a la izquierda el punto c, la figura se alarga horizontalmente.

Figura 28. Notación de segmentos.

- **Análisis de la tarea A.I.2.**

En esta pregunta se les solicita dar explicación de la expresión X(2-X) con respecto a la situación presentada. Se encuentra que sólo el 31.43% da una respuesta correcta a la pregunta, mostrando la relación del área con la expresión factorizada, es decir retomando la fórmula del área para rectángulos (base por altura) reconociendo los lados que corresponden a la base y la altura. El 31.43% da una respuesta parcialmente correcta al asumir como verdadera la expresión x(2-x), ya que en la pantalla de la calculadora se muestra la expresión x(AB –x) como igual al área de la familia de rectángulos que se genera y al efectuar la sustitución del valor de AB= 2 obtienen la expresión x(2-x). En esta tarea, es destacable que para la mayoría de los estudiantes (62.86%) es reconocible que el valor AB es igual a dos, relacionando la mitad del perímetro con la expresión del área, x(AB-x). En posteriores puestas en práctica, es necesario modificar esta pregunta, previendo respuestas parciales como las obtenidas, otra alternativa es modificar la construcción del archivo en Cabri Geometry en la que sólo se den los valores del área, pero no su expresión, de manera que los estudiantes la obtengan y la verifiquen con los valores dados.

En una de las respuestas incorrectas (ver Figura 29) de una pareja de estudiantes, se observa que en la respuesta A.I.1 los estudiantes se refieren a la figura utilizando el término cuadrado. Coherente a la afirmación de que la figura es un cuadrado, continúan con la respuesta A.I.2 asumiendo que los valores de los lados de la figura valen x y que por tanto el área es 2x. Aunque no se explicita que el área sea el producto de sus lados, es posible que al multiplicarlos hayan obtenido la expresión 2x en vez de x^2, mostrando un error de manipulación algebraica.

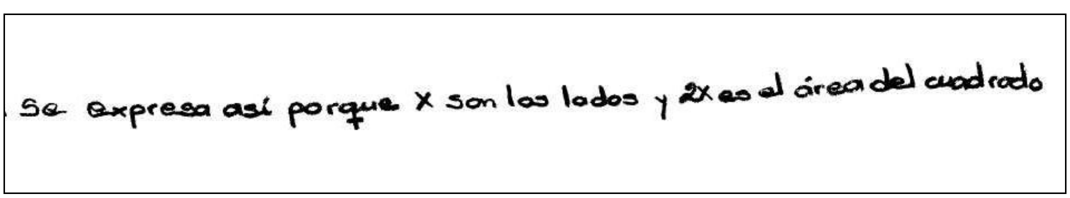


Figura 29. Respuesta incorrecta de la tarea A.I.2 en la que se asume la figura como un cuadrado.

En algunas de las respuestas incorrectas se observan que los estudiantes no comprenden la relación del segmento AB y los lados del rectángulo (ver Figura 30). Para algunos estudiantes (11.4%) AB es igual 2-x que corresponde a una de los lados o altura del rectángulo. Otros estudiantes (14.3%), asumen diferentes interpretaciones de la letra x, por un lado es el área, mientras que –x es CB o para algunos CD. La determinación del signo menos de la x puede estar relacionado con el desplazamiento hacia la izquierda del punto C con respecto al punto B, asemejándose al desplazamiento con operadores en la recta numérica. Inclusive en esta respuesta dos de estos estudiantes se refieren al segmento AB como una recta. Otra interpretación de esta respuesta puede estar relacionada con una forma de denotar una cantidad menor, determinándose que x es una cantidad positiva, ya que ellos afirman que CB es igual a -x porque conforma una x de AB (Ver Video #1 Tiempo 37:07 a 41:47 minutos, Anexo C). En cuanto a la utilización de CD, denotando una medida, es posible que sea un error de escritura con respecto a CB como medida, ya que en la actividad no hay relación con la letra D.

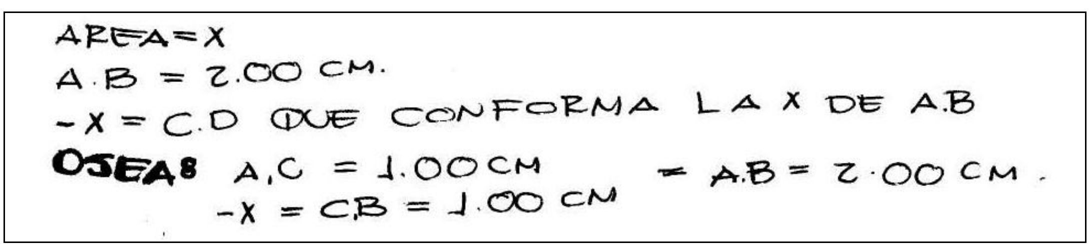

AREA=X
A.B = 2.00 CM.
-X = C.D QUE CONFORMA LA X DE A.B
OSEAS A,C = 1.00 CM = A.B = 2.00 CM.
-X = CB = 1.00 CM

Figura 30. Respuesta incorrecta en la que se evidencia la desconexión del segmento AB con respecto a la figura.

- Análisis de la tarea A. I.3

En esta actividad se muestra la gráficas del área de los rectángulos vs. el lado AC . Se les solicitaba hacer una descripción de la trayectoria y los valores de las coordenadas del punto P con respecto a la situación planteada. Se esperaba que la identificación de la variable independiente (lado AC) y dependiente (Área) fuera significativa al presentarse junto con la variación de las figuras obtenidas al mover el punto C. Sin embargo, los resultados de esta respuesta muestran que para los estudiantes no fue fácil detectar la relación de dependencia del valor del área de los rectángulos y de los lados y su relación en el plano cartesiano (el 62.86% no hallan la relación del P con la situación planteada). Aunque en la construcción en Cabri Geometry se mostraba en la misma pantalla las coordenadas del punto P y los valores del área y el lado AC, no fue evidente la relación de las coordenadas del punto P con los valores de AC y el área. En cuanto a la trayectoria la mayoría de ellos ignora su respuesta (94.3%) y no dan una descripción en relación a las parábolas o gráficas de expresiones cuadráticas, que ya habían trabajado (ver Análisis Curricular – Anexo A).

Estos resultados muestran que es necesario un trabajo de mayor tiempo para que los estudiantes adquieran habilidades en la interpretación de la gráfica con relación a las situaciones planteadas, hasta el momento el tratamiento gráfico había estado ligado a la expresión algebraica sin un contexto o situación mediadora. Es necesario tener en cuenta, que los cambios de representación son una operación difícil e incluso imposible para algunos estudiantes. Todo sucede como si para la mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada (Duval, 1999, p. 28).

Algunas respuestas asumen descripciones en relación al punto C y las medidas del área y los lados, similar a las descripciones de A.I.1, sin relacionarla con el punto P (31.43%). En ocasiones se presentan descripciones que intentan generalizar los cambios de las medidas con relación al movimiento del punto C, obteniéndose falsas generalizaciones (ver Figura 31). La respuesta común (37.14%) con relación a las coordenadas del punto P, determina que representa el lado AC con respecto a su área.

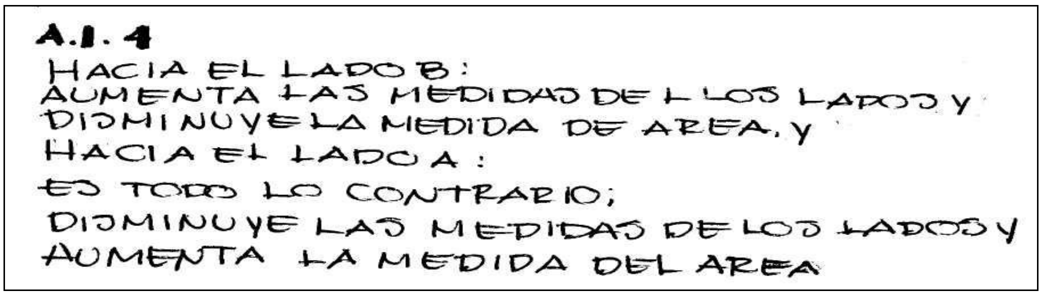


Figura 31. Falsas generalizaciones en la respuesta de A.I.3.

Aunque los estudiantes pueden recorrer los puntos de P al mover el punto C, para muchos estudiantes no fue claro, que el área máxima se obtiene cuando el punto C está en la mitad del segmento AB, es decir cuando la figura es un cuadrado y cuando P está en el punto cima de su trayectoria. Sólo un estudiante dice que el punto de la mitad es el máximo, pero no específica si está hablando del segmento AB o de la trayectoria del punto P. Es usual encontrar respuestas en las que se deja implícito a lo que se están refiriendo y en ocasiones dar argumentos desconectados, dificultando comprender lo que expresan.

Es entendible que aunque los diferentes sistemas de representación permiten el trabajo de diferentes propiedades del objeto matemático, la conjugación de ellos trae dificultades, no es fácil el trabajo de varios sistemas de representación en una sola situación. Esto se refleja claramente en la tarea anterior, en donde los estudiantes tratan independientemente cada representación y no comprenden que son representaciones del mismo objeto. Esta primera actividad, permite contextualizar un poco más las actividades siguientes con respecto al grupo de estudiantes, téngase en cuenta que el diseño de la actividad pretendía además de suscitar interés y motivos, ser una prueba diagnóstica de los conocimientos y habilidades de los estudiantes.

- Las otras tareas

Las siguientes tareas de la actividad Nº 1: A.I.4, A.I.5, A.I.6 y A.I.7, fueron efectuadas sólo con la calculadora, Viewscreen y el proyector a manera expositiva, así que no proporcionaron resultados escritos. En las explicaciones se dan las indicaciones a los procedimientos a seguir utilizando los programas Y=Editor y Gráficos. Estas tareas se observan en el Video #1 tiempo 59:13 al 1:26:16 min. En cuanto la tarea A.I.7, dado el poco tiempo de las sesiones, no fue posible centrase en ella. La variación de los parámetros de la expresión polinómica cuadrática permite obtener diversos patrones de comportamiento de sus gráficas. Esta es una de las tareas que aprovecha las facilidades de las **NTI** y hace que sean útiles, ya que otra tecnología no permite la realización de esta tarea. Se deja abierta la posibilidad de extenderse un poco esta tarea e incorporarla en próximas Unidades Didácticas.

- Uso de la Calculadora Graficadora Algebraica

Aunque los estudiantes ya habían trabajado con el programa Cabri Geometry, se vio la necesidad de orientar su manejo utilizando el Viewscreen. Después de las primeras indicaciones del manejo de Cabri Geometry, se observa que los estudiantes mejoran el manejo de la calculadora, siguiendo simultáneamente las indicaciones proyectadas. Con relación al programa Y=Editor y Gráficos fue necesario enseñarles su manejo durante la implementación de las actividades, presentándose dificultades al digitar las expresiones y al graficarlas. Las últimas tareas fueron diseñadas con el uso de los programas Y=Editor y Gráficos, debido a la poca experiencia del grupo de estudiantes con estos programas, se hace necesario disponer de más tiempo de lo previsto en las explicaciones del manejo de la calculadora. Por lo cual, las tareas A.I.5 y A.I.6 fueron realizadas sólo por la expositora y no conjuntamente con los estudiantes, indicándoles las orientaciones para un próximo manejo de Y=Editor y Gráficos.

En cuanto a los beneficios del uso de la calculadora graficadora algebraica, se observa que el uso de caja negra en las tareas A.I.1, A.I.3 y A.I.5, es decir, la omisión de la construcción para A.I.1 y A.I.3 o la recolección de los puntos para la A.I.5, permitió centrar la atención al objeto de la actividad, ya que si se hubiesen desarrollado dichas construcciones, se necesitaría de más tiempo y su ejecución puede generar complicaciones innecesarias para estudiantes poco aventajados en el manejo de la calculadora.

En cuanto al diseño de la construcción en Cabri Geometry, esta permite la interacción en tiempo real del estudiante con la calculadora, obteniendo cambios simultáneos entre la familia de rectángulos, los segmentos AB, AC y CB, el área y sus valores numéricos, facilitando relacionar diferentes objetos. Los cambios observados son de fácil obtención, ya que sólo se requiere de arrastrar el punto C con la tecla sostenida de la calculadora.

En relación con la recolección de puntos del área de los rectángulos y el lado AC y la graficación de la expresión de $-x^2 + 2x$ en la misma pantalla, observándose la superposición de las gráficas, esta facilitó relacionar la expresión $-x^2 + 2x$ con la situación presentada y la expresión factorizada x(2-x), siendo preámbulo a la siguiente actividad, en la que se muestra por manipulaciones algebraicas (desarrollo del producto indicado en la expresión factorizada), gráficamente y por una tabla de valores, la equivalencia de estas expresiones.

4.2 ACTIVIDAD Nº 2: "ANALIZANDO EXPRESIONES CUADRÁTICAS EQUIVALENTES"

- Análisis de la tarea A.II.1

En esta tarea se esperaba que los estudiantes observaran los valores y expresiones de la tabla, relacionándolos con la experiencia de la variación del área de una familia de rectángulos con perímetro fijo, trabajada en la actividad Nº 1. En la tabla se retoman algunos de los valores como el área máxima y el área mínima, valores que los estudiantes no detectaron en la actividad anterior. En las tablas se presentaban algunas regularidades como la igualdad de los valores del área con la expresión factorizada y la expresión a la que se le llamó desarrollada.

En el Video # 1 tiempo 1:26:16 min. se muestra en las explicaciones la realización del producto de la expresión factorizada obteniéndose la desarrollada y aclarando la relación de los lados del rectángulo con los factores. Aunque se había mostrado la igualdad de las expresiones algebraicas del área por manipulaciones algebraicas (la obtención de la expresión desarrollada al efectuar el producto de la expresión factorizada), gráficamente (A.I.7) y en la tabla, la mayoría de los estudiantes, sin hacerles la petición, no completan los espacios en blanco de la tabla. Al mirar la tabla, con detectar las regularidades o con la sustitución de los valores de X en las expresiones factorizada y desarrollada se puede completar los valores faltantes, sin requerir ninguna función de la calculadora.

A partir de las indicaciones y solicitud de completar la tabla de la tarea A.II.2, los estudiantes intentan hallar los valores con el procedimiento sugerido: buscándolos en cada uno de las gráficas utilizando la función trace ($\boxed{\text{F3}}$). Debido a la poca experiencia de los estudiantes en el manejo programa Y=Editor, a muchos se les dificultó encontrar los valores en la gráfica para completar la tabla, sin recurrir a otro procedimiento para hallar los valores. Sólo una pareja de estudiantes completa la tabla. Los valores obtenidos por esta pareja de estudiantes no son iguales, algunos de ellos se aproximan (Ver Figura 32).

LADO AC	LADO CB	AREA	AREA
x	(2 – x)	x(2-x)	$-x^2+2x$
0 cm	2 cm	0 cm^2	0 cm^2
0.24 cm	1.76 cm	0.43 m^2	0,42 cm^2
0.34 cm	1.66 cm	0.57 cm^2	0.57 cm^2
0.48 cm	1.52 cm	0.73 cm^2	0.73 cm^2
1 cm	1 cm	1 cm^2	1 cm^2
1.14 cm	0.86 cm	0.97 m^2	0.98 cm^2
1.28 cm	0.72 cm	0.92 cm^2	0.92 cm^2
1.66 cm	0.34 cm	0 98 m^2	0,57 cm^2
2 cm	0 cm	0 cm^2	0 cm^2

Figura 32. Respuesta de la tarea A.II.1.

- Análisis de la tarea A.II.2

En esta tarea se incluyen las respuestas a dos preguntas: ¿Cómo son las gráficas de las expresiones del área? ¿Son las dos expresiones del área equivalentes? Para la mayoría de las estudiantes las respuestas a estas preguntas no se consignan en las hojas trabajo, sin embargo en el desarrollo de las actividades a medida que ellos iban realizando en la calculadora los procedimientos, se les mostraba los resultados de la pantalla de la calculadora y se les hacían preguntas con respecto a lo que observaban, dando respuestas orales (Ver Video #1, Tiempo 1:40- Anexo C). Se observa que los estudiantes tienden a seguir las indicaciones del manejo de la calculadora y son pocos los que escriben sus respuestas en sus hojas de trabajo.

De las respuestas por escrito, sólo una pareja de estudiantes (6.25%)[♣] responden que las expresiones son equivalentes, agregando la siguiente expresión: $x(2-x)=-x^2+2x$, mientras que el 12.5% de los estudiantes afirman que las gráficas son iguales, agregando que una es más gruesa que la otra. El hecho de que el trazo de las gráficas (delgado- grueso) fueran

[♣] Este porcentaje está dada para un 32 estudiantes diferentes, fue una característica agregada para diferenciarlas, debido a que se utiliza una sola pantalla para la graficación de las dos expresiones, siendo conveniente cambiar el grosor de la segunda expresión para observar la superposición de las gráficas. Para evitar que los estudiantes centren su atención en esa característica, se puede utilizar pantalla doble, graficando en cada una de ellas cada expresión sin necesidad de cambiar al estilo del trazo y de esa manera no darle relevancia al grosor (ver Figura 33).

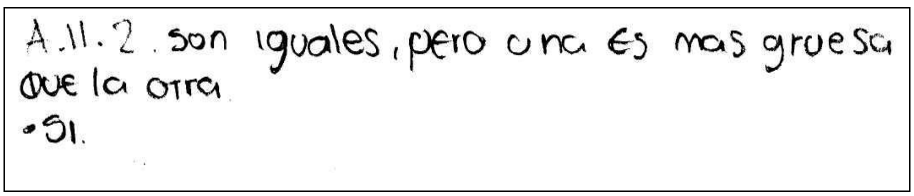

A.II.2. son iguales, pero una es mas gruesa que la otra
• Si.

Figura 33. Respuesta de una pareja de estudiantes de A.II.2.

- Uso de la Calculadora Graficadora Algebraica

La mayoría de los estudiantes presentaron problemas con el manejo de la calculadora (ver Video #1, tiempo 1:26:16 a 1:57:24 min. - Anexo C) con relación al uso de los programas Y=Editor y Gráficos. Debido a que los estudiantes desconocen el manejo del programa Y=Editor, se requiere dar indicaciones específicas, presentándose diversas dificultades como las relacionadas con la sintaxis de entrada para expresiones algebraicas: utilizar la tecla $\boxed{(-)}$ para la resta y la tecla $\boxed{-}$ como signo negativo, confundir la tecla de multiplicación $\boxed{\times}$ con la de la letra $\boxed{X}$ y viceversa, utilizar la tecla del punto $\boxed{.}$ para efectuar el producto, no utilizar paréntesis para los factores de la expresión factorizada, olvidar utilizar la tecla $\boxed{\wedge}$ para elevar un exponente, entre otras omisiones o equivocaciones. En cuanto al cambio del trazo de las gráficas, aunque se les había indicado como hacerlo y aplicarlo sólo a la segunda expresión digitada, algunos modificaban el trazo de la primera expresión o no modificaban el trazo de ninguna de las dos expresiones, por lo cual no observaban en su calculadora la superposición de las gráficas.

En cuanto al manejo de Gráficos al ejecutar la Función Trace $\boxed{F3}$, se generó diferentes dificultades que inhibieron la exploración de los puntos. Uno de los problemas fue técnico, ya que algunos valores no se encuentran exactos, dándose valores aproximados como se muestra en la tabla efectuada por una pareja de estudiantes (Ver Figura 32). Algunos estudiantes no entendieron el procedimiento de pasar simultáneamente de una gráfica a otra con la función trace y el cursor superior e inferior ($\boxed{F3}$ ⌃ ⌄), distinguiéndose una gráfica de la otra por medio de un número que aparece en la parte superior de la calculadora, ocasionando que sólo exploraban una gráfica, tomándose más tiempo de lo previsto y no hallándose los valores solicitados. Dado que la calculadora muestra los valores de *x* y de *y* de las coordenadas de los puntos explorados, los estudiantes no sabían cuál de ellos era el solicitado; aunque el valor del lado AC se denotó como x, no entendían la relación de las coordenadas con las expresiones y las gráficas.

Algunos estudiantes por las pocas destrezas en el manejo de la calculadora, no lograron obtener las gráficas de las expresiones ni efectuar los otros procedimientos con base a ellas. Sin embargo la posibilidad de proyectar los resultados de la pantalla de la calculadora, de manera similar a utilizar un tablero, permite que todos los estudiantes observen lo que se requería, sin la necesidad de realizarla en su calculadora. Por lo tanto el no efectuar los procedimientos en su calculadora no era impedimento para dar respuesta a las preguntas ni completar la tabla. Sin embargo para los estudiantes fue primordial realizar los procedimientos, centrando más su atención al manejo de la calculadora y al hecho de ellos mismos obtener los resultados.

Dada las diversas dificultades con el manejo de la calculadora, el tiempo requerido para las explicaciones de su manejo, aminoró el tiempo destinado para consignar por escrito las observaciones. Sin embargo durante el desarrollo de la clase y la observación de los resultados de la pantalla como el ver que las gráficas de las expresiones factorizada y desarrollada se superponían, observar coincidir los puntos de las gráficas al pasar simultáneamente una de la otra y anexándose el desarrollo del producto de la expresión factorizada y por ende la obtención la expresión desarrollada, dan las justificaciones suficientes para que los estudiantes expresaran verbalmente que las expresiones factorizada y desarrollada eran equivalentes o iguales.

El uso de la calculadora permitió diversas actividades en comparación con otras tecnologías. El uso de la pantalla dividida, da la posibilidad de observar simultáneamente las gráficas y las expresiones algebraicas correspondientes. El uso del cambio de estilo $\boxed{\text{F6}}$ en el trazo de las gráficas del programa Y=Editor, permitió diferenciar las gráficas y observar la superposición de ambas al ser graficadas simultáneamente en la misma pantalla. El uso de Trace $\boxed{\text{F3}}$ en Gráficos, permitía observar la igualdad de los valores de los puntos de cada una de las gráficas con sólo oprimir el cursor superior e inferior $\uparrow\downarrow$. En cuanto a los mensajes alusivos a errores de sintaxis, facilita que el estudiante busque las causas de su error y al observar en la parte superior de Y=Editor la expresión digitada, de manera similar a las expresiones escritas con lápiz y papel, se facilita verificar la correcta digitación de las expresiones.

Aunque que las facilidades que brindan la Calculadora Graficadora Algebraica se vieron opacadas por las pocas destrezas de los estudiantes en su manejo, esto no es una razón suficiente para negarlas, aunque algunos estudiantes no lograron efectuar los procedimientos en sus calculadoras, la proyección efectuada al inicio de las tareas y sus conocimientos previos algebraicos daban herramientas suficientes para que todos los estudiantes, en iguales condiciones efectuaran las actividades. Además, en otras condiciones, en donde el tiempo no sea una limitante se puede preparar a los estudiantes en el manejo de estos programas. Téngase en cuenta que sólo se contó con una calculadora para una pareja de estudiantes y en ocasiones sólo uno de los estudiantes aprende a manejarla y dado que en estas actividades las parejas fueron seleccionadas, es posible que algunas de estas parejas estén conformadas por estudiantes que muy poco han trabajo con la calculadora en sesiones anteriores. En el caso hipotético en el que cada estudiante tuviera acceso a una calculadora, ¿los resultados de estas actividades mejorarían? ¿O talvez se generarían otras dificultades como la incapacidad del trabajo en equipo?

4.3 ACTIVIDAD Nº 3: "LA RELACIÓN DE LOS CEROS O RAÍCES CON LOS FACTORES DE UNA EXPRESIÓN CUADRÁTICA"

- Análisis de la tarea A.III.1

En esta actividad no se da trabajo por escrito, se realizan las explicaciones utilizando el Viewscreen y el proyector, mientras que simultáneamente los estudiantes efectúan las indicaciones en su calculadora. Se inicia retomándose los procedimientos de la anterior actividad para obtener pantalla dividida e introducir pantalla doble que permite visualizar dos pantallas de gráficos, obteniéndose dos calculadoras, cada una independiente de la otra. Se dan las orientaciones para cambiar la escala del eje de coordenadas de graficación en la aplicación Window con Xmin = -10, X max= 10, Y min = -10 y Y max = 10.

Previo al desarrollo de la actividad A.III.2 se explica la propiedad de los productos nulos, tomándose la expresión (x-2)(x-(-3)). Se define los ceros y se realizan las manipulaciones algebraicas aplicando la propiedad de los productos nulos a la expresión (x-2)(x-(-3)), obteniéndose los ceros y relacionándolos con los cortes del eje x (Ver Video #2, Tiempo 21:50 al 34:21 min. - Anexo C). Posteriormente se explican los procedimientos de la graficación y obtención de los ceros con la función ($\boxed{F5}$: 3 Cero) de la expresión (x-2)(x-(-3)), necesarios para el desarrollo de la siguiente tarea.

- **Análisis de la tarea A.III.2**

La tarea estaba diseñada ejecutando el programa parábola ( ), pero por problemas técnicos no fue posible transferir el archivo a todas las calculadoras. Por lo cual, se modificó la tarea solicitándoles dar una expresión de la forma (x –r)*(x - s). La tarea estaba diseñada partiendo de la representación gráfica a la representación simbólica de las expresiones polinómicas cuadráticas, la tarea modificada parte de la representación simbólica a la gráfica. Se siguen las mismas preguntas planteadas en la tarea anterior a excepción de la tercera, en la que se le solicita graficar la expresión factorizada hallada con los valores de los ceros de la gráfica obtenida con el programa, para luego compararlas.

Inicialmente los estudiantes grafican su expresión factorizada y de ella obtienen sus cortes con el eje x. Al anotar los valores de los ceros se observa que utilizan coordenadas cartesianas (11.8%)[♣], dan los valores de *y* y de *x* por separado, similar a la manera como la calculadora presenta los valores (17.7%) o dan respuestas combinando las dos anteriores (32.3%). Respecto a los errores obtenidos de sus respuestas se observa que una pareja de estudiantes (5.8%) omite el signo menos de uno de sus ceros y tres estudiantes (8.8%) al intentar hallar los ceros por manipulaciones algebraicas aplicando la propiedad de los productos nulos no despejan correctamente el valor de x, obteniendo un valor erróneo de los ceros (Ver Figura 34).

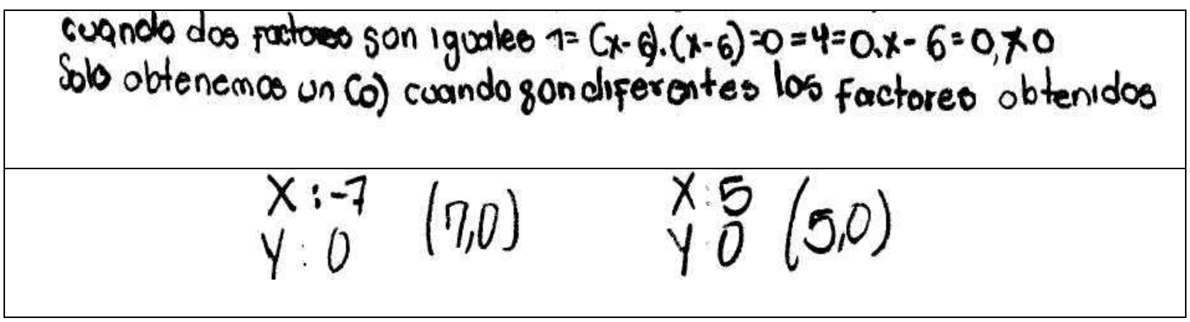


Figura 34. Respuestas erróneas al hallar los ceros.

Con relación a las expresiones factorizadas dadas por los estudiantes los valores de s y r son en la mayoría enteros positivos (64.7%), unos cuantos toman para s y r un entero positivo y el otro negativo (26.5%) y unos pocos dan para s y r el mismo valor (8.8%). Algunas de las gráficas de estas expresiones fueron proyectadas, por ejemplo para los estudiantes donde r y s son iguales, no era claro el número de ceros, igualmente para sus otros compañeros fue motivo de discusión. Otros estudiantes obtuvieron gráficas en las que no se observaba el vértice, generando dudas en relación a la correcta graficación y dando la

[♣] Los porcentajes están dados para un total de 34 estudiantes.

oportunidad de explicárseles el ajuste de escala (Ver Video #2 Tiempo 34:21 min.- Anexo C). Las dudas de los estudiantes dan indicios de que hasta el momento sólo se habían observado gráficas con dos cortes con el eje x y en las que se observaba el vértice, tendiendo a generalizar estas dos características para gráficas de expresiones factorizadas cuadráticas.

En las anteriores actividades los estudiantes se les daba la expresión a graficar, en esta actividad la posibilidad de que ellos dieran las expresiones, genera casos interesantes que permiten observar aspectos de las expresiones polinómicas cuadráticas aún no trabajadas, que generan la sorpresa y la necesidad de prueba y la demostración, características que favorecen el uso de los ambientes computacionales para el aprendizaje de las matemáticas (Arcavi y Hadas, 2000).

En cuanto a la respuesta de completar la expresión (x – □)*(x – □) con la abscisa de los valores de los ceros hallados, la mayoría de los estudiantes la realizan correctamente, ya sea completando los espacios en blanco de la expresión del enunciado o escribiendo completamente la expresión. Sólo una pareja de estudiantes al escribir omiten un paréntesis (ver Figura 34).

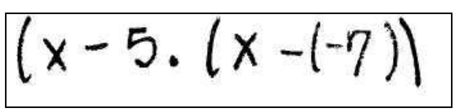


Figura 35. Omisión de un paréntesis al escribir la expresión factorizada .

Igualmente al determinar los valores de s y r de la expresión dada por ellos, la mayoría lo hacen correctamente algunos escribiendo la expresión factorizada (32.3%), otros determinando los valores de r y s independientemente de la expresión (53%) y algunos relacionando cada uno de los factores con los factores de la expresión general (3%), sólo unos pocos no dan respuesta a esta pregunta (11.7%). De estas respuestas sólo una pareja de estudiantes incluye el signo de la resta como el signo del número y otra pareja omite el signo menos de uno de sus ceros.

Al solicitarles a los estudiantes efectuar el producto de expresiones polinómicas, manifestaron no recordar el procedimiento, algunos confunden la suma con la multiplicación de expresiones polinómicas, por ejemplo: manifestaban que x por x era igual 2x. Luego de mirar un ejemplo presentado en el tablero del producto de una expresión factorizada, la mayoría de los estudiantes efectúan correctamente el producto de su expresión (58.8%), algunos cometen errores en relación a los signos y productos de los números enteros (32.3%) y sólo unos pocos no efectúan el producto de su expresión factorizada (8.8%). Los errores de multiplicación de las expresiones polinómicas no son generados por un procedimiento erróneo, algunos dan entender descuidos, omisiones y olvidos. En la Tabla 6 se presentan algunos de los errores prototípicos.

Respecto a la comparación de las gráficas factorizadas y a la que se le ha llamado desarrollada, obtenida al efectuar el producto de la factorizada, para la mayoría de los estudiantes (73.5%) las gráficas son equivalentes o iguales, algunos además describen lo que observan en la graficación (50%) y sólo unos cuantos no responden (26.5%). De
11 estudiantes que realizaron incorrectamente el producto de la expresión polinómica, en esta tarea, 5 de ellos afirman que son equivalentes, contrarios a su respuesta anterior. En otras de las respuestas (8.8%), se comparan la expresión factorizada trabajada al inicio

antes de iniciar la actividad con la que ellos han dado, afirmando que son iguales. Estas respuestas indican tres posibilidades:

- Los estudiantes no efectúan la graficación y como han observado lo que sucede dan su respuesta con respecto a lo esperado.
- Realizan la graficación pero al obtener gráficas diferentes, en contra de lo esperado, creen que es un error de la graficación y no de la multiplicación o de la expresión.
- Realizan la graficación, obtienen diferentes gráficas, no encuentran el error, así que responden la pregunta según lo que ellos ya han visto o esperan.

En la Tabla 8 se resumen algunos errores al efectuar un producto de polinomios.

Tabla 8. Errores al efectuar el producto de una expresión polinómica factorizada en la tarea A.III.2.

ERRORES DE MANIPULACIÓN ALGEBRAICA	**Nº DE ALUMNOS Total: 34 (Porcentaje)**
$(x-5)\cdot(x-2) = x.(x-2) - 5(x-2)$ $= x^2 - 2x - 5x + -10$ $= x^2 + 2x - 5x - 10 \quad = x^2 + 3x - 10$ Errores de signos al restar las expresiones 2x -5x	2 (5.8%)
$(x-5)(x-8){:}\ x(x-8) - 5(x-8) = x^2 - 8x - 4x + 40$ $= x^2 - 12x + 40$ Al efectuar el producto de -5(x - 8) cambian el resultado de -5x por -4x	2 (5.8%)
$(x-3) \times (x-8) = x(x-8) - 3(x-8)$ $x^2 - 8x - 3x + 22$ $x^2 - 11 + 22.$ Confunden el producto de 8*3 con 22	3 (8.8%)
$(x-5) \times (x-7) = x.(x-(-7)) - 5(x-(-7))$ $= x^2 - 7(-7)x - 5x + (-35)$ $= x^2 + 7x - 5x - 35$ En la expresión factorizada uno de los ceros es 7. Al efectuar la propiedad distributiva cambia el cero a -7	4 (11.8%)

- Uso de la Calculadora Graficadora Algebraica

En desarrollo de esta actividad se observa que los estudiantes adquieren mayores destrezas con el uso de los programas gráficos y Y=Editor. Tienden a seguir las explicaciones en sus calculadoras simultáneamente a las proyecciones. Sin embargo se siguen presentado algunas dificultades, como olvidar desactivar o borrar algunas de las expresiones que aparecen en Y=Editor, graficándose varias gráficas simultáneamente, inhibiendo observar las características de la gráfica deseada. En cuanto al procedimiento de hallar los ceros, los estudiantes generalizan un procedimiento erróneo. Aunque se les había indicado que inicialmente debían hallar un punto en un límite inferior al cero, es decir un punto a la izquierda de él, y luego hallar un límite superior, es decir punto a la derecha del cero. Los estudiantes realizan otro procedimiento, observan que para hallar el cero de la izquierda se toma un punto en la zona superior del cero (segundo cuadrante) y luego un punto en la zona inferior (tercer cuadrante) y siguen el mismo procedimiento para hallar el cero del lado derecho, primero un punto de la zona superior (primer cuadrante) y luego un punto de la zona inferior (cuarto cuadrante). Debido a que el procedimiento no funciona y las calculadoras emiten mensajes en inglés, los estudiantes intentan leerlos, pero desisten. Así que nuevamente lo intentan cometiendo el mismo error y tornándose cíclico.

Con respecto a los beneficios del uso de la calculadora, se da la posibilidad de obtener rápidamente los gráficos de las expresiones. Al cambiar el trazo de las gráficas y visualizar simultáneamente en la misma pantalla, los estudiantes rápidamente concluyen que las gráficas son iguales y por ende sus expresiones. Al conjugar diferentes tecnologías como el lápiz y papel para el desarrollo de los productos de las expresión factorizada y la graficación de esta expresión desarrollada en la calculadora, hace que ambas sean medios de verificación. Con estas tecnologías se pueden obtener errores, pero debido a que los estudiantes tenían poco dominio de las utilidades de la calculadora, tienden a creer más en sus manipulaciones algebraicas que en los resultados de la calculadora. Con respecto a lo observado, surgen las siguientes preguntas: ¿Si ambas destrezas hubieran estado en equilibrio y en un nivel medio, se hubiera dado una mutua interacción que permitiría complementarse y ser medios de verificación? ¿Sin procedimientos sugeridos, los estudiantes con buen dominio de las tecnologías tradiciones y **NTI** estarían en capacidad de proponer procedimientos y estrategias en la búsqueda de las respuestas? En cuanto al uso Viewscreen y el proyector, estos permitieron dar a conocer el trabajo de los estudiantes y compartir las dudas con sus compañeros, facilitando las discusiones grupales.

4.4 ACTIVIDAD Nº 4: "EXPRESIONES CUADRÁTICAS FACTORIZABLES"

- Análisis de la tarea A.IV. 1

Se inicia graficando una familia de parábolas para obtener sus ceros. Aunque en la hoja de trabajo se presentaban las gráficas de todas las parábolas en donde se observaban cortaban en los mismos ceros y se daba la expresión, ninguno de los estudiantes sin graficar, se percató de ello. Procedieron a graficar una a una cada expresión, ejecutando la función $\boxed{\text{F5}}$ Cero de la aplicación gráficos, dedicándose más del tiempo esperado para el desarrollo de esta actividad. Sólo a partir de la sugerencia de graficar simultáneamente todas las expresiones, los estudiantes observan que las gráficas cortan en los mismos ceros. Se dan diversas respuestas como: mostrar cada uno de los ceros de las gráficas (22.2%)♣, hallar un sólo cero para cada expresión (19.4%), hallar los dos ceros de todas las gráficas (33.3%), expresar que todas las gráficas cortan en los mismos ceros pero no mostrar ese valor (5.6%) o sólo dar un valor de un cero para todas las gráficas (19.4%) (Ver anexo B). Se observa que los estudiantes sólo utilizan la función F5 Cero, omitiendo trace o simplemente ubicar el valor según la escala (Ver video # 3 Tiempo 8:34 min.).

En cuanto a determinar los cambios respecto al valor de *a*, la mayoría de los estudiantes omiten una respuesta (41.7%), mientras que algunos de los estudiantes que si responden, se observan descripciones centradas en los elementos de la parábola como en los ceros, vértice y ramas (38.8%). En algunas de las descripciones, los estudiantes han clasificado las parábolas como positivas o negativas según el valor de *a*. Las respuestas dadas en esta tarea con relación a otras descripciones realizadas en tareas anteriores, muestran que los estudiantes descartan las características superfluas y se centran en los cambios del vértice, los ceros o raíces y las ramas de la parábola, términos recientemente incorporados.

Al seleccionar una de las expresiones de *a(x-2)*(x-(-1))* para *a*= -1, 0,5, 1 y 2.5, el grupo de estudiantes se divide en quienes seleccionan el valor *a* = 1 y los del valor de *a*= -1. Al efectuar el producto se encuentra que ninguno de los estudiantes que seleccionaron el valor de *a*= - 1 efectúa correctamente el producto, mientras que los que seleccionan *a* = 1 algunos tienen éxito. Estos resultados manifiestan dificultades en las operaciones con enteros negativos. Dado que los estudiantes manifiestan olvidar el procedimiento de multiplicación

♣ Los porcentajes están dados para un total de 36 estudiantes.

de polinomios, en cada sesión se ha mostrado el procedimiento a seguir, en esta ocasión una estudiante efectúa el producto de una expresión factorizada (Ver video #4 Tiempo 26:56 a 47:2 min. - Anexo C). Sin embargo, los resultados muestran que la frecuencia de estudiantes que efectúan incorrectamente el producto es mayor que los que la realizan correctamente (Producto incorrecto 72.2%). Algunos de los errores son los presentados en la Tabla 9.

Con los resultados obtenidos se ha determinado que una de las mayores dificultades de los estudiantes es obtener el producto de la expresión factorizada por medio de manipulaciones algebraicas, con el tratamiento gráfico de las expresiones desarrollada y factorizada y la obtención de la expresión factorizada a través de la gráfica, se ayuda al estudiante a mejorar sus habilidades para operar expresiones algebraicas sin necesidad de las manipulaciones algebraicas. Se sugiere para otras actividades incluir la utilización de la función SOLVE y FACTOR de la aplicación Home que facilita a un estudiante con pocas destrezas en las manipulaciones algebraicas el desarrollo efectivo de la actividad, permitiendo como dice Kuzler (2000) construir el siguiente piso del conocimiento a través del andamiaje de la tecnología. Sin embargo, se requiere determinar las posibles dificultades en el uso de la calculadora, ya que se sustituye un procedimiento por otro, que también puede generar errores. Con el uso de estas funciones se da otro espacio interesante para el diseño de otras actividades que enriquezcan el aprendizaje significativo de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Una posibilidad es utilizarlas para inferir procedimientos a realizar con lápiz y papel, quedando pues el espacio abierto para otras puestas en marcha del Análisis Didáctico.

En la Tabla 9 se presentan algunos errores al efectuar una multiplicación de polinomios en la tarea A.IV.1

Tabla 9. Errores presentados al efectuar la multiplicación de una expresión factorizada en la tarea A.IV.1.

ERRORES DE MANIPULACIÓN ALGEBRAICA	Nº DE ALUMNOS Total: 36 (Porcentaje)
$-1 * (x-2) * (x-(-1)) = -1(x-2)(x+1) =$ $((-x)+2) * (-x-(-1)) =$ $+x^2 - x - 2x + 2 =$ $x^2 - 3x + 2$ Efectúan el producto de -1 en cada de los factores. Este error puede ser ocasionado por una generalización de la propiedad distributiva.	6 (16.6%)
$\cdot(x-2)\cdot(x-(-1)) = (x-2).(x+1)$ $x^2+x-2x-3$ $= x^2+x-3$ En vez de multiplicar (-2)*1 lo suman o lo restan.	4 (11.1%)
$\cdot(x-2)\cdot(x-(-1)) = (x-2).(x+1)$ $(x-2).(x+1) =$ x^2-2 Errores al efectuar la propiedad distributiva, como omitir el producto de algunos términos.	2 (5.5%)
$(x-2)(x(-1)) =$ $x = -x-2$ $(x-2)\cdot(x+1) =$ Exp. factorizada $(x(x+1)).(-2(x+1)) =$ $(x^2+x)(-2x-2) =$ Errores al efectuar la propiedad distributiva ocasionados al agregar un signo de multiplicación en el intermedio de la distribución de términos	2 (5.5%)

En cuanto a solicitarles graficar la expresión desarrollada y compararla con la expresión factorizada correspondiente se generó diversas respuestas. Algunos no la efectuaron (25%)

y otros omitieron dar respuesta clasificando las expresiones en factorizadas y desarrollada (11.1%), de estos estudiantes todos realizaron incorrectamente el producto de la expresión factorizada. Es posible que al obtener gráficas diferentes omitan la respuesta, ya que hasta el momento ellos han observado que ambas gráficas son iguales.

Algunos de los estudiantes que efectuaron correctamente el producto de la expresión factorizada describen que las gráficas son diferentes realizando un bosquejo a mano alzada. Es posible que los estudiantes hayan digitado incorrectamente una de las expresiones o no se percataran de seleccionar las expresiones correspondientes. En cambio 8 estudiantes (22.2%) que han obtenido un producto incorrecto determinan que sus gráficas son iguales e inclusive especifican que pasan por los mismos ceros. Nuevamente se presenta la tendencia observada en la tarea A.II.2. Sólo 11 estudiantes (32.35%) efectuaron correctamente el producto de su expresión factorizada dando una respuesta acorde a los resultados de los productos obtenidos.

- **Análisis de la tarea A. IV.2**

Esta actividad se divide en 3 tareas relacionadas al ejecutar parabol1( ). En la hoja de trabajo se muestran dos parábolas originadas con una expresión de la forma $a(x-u)(x-v)$, dándose una parábola cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo.

La primera tarea se les pide determinar en que afecta los valores de a negativos y positivos, determinando que valor de a le corresponde a una parábola cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. La mayoría de las respuestas (83.4%) determinaron cual valor a corresponden a una parábola cuyas ramas van hacia arriba o hacia abajo o a parábolas que asciende o suben. Sólo tres estudiantes (8.3%) dan una respuesta incorrecta determinando que tanto las ramas como el vértice quedan hacia abajo cuando *a* es negativo y viceversa para un valor de *a* positivo. La anterior descripción no es posible para parábolas que cortan el eje x, asumiéndose que el vértice queda abajo cuando se ubica en los cuadrantes 3 y 4, ya que de lo contrario la descripción no correspondería a la gráfica de una expresión factorizable. Para tres estudiantes (8.3%) el valor de *a* hace que las gráficas sean diferentes, pero afirman que *a* no puede ser un número negativo porque no tiene antepuesto el signo menos. En esta respuesta se manifiesta uno de los errores del uso de las letras, generado al comparar la letra con un número, en el que si no se tiene el signo menos antepuesto a él, es positivo.

En segunda tarea se les pide obtener los ceros *(u* y *v)* de la gráfica y de el de *a* que puede ser -1 y 1 y sustituirlos en la expresión $y_2 = a*(x-u)*(x-v)$. De los estudiantes que efectuaron esta pregunta se observan diferentes formas de dar los valores, algunos dan los valores de los ceros y omiten el de *a* (25%), otros escriben la expresión integrando todos los valores (19.4%), algunos los especifican independientemente de la expresión (5.6%) y otros integran las dos formas (5.6%). Para denotar los ceros los estudiantes prefieren relacionarlos con las letras *x* y *y* (22.3%) en vez de las letras *u* y *v* (13.9%) sugeridas en la pregunta.

En la siguiente tarea se les solicita graficar la expresión obtenida y compararla con la del programa. Aunque esta tarea no era posible verificarla, para la mayoría de los de los estudiantes (52.8%) las gráficas son iguales, equivalentes o se sobreponen. Respuestas que muestran que hallaron los valores correctos y las graficaron o como en respuestas anteriores, suponen el resultado con relación a las anteriores tareas y no efectúan la graficación o si la efectúan y obtienen resultados contrarios, modifican su respuesta. En próximos diseños de actividades, es necesario plantear en las tareas preguntas un poco más específicas que guíen al estudiante a describir lo que realmente obtiene.

- **Análisis de la tarea A.IV. 3.**

En esta tarea se les solicita dibujar a mano alzada algunas parábolas dadas algunas características. En el dibujo que realizan se les solicitaba señalar el punto de corte con eje x, algunos los determinaron con el valor numérico (44.4%) o señalando los puntos con una cruz o un punto en negrilla (16.7%). En algunas de las parábolas con el valor numérico de x se agrega el valor del corte con el eje y. La mayoría de las respuestas son incompletas (47.2%), algunas han dibujado tres parábolas pero dos de ellas tienen características repetidas, obviando una de las parábolas solicitadas.

Uno de los errores presentados en esta tarea se relaciona con la coherencia de los sistemas de representación. En algunas de los dibujos las parábolas (16.6%), en las que se indicó el valor numérico de los ceros, se observan que los valores no corresponden con los cortes dibujados en las gráficas (ver Figura 36).

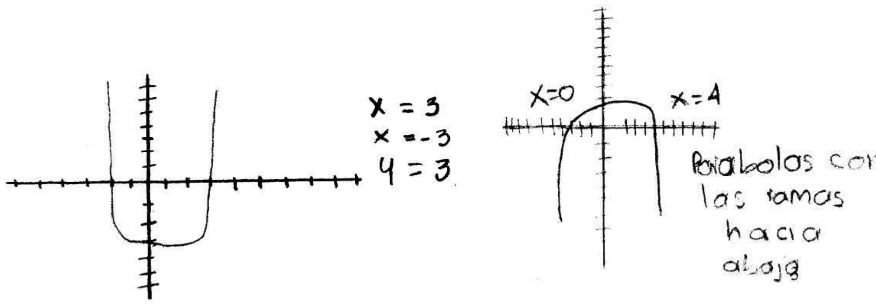


Figura 36. Incoherencia entre los valores numéricos de los ceros y la gráfica.

- Análisis de la tarea A.IV.4

Las respuestas de las preguntas: ¿Cuándo la gráfica de una expresión algebraica cuadrática corta al eje x? ¿Cuándo una expresión algebraica de segundo grado se puede factorizar? fueron dadas en la discusión que se generó al proyectar las parábolas que los estudiantes obtenían al ejecutar parabol2 ( ). Para algunos las características de las gráficas factorizables es que tengan cortes con el eje *x* y el eje *y*. Al dibujárseles una parábola en el tablero con cortes en el eje *x* y sin el eje *y*, dudan de su anterior afirmación, finalmente afirman que si es factorizable (Ver Video #3 Tiempo 1:16:03 min. – Anexo C).

De manera similar a las anteriores actividades, aunque en la discusión grupal los estudiantes responden correctamente, son muy pocos los estudiantes que consignan en su hoja de trabajo las respuestas a estas preguntas. Para esta tarea sólo 2 estudiantes (5.5%) responden a la primera pregunta, mientras que la segunda pregunta la responden 4 estudiantes (11.1%).

- **Uso de la Calculadora Graficadora Algebraica**

El uso y facilidad de ejecución de los programas permitió que los estudiantes obtuvieran diferentes parábolas factorizables y no factorizables, partiéndose de la representación gráfica a lo simbólica, una de conversiones más difíciles de afrontar según Duval (1988). Es destacable el uso de las funcionalidades de la calculadora, ya que en poco tiempo y sin necesidad de algoritmos engorrosos, fue posible hallar la expresión simbólica factorizada de las gráficas que cortaban el eje x, con la posibilidad de verificar la expresión al graficarse simultáneamente con la gráfica obtenida en el programa.

La diversidad de gráficas obtenidas al ejecutar los programas permitió que los estudiantes mostraran por medio del Viewscreen y el proyector su trabajo a los compañeros, dándose pautas para discusiones grupales. La asociación de las tecnologías calculadora – lápiz y papel, permitió la conjugación de diferentes destrezas que mejoraron el uso de ambas tecnologías, por ejemplo el de la estimación de valores según la escala sin necesidad de tomar medidas precisas y verificándolas con la función trace de la calculadora, el tener en cuenta puntos centrales como el vértice y los ceros y características como la convidad para la graficación y distinción de las parábolas obtenidas con la calculadora para luego efectuar el bosquejo de ellas con lápiz y papel. En cuanto al uso de la calculadora, los estudiantes mostraron mayor autonomía, centrado su atención al desarrollo en las tareas. Para corroborar todos los resultados utilizados en los análisis anteriores, diríjase a los anexos B y C de este trabajo.

5. CONCLUSIONES

1. El desarrollo del proyecto permitió la apropiación conceptual y procedimental de la estrategia de investigación denominada Análisis Didáctico, es decir determinar y caracterizar las componentes que esta teoría alude para comprender los fenómenos de enseñanza y aprendizaje en el aula y redimensionar un problema de educación matemática, desde diferentes perspectivas, en este caso la factorización de polinomios cuadráticos. Estas componentes dan cuenta de una análisis matemático, en términos de la presentación escolar y formal de la factorización de polinomios; un análisis cognitivo, en términos de la representación y sus dificultades asociadas a su manejo; un análisis tecnológico, en tanto expresa los desarrollos y bondades de los medios tecnológicos como mediadores de aprendizaje y un análisis curricular que permite visualizar el papel del objeto de estudio tanto en el currículo propuesto como en la institución objeto de investigación.

2. Con relación al diseño e implementación de la propuesta de investigación se pudo conjugar los diversos análisis en las actividades de aula que centran la atención: desde lo matemático, en la interrelación de los diferentes conceptos y procedimientos que tiene que ver con la factorización de polinomios cuadráticos, tales como el teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra y aspectos relativos a las diversas representaciones de las funciones involucradas (tabular, cartesiana, geométrica etc.).

3. Desde el uso de herramientas tecnologías se privilegió las Calculadoras Graficadoras Algebraicas y las posibilidades de trabajo (conversión de representaciones, interacción en tiempos real, posibilidad de registros múltiples, entre otros) en el aula no posibles con otras herramientas como el lápiz y papel. La utilización e interacción del lápiz y papel y las Calculadoras permitió proponer actividades en las que el uso de ambas tecnologías permitiera el desarrollo de diferentes habilidades que le facilitan el estudiante el aprendizaje significativo de los contenidos en cuestión.

4. En la implementación, se hizo evidente la importancia del análisis curricular en cuanto al momento de intervención en el aula y la pertinencia de los contenidos involucrados en las actividades. Lo que significa, que no se violentó el proceso planeado por el docente de acuerdo a un plan de estudio o de aula dado, articulándose a los contenidos propios del curso y nivel.

5. Se pudo lograr a través de la experimentación, una interacción entre el investigador y el docente en la cual se dieron procesos de aprendizaje didáctico mutuo.

6. Se puede concluir que las actividades permitieron evidenciar procesos de aprendizaje significativo y gradual con relación a la factorización de polinomios cuadráticos. Por ejemplo los estudiantes aprendieron a relacionar los elementos de la parábola con las expresiones polinómicas cuadráticas factorizables y no factorizables, a obtener la expresión factorizada a partir de los ceros y viceversa con procedimientos diferentes a las manipulaciones algebraicas, se afianzó el tratamiento de la representación

gráfica a la representación algebraica poco tratada en la enseñanza tradicional, entre otros aspectos. La propuesta es alternativa a lo usual en la enseñanza de factorización, es integradora de procesos y conceptos claves en la temática, pues permitió al investigador y al docente observar hitos importantes del proceso de aprendizaje: ir desde el reconocimiento de variaciones aisladas hasta la conjugación y dependencia de estas variaciones para poder comprender el modelo geométrico y algebraico propuesto.

7. Aunque los estudiantes presentaron dificultades en diferentes aspectos, en el transcurso del proceso de enseñanza se observó una mayor apropiación de aspectos importantes de la factorización, en términos del reconocimiento de expresiones factorizarles y no factorizables, de la relación entre variaciones de parámetros, graficas y ceros de los polinomios; del reconocimiento de expresiones equivalentes obtenidas mediante el proceso de factorización y su relación con lo gráfico.

8. Se reconoce el papel mediador y facilitador en el aprendizaje de la factorización de las calculadoras graficadoras algebraicas, ya que para los estudiantes fue importante reconocer elementos gráficos relacionados con la factorización, permitiendo que ellos descubrieran que no todas las expresiones polinómicas cuadráticas son factorizables y que aquellos que los son poseen ceros, entre otros aspectos.

9. La mediación de la calculadora permitió reconocer procesos de argumentación cada vez más contundentes y cualificados. En algunas ocasiones generó la controversia y

el debate en relación a las observaciones de las representaciones que estaban en pantalla. Sin embargo, es de anotar que estas argumentaciones se hicieron de forma verbal privilegiadamente. Los registros escritos de estos debates son más escasos. (los registros audiovisuales dan cuenta de esto).

10. El modelo de implementación dado tuvo aspectos positivos como el trabajo en equipo, maximizar los recursos (una calculadora por dos estudiantes), el debate, el apoyo en los aspectos técnicos de la calculadora (manejo), pero a su vez, frenó algunos desarrollos, pues se generalizaron procesos por la intervención de uno o dos miembros del grupo.

11. El desarrollo del proyecto fue una experiencia investigativa formativa, en el sentido de poner un modelo teórico en juego y las consecuencias e implicaciones en los resultados de aprendizaje e investigación obtenidos. Se reconoce el papel formativo del desarrollo del trabajo en el estudiante investigador al prever, sistematizar y analizar resultados.

BIBLIOGRAFÍA

- ALLAIRE, Patricia y BRADLEY, Robert. (2001) Geometric approaches to quadratic equations from other times and places. En: The Mathematics Teachers. Vol. 94. Nº 4 (Abril, 2001), p. 308
- ACEVEDO, Myriam y FALK, María.(1997) Recorriendo el álgebra. De las solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- ASP, Gary, DOWSEY, John., y STACEY, Kaye. (1993) Linear and Quadratic Graphs with the aid of Technology. En: Bill Atweh, Clive Kanes, Marjorie Carss and George Booker (Eds.), Contexts in Mathematics Education: Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Brisbane: Mathematics Education Group of Australasia, pp. 51 – 56 Disponible en Internet: http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/publications/full-listbefore2000.htm
- ARCAVI, Abraham y HADAS, Nurit. (2000) Computer Mediated Learning: An Example Of An Approach. En: International Journal of Computers for Mathematical Learning, pp. 25-15, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- AYRES, Frank. (1969) Algebra Moderna. México: McGraw-Hill. p. 124

- BEDNARZ, Nadine, KIERAN, Carolyn. y LEE (1996) Lesley Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Traducción del Grupo de Investigación en Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Documento no publicado.
- BARNETT, Raymond y URIBE, Julio. (1988). Algebra y Geometría 1. Bogotá: McGraw-Hill.
- BARNETT; Raymond. (1978). Algebra y trigonometría. México: McGraw - Hill.
- BEDOYA, Hernando y LONDOÑO, Nelson. (1985). Matemática Progresiva 3. Algebra y Geometría. Bogotá: Editorial Norma.
- BEDOYA, Evelio. (2002) Formación de profesores de matemáticas: funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.
- BEDOYA, Evelio, RICO, Luís y SEGOVIA, Isidoro (2000). Introducción a la función Cuadrática. Granada: Universidad de Granada.
- BELLMAN, Allan, CHAVIS, Sadie, CHAPIN, Suzanne, GARDELLA, Theodore, HANDLIN, William y MANFRE, Edward. (2000). Algebra. New Jersey: Prentice Hall.
- BIAZEY, Tom. (1993) Factoring Trinomials En: The Mathematics Teacher". Vol. 86. Nº 9. (Dec. 1993), p. 778
- BLUME, Glendon, HEID, Kathleen, HOLLEBRANDS, Cynthia. (2002). Computer algebra system in mathematics instruction: Implications from research. En: The Mathematics Teacher. Vol. 95, Nº. 8; p. 586

- BOSSE, Michael. (2000) Extemporaneous problem development: Quadratic Functions. En: The Mathematics Teacher. Vol. 93.Nº 3 (March, 2000), p. 43
- BOYER, Carl. (1986) Historia de la matemática. Madrid: Alianza.
- CAMACHO, Matías; SOCAS, Martín; PALAREA, Mercedes y HERNÁNDEZ, Josefa. (1996). Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial síntesis.
- CAMARGO, Leonor; GARCÍA, Gloria; LEGUIZAMÓN, Cecilia; SAMPER; Carmen y SERRANO, Celly. (2001) Alfa 8. Bogotá: Editorial Norma. pp. 134 –180.
- CARULLA, Cristina. y GÓMEZ, Pedro (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática. En: Universidad Autónoma de Manizales y RIBIE-COL (Ed.), CD-ROM del IV Congreso Colombiano de Informática Educativa.
- CARULLA, Cristina y GÓMEZ, Pedro. (1999). La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares de distrito capital. Bogota: Universidad de los Ande. Disponible en Internet: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/RepCuadAnInst.html.
- CARULLA; Cristina y GÓMEZ, Pedro y CARULLA (2001). Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.
- CASTRO, Encarnación y CASTRO, Enrique. (1997) Representaciones y Modelización. En Rico, L (Coord): La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: ICE- UB- Horsori. pp. 95-124

- CRAINE, Timothy. (1996) "A Graphical Approach to the Quadratic Formula". En: The Mathematics Teacher. Vol. 89, Nº 1, pp. 34-36
- DE GUZMÁN, Miguel. (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la Matemática. Miguel de Guzman. En: ABELLANAS, Manuel y GARCÍA, Alfonsa (Eds.), Actas de las Jornadas sobre ENSEÑANZA EXPERIMENTAL DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD Madrid: Universidad Politécnica de 10,11 y 12 de diciembre de 1991, pp. 9-27. Disponible en Internet: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/riesgosordenador/riesgoordenador.html
- DE GUZMÁN, Miguel. (1993) Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Editorial Popular. p. 6. Disponible en Internet: <http://www.oei.es/edumat.htm.>
- DEMANA, Franklin y WAITS, Bert. (2000) El Papel de la Computadora Portátil El Álgebra Simbólica en la Educación Matemática en el Siglo XXI: ¡Un llamado para la Acción! Disponible en Internet: <http: // www.ti.com/calc/latinoamerica/papel.htm - 40k demana>
- DEL CAMPO, José, FLÓREZ, José, HIDALGO, Jaime, MENDOZA, Anahit y ROMERO, Saúl. (2004) Historia del álgebra. Disponible en Internet: http://www.mate.com.mx/proyectos/histalgebra0001.htm
- DUNHAM, Penelope. y DICK, Thomas. (1994) Research on Graphing Calculators. En: The Mathematics Teacher. Vol. 87, No. 6. pp. 440-444.
- DUVAL, Raymond (1988). Graphiques et equations: L' articulation de deux registres. Annales de Didactique et de Science Cognitives. Vol. 5. pp. 67-65. Traducción DME-Cinvestav, 1997, México.

- DUVAL, Raymond (1999). Semiosis y pensamiento humano. Traducción al español por Myriam. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.
- DREYFOUS, Ricardo. (1996) Algeblocks. Disponible en Internet: <http://www.engrupo.com.mx/gei/matdid.htm>
- EDWARDS, Thomas. (1996) "Exploring Quadratic Funtions: From a to c". The Mathematics Teacher. Vol. 89, Nº 2, pp. 144 -146
- ESCUELA NORMAL SUPERIOR FARALLONES DE CALI. (2000) Proyecto Educativo Institucional.
- FERNÁNDEZ, Fernando (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. En: Revista Uno. Lenguajes algebraicos. Nº 14. pp.7 -24
- FERNÁNDEZ, José, ELORTEGUÍ, Nicolás, RODRÍGUEZ, José y MORENO, Teodoro (1999). ¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras? Sevilla: Editorial Díada.
- GALLARDO, Aurora y ROJANO, Teresa. (1998) Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético- algebraico. En: Recherches en Didactique des Mathématiques – Grenoble. Vol. 9. Nº 2. pp. 155-18
- GARCÍA, Consuelo y MORA, Carlos (2002). Experimentación y conjetura en el aula. pp.244-245 Disponible en Internet: http://www.mineducación.gov.co.
- GILEAD, Shoshana y YERUSHALMY, Michal. (1997) Solving Equations in a Techological Enviroment. En: The Mathematics Teacher. Vol.90 Nº2. pp. 156-162

- GLAISTER, P. (1993) An approximate quadratic formula En: The Mathematics Teacher. Vol. 86, Nº 3 (Mar 1993), p. 256
- GOEL, Studel y REID, Denise. (2001) A graphical approach to understanding the Fundamental Theorem of Algebra. En: The Mathematics Teacher. Vol. 94, Nº 9. p. 749
- GOMEZ, Dora y TORRES, Liliana. (1993) Una alternativa para el proceso enseñanza aprendizaje de la factorización de Polinomios y fracciones Algebraicas. Cali. Trabajo de Grado (Licenciadas en Matemática y Física) Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.
- GÓMEZ, Pedro. (1997). Tecnología y educación matemática. Informática Educativa, Vol. 10, Nº 1, pp. 93-111. Disponible en Internet: <http:// www.colciencias.gov.co/cg97co/does/tecnomat.htm>
- GÓMEZ, Pedro. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, J. Roldán (Eds.), Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI. Granada: Grupo Editorial Universitario. Vol. 2 pp. 1245-1258 Disponible en Internet: http://cumbia.ath.cx/pna.htm cumbia
- GÓMEZ, Pedro. (2002a). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Documento no publicado. Alicante: Universidad de Alicante. Disponible en Internet en: http://cumbia.ath.cx/pna.htm cumbia.
- GÓMEZ, Pedro (2002b). Análisis Didáctico y diseño curricular en Matemáticas. Revista Emma. Vol. 7. No 3 p. 251-292

- GÓMEZ, Pedro y RICO, Luís. (2002a) Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Documento no publicado. Alicante: Universidad de Alicante. Disponible en Internet en: http://cumbia.ath.cx/pna.htm
- GÓMEZ, Pedro y RICO, Luís. (2002b.). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada. Disponible en Internet: Disponible en Internet: http://cumbia.ath.cx/pna.htm cumbia.
- GÓMEZ; Pedro (2003). Desarrollo didáctico de los futuros profesores de Matemáticas. Proyecto para una Tesis. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada. Disponible en Internet: http://cumbia.ath.cx/pna.htm cumbia.
- GÓMEZ, Pedro y RICO, Luís. (2003). De un conocimiento técnico a su puesta en práctica: desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), Investigación en educación matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.). Granada: Universidad de Granada. pp. 237-246
- GOLDIN, Gerald y KAPUT, James. (1996) A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. En: Theories of Mathematics learning. Estados Unidos de América. Lawrence Erlbaum associates, publishers.
- GRUPO AZARQUIEL. (1993) Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Editorial Síntesis. p. 137

- HEID, Kathleen, HOLLENBRANDS, Karen y ISERI, Linda. (2002) Reasoning and justification, with the examples of the technological environment .En: The Mathematics Teacher. Vol. 95, Nº3, pp. 210-216
- HEID, Kathleen. (2002a) Computer algebra systems in secondary mathematics classes: The time to act is now! En: Mathematics Teacher. Reston Vol. 95, Nº 9. pp. 662-667
- ____________ (2002b). How theories about the leaning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in School mathematics: One perspective. En: HEMPSTEAD, Hemel (Eds.) The international Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. Vol. 9, Nº 2, p. 98
- HITT, Fernando (1998) Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. En: Educación Matemática. Vol.10 Nº 1 pp. 23-43
- HITT, Fernando. (2000). Construction of Mathematical concepts and use of symbolic calculators. En: The 4th International Derive – TI89/92 Conference: Computer Algebra in Mathematics Education. Liverpool.
- HOOSAIN, Eman. (1994) Factoring trinomials En: The Mathematics Teacher. Vol. 87. (Oct. 1994), p. 558
- HURWITZ, Daniel. (1995) A geometric Approach to discriminate. En: The Mathematics Teacher. Vol. 88, Nº 4. p.323
- KAKOL, Henryk. (1997) Graphical calculators and Problem-Solving. En: MT Nº 158. pp.46-49
- KAPUT, James (1992) Technology and Mathematics Education. En: Grouws, D, A. (Ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 515-556).

New York: Macmillan Original no consultado. Resumen elaborado por Gómez Pedro. Disponible en Internet: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/resumenes/kaput(92)/kaput(92).html

- KIERAN, Carolyn. (1991) Helping to make the transition to Algebra. En: Research in to Practice, (Marzo, 1991), pp. 49-51.
- KIERAN, Carolyn. (1994) El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. Traducción de Vilma María Mesa "una empresa docente" . Disponible en Internet: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/Kieran(92)/Kieran(92)-1.html
- KINDT, Martín. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. En: UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas. Lenguajes gráficos en Matemáticas. Nº 4. pp. 41-51
- KISSANE, Barry. (1999). The algebraic calculator and mathematics education. En: Yang, W-C, Wang, D., Chu, S-C & Fitz-Gerald, G (Eds) Proceedings of 4th Asian Technology Conference on Mathematics. Guangzhou, China, Asian Technology Conference in Mathematics. pp 123-132 Disponible en Internet: <http:www.staff.murdoch.edu.au/~kissane>
- KUTZLER, Bernhard. (2000) The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. Disponible en Internet: <http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/g-kutzler.pdf>
- LACASTA, Eduardo y PASCUAL, Ramón (1998). Las funciones en los gráficos cartesianos. Madrid: Editorial Síntesis.

- LUPIAÑEZ, José (2000). Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92. Capítulo 3: Instrumentos de Mediación. El papel de la Tecnología. Granada: Universidad de Granada.
- LUPIAÑEZ, José y MORENO, Luís. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.), Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro Granada: Universidad de Granada. pp. 291-300
- MASON, John. (1999) Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. En: Revista EMA. Vol. 4, Nº 3. pp. 232-246.
- MEEKS, Roebuck A formula for factoring. En: The Mathematics Teachers. Vol. 90 Nº 3, (Mar 1997), p. 206
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Matemáticas: Lineamientos Curriculares. Serie lineamientos curriculares – Áreas obligatorias y fundamentales. Santa fe de Bogota: MEN.
- ______________________ (1999) Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Apoyo a los lineamientos curriculares. Santafé de Bogotá: MEN.
- MORENO, María. (1998) Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria. Manual para la formación inicial del profesorado de Secundaria. Manuales # 6. Almería: Universidad de Almería. pp. 157 –163
- MORENO, Luís y ROJANO, Teresa. (1999) Educación Matemática: Investigación y Tecnología en el nuevo siglo. En: Avance y Perspectiva, Vol. 18, p.327

- MORENO, Luís. (2002) Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas. En: MEN (Ed.), Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: MEN, pp.93-108 Disponible en Internet: http://www.mineducacion.gov.co/publicaciones/intecma/cap01t17.asp.
- PALAREA, Mercedes y SOCAS, Martín. (1997) Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. En: Revista Uno. Lenguajes algebraicos. Nº 14. Octubre. p.21
- OWENS, John. (1992) "Families of Parabolas" En: The Mathematics Teacher. Vol. 85 Nº 6, pp. 447 –479
- RICO, Luís. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. Bogotá: una empresa docente. pp. 69-108
- RICO, Luís. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L.Dir., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria. : ice – Horsori pp. 39-59
- RICO, Luís. (2000) Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. IV Simposio SEIEM (Huelva 2000) Ponencia invitada al Seminario de Investigación I, "Representación y comprensión" Disponible en Internet en: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm

- RICO, Luís y SEGOVIA, Isidoro. (2001). Unidades didácticas y organizadores. En Castro, E. (Ed.): Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Madrid: Síntesis. pp. 83-104
- ROMERO, Isidoro. (2001) Representación y comprensión en el pensamiento numérico. En: Cuarto Simposio de la Sociedad española de Investigación en educación Matemática. Universidad de Huelva publicaciones. pp. 35 - 46
- RUIZ, Luisa. (1998) La noción de Función: análisis Epistemológico y Didáctico. Jaén: Universidad de Jaén.
- RUTHVEN, Kenneth. (1989) Exploring Polynomials with advanced calculators. En: Mathematics In School. Vol. 18, Nº 3. pp. 2-5
- SÁNCHEZ, Ernesto (1997). El graficador como apoyo a la comprensión de conceptos algebraicos. Documento no publicado México: CINVESTAV-IPN.
- SANTOS, Luz Manuel. (2001). Potencial Didáctico del software dinámico en el aprendizaje de la matemáticas. En: Avance y perspectiva. Vol. 20. pp. 247-258.
- SOCAS, Martín (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Secundaria. En: Rico, L. (Coord): La ecuación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: ICE-UB-Horsori, pp. 125-154.
- SUÁREZ, Marco. (1994) Elementos de álgebra. Cali: Universidad del Valle. p. 170.
- WAITS, Bert (2003) Computadores de bolsillo: Ingrediente esencial en el aprendizaje de las matemáticas. . Entrevista realizada por Teresa Herrera. Disponible en Internet: <http://www.eduteka.org/Handhelds1.php>
- VASCO, Carlos (1985). El álgebra Renacentista. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. pp. 18-21

- ZHENG, Tingyao. (1998). Impacts of Using Calculators in Learning. En: Yang, Wei-Chi; Shirayanagi, Kiyoshi, Chu, Sung-Chi y Fitz-Gerald, Gary (Eds.). Electronic Proceedings of ATCM '98. Tsukuba, Japan. pp. 1 -10 Disponible en Internet: www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM98/ATCMP015/paper.pdf

ANEXO A. ANÁLISIS CURRICULAR

Este análisis se realizó previo a la elaboración de las actividades, con el propósito determinar el contexto y las condiciones curriculares necesarias para su elaboración e implementación. Se compone de tres dimensiones curriculares: el nacional, el institucional y el aula. Este análisis se hace necesario, dado que este trabajo de investigación fue efectuado por personas ajenas al contexto escolar de los estudiantes participantes, requiriéndose de la información que brinda esta componente para no irrumpir en el proceso de enseñanza y aprendizaje que se llevaba a cabo.

1. DIMENSIÓN NACIONAL

Para el desarrollo de este ítem se tienen en cuenta tres de las publicaciones del Ministerio de Educación Nacional (**MEN**): las nuevas tecnologías y currículo de matemáticas, los lineamientos curriculares y los estándares curriculares para el área de matemáticas. La información obtenida de estos documentos darán las directrices a nivel nacional, ya que brindan un enfoque, criterios y orientaciones para el desarrollo de un currículo de matemáticas propuesto que toma diferentes características según las necesidades de cada institución educativa.

Según el artículo 76 de la ley 115 de 1994 currículo es: “un conjunto de criterios, planes, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad nacional, regional y local incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional”. Bajo esta definición el currículo de matemáticas, se muestra organizado en un todo armonioso e integrado alrededor de 3 ejes: procesos generales, conocimientos básicos y contextos (MEN, 1998, pp. 35-36) (ver Figura 1)

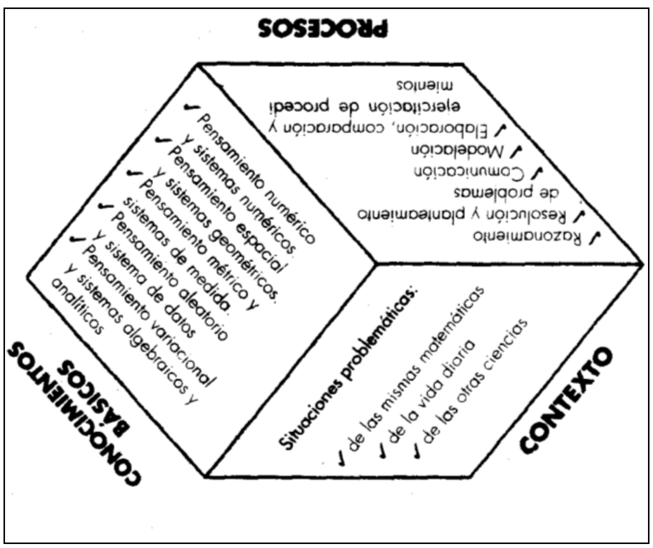


Figura 1. Los ejes organizadores del currículo vistos como las dimensiones de un cubo

Está propuesta de currículo, espera desarrollar procesos de aprendizaje como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Teniéndose en cuenta los conocimientos básicos que son los que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático con sistemas propios en la matemática y contextos como los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende (Ibíd., pp. 35-36).

Dentro de este currículo el trabajo intelectual del alumno se compara a la actividad científica exigiéndole al profesor reelaborar didácticamente el saber matemático a fin de que el conocimiento que adquiera el alumno surja de la respuesta a un problema que no se ha planteado y el cual le ha formulado una solución (Ibíd., p. 28). Tanto el trabajo del profesor y el alumno van encaminados a un aprendizaje que le permita al alumno desenvolverse bien dentro y fuera del ámbito escolar, en donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo ante los demás.

El enfoque de este trabajo se centra principalmente en el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Los lineamientos curriculares de Matemáticas, han determinado que el estudio de la variación se puede dar a partir de situaciones problemas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y de variación de la vida práctica. El estudio de estas situaciones ayuda a que los estudiantes, comprendan la sintaxis de las expresiones algebraicas. Las actividades asociadas al desarrollo del pensamiento variacional requerirán de la utilización de los sistemas de representación asociados a la variación como los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las representaciones analíticas, asociadas al estudio de patrones y situaciones problemas que además pueden enriquecerse con los ambientes computacionales que ofrecen varias maneras de conectar los diferentes sistemas de representación y de generar diversas situaciones de variación (Ibíd., p. 73).

Para Vasco (2002) el objeto del pensamiento variacional es pues la covariaciones de magnitud que conlleven a tratar de modelar patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de realidad. Por lo cual, el pensamiento variacional se asocia al pensamiento numérico, métrico o espacial, valiéndose de diversos sistemas como los analíticos, lógicos o conjuntistas.

En cuanto al uso de ambientes tecnológicos computaciones como herramientas útiles en la educación matemática, surge un nuevo campo de investigación, en las se valoran la facilidad de obtener diferentes sistemas de representación de los objetos matemáticos y sus relaciones, apreciándose otras características del objeto matemático, diferentes de las que se propician con otras tecnologías como el lápiz y el papel (MEN, 1999, p.28). Por lo cual, el **MEN** a adelantado un proyecto piloto con Instituciones Educativas de diferentes lugares del país, con el propósito de mejorar la calidad de la enseñanza y la capacidad de aprendizaje de las Matemáticas a través de la incorporación de la Calculadora Graficadora Algebraica al currículo de Matemática de la Educación Básica Secundaria y Media (Castiblanco, 1999, p. 56). Una de las instituciones vinculadas a este proyecto es la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, que desde marzo del 2000 cuenta con el equipo y la infraestructura necesaria, para implementar las actividades que en este trabajo se proponen.

Siguiéndose la revisión curricular a nivel nacional, se consultan los estándares curriculares para el área de matemáticas, que determinan lo que los estudiantes deben aprender según el área y el nivel (MEN, 2003, p. 2). Los estándares en Matemáticas han sido organizados en los cinco tipos de pensamientos y sistemas matemáticos que propone el MEN en los lineamientos curriculares de Matemáticas, teniendo en cuenta tres aspectos:

- Planteamiento y resolución de problemas
- Razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración)
- Comunicación matemática. Consolidación de la manera de pensar (coherente, clara, precisa) (Ibíd., p.4).

Al revisar los estándares del nivel de noveno, se han escogido algunos de ellos que se pueden tratar en el desarrollo del diseño de las actividades presentadas en la Unidad Didáctica., la mayoría se ubican en el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Estándar	Pensamiento Matemático	Nivel
Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos	Métrico	9
Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Variacional	9
Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	Variacional	9
Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.	Variacional	
Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.	Variacional	9
Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.	Variacional	9

Tabla. 1. Estándares curriculares en Matemáticas para el grado noveno tomados para el diseño de las actividades

2. DIMENSIÓN INSTITUCIONAL

Para el desarrollo de esta dimensión se ha revisado el Proyecto Educativo Institucional de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali y el plan de estudios del área de matemáticas. En el desarrollo del PEI es claro, que su finalidad es la formación de maestros normalistas para los niveles de preescolar y Educación Básica Primaria. Para ello, asumen un modelo pedagógico que busca promover condiciones para la construcción de procesos escolares que trabajen en la búsqueda de una formación integral de excelencia, promoviendo una educación fundamental para la vida, formado personas capaces de tomar decisiones, asumiendo las consecuencias de sus actos, con posibilidad de pensar y actuar por sí mismos (Escuela Normal Superior Farallones de Cali, 2000, pp. 71-74).

Todo esto conlleva a que el proceso curricular se inspire en un modelo curricular problematizador, abierto, flexible y en permanente construcción. En que se promueve el desarrollo armónico de los miembros de la comunidad educativa, mediante la interacción de individuos procedentes de diferentes contextos específicos, tanto en el contexto escolar como contextos extraescolares, con el propósito de contribuir a la formación de una persona competente para identificar, entender y resolver los problemas de su existencia cotidiana, personal, familiar, profesional y social (Ibíd., p. 99).

En cuanto a la organización curricular se han guiado en torno a los núcleos problemáticos que abordan los núcleos del saber Pedagógicos planteados en el Decreto 3012 de 1997 (en particular el artículo 4). Estos proponen el estudio de temas y relaciones desde diferentes áreas y / o ciencias, que facilita la integración de lo teórico, lo metodológico y lo práctico. Los núcleos problemáticos que asumen para poner en práctica, se dividen en los siguientes ejes organizadores:

- Cultura, pensamiento y lenguaje.
- Educación, política y desarrollos sociales
- Formación del maestro
- La pedagogía como disciplina fundamental en la formación del maestro.
- Naturaleza del pensamiento matemáticos y educción matemática
- Las matemáticas en las ciencias sociales y naturales (Ibíd., pp.105-108).

La Escuela Normal Superior Farallones de Cali se caracteriza en ofrecer en la mismo establecimiento los cuatro niveles de Formación: Transición o Preescolar, Educación Básica, Educación Media Vocacional y Ciclo Complementario con énfasis en Educación Matemática. El énfasis afecta la totalidad del currículo, pero se expresa de manera particular en los diferentes niveles de formación a saber: de grado 0 al grado 7º, impregnando las actividades de formación de modo práctico, por medio del trabajo docente de los maestros en el área de Matemáticas y en la Práctica docente experimental investigativa desarrollada por los estudiantes del ciclo complementario en este nivel. A partir del 8º hasta 11º grado el currículo de la Normal se distribuye en un 80% destinado a las áreas obligatorias y un 20% a la formación pedagógica (Ibíd., pp. 110-111). Destacándose la investigación como uno de los ejes que atraviesa el currículo, brindando un contexto propicio para el desarrollo de este trabajo.

Con respecto al currículo del área de Matemáticas juegan un papel muy importante los siguientes aspectos:

- La formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas
- El desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas
- La verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original
- La generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas
- La adquisición de confianza en el uso significativo (Ibíd., p. 15).

Su plan de estudios de Matemáticas, está diseñado siguiendo las pautas y directrices del Ministerio de Educación Nacional (decreto 1860, resolución 2343, lineamientos curriculares para Matemáticas y estándares curriculares). En donde el significado y el sentido de la variación lo desarrollan a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de cambio de la vida práctica. Los contenidos referentes al álgebra son desarrollados en 8º y 9º grado (Ibíd., p. 154).

El plan de Estudios de Matemáticas organiza los contenidos del álgebra en el siguiente orden: para grado 8º se trabajan números reales, polinomios, fracciones algebraicas y función lineal y en grado 9º se sigue las expresiones algebraicas y algunas representaciones, los números reales, la proporcionalidad y función lineal, los sistemas de ecuaciones lineales, y otros modelos de funciones polinómicas (Escuela Normal Superior Farallones de Cali, 2003, pp. 8-9).

3. DIMENSIÓN EN EL AULA.

Durante las entrevistas previas a la realización de las actividades con la profesora Mariela Agudelo a cargo del área de matemáticas de los grupos de 9º de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, se indagó sobre los libros de texto guía y su plan de área. La profesora Mariela manifestó que aunque los alumnos tenían la libertad de escoger el libro de texto a seguir, ella utilizaba y sugería con mayor frecuencia la serie Alfa para los grados 8º y 9º. Para complementar esta dimensión se revisaron los cuadernos de álgebra de los niveles de 8º y 9 º grado de uno de los estudiantes. Por lo cual esta dimensión, se divide en tres componentes: análisis de los textos escolares Alfa para 8º y 9º grado, plan de área de matemáticas para el grado 9º, y revisión de cuadernos.

3.1. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES ALFA 8 Y 9

Dado que la serie Alfa para matemáticas estructura sus textos escolares con algunas características comunes, se presenta un análisis conjunto de los libros Alfa 8 y Alfa 9, haciendo la diferencia respectiva cuando se hacen especificaciones. El análisis que se presenta se centra la estructuración conceptual en torno a la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, el uso de **NTI**, los sistemas de representación y los referentes curriculares en vigencia, incluyéndose algunas de las categorías presentadas en una plantilla de evaluación de textos escolares de Prendes (1996).

Autores: CAMARGO, Leonor; GARCÍA, Gloria; LEGUIZAMÓN, Cecilia; SAMPER; Carmen y SERRANO, Celly.

Editorial: Norma.

Ciudad: Bogotá. 2001 para Alfa 8 y 2003 para Alfa 9

Destinatarios: Alfa 8 está dirigido a estudiantes de 8º grado y Alfa a estudiantes de 9º grado de la ecuación básica secundaria en Colombia.

Estructura Interna:

Cada uno de los libros se divide en 10 unidades

Texto escolar: Alfa 8	**Texto escolar: Alfa 9**
Unidades	Unidades
1. Los números irracionales	1. Números reales
2. Los números reales	2. Funciones
3. Desigualdades y ecuaciones lineales	3. Sistemas de ecuaciones lineales
4. Polinomios	4. Ecuaciones cuadráticas
5. Factorización y aplicaciones	5. Números Complejos
6. Modelos de función	6. Métodos de demostración
7. Geometría	7. Sucesiones y progresiones
8. Triángulos y cuadriláteros	8. Semejanza
9. Estudio de sólidos	9. Circunferencia
10. Estadística y probabilidad	10. Matrices y determinantes

Para ambos textos, las unidades se dividen de forma similar. Inicialmente se presentan las competencias a desarrollar, una descripción histórica de los conceptos matemáticos a tratar, una lista de ejercicios o problemas relacionados con los conocimientos previos que serán retomados en desarrollo de las lecciones y un ejemplo de una situación real en donde se aplican las matemáticas. Luego se da inicio a cada una de las lecciones en las que se exponen los conceptos y procedimientos a aprender y una lista de ejercicios o problemas relacionados con la lección anterior. Finalmente cada una unidad presenta talleres con actividades individuales, grupales o con calculadoras, un glosario con las definiciones de las palabras nuevas introducidas en el desarrollo de las lecciones, una auto evaluación, problemas y ejercicios tipo ICFES y problemas de razonamiento abstracto o acertijos.

Coherencia en la estructuración interna:

La organización de las unidades del libro Alfa 8 y Alfa 9 conservan un orden de presentación que implica que los contenidos de algunas de las unidades sean prerrequisitos para la siguiente actividad. Los libros además de estar divididos en unidades se dividen conceptualmente en bloques de álgebra, aritmética, geometría, estadística y lógica. Las unidades pertenecientes al mismo bloque son las que generalmente requieren de las unidades precedentes, sin embargo entre ellas también se dan relaciones. En las unidades, el orden de presentación también va ligado a la concatenación que se dan de los conceptos y procedimientos matemáticos, a excepción de algunas lecciones.

Análisis Matemático:

Los textos involucran distintos sistemas de representación: el verbal, el simbólico, el geométrico, el gráfico y el numérico. Los diferentes tipos de ilustraciones fotografías, figuras, dibujos e iconos, amplían la información, apoyan las explicaciones y en algunos casos cumplen una función estética.

El discurso en el desarrollo de las lecciones se caracteriza por ser heurístico, ya que se presenta primero una situación y a partir de ella se concluye (Arbelaez y cols. 1999). De las conclusiones prosiguen distintos ejemplos en donde se aplica, se muestra o corrobora lo afirmado, que en el saber matemático puede ser una definición, teorema, axioma o lista de pasos a seguir para ejecutar un algoritmo.

Las lecciones se hilan bajo el supuesto de que es conocido lo de lecciones anteriores a la serie Alfa. El nuevo lenguaje natural especializado y la notación se van explicitando en las lecciones. La presentación de los conceptos matemáticos se da en un lenguaje no formal y se presentan diferentes tipos de actividades como juegos, trabajo en grupo, individual, situaciones problemas, ejercicios, actividades con material manipulable, etc. Respecto al desarrollo de los conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, se muestran algunos aspectos particulares del desarrollo de algunas lecciones. Por lo cual, a continuación se hace la presentación para uno de los libros Alfa 8 y Alfa 9:

Alfa 8: Se analizó la unidad 5 titulada "Factorización y aplicaciones" y la lección 4 de la Unidad 6. "Modelos de Función".

En las primeras lecciones se observa que la estrategia utilizada para introducir el concepto de factorización y algunas técnicas para factorizar es a partir de problemas aritméticos que se van ligando a la factorización de expresiones algebraicas.

Inicialmente en comparación con la aritmética se introduce la factorización extrayendo el factor común. El desarrollo de las posteriores lecciones parte del trabajo utilizando material manipulable con el que se construyen rectángulos y de los cuales al hallar su área se obtienen polinomios en su forma estándar y factorizada.

En la Figura 2 se ilustran los trinomios obtenidos con material manipulable, en donde los lados de los cuadrados azules tienen un valor x unidades, los lados de los rectángulos verdes valen x unidades y 1 unidad, mientras que los lados de los cuadrados amarillos valen 1 unidad.

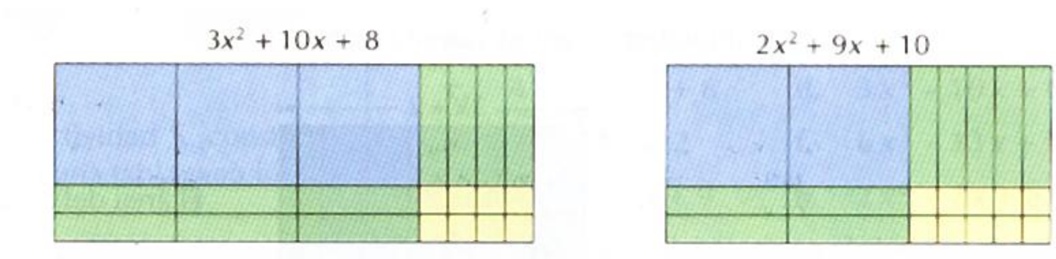


Figura 2. Material manipulable utilizado para representar trinomios

A partir del análisis de un ejemplo con el material manipulativo se miran la relación entre los parámetros *(a, b y c)* de la forma estándar del trinomio $(ax^2 + bx + c)$ con los parámetros *(r y s)* de su forma factorizada *((x-r)*(x-r))*, construyéndose una regla para factorizar cualquier trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ cuando $ac \succ 0$. Igualmente se construye una regla para trinomios $ax^2 + bx + c$ cuando $ac \prec 0$. Con estas dos reglas se cubre la factorización de cualquier tipo de trinomio.

Posteriormente se muestran algunas reglas para factorizar no solamente expresiones cuadráticas de una sola variable, introduciéndose técnicas para factorizar diferencias de cuadrados y factor común por agrupación de términos. Las reglas presentadas se caracterizan por evitar la complejidad notacional innecesaria y evitar técnicas específicas.

En las siguientes lecciones se aplica la factorización a la resolución de problemas, ecuaciones cuadráticas y fracciones algebraicas. Los problemas presentados están bajo los contextos de área de figuras rectangulares, movimiento uniformemente acelerado y números reales. Además se retoman algunos problemas trabajados por culturas como los egipcios y babilónicos, reconociendo la dificultad de aceptación de respuestas con valores negativos y se explicita y utiliza la propiedad de los productos nulos para resolver ecuaciones cuadráticas.

En cuanto a la unidad 6 "Modelos de Función" se toma la lección 4 "Función cuadrática y otras funciones" por su relación con expresiones polinómicas de segundo grado. Esta lección inicia con la observación de una tabla de valores y la graficación de estos puntos, correspondientes a la función $f(x) = x^2$. La graficación se realiza como usualmente se hace con lápiz y papel, hallándose algunas imágenes que permiten concluir que la curva es simétrica. Al final se determina la función cuadrática como la definida por la ecuación $y = ax^2$ con $a \neq 0$ y parábola como la gráfica de esta función.

Alfa 9: se analiza de la unidad 2 "Funciones" las lecciones 1, 8, 9 y 10 y las primeras cuatro lecciones de la unidad 4 "Ecuaciones Cuadráticas".

En la unidad 2 "Funciones" se define el concepto de función, determinándose diferentes representaciones: diagrama sagital, funcional, tabular, conjunto de pares ordenados, conjunto nombrado por compresión y gráficas cartesianas. Para introducir las funciones cuadráticas se trabajan las traslaciones verticales y horizontales (sólo hacia la derecha y hacia la izquierda) de la función $f(x) = x^2$. Al combinarse las dos traslaciones se obtienen las expresiones de la forma $y - k = (x - h)^2$, denotando la traslación de h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba como $T_{(h,k)}$ donde el punto (h, k) son las coordenadas del vértice.

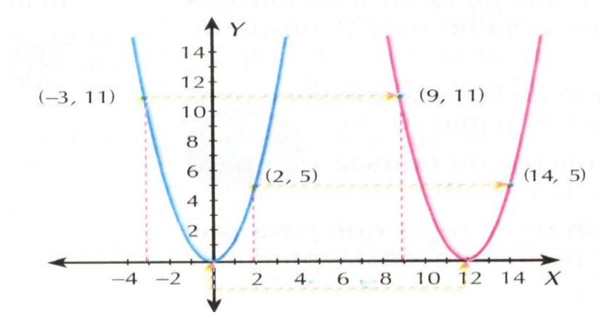


Figura 3. Traslación de la función f(x) = x^2 en 12 unidades a la derecha

En la lección 9 se trazan gráficas de la forma $y = ax^2 + bx + c$, en donde se inicia mostrándose 3 parábolas diferentes y determinándose sus características comunes: traslaciones de $y = ax^2$, la concavidad hacia arriba, la existencia de un vértice y eje de simetría.

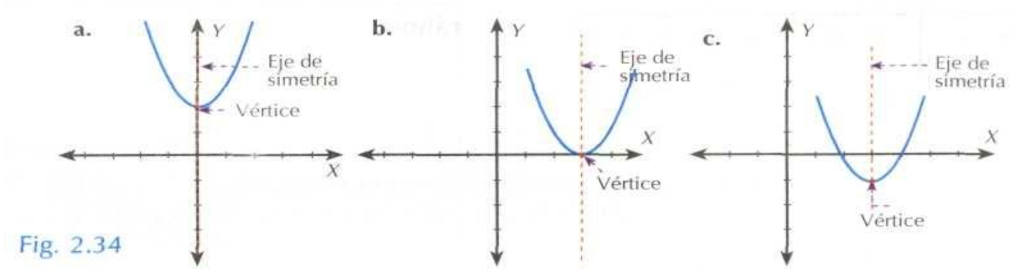


Figura 4. Graficas de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Para llegar de la expresión $y - k = a(x - h)^2$ a la expresión $y = ax^2 + bx + c$ y viceversa se muestran los procedimientos algorítmicos, utilizándose el procedimiento de completación de cuadrado que hasta el momento no había sido utilizado y que el libro parece tomar como si ya hubiese sido ya expuesto. Se determina el vértice, como el mínimo o el máximo según la concavidad.

Con la expresión de la forma $y - k = a(x - h)^2$ se halla el vértice, el eje de simetría y la concavidad. Utilizando las anteriores características y una tabla de valores se grafica (a mano) la parábola. En los ejemplos se enfatiza en los cambios de los parámetros *a, h* y *k* de la forma canónica de la función cuadrática $y - k = a(x - h)^2$, mientras que los cambios de los parámetros *a, b* y *c* de la expresión estándar de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ no son analizados, se recurre a llevarla a la forma canónica.

En la lección 10 se definen los ceros como los interceptos de la función con el eje x y se determinan que la representación gráfica de las raíces de una ecuación son los interceptos de la gráfica con el eje x. Para hallar los ceros se hace uso de la factorización, de la propiedad de los productos nulos, de tablas y graficas. Generalmente en las gráficas siempre se señalan con diferente color el vértice y los ceros.

En la unidad 4: "Ecuaciones Cuadráticas" se determinan 4 métodos de solución de ecuaciones cuadráticas: completación del cuadrado, propiedades de las raíces cuadradas, factorización y fórmula cuadrática. En las primeras lecciones se trabaja ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2= b$, $a(mx+c)^2 + e = d$, $ax^2 \pm bx = c$, $ax^2 + bx + c = 0$ donde x es la incógnita, con los métodos de completación del cuadrado, factorización y propiedades de las raíces cuadradas.

En la siguiente lección al completarse el cuadrado en la ecuación cuadrática $ax^2+ bx +c =0$ se obtiene la fórmula cuadrática. Con ella se determina el discriminante y con este el número de número de soluciones reales para cualquier ecuación cuadrática. En los ejemplos presentados, se identifican los coeficientes *a, b y c* y se sustituyen en la fórmula cuadrática, de esa manera se obtienen las soluciones

En la lección 3 se estudia la gráfica de la función cuadrática, que dada en su forma simbólica estándar es convertida a la expresión canónica para su graficación. Se analizan algunas imágenes detallándose algunos valores de x en los que se obtienen imágenes iguales y determinándose que el único valor de x cuya imagen es única, corresponde al vértice. Para la graficación se tiene en cuenta el vértice, la concavidad, eje de simetría y los interceptos con el eje x y eje y. Se definen que los interceptos con el eje x son las soluciones de la ecuación cuadrática tratada.

Se analiza la variación gráfica de una función cuadrática con relación a el coeficiente c de la expresión estándar $y = ax^2+bx +c$. A partir de la comparación de las anteriores gráficas con las de la expresión $y = ax^2+ bx$, se encuentra por manipulaciones algebraicas el valor general de la abscisa al vértice y sustituyendo este valor en la ecuación se obtiene la ordenada. Se menciona que completando el cuadrado de la expresión $y = a(x - h)^2 +k$ también se encuentran las coordenadas del vértice, sin embargo no se realiza el procedimiento. Generalmente en los ejemplos anteriores para efectuar la graficación se tomaba la expresión $y - k = a(x - h)^2$, ya que con esta se facilita hallar el vértice, el eje de simetría y tabulándose algunas valores de las imágenes, ahora con la expresión $y = ax^2 + bx +c$, las coordenadas del vértice $(\frac{-b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a})$ y la fórmula cuadrática se hallan los interceptos con los ejes, el vértice, el eje de simetría y la concavidad necesarios al graficar con lápiz y papel.

En la lección 4 se presentan algunas problemas con ecuaciones cuadráticas, con imágenes o bosquejos de la situación y tablas para facilitar hallar la ecuación cuadrática.

Adecuación a la demanda curricular

Su estructuración tiene en cuenta los 3 aspectos básicos de organización del currículo (procesos generales, conocimientos básicos y contexto). Al revisar las unidades se observa que hay subdivisiones específicas que desarrollan los diferentes procesos como: la comunicación en las actividades grupales, la resolución de problemas en el desarrollo de las lecciones y talleres, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en las lecciones, prácticas y talleres de competencias y el razonamiento en la sección de pasatiempos. La intensidad de tratamiento en cada unidad de los procesos generales varía, algunas como la modelación reciben muy poca atención, mientras que la ejercitación de procedimientos se retoma en cada lección (MEN, 1998, p.34).

Para cada unidad se presenta un tabla de "Competencias", dividida en 3 columnas: interpretativa, argumentativa y propositiva y en franjas que separan los indicadores de logros en los distintos pensamientos matemáticos. Además a lo largo de las lecciones en la parte superior izquierda se presenta uno o dos logros. Para los logros el verbo se presentan en forma infinitiva (Factorizar, hallar, representar...), mientras que para los Indicadores de logro el verbo se presenta en presente imperativo (usa, propone, halla,...).

Algunas situaciones problemas son utilizadas para introducir conceptos matemáticos y mostrar heurísticas. Se caracterizan por utilizar contextos relacionados con la vida cotidiana del alumno, involucrar otras áreas del conocimiento y dar posibilidades distintas de solución, donde es necesaria la argumentación de la solución más acorde. Otras secciones como ¿En que se aplica? muestran la conexión de los conceptos matemáticos a situaciones reales. En la unidad de factorización el uso del material manipulativo involucra la experiencia del estudiante en su aprendizaje.

La historia se hace presente al inicio de cada unidad con la lectura titulada: "¿Cómo Surgió? que cuenta los avances de diferentes personas o culturas en torno a los temas que se hacen presentes en la unidad. La lectura es corta y no presenta cálculos ni palabras que no estén al nivel educativo de estudiantes de grado 8º y 9º. En el desarrollo de algunas lecciones, la historia nutre las explicaciones o los ejemplos, como en caso de la factorización en donde se utiliza un contexto geométrico, en forma similar a su desarrolló histórico.

Con relación a uso de la **NTC,** en las unidades relacionadas con las funciones, específicamente en los talleres de competencias se hace uso de la calculadora graficadora Casio fx – 9700 GE al sugerir realizar con ella las gráficas de algunas funciones. Se observa que el uso de la calculadora no es diferente del uso que se le da a la graficación de lápiz y papel, no se aprovechan las características que las hacen diferentes a otras herramientas de representación como el favorecer los procesos y habilidades cognitivas: visualización, retroalimentación, capacidad investigativa, observación de patrones (MEN, 1999, pp. 31-38).

En algunas unidades como de factorización de **Alfa 8** y ecuaciones cuadráticas de **Alfa 9** es ausente el uso de la Calculadora. El libro sigue un desarrollo independientemente de las **NTI** y su incorporación en algunos talleres es sólo una opción que puede ser desarrollada y que parece estar allí para cumplir un requisito curricular.

3.2 PLAN DE ÁREA PARA EL CURSO DE ÁLGEBRA DE LOS GRADOS NOVENOS (2003-2004):

El plan de Área de matemáticas de la profesora Mariela Agudelo a cargo del grado 9º de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali se divide en tres asignaturas: álgebra, geometría y estadística. Con relación a la asignatura de álgebra, el plan de área se divide en 7 unidades, especificándose para cada uno de los contenidos sus estándares, logros y desempeños. El orden de las unidades determina el orden de su puesta en práctica. Las unidades de la asignatura de álgebra son las siguientes:

1. Expresiones algebraicas y algunas de sus representaciones
2. Números Reales
3. Expresiones algebraicas equivalentes
4. La proporcionalidad y la función lineal
5. Sistemas de Ecuaciones lineales
6. Otros modelos de funciones polinómicas
7. Los números complejos

Los dos primeras unidades corresponden a contenidos trabajados en años lectivos anteriores, intentándose reforzar, repasar y retomar algunos conceptos y procedimientos. Estas unidades se habían desarrollado durante los meses de septiembre a noviembre del 2003. Iniciándose a finales de Noviembre la unidad # 3 en donde se incluía como contenido la factorización de expresiones algebraicas, dándose el momento oportuno para la intervención de la unidad didáctica presentada en este trabajo.

En entrevista previas a la implementación de las actividades, la profesora manifestó que los contenidos relacionados a la factorización de expresiones polinómicas hacían parte de la estructuración del plan área del año anterior, pero como no se alcanzaron ha trabajar, se retoma en la unidad #3. La ejecución de las actividades contó con el interés de la profesora, quien deseaba trabajar la factorización desligada del enfoque tradicional.

3.3 REVISIÓN DE CUADERNOS

En la revisión se observa que el estudio de la variación se ha tratado de diversas maneras, utilizando representaciones tabulares, gráficas cartesianas, representaciones pictóricas e icónicas, formulas y representaciones analíticas, asociadas al estudio de patrones y situaciones problemas, intentándose que el estudiante le de un significado a la letra en las expresiones algebraicas que construye. Hasta el momento los conceptos que los estudiantes han trabajado con relación al álgebra han sido operaciones con polinomios y expresiones algebraicas.

A continuación se muestran algunas actividades desarrolladas en la asignatura de álgebra tanto en los grados 8º y 9º y que nos muestran el tratamiento de lo variacional que se ha tratado en el curso de álgebra:

- En la figura 5 se muestra figuras que varían con relación al número de fósforos que las conforman. La actividad consiste en hallar un patrón de comportamiento y encontrar expresión algebraica que modela la situación. Otras actividades similares se incluyen tablas en donde se organizan los datos según la figura y el número de objetos que la conforman.

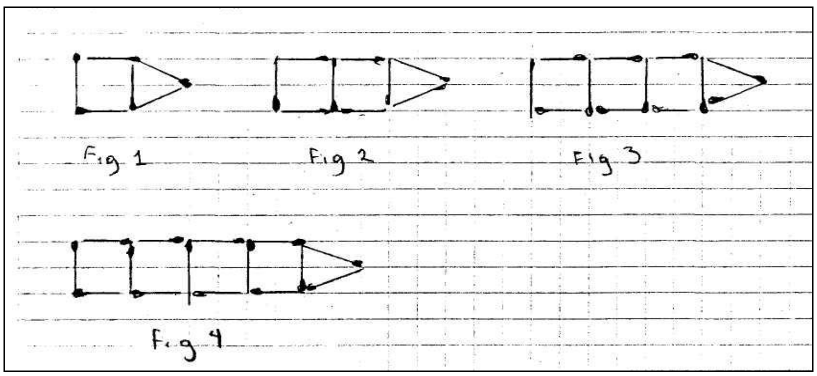


Figura 5. Figuras formadas con fósforos

- Otras actividades involucran conceptos como perímetro, área y el volumen de figuras y sólidas a las cuales se les asocia una expresión algebraica. La figura. 6 se relaciona con un ejercicio en el que se le pide a los estudiantes hallar el perímetro escribiendo el polinomio simplificado.

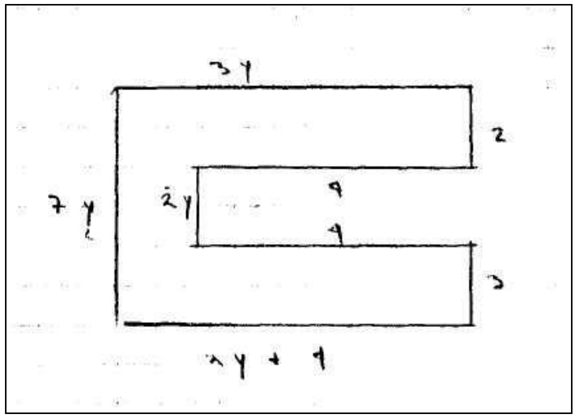


Figura 6. Valores de los lados

- Operaciones con polinomios siguiendo manipulaciones algebraicas.

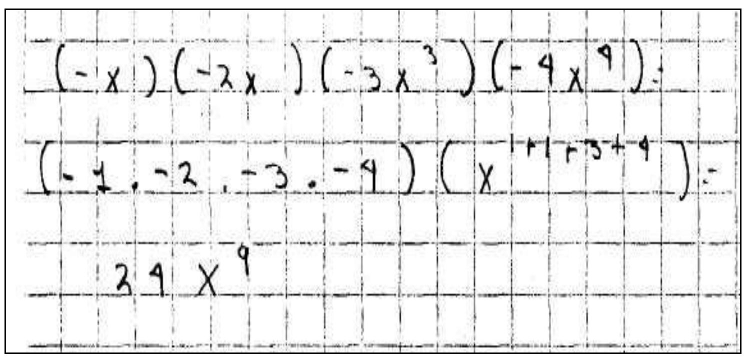


Figura 7. Producto de monomios

- Graficación a lápiz y papel del resultado de operaciones con polinomios. Las siguientes imágenes corresponden a la diferencia, suma y producto de los polinomios p(x) = -2x+2 y q(x) = -3x. Para obtener la gráfica han elaborado una tabla de valores de *x* y *y*.

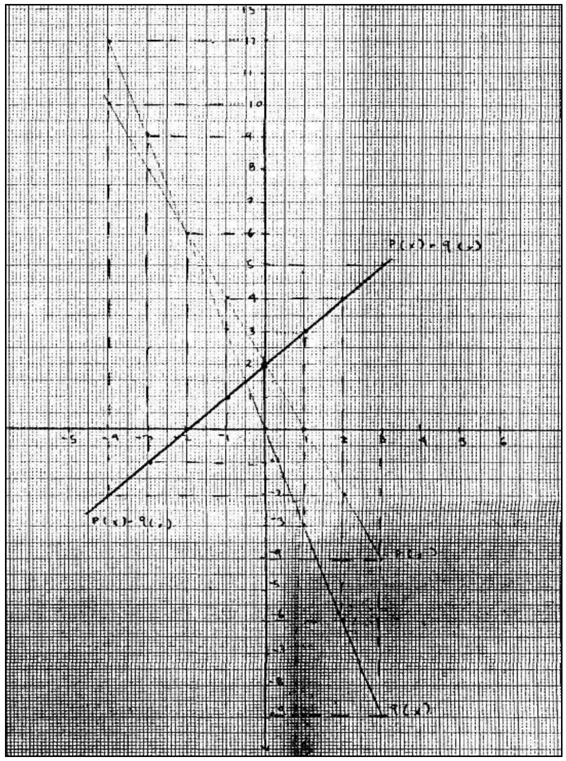


Figura 8. Graficación de p(x) –q(x)

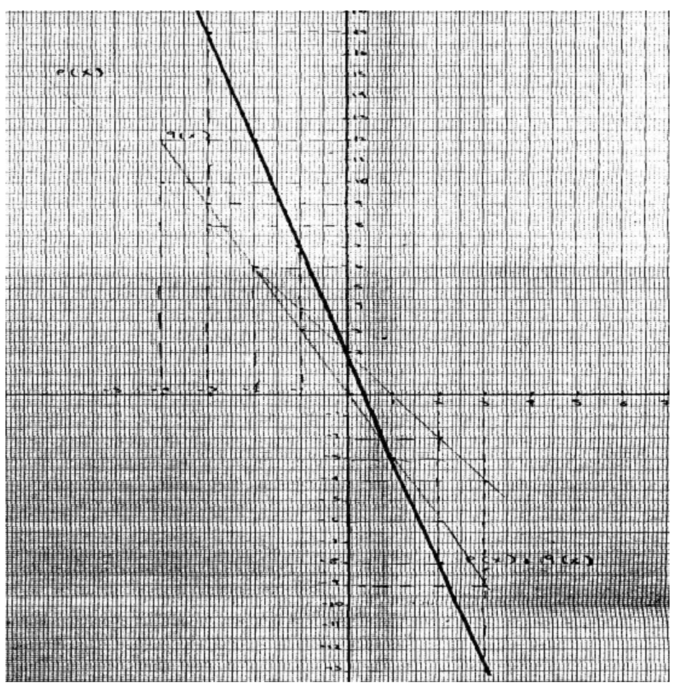


Figura 9. Graficación de p(x) + q(x)

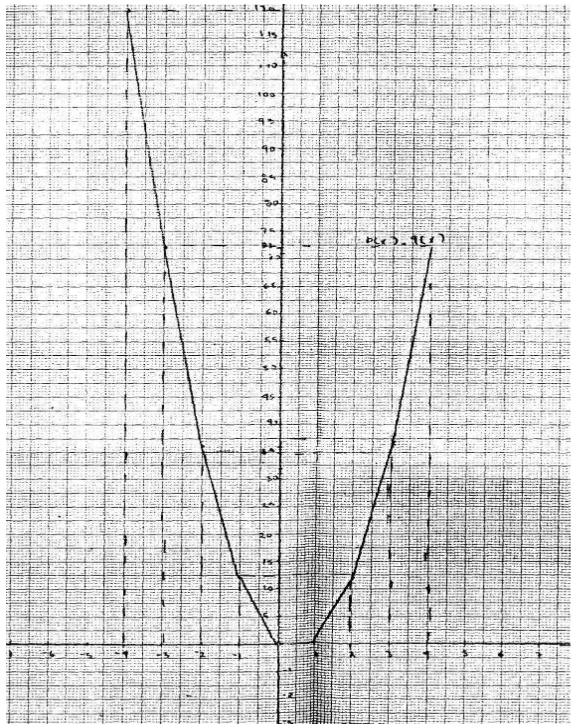


Figura 10. Graficación de p(x).q(x)

- Graficación de expresiones polinómicas cuadráticas de la forma ax^2 y $x^2 +b$.

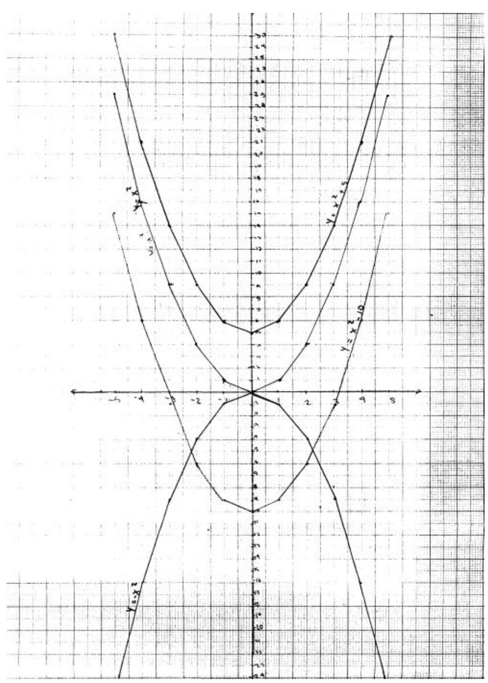


Figura 11. Graficación de expresiones cuadráticas

BIBLIOGRAFIA:

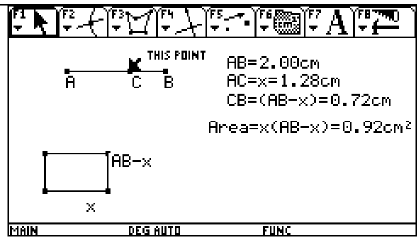
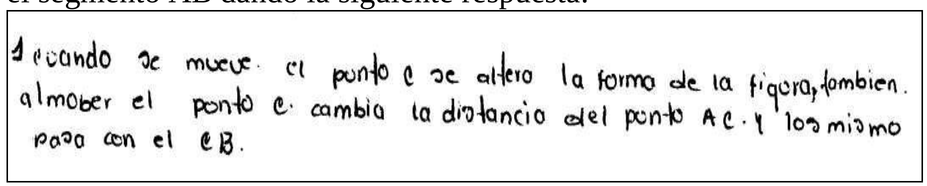
- ARBELAEZ, Gabriela; ARCE, Jorge; GUACANEME, Edgar y SÁNCHEZ, Guillermo. (1999) Análisis de textos escolares de Matemáticas. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.
- CAMARGO, Leonor; GARCÍA, Gloria; LEGUIZAMÓN, Cecilia; SAMPER; Carmen y SERRANO, Celly. (2002) Alfa 8. Bogotá: Editorial Norma.
- CAMARGO, Leonor; GARCÍA, Gloria; LEGUIZAMÓN, Cecilia; SAMPER; Carmen y SERRANO, Celly. (2003) Alfa 9. Bogotá: Editorial Norma.
- CASTIBLANCO, Ana. (1999) Proyecto del MEN "Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas". En Alegría de Enseñar. # 43.1999. p. 56- 60.
- Escuela Normal Superior Farallones de Cali. (2000) Proyecto Educativo Institucional.
- ________. (2003) Documento Borrador. Plan de estudio de Matemáticas.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998) Matemáticas: Lineamientos Curriculares. Serie lineamientos curriculares – Áreas obligatorias y fundamentales. Santa fe de Bogota: MEN
- ________. (1999) Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Apoyo a los lineamientos curriculares. Santa fe de Bogotá. MEN.
- ________. (2003) Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas y lenguaje. Santafé de Bogotá. MEN.

- PRENDES, María Paz (1996). Evaluación de Manuales Escolares. En: Revista Píxel-Bit. Revista de medios y educación. Nº 6. Disponible en Internet en: www.quadernsdigitals.net/articles/pixel/pixel9/p9evaluacion.html

ANEXO B. RESULTADOS DE LAS TAREAS REALIZADAS EN LAS HOJAS DE TRABAJO

1. ACTIVIDAD Nº 1: "EXPLORACIÓN DE ÁREA DE RECTÁNGULOS CON PERÍMETRO FIJO"

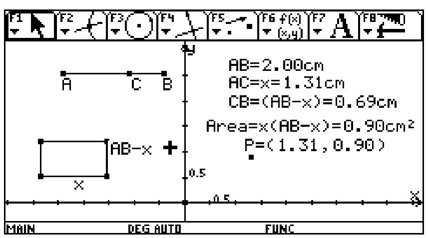
DESCRIPCIÓN DE TAREAS	**TIPOS DE RESPUESTAS**	**# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)**
A.I.1: En esta tarea se solicita describir los cambios de las figuras presentados en su hoja de trabajo (ver Fig. 1), que pueden obtener al abrir un archivo en Cabri en donde se obtiene rectángulos que cambian al mover el punto C del segmento AB que representa el semiperímetro de los rectángulos.	**1) Descripciones centradas en la variación de un aspecto**: de este grupo, cuatro estudiantes se centraron en la variación de la distancia del punto C en el segmento AB, sólo un estudiante se centró en la variación de las medidas del área y de los lados. Una de las respuesta de una pareja de estudiantes es la siguiente: Podemos observar que a medida que el punto c se acerca al punto b la distancia entre el punto A y BC se vuelve mayor. podemos decir que esto es proporcional por que mientras un punto gana longitud el otro la pierde.	5 (14.3%)

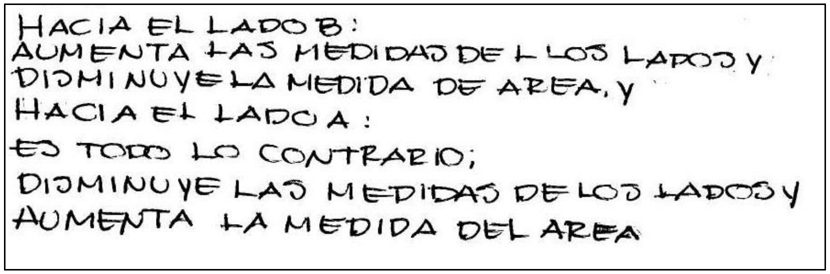
DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	**# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)**
 **Fig. 1. Archivo en Cabri de esta actividad.** En la pantalla del archivo en Cabri se observan tres aspectos que varían: el segmento AB, las medidas del área, lados o segmentos y el rectángulo.	**2) Descripciones centradas en la variación de dos aspectos**: un grupo de nueve estudiantes centró su atención en la variación del segmento AB y la figura. De este grupo una pareja relacionaron el segmento y los lados de la figura, mientras que el resto hacen la descripción dejando implícita o ignorándola la relación. Los que dejan implícita la relación del segmento AB y los lados del rectángulo utilizan argumentaciones como: al mover C, ya sea a la derecha o la izquierda, se observan que disminuye o aumentan sus lados a quienes llaman ancho y largo. Sola una pareja de estudiantes ignora la relación de los lados de la figura y el segmento AB dando la siguiente respuesta:  Ocho estudiantes describen la variación de la figura y de las medidas, una de las respuestas es la siguiente:	17 (48.6%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)
	AL ARRASTRAR EL PUNTO C DEL SEGMENTO AB SE OBSERVA QUE LA FIGURA SE AMPLIA Y SE REDUCE AL IGUAL QUE SUS MEDIDAS. Y SU AREA.	
	3) Descripciones centradas en la variación de tres aspectos: En este grupo los estudiantes describen la variación de la figura, segmento AB y medidas. De estas respuestas algunos estudiantes relacionan el movimiento del punto C, a la derecha o a la izquierda, con los cambios de los lados de la figura, mientras que otros intentan generalizar el moviendo del punto C con respecto a las medidas. En la mayoría de las respuestas el movimiento del punto C hacia la derecha genera el aumento de las medidas, mientras que a la izquierda disminuyen, en algunos sólo se hace explicita la medida del área. Sólo una pareja de estudiantes describen los cambios sin relacionarlos con el movimiento del punto C. Una de las respuestas es la siguiente:	13 (37.1%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)
	- al mover el punto C del segmento AB las medidas de la figura varian y de esta manera adquiere diferentes formas. el mover el punto C hacia la izquierda sus medidas disminuyen y hacia la derecha aumenta y la figura se alarga, el área tambien cambia.	
A.I.2: Se les solita dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Por qué se expresa el área del rectángulo como X(2-X)?	Las repuestas se clasifican en correctas, parcialmente correctas e incorrectas:	
	Correcta: 1) Relacionan la expresión con la fórmula del área para rectángulos base por altura o como el producto de sus lados, indicando en cada caso la relación entre de los factores con la figura y sustituyendo el valor de AB. Una de las respuestas de una pareja de estudiantes es la siguient A.2. Porque esto equivale al area (base por altura). En este caso la base seria (x) y la altura (AB-X) y (AB-X) es lo mismo que (2-X).	11 (31.43%)
	Parcialmente correcta: 2) Asumen como válida la expresión X(AB-X) dada en la pantalla de su calculadora y justifican la expresión como la sustitución del valor de AB que es igual a dos. Una de las respuestas es la siguiente:	11 (31.43%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)
	Se expresa como X (2-X), el segmento $\overline{AB}$ se cambia por el 2, que este significa la medida del segmento.	
	Incorrectas: 3) Realizan una argumentación alejada de los planteamientos de la pregunta. Cinco estudiantes dan diversas interpretaciones a la letra x, por un lado es el área, mientras que –x es CD o CB porque conforma la x de AB. Otros dos estudiantes determinan que los lados son x y el área correspondería a 2x. Una de las respuestas es la siguiente: A. 1.3: área = x A.B= 2.00 cm. -x= C.B. que conforma la x de A.B. área: A,C = 1.00 cm. =AB=2.00cm -x = C.B=1.00 cm.	7 (20%)
	4) Indican que la expresión X(2-X) es la suma de los lados, confundiendo el área con el perímetro. En esta respuesta algunos manifiestan no comprender las relaciones entre el segmento AB y la figura, ya que una pareja de estudiantes determinan que el segmento AB es el largo o altura de la figura y otra pareja indica que AB es igual a 2-X que corresponde a la altura del rectángulo. Una de las respuestas es la siguiente:	6 (17.14%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)
	3 x (2-x) es la suma de los lados. del rectangulo, decimos que x. es el ancho y AB es el largo o altura	
A.I.3: Se les solicita abrir un archivo en Cabri en donde observen la trayectoria de un punto P al mover el punto C.	1) No dieron ninguna respuesta	9 (25.72%)
	2) Sólo responden la pregunta de las coordenadas de P afirmando que representa los valores de AC y el área de las figuras. Una de las respuestas es la siguiente: • REPRESENTA LAS COORDENADAS DE AC Y EL AREA. =X(AB-X).	13 (37.14%)
 **Fig. 2. Pantalla observada en**	3) Relacionan la trayectoria con los valores de las coordenadas cartesianas y toman un valor de las coordenadas específico y lo generalizan. La respuesta es la siguiente: • Son coordenadas son (1,1) • Su trayectoria es de AC y el Area=(AB-x)	2 (5.71%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)
A.I.3 La trayectoria del punto representa la gráfica del área de los rectángulos con respecto al lado AC. Las preguntas que se les solicita responder son las siguientes: ¿Qué representan las coordenadas del punto P? ¿Qué trayectoria describe P?	4) Descripciones similares a los de la actividad A.I.1: Indican que al mover P en el plano cartesiano varían los valores, algunos especifican hacia donde aumenta la medida del segmento AC y CB con respecto al movimiento hacia la derecha y la izquierda del punto C en el segmento AB. Algunas respuestas se fijan en los valores en donde el lado aumenta y el área disminuye, mientras que otra variación de esta respuesta se da con respecto a los puntos A y B del segmento AB intentando generalizarse que pasa con los valores del lado y el área. Una de estas respuesta es la siguiente:  HACIA EL LADO B: AUMENTA LAS MEDIDAD DE L LOS LADOS Y DISMINUYE LA MEDIDA DE AREA, Y HACIA EL LADO A: ES TODO LO CONTRARIO; DISMINUYE LAS MEDIDAS DE LOS LADOS Y AUMENTA LA MEDIDA DEL AREA	11 (31.43%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPOS DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 35 alumnos)
Otras tareas Se inicia con la tarea **A.I.4** que presenta una tabla con algunos valores del área y el lado AC los cuales se les solicitan verificar si corresponden a la familia de rectángulos obtenidos. En **A.I.5** se les solicita graficar estos puntos en Y=Editor y se les pregunta ¿Cómo es la gráfica? Junto con la nubes de puntos graficada se les solicita en la **A.I.6** digitar la expresión $y = -x^2 + 2x$ en Y= editor y graficarla, observando la superposición de las gráficas. Finalmente en **A.I.7** se presentan las gráficas de familias de parábolas con su respectiva expresión simbólica y los valores de variación de sus parámetros	Las siguientes tareas fueron realizadas sólo con el uso de la calculadora TI- 92 plus bajo las indicaciones presentadas con la ayuda del ViewScreen, sin consignar los resultados de lo que observaban en la hoja de trabajo. Los resultados de estas actividades se pueden observar en el video #1 en el momento 59:13 al 1: 26:16 (Ver anexo3. Descripción de Videos).	

2. ACTIVIDAD Nº 2: “ANALIZANDO EXPRESIONES CUADRÁTICAS EQUIVALENTES”

<table>
<tr><th>DESCRIPCIÓN DE TAREAS</th><th>TIPO DE RESPUESTAS</th><th># DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 32 alumnos)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

A.II.1. En este tarea se les solicita observar los valores de la siguiente tabla, centrando la atención en las expresiones del área :

<table>
<tr><th>LADO AC
x</th><th>LADO CB
(2 – x)</th><th>AREA
x(2-x)</th><th>AREA
$-x^2 +2x$</th></tr>
<tr><td>0 cm.</td><td>2 cm.</td><td>0 cm^2</td><td>0 cm^2</td></tr>
<tr><td>0.24 cm.</td><td>1.76 cm.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.34 cm.</td><td>1.66 cm.</td><td>0.57 cm^2</td><td>0.57 cm^2</td></tr>
<tr><td>0.48 cm.</td><td>1.52 cm.</td><td>0.73 cm^2</td><td>0.73 cm^2</td></tr>
<tr><td>1 cm.</td><td>1 cm.</td><td>1 cm^2</td><td>1 cm^2</td></tr>
<tr><td>1.14 cm.</td><td>0.86 cm.</td><td></td><td>0.98 cm^2</td></tr>
<tr><td>1.28 cm.</td><td>0.72 cm.</td><td>0.92 cm^2</td><td>0.92 cm^2</td></tr>
<tr><td>1.66 cm.</td><td>0.34 cm.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 cm.</td><td>0 cm.</td><td>0 cm^2</td><td>0 cm^2</td></tr>
</table>

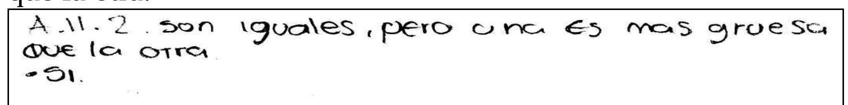
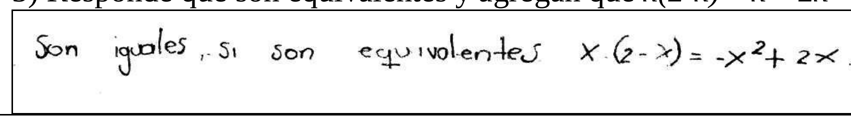
Se les indica que los valores han sido obtenidos en la tarea A.I.1 y se muestran las gráficas de las expresiones del área y del archivo en Cabri.

</td><td>En esta tarea sólo se les pedía relacionarse con los valores de la tabla y las expresiones. Se agrega como respuesta completar la tabla, ya que sin necesidad de sugerírseles un procedimiento, los estudiantes fijándose en las regularidades de los valores del área, o sustituyendo los valores de x en las expresiones había podido efectuarla.</td><td></td></tr>
<tr><td>1) No completaron la tabla</td><td>30
(93.75%)</td></tr>
<tr><td>

2) Completan la tabla pero obtienen valores muy próximos o diferentes.

<table>
<tr><th>LADO AC
x</th><th>LADO CB
(2 – x)</th><th>AREA
x(2-x)</th><th>AREA
$-x^2 +2x$</th></tr>
<tr><td>0 cm</td><td>2 cm</td><td>0 cm^2</td><td>0 cm^2</td></tr>
<tr><td>0.24 cm</td><td>1.76 cm</td><td>0.43 m^2</td><td>0,42 cm^2</td></tr>
<tr><td>0.34 cm</td><td>1.66 cm</td><td>0.57 cm^2</td><td>0.57 cm^2</td></tr>
<tr><td>0.48 cm</td><td>1.52 cm</td><td>0.73 cm^2</td><td>0.73 cm^2</td></tr>
<tr><td>1 cm</td><td>1 cm</td><td>1 cm^2</td><td>1 cm^2</td></tr>
<tr><td>1.14 cm</td><td>0.86 cm</td><td>0.97 m^2</td><td>0.98 cm^2</td></tr>
<tr><td>1.28 cm</td><td>0.72 cm</td><td>0.92 cm^2</td><td>0.92 cm^2</td></tr>
<tr><td>1.66 cm</td><td>0.34 cm</td><td>0.98 m^2</td><td>0.57 cm^2</td></tr>
<tr><td>2 cm</td><td>0 cm</td><td>0 cm^2</td><td>0 cm^2</td></tr>
</table>

</td><td>2
(6.25%)</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 32 alumnos)
A.II.2. En esta actividad se hace uso de la pantalla divida para graficar simultáneamente las expresiones $x(2-x)$ y $-x^2+2x$. Se les solicita completar la tabla #1 de la A.II.1 utilizando la función trace y responder a las siguientes preguntas ¿Cómo son las gráficas de las expresiones del área? ¿Son las dos expresiones del área equivalentes?	1) No responden a las preguntas	26 (81.25%)
	2) Responden que son iguales indicando que uno es más gruesa que la otra. 	4 (12.5%)
	3) Responde que son equivalentes y agregan que $x(2-x)=-x^2+2x$ 	2 (6.25%)

3. ACTIVIDAD Nº 3: "LA RELACIÓN DE LOS CEROS O RAÍCES CON LOS FACTORES DE UNA EXPRESIÓN CUADRÁTICA"

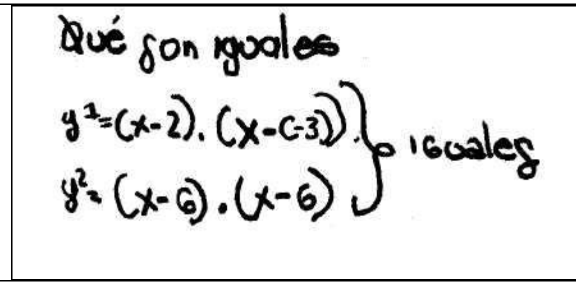
DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (porcentaje de un total de 34 alumnos)
A.III.1. Se dan las indicaciones para obtener pantalla doble. Se ajustan las escalas de los ejes y se muestra la forma de ingresar una	En esta tarea no se dan respuestas por escrito, los estudiantes siguen los procedimientos para el manejo de la calculadora necesarios para el desarrollo de la siguiente tarea (Ver Video #2, Momento 21:50 al 34:21).	

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (porcentaje de un total de 34 alumnos)
expresión algebraica cuadrática factorizada, graficarla y obtener los ceros utilizando la función [F5]: 3 Cero de la aplicación Gráficos.		
A.III.2. Dada la expresión factorizada ***(x-r)*(x-s)***, se solicita: 1) Graficarla y obtener los valores de los ceros o corte con el eje x, 2) Completar la expresión (x – □)*(x – □), con los valores de la abscisa del punto de corte de la gráfica con el eje x. 3) Determinar los valores de r y s , 4) Efectuar el producto de la expresión factorizada	**1) Obtención de los ceros:**	
	No dan respuesta	8 (23.5%)
	Utilizan la notación para puntos en el plano cartesiano XC=(2,0) YC=(4,0)	4 (11.8%)
	Determinan los ceros indicando por separado los valores de *x* y de y. x = 5. y = 0. x = 7. y = 0.	6 (17.7%)
	Utilizan la notación para puntos en el plano cartesiano y especificando los valores de *x* y de *y* (integran los dos anteriores respuestas). x=4 y=0 (4,0) x=2 y=0 (20)	11 (32.3%)

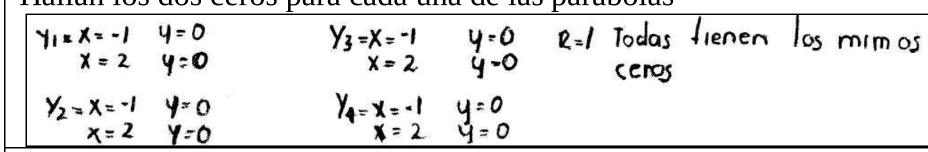
DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (porcentaje de un total de 34 alumnos)
5) Obtener la gráfica de la expresión desarrollada y comparar con la gráfica expresión factorizada.	Aplican la propiedad de los productos y despejan el valor de *x* de cada una de los factores para obtener los ceros, complementando su respuesta especificando los valores de *x* y de *y*. $X = 4$, $Y = 0$ $x = 7$, $y = 0$ $X - 4 = 0$, $x = 0 + 4$, $X = 4$ $X - 7 = 0$, $x = 0 + 7$, $x = 7$	2 (5.9%)
	Intentan hallar los ceros por manipulaciones algebraicas aplicando la propiedad de productos nulos, especificando cuando una expresión tiene dos ceros o uno. cuando dos factores son iguales y=(x-6).(x-6)=0 = y=0, x-6=0 x=0 solo obtenemos un (0), cuado son diferentes los factores obtenemos más ceros.	3 (8.8%)
	2) Completar la expresión (x – □)*(x – □), con los valores de la abscisa del punto de corte de la gráfica con el eje x.	
	Escriben en los espacios en blanco los valores solicitados (x – 4)*(x – 6).	18 (53%)
	Escriben la expresión factorizada y = (x - 5) x (x - 7)	7 (20.6%)
	Combinan las dos anteriores respuestas.	9 (26.4%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (porcentaje de un total de 34 alumnos)
	3) Determinar los valores de r y s de la expresión (x-r)*(x-s) dada	
	por ellos	
	Escriben la expresión factorizada	11 (32.3 %)
	Escriben independiente cada uno de los factores igualándolos a los factores de la expresión **(x-r)*(x-s)** $(x-r)=(x-3)$ $(x-s)=(x-8)$	1 (3%)
	Determinan los valores de r y s independientemente de la expresión $r=5$ $s=7$	18 (53%)
	No dan respuesta	4 (11.7%)
	4) Efectuar el producto de la expresión factorizada	
	Efectúan correctamente el producto $(x-5).(x-1)=x.(x-1)-5(x-1)=x^2-x-5x+5=x^2-6x+5$	20 (58.8%)
	Efectúan incorrectamente el producto. Comenten errores de multiplicación de números naturales, omiten signos o cambian términos de las expresiones inicial.	11 (32.3%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (porcentaje de un total de 34 alumnos)
	$(x-3) \times (x-8) = x(x-8) - 3(x-8)$ $x^2 - 8x - 3x + 22$ $x^2 - 11 + 22.$	
	No realizan la respuesta	3 (8.8%)
	5) Obtener la gráfica de la expresión desarrollada y compararla con la gráfica expresión factorizada	
	Afirman que son equivalentes. Son equivalentes-;	5 (14.7%)
	Afirman que son equivalentes o iguales y hacen una descripción de lo que sucede al graficar simultáneamente las expresiones. -las expresiones son equivalentes -las graficas quedaron sobrepuestas -hay una grafica más gruesa que la otra	17 (50%)
	No responden	9 (26.5%)
	Relacionan la expresión factorizada que ellos dan, con expresión factorizada *(x-2)*(x-(-3)* trabajada al inicio de la actividad, determinando que son iguales.	3 8.8%

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (porcentaje de un total de 34 alumnos)
		

4. ACTIVIDAD Nº 4: "EXPRESIONES CUADRÁTICAS FACTORIZABLES"

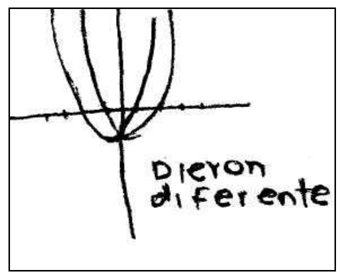
DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
A.IV.1. Se solicita graficar una familia de parábolas *a(x –2)*(x-(-1))* donde *a* = -1, -0.5, 1 y 2.5, utilizando pantalla dividida. Al graficarles se les pide: 1) Hallar los ceros o raíces	**1) Hallar los ceros o raíces**	
	Hallan los dos ceros para cada una de las parábolas 	8 (22.3%)
	Hallan un sólo cero para cada una de las expresiones	7

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
2) Describir los cambios de las parábolas al variar *a* 3) Efectuar el producto de una de las expresiones factorizadas. 4) Graficar la expresión cuadrática "desarrollada" y compararla con la gráfica de la expresión factorizada correspondiente.	y1 = x = −1 y = 0 y2 = x = 2 y = 0 y3 = x = 2 y = 0 y4 = x = 2 y = 0	(19.4%)
	Hallan los dos ceros de todas las gráficas. Algunos manifiestan que todas las gráficas cortan el eje *x* en los mismos puntos, mientras que otros lo dejan implícito. Al denotar los valores de los ceros algunos especifican sólo el valor de *x;* sólo una pareja de estudiantes agregan el valor de *y* para los puntos correspondientes a los ceros. x = -1 x = -2 } Se observa que todas cortan x el mismo punto	12 (33.3%)
	Dicen que los ceros son iguales pero no dan el valor numérico nosotras observamos que todos los ceros cortan igual	2 (5.6%)
	Sólo dan el valor de un solo cero. A/ x = 0 En todas las otras expresiones, y = 2 observamos que tanto la x como la y, nos dá igual en todas las demás expresiones.	7 (19.4%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	2) Describir los cambios de las parábolas al variar *a*	
	Descripciones generales como decir que las gráficas ascienden, desciende, se encogen, se anchan, se alargan, son grandes, pequeñas o cambian de posición. Que los gráficas empiezan a cambiar. descendente y ascentemente de acuerdo al valor de a.	7 (19.5%)
	Además de incluir una descripción general de las parábolas, determinan algunos cambios con respecto a las ramas, ceros y vértice. Los graficos se encogen y se anchan mas Sin embargo todas cortan por el mismo Punto segun su vertice cambian sus Ramas Puede ser hacia arriba y otras hacia abajo	8 (22.2%)
	Clasifican las parábolas en positivas y negativas, describiendo los cambios de sus ramas.	3 (8.3%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	Que son direrentes unos son positivos y otros negativos una parabolo con rama ba hacio abajo y otra hacia arriba.	
	Determinan que los ceros son iguales a pesar que las parábolas son diferentes. Si comparamos las cuatro párabolas al variar a encontramos que los ceros y las raices son iguales, a sí las gráficas sean diferentes. 1	3 (8.3%)
	No la realizaron:	15 (41.7%)
	3) Efectuar el producto de una de las expresiones factorizadas.	
	Producto correcto y expresión desarrollada reducida. $(x-2).(x+1)=$ $x^2+x-2x-2$ x^2-x-2	8 (22.2%)
	Producto Incorrecto. Para la familia de parábolas, *a* tenía diferentes	26

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	valores. Para efectuar el producto los estudiantes seleccionan la expresión para a= -1 o 1. Aquellos estudiantes que seleccionaran a= -1 al efectuar el producto ninguno de ellos la realiza correctamente, mientras que los estudiantes que seleccionan *a*=1 algunos tienen mayor éxito. $-1*(x-2)*(x-(-1)) = -1(x-2)(x+1) =$ $((-x)+2)*(-x-(-1)) =$ $+x^2-x-2x+2=$ x^2-3x+2	(72.2%)
	Producto correcto y sin reducir la expresión desarrollada. $1*(x-2)*(x-(-1))=(x-2).(x+1)$ $(x-2)\times(x+1)=$ $x^2+x-2x-2$	2 (5.6%)
	4) Graficar la expresión cuadrática “desarrollada” y compararla con la gráfica de la expresión factorizada correspondiente.	
	No la realizaron.	9 (25%)
	No realizan ninguna descripción en relación a las gráficas y clasifican las expresiones trabajadas en desarrollada y factorizada.	

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	x^2-3x+2 = desarrollada $-1 \cdot (x-2).(x-(-1))$ = factorizada	4 (11.1%)
	Afirman que las gráficas se superponen, son iguales o pasan por los mismos ceros. observamos que las gráficas inician en el mismo punto y continuan iguales	14 (38.8%)
	Expresan que las gráficas son diferentes o están separadas, de estos cuatro estudiantes elaboraron un dibujo a mano alzada.  	9 (25%)
	Describen la posición del vértice y las ramas de una parábola la vertice es hacia bajo y las ramas hacia arriba	2 (5.6%)

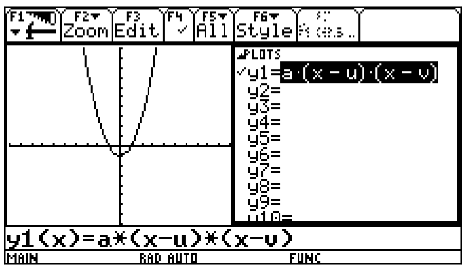
<table>
<tr><th>DESCRIPCIÓN DE TAREAS</th><th>TIPO DE RESPUESTAS</th><th># DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">A.IV.2 Se solicita ejecutar el programa parabol1( ) , en la que se obtienen parábolas al azar que cortan el eje x. Se muestran dos gráficas obtenidas con este programa:


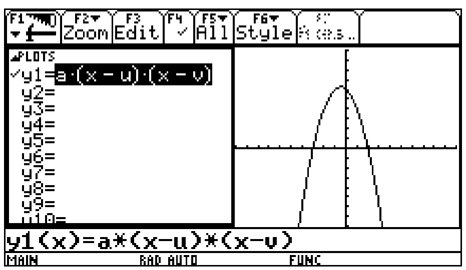
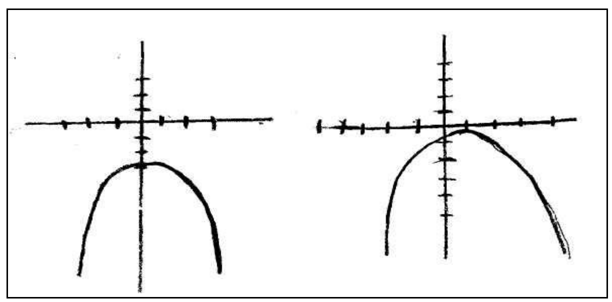
Fig. 1


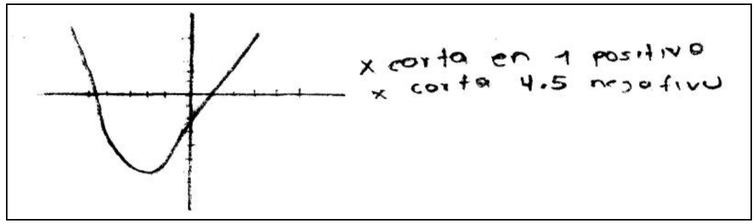
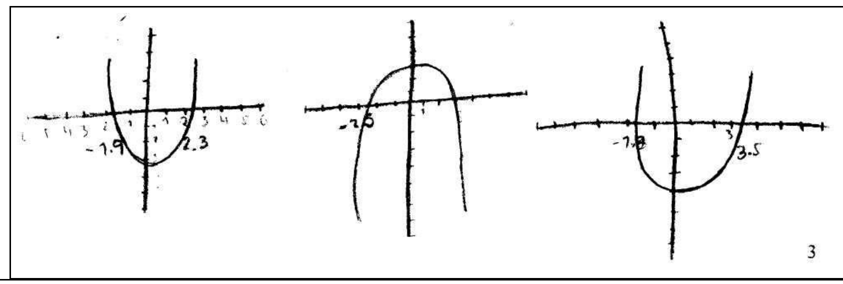
Fig. 2</td><td>1) Determinar el signo del valor de a para las gráficas Fig. 1 y Fig.2. Describir en que afecta este valor a la gráfica.
Respuestas Correctas</td><td></td></tr>
<tr><td>Determinan que el signo de a es positivo si las ramas van hacia arriba mientras que si a es negativo las ramas van hacia abajo.
figura N-1 es positiva porque su rama el(positi ival va hacia arriba figura n-2 es negativa porque sus ramas se dirigen hacia arriba</td><td>15
(41.7 %)</td></tr>
<tr><td>Determinan el signo de a con relación a la gráfica: si a es positiva la gráfica es hacia arriba, abre hacia arriba o sube, o simplemente determina que la Fig. 1 el valor de a es positiva por su posición. Para el valor de a negativo la figura baja, esta hacia abajo, abre hacia abajo o determinan que la Fig. 2 tiene a negativa por su posición.
1.= a es positivo y la gráfica es para arriba.
2.= a es negativo y la gráfica es para abajo.</td><td>15
(41.7 %)</td></tr>
<tr><td>Respuestas Incorrectas
Otros estudiantes dicen que el vértice y las ramas quedan hacia abajo si el valor de a es negativo y viceversa para el valor de a positivo. Esta afirmación no es correcta, ya que las parábolas corresponden a</td><td>3
(8.3 %)</td></tr>
</table>

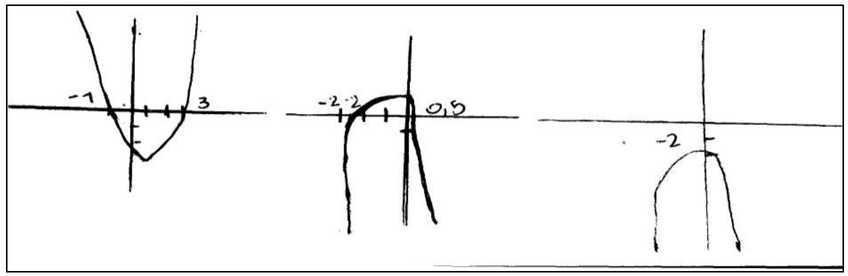
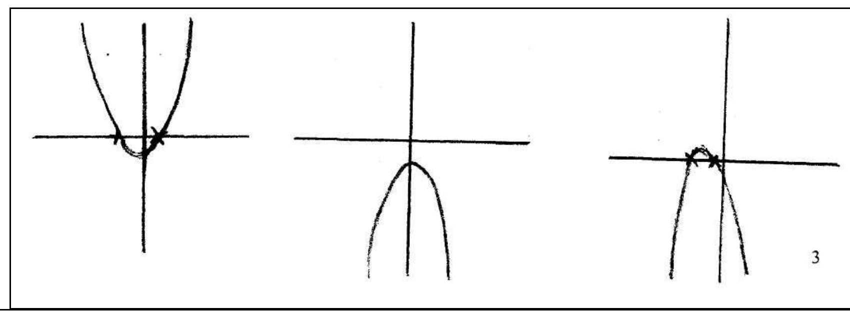
DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
1) En cada una de las figuras anteriores (Fig. 1 y Fig. 2) diga si el signo de *a* es positivo o negativo. ¿Por qué? ¿En qué afecta este valor de *a* la parábola correspondiente? 2) Para facilitar los cálculos se ha asignado a *a* solamente los valores de –1 y 1. Obtenga los valores tanto de los ceros o raíces *(u y v)* como de *a* de la parábola que usted obtuvo anteriormente y grafique la expresión $y_2 = a*(x-u)*(x-v)$ con los valores que halló. 3) Observa y diga: ¿Cuál es la relación entre la gráfica que usted obtuvo y la dada por el programa parabol1( )?	expresiones factorizadas y si las ramas van hacia abajo el vértice es un máximo y estaría ubicado en la parte superior y viceversa para ramas hacia arriba. parábola correspondiente? el signo negativo y positivo de la Rama si cambia es negativo el vertice se ubica abajo y la Rama tambien si es positivo	
	Respuestas incompletas Para otros el signo de *a* hace que las gráficas sean diferentes pero no se específica para cuál de las figuras dadas el valor de *a* es negativo o positivo. Para estos estudiantes *a* es un valor positivo porque no tiene el signo menos antepuesto a él. El signo de a es positivo porque no tiene el signo de menos. El valor de a afecta las parabolas porque son diferentes las gráficas desarrolladas.	3 (8.3 %)
	2) Obtener la expresión $y_2 = a*(x-u)*(x-v)$ dado que a= 1 o -1 y u y v son los valores de los ceros o raíces.	
	No la realizaron	16 (44.4%)
	Escriben la expresión ***y= a(x-u)(x-v)***. $y_2 = 1(x-2).(x-5)$	7 (19.4%)
	Dan los valores de *u*, *a* y *v* independientemente de la expresión general.	2

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	$a=-1$ $u= 3$ $V= 1$	(5.6%)
	Dan el valor de *u* y *v* independiente de la expresión general, omitiendo el valor de ***a.*** $y_2 =$ $a*(x-u)*(x-v)$ con los valores que halló. la expresión desarrollada se realizó con los valores de $u=-1$ y de $v=2$. las graficas Factorizada y la desarrollada dieron una encima de la otra.	3 (8.3%)
	Escriben los ceros de la parábola pero dejan implícito la relación con la expresión general y omiten el valor de ***a.*** $X=2$ $Y=0$ $X=1$ $Y=0$	6 (16.7%)
	Escriben los ceros de la parábola pero dejan implícito la relación con la expresión general y los valores *u* y *v*, sustituyendo el valor de *a* en la expresión general. Raiz= $x=-1$ $y=0$ $-1(x-u).(x-v)$ $x=4$ $y0$	2 (5.6%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	3) Graficar la anterior expresión hallada y compararla con la parábola obtenida con el programa parabol1( )	
	No la hicieron.	13 (36.1%)
	Afirman que son iguales. De estos una pareja de estudiantes afirman que son iguales pero a la vez dicen que están en diferentes puntos, poniendo en duda la igualdad afirmada. Cuatro estudiantes que dan respuesta a esta pregunta no realizaron la pregunta anterior. R// Las gráficas quedaron iguales.	10 (27.8%)
	Dicen que las gráficas da una encima de la otra. Pues lo que nosotros obtuvimos y la de la del progra ma nos dio una encima de la otra	3 (8.3%)
	Afirman que las gráficas son equivalentes y hacen una descripción de las gráficas. Cuatro estudiantes de este grupo no efectuaron la pregunta anterior la relación es que los graficos son equivalentes sus ramas van hacia arriba.	6 (16.7%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	Realizan una comparación de las dos gráficas, sin afirmar que son iguales 	4 (11.1%)
A.IV.3. Ejecutar el programa parabol2( ) y obtenga: - Una parábola cuyas ramas abren hacia arriba y corta el eje x - Una parábola cuyas ramas abren hacia abajo y corta el eje x - Una parábola cuyas ramas abren hacia abajo y no corta el eje x Realice un dibujo a mano alzada de cada uno de ellas e indique los puntos de corte con el eje x. Las siguientes preguntas fueron omitidas, sin embargo se les explico la relación de los valores de a, h y k en la expresión	No la realizaron	5 (13.9%)
	Dibujaron algunas de parábolas solicitadas. Dibujan las parábolas sin indicar el valor del punto de corte con el eje x 	9 (25%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
$y=a(x-h)^2 +k$.	Indican los puntos de cortes independientemente de los gráficos, 	6 (16.6%)
	Señalan en el gráfico los puntos de corte con el eje x. 	2 (5.5%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
	Dibujaron todas parábolas solicitadas Señalaron los valores de los puntos de corte con el eje x 	8 (22.2%)
	Señalaron los puntos de corte con el eje *x* con un punto en negrilla o una equis. 	6 (16.7%)

DESCRIPCIÓN DE TAREAS	TIPO DE RESPUESTAS	# DE ALUMNOS (Porcentaje de un total de 36 alumnos)
A.IV. 4. Se solicita responder las siguientes preguntas: 1) ¿Cuándo la gráfica de una expresión algebraica cuadrática corta al eje x? 2) ¿Cuándo una expresión algebraica de segundo grado se puede factorizar?	**1) ¿Cuándo la gráfica de una expresión algebraica cuadrática corta al eje x?** Sólo dos estudiantes responden por escrito a esta pregunta. La mayoría de los estudiantes responden verbalmente (Ver Video #3, momento 1:16:03) cuando es factorizada	2 (5.5%)
	No responden	34 (94.5%)
	2) ¿Cuándo una expresión algebraica de segundo grado se puede factorizar? Afirman que una expresión algebraica de segundo grado es factorizable si corta el eje x cuando corta el eje x	4 (11.1%)
	No responden	32 (88.9%)

ANEXO C. DESCRIPCIÓN DE VIDEOS

VIDEO VHS # 1

Sesiones I Y II
Duración: 3 horas escolares de 55 min. cada hora
Fecha de grabación: Lunes 1 de diciembre y Miércoles 3 de diciembre de 2003

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
0:00	Organización del salón e instalación en las calculadoras los archivos a trabajar en clase.
1:40	Ingreso de los estudiantes y entrega de las hojas de trabajo
10:20	**Inicio de la sesión I**: El desarrollo de las actividades inicia cuando una estudiante lee la primera actividad. Se les induce a observar las imágenes de su hoja y determinar los objetos que allí aparecen. En vista que una estudiante afirma que el segmento AB es el perímetro del rectángulo, se les aclara que el segmento AB es la mitad del perímetro. Se retoma el significado de perímetro y se observa el segmento AB. Luego se procede a abrir el archivo en Cabri Geometry correspondiente a las imágenes anteriormente observadas. Los procedimientos a seguir se les indica con la proyección del viewScreen y el proyector.
20:40	Se observan el trabajo de los estudiantes en diferentes mesas: algunos trabajan en equipo con otras parejas, dividiéndose las funciones: unos manipulan la calculadora y dicen lo que ven, otros ayudan a redactar y otros escriben en su hoja de trabajo y luego comparten los apuntes con los otros compañeros de la mesa. En otras mesas el trabajo se da sólo en parejas con algunos comentarios con otros compañeros, pero independientemente se redacta la respuesta.
28:31	Se inicia la discusión de las respuestas de las parejas de trabajo, varios estudiantes participan. Se les hace la aclaración que sólo deben mover el punto C, porque se observa que algunos estudiantes mueven los puntos A y B y modifican la medida del segmento AB. Se proyecta el archivo y se mueve el punto C para observar los cambios en las medidas de los lados, el área y la mitad del perímetro. Se intenta aclarar la notación y su relación entre el segmento AB y lados de la figura. Se lee la pregunta y se escucha dos intervenciones: una estudiante afirma que representan el producto de los lados y otra afirma que la expresión x(AB-x) y x(2-x) son diferentes.

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
34:07	Se observan los trabajos de los estudiantes en sus mesas. En una mesa Cynthia argumenta erróneamente la respuesta de la pregunta A.I.2, para ella la x es como una etiqueta, que puede ser asociada a segmentos diferentes y no comprende lo que representa el segmento AB con respecto a la figura. Su argumentación se extiende a las otras parejas de estudiantes en la misma mesa, quienes sin entender su argumentación, esperan que ella la redacte. Algunas de sus afirmaciones son: AB es una x y CB es otra x y como hace parte de una x por eso se pone –x a CB, e igualmente el área también es una x.
41:47	Para muchos era difícil comprender la relación entre el segmento AB y la figura, por lo cual se procedió a proyectar el archivo y explicar las relaciones de las letras y la construcción. Cynthia participa y afirma que AC es la mitad de la x que para ella es CB y como CB es –x, se sustituye en la expresión. La argumentación de Cynthia, no la entiende la estudiante investigadora y se le muestra que los segmentos AC y CB no son necesariamente iguales, lo son cuando cada mide 1, de lo contrario cambian sus magnitudes, conservando su suma como dos. Se les sugiere miren varios valores y los sumen para verificar que permanecen constantes. A pesar de las explicaciones, Cynthia persiste en su argumentación. Se observa el trabajo de los estudiantes en cada una de las mesas.
52:34	Se procede a abrir el siguiente archivo para la actividad A.I.4, se observa que algunos estudiantes sin necesidad de seguir las instrucciones ya tienen en la pantalla de su calculadora el archivo.
56:10	Para agilizar las actividades se les pide que sólo observen lo que va suceder al hallar la trayectoria del punto P con lugar geométrico y se les siguieren que si ellos quieren lo realicen. Sin embargo los estudiantes solicitaron de nuevo la explicación para ellos realizarlo. En la proyección se exploraron algunos valores como los puntos de área y lados máximos. Se observa que a pesar de que los valores del área y el lado AC están en la misma pantalla de la graficación del punto P y sus coordenadas, los estudiantes no los relacionan
59:13	Se procede con las actividades A.I.5, A.I.6 y A.I.7. Se les indica que se han tomado algunos puntos del área y el lado AC de la familia de rectángulos trabajados para ser graficados en forma de nube de puntos. A medida que se les muestra la graficación de los puntos, los estudiantes realizan la graficación en sus calculadoras. Se les explica que la calculadora halla una expresión que se ajusta a esos datos: $-x^2\ +2x$ y se procede a digitar en Y=Editor. Se muestran simultáneamente las gráficas pero los estudiantes no siguen la actividad porque no saben cómo digitar la expresión. Se muestra la ventana de Y=Editor y se les indica que después de seleccionar la

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
	expresión deben seleccionarla con F4 para que sean graficadas, se les muestra la tecla para los exponentes $\boxed{\wedge}$ y la del signo menos para los números negativos $\boxed{(-)}$, pero debido a que el tiempo de la clase termina no alcanzaron a digitar la expresión.
1: 19:16	**Inicio de la sesión II:** Un estudiante llama a lista y le da el código a cada estudiante, mientras se organiza el salón y se entrega las hojas de trabajo.
1:21:40	En la sesión anterior se les había recomendado observar las gráficas de la A.I.9, se les pregunta si lo han hecho y no responden. Así que se proyectan las figuras de la familia de parábolas de la A.I.9. como aparece en la hoja de trabajo y se miran cada una de las expresiones.
1:26:16	Se retoma lo trabajado en la sesión anterior con relación a la familia de rectángulos y se les pide que recuerden la expresiones trabajadas ($-x^2 +2x$ *y* $x(2-x)$), se les retoma la fórmula del área y se les explica la relación de los factores en la expresión $x(2-x)$.Luego se efectúa el producto, obteniéndose $2x -x^2$. Se compara esta expresión con la dada en la actividad anterior: $-x^2 +2x$. Se observan los valores de la tabla de la actividad A.II.1 y se pasa a graficar las expresiones $-x^2 +2x$ *y* $x(2-x)$. Para ello, se les indica como borrar las expresiones, seleccionarlas e ingresarlas. Sin embargo son múltiples los problemas de la sintaxis de entrada: confunden el signo de la multiplicación con la letra x, se utiliza la tecla $\boxed{(-)}$ para la resta, se confunde la letra x con el signo de multiplicación, se omite elevar al cuadrado, se escribe el signo menos de un número negativo con el de la resta, etc. Para continuar con lo que se interesaba observaran, se efectúa el procedimiento en el viewscren. Se les indica que para distinguir las expresiones se puede cambiar el estilo de la segunda gráfica a una línea a más gruesa. Se les solicita atiendan a la proyección en la calculadora y observen como son las dos gráficas. La de línea delgada se gráfica primero, luego la de línea gruesa va sobreponiéndose en la otra. Para buscar los valores que se les pedían en el la tabla de la actividad A.II.1, se les sugiere buscar con trace y el cursor, pasando de una gráfica a la otra. Dado las múltiples dificultades presentadas con el uso de la calculadora, muchos de los estudiantes no lograron responder en su hoja de trabajo, pero en las discusiones de las proyecciones algunos de los estudiantes describen lo que observan y afirman que las gráficas son iguales. Debido a que el uso de la calculadora demando más su atención, no alcanzaron a responder en la hoja de trabajo.
1:57: 24	Los estudiantes entregan sus hojas de trabajo
2:00:12	Conversación del Profesor Evelio Bedoya y la profesora Mariela Agudelo con respecto a lo sucedido en la sesión.

VIDEO VHS # 2

Sesión III
Duración: 2 horas escolares de 55 min. cada hora
Fecha de grabación: Viernes 5 de diciembre de 2003

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
2:01	Entrega de calculadoras y hojas de trabajo. La sesión inicia con la explicación de cómo obtener pantalla doble en su calculadora. Luego se ingresa en Y= editor la expresión *(x-2)(x-(-3))*, ajustándose la escala en Windows. Se procede a graficar y explicarles como hallar los puntos de corte con la función ceros en la pantalla de graficación.
21:50	Se explica en el tablero la propiedad de los productos nulos, definiendo los ceros y preguntándoles cuando el producto de números da cero. A partir de su respuesta y su través de manipulaciones algebraicas se hallan los ceros. Se les indica que la actividad A.III.2 es la explicación de la ejecución de un programa pero que por problemas técnicos no es posible ejecutar, así que para sustituirlo se les pide que den una expresión de la forma *y= (x- r)(x-s)* como la que inicialmente se digito, en donde ellos seleccionen los valores de r y s. La nueva tarea continúa igual, a excepción de la tercera pregunta, en las que se le pedía graficar la expresión factorizada hallada con la del programa.
34:21	Se observa el trabajo de algunos estudiantes. Algunos dan una expresión en la que la parábola no se ve completa, es decir no se ven sus dos ramas y vértice, aunque se les había indicado como modificar la escala no lo hacen. Otros han seguido las explicaciones iniciales y tienen activada la gráfica de la expresión *(x-2)(x-(-3))*, presentándose dos gráficas en su pantalla. Algunos estudiantes no saben que producto es lo mismo que multiplicación, se les hace la aclaración. En la pregunta en la que se les pide efectuar la multiplicación de la expresión factorizada, algunos parecen no recordar el procedimiento y lo efectúan erróneamente. En cuanto a la manera de hallar los ceros, debido a que los mensajes en la calculadora aparecen en inglés los estudiantes no entienden y generalizan el procedimiento del cero de la izquierda al de la derecha ocasionándose un error. Se le solicita a una pareja de estudiantes mostrar su trabajo, se niegan a salir al frente, así que se toma su calculadora y se proyecta la gráfica de la expresión *y= (x-6)(x-6*) que ellos han dado. Con respecto a la gráfica obtenida, se generó dudas con relación al número de ceros. Hasta el momento se habían trabajado con expresiones con dos ceros diferentes. Se hallan el cero con los función $\boxed{\text{F5}}$ Cero de la calculadora y se efectúan manipulaciones

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
	algebraicas para hallar los ceros de la expresión. Se les indica que cuando los factores son iguales el número de ceros es uno, mientras cuando los factores son diferentes el número de ceros es dos. Se toma una de las expresiones de una pareja de estudiantes quienes ya habían realizado el producto de la expresión factorizada y obtenido la expresión desarrollada, para mostrar las gráficas simultáneas de ambas expresiones al cambiarles el trazo de la expresión a más grueso y observar que se superponen. En cuanto al manejo de la calculadora, se había podido graficar en cada ventana cada expresión y compáralas, en vez de trabajar en una sóla ventana. Se observa que los estudiantes se les dificultan el producto de la expresión factorizada, al graficar la expresión desarrollada y la factorizada, obteniendo diferentes gráficas, inclusive lineales. En vista de las dificultades, retoma la explicación del producto de una expresión cuadrática factorizada.
1:55:44	Despedida de los estudiantes

VIDEO VHS # 3

Sesión IV
Duración: 3 horas escolares de 55 min. cada hora
Fecha de grabación: Viernes 12 de diciembre de 2003

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
0:00	Se les entrega las calculadoras, la hoja de trabajo y una hoja de algunas instrucciones de manejo de la calculadora
3:01	Se les pregunta si tienen su calculadora dividida en dos pantallas y se lee la primera actividad y se explica en el tablero como son las expresiones a digitar en Y= editor.
8:34	Se observa el trabajo en cada una de las mesas. Algunos estudiantes grafican cada expresión y hallan los ceros de cada una de las expresiones con F5 cero. A pesar de que en la figura de la hoja de trabajo se observan que todas cortan en los mismos ceros, no se percatan de ello y no las grafican simultáneamente. Tampoco ninguno de ellos efectúa manipulaciones algebraicas para hallar los ceros. Los estudiantes sólo utilizan la función F5 Cero, omitiendo trace o simplemente ubicando el valor según la escala. Se procede a dibujar en el tablero una parábola para explicarles cómo obtener los

TIEMPO (Min.)	ACTIVIDADES , INTERVENCIONES Y COMENTARIOS
	ceros cuando la escala de cada división corresponde a una unidad sin necesidad de las funciones que ofrece la calculadora. Se miran en tablero ejemplos de parábolas con cortes iguales y cortes diferentes
26:56	Se les muestra dos parábolas dibujadas en el tablero, introduciéndose los términos ramas y vértice de la parábola, para que ellos elaboren sus descripciones. De nuevo se les recuerda como efectuar un producto de expresiones polinómicas cuadráticas, una estudiante la efectúa totalmente. Se observa el trabajo de los estudiantes. Una pareja de estudiantes obtienen dos gráficas diferentes entre la desarrollada y la factorizada, como saben que las dos gráficas deben dar iguales escriben lo que ven sus otros compañeros, otra pareja también obtiene diferentes gráficas, solicitan ayuda, ya saben que las gráficas dan iguales, se les indica que hay un error. Generalmente los estudiantes buscan el error en la digitación de la expresión en la calculadora y no el producto.
47:27	Se procede a indicarles como ejecutar el programa parabol1( ) y se dibujan en el tablero diferentes ejemplos de parábolas que pueden obtener con el programa, teniendo en cuenta la expresión $a(x-u)(x-v)$. Para determinar si ellos saben que características tienen en común las parábolas originadas con esa expresión, se les dibuja una parábola que no corta el eje x y se les pregunta si es posible obtenerla.
58:46	Se toma el ejemplo de una parábola dibujada en el tablero para indicarles cómo obtener la expresión factorizada que le corresponde, teniendo en cuenta que los valores de a son -1 y 1. Se observan el trabajo de los estudiantes, algunos no han entendido que el programa parabol1( ) genera parábolas al azar y asumen que les debe dar una parábola igual a la mostrada en el tablero. Para la mayoría de los estudiantes es fácil identificar el efecto del valor a en las gráficas.
1:16:03	Se procede a generar parábolas con el programa parabol2( ), y se les indica que obtenga algunas parábolas según las características solicitadas en la hoja de trabajo. Cada grupo ha obtenido diferentes parábolas, proyectándose algunas de ellas. Al obtener diversas parábolas se les pregunta cuales de ellas son factorizables, ellos dicen que las factorizable son aquellas que cortan el eje x y el eje y, así que se les dibuja en el tablero un parábola que no corta el eje y pero sí el eje x para ver sus respuestas. Algunos dudan pero afirman que es factorizable. Se les muestran parábolas con cortes decimales y se intenta dar una aproximación de los ceros sólo observando la gráfica.
1:37:49	Fin de la sesión