# Y CANTABRIA… CONVOCÓ

María José Fuente Somavilla
Ana María López García
Raquel Trimiño Rodríguez
IES Ría San Martín, CORTIGUERA - SUANCES

Lectura detallada de resoluciones gubernamentales, recopilación de material, muchas horas de estudio, dudas que acechan la seguridad de uno mismo, noches de pocas horas de sueño y grandes dosis de nerviosismo. Un buen número de lectores reconocerán haber pasado por esta sucesión de estados cuando se iban acercando las fechas de celebración de las coloquialmente conocidas como *oposiciones*, cualesquiera que éstas fuesen. El análisis de las peculiaridades de la última convocatoria de procedimientos selectivos para el ingreso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria es el objetivo de los próximos párrafos. Dicho análisis está motivado en una gran parte por las circunstancias excepcionales que han rodeado este proceso de selección y que han conllevado, como cabe suponer, un plus de trabajo, esfuerzo y desasosiego en los opositores.

Para entender un poco mejor todo el desarrollo, se inicia esta presentación con unas tablas que muestran de manera comparada las características de las oposiciones de las últimas cuatro convocatorias, las de 2006, 2008, 2010 y 2012. Durante las convocatorias de 2008 y 2010 los procesos selectivos se regían por la reglamentación correspondiente al llamado *régimen transitorio,* durante el cual cambiaron las circunstancias de las pruebas para un periodo de cinco años en el que se pretendía reducir la larga lista de interinos. ¿Qué era de esperar en la convocatoria de 2012? Los distintos cambios que se han ido sucediendo durante los últimos meses hasta publicarse la convocatoria de este año, y la consiguiente variación de las “reglas de juego”, se irán detallando secuencialmente a lo largo de estas líneas.

## Diferencias entre las últimas convocatorias. Convocatoria de 2012

A continuación presentamos una tabla donde se contrastan las pruebas a superar, con su valor y su carácter o no eliminatorio, de los procedimientos selectivos para el ingreso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria de las convocatorias de 2006 (última previa al régimen transitorio) y de 2008 (primera del régimen transitorio).

| **CONVOCATORIA 2006**<br>(Orden EDU/15/2006, de 21 de marzo) | | **CONVOCATORIA 2008**<br>(Orden EDU/31/2008, de 16 de abril) | |
|---|---|---|---|
| **Oposición** | **Hasta 10 puntos** | **Oposición** | **Hasta 10 puntos** |
| **Primera prueba (eliminatoria)** | Hasta 10 puntos (mínimo 5 para superarla) | **Primera prueba (no eliminatoria)** | Hasta 10 puntos |
| Primera parte: resolución de problemas | Hasta 4 puntos (mínimo 1 para superarla) | No hay prueba práctica | |
| Segunda parte: desarrollo de un tema a elegir entre dos obtenidos al azar | Hasta 6 puntos (mínimo 1,5 para superarla) | Parte A: desarrollo de un tema a elegir entre cinco obtenidos al azar | Hasta 10 puntos |
| **Segunda prueba (eliminatoria)** | Hasta 10 puntos (mínimo 5 para superarla) | **Segunda prueba** | Hasta 10 puntos |
| Parte A: Presentación escrita y defensa oral de una programación didáctica<br>Parte B: Presentación escrita y defensa oral de una unidad didáctica (a elegir entre tres) | Hasta 10 puntos (mínimo 5 para superarla) | Parte B.1: Presentación escrita y defensa oral de una programación didáctica<br>Parte B.2: Presentación escrita y defensa oral de una unidad didáctica (a elegir entre tres) | Hasta 10 puntos |
| **Nota oposición** | Media aritmética de las dos pruebas | **Nota oposición** | Media ponderada<br>Primera prueba 40%<br>Segunda prueba 60% |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Concurso de méritos** | **Hasta 10 puntos** | **Concurso de méritos** | **Hasta 10 puntos** |
| Experiencia docente | Hasta 5 puntos | Experiencia docente | Hasta 7 puntos |
| Méritos académicos | Hasta 5 puntos | Méritos académicos | Hasta 4 puntos |
| Otros | Hasta 2 puntos | | |
| **Nota concurso** | Suma de méritos (truncando en 10) | **Nota concurso** | Suma de méritos (truncando en 10) |
| **Nota global** | **Media ponderada Oposición 2/3 Concurso 1/3** | **Nota global** | **Media ponderada Oposición 60% Concurso 40%** |

La convocatoria de 2010 coincide, en esencia, con la de 2008. Ahora bien, el año 2012 iba a ser un año de cambios en cualquier caso, pues suponía el fin del mencionado *periodo transitorio*. La mayor incógnita consistía en saber si se volvería a un régimen ya conocido, como era el existente antes del periodo transitorio; o bien, se propondría un nuevo sistema de acceso. Finalmente, el sistema de acceso ha resultado ser similar al de antes de 2008 y viene regido por el Real Decreto 276/2007.Comparemos ahora la convocatoria de este año con la anterior.

| **CONVOCATORIA 2010** (Orden EDU/26/2010, de 25 de marzo) | | **CONVOCATORIA 2012** (Orden ECD/39/2012, de 9 de mayo) | |
|---|---|---|---|
| **Oposición** | **Hasta 10 puntos** | **Oposición** | **Hasta 10 puntos** |
| **Primera prueba (no eliminatoria)** | Hasta 10 puntos | **Primera prueba (eliminatoria)** | Hasta 10 puntos (mínimo 5 para superarla) |
| No hay prueba práctica | | Parte A (prueba práctica): resolución de problemas | Hasta 10 puntos (mínimo 2,5 para superarla) |
| Parte A: Desarrollo de un tema a elegir entre cinco obtenidos al azar | Hasta 10 puntos | Parte B: desarrollo de un tema a elegir entre cuatro obtenidos al azar | Hasta 10 puntos (mínimo 2,5 para superarla) |
| | | Calificación primera prueba | Media aritmética de las partes A y B |
| **Segunda prueba** | Hasta 10 puntos | **Segunda prueba (eliminatoria)** | Hasta 10 puntos (mínimo 5 para superarla) |
| Parte B1: Presentación escrita y defensa oral de una programación didáctica Parte B2: Presentación escrita y defensa oral de una unidad didáctica (a elegir entre tres) | Hasta 10 puntos | Parte A: Presentación escrita y defensa oral de una programación didáctica Parte B: Presentación escrita y defensa oral de una unidad didáctica (a elegir entre tres) | Hasta 10 puntos (mínimo 5 para superarla) |
| **Nota oposición** | Media ponderada Primera prueba 40% Segunda prueba 60% | **Nota oposición** | Media aritmética de las dos pruebas |
| **Concurso de méritos** | **Hasta 10 puntos** | **Concurso de méritos** | **Hasta 10 puntos** |
| Experiencia docente | Hasta 7 puntos | Experiencia docente | Hasta 5 puntos |
| Méritos académicos | Hasta 4 puntos | Méritos académicos | Hasta 5 puntos |
| | | Otros | Hasta 2 puntos |
| **Nota concurso** | Suma de méritos (truncando en 10) | **Nota concurso** | Suma de méritos (truncando en 10) |
| **Nota global** | **Media ponderada Oposición 60% Concurso 40%** | **Nota global** | **Media ponderada Oposición 2/3 Concurso 1/3** |

Dado que la convocatoria que nos ocupa es la de 2012, trataremos de detallar más en qué consiste cada una de sus pruebas.

La primera prueba es escrita y consta de dos partes. La parte A consiste en la resolución de una serie de problemas, para lo cual se dispone de un tiempo de dos horas. La parte B consiste en el desarrollo de un tema a elegir de entre los cuatro que salen por sorteo justo antes de iniciarse la misma, proceso en el que pueden ser testigos los propios opositores. Para la parte B también se dispone de dos horas. Tanto la parte A como la B se puntúan de 0 a 10 puntos y la calificación de la primera prueba es la media aritmética de ambas puntuaciones. Para superar esta prueba será necesario obtener una puntuación superior o igual a 2,5 en cada parte y que la media aritmética de las dos puntuaciones sea igual o superior a 5. En cualquier otro caso, el opositor será declarado no apto.

Una vez corregida la primera prueba, se publicará la lista de los que son declarados aptos para la segunda prueba. A partir de ese momento, los opositores tienen 48 horas para presentar su programación didáctica al tribunal, una copia en formato papel y otra en un CD en formato pdf. A continuación, serán convocados para la segunda prueba de la oposición, que consta, a su vez, de dos partes las cuales tendrán lugar el mismo día.

Al inicio de la segunda prueba el opositor conocerá las tres unidades didácticas extraídas por sorteo de su programación, para que elija cuál desea defender. A partir de ese momento, el opositor dispondrá de una hora para la preparación de esta segunda prueba y, transcurrido ese tiempo, deberá hacer una defensa oral tanto de su programación didáctica como de la unidad didáctica elegida, que constituyen la parte A y la parte B, respectivamente, de esta prueba. Para cada parte dispondrá de 30 minutos y en la parte B el opositor podrá ayudarse de un sucinto guión manuscrito. A continuación, el tribunal podrá hacerle preguntas. La calificación global de la segunda prueba será de entre 0 y 10 puntos.

Sólo en caso de superar las dos pruebas de la fase de oposición se suman los méritos de la fase de concurso.

Ya hemos visto en qué consiste el procedimiento selectivo. Conozcamos ahora los distintos pasos que se fueron dando hasta la publicación de esta convocatoria.

## La polémica convocatoria de 2012

Una vez conocido que la convocatoria se regiría por el Real Decreto 276/2007, faltaba por saber cuál sería el temario, pues hacía ya un tiempo que se esperaba un cambio del mismo y el Gobierno no terminaba de pronunciarse. Finalmente, con la Orden EDU/3138/2011, de 15 de noviembre, se hizo público el nuevo temario oficial para los siguientes procesos selectivos. Obsérvese que las fechas naturales para los procesos selectivos son los meses estivales, con lo que el temario fue publicado unos siete meses antes de la fecha esperada para las pruebas, tiempo objetivamente escaso para poder preparar con garantías los 74 temas en que consistía el nuevo temario de matemáticas. Por otra parte, la orden EDU/3530/2011, de 19 de diciembre, todavía corregía errores y omisiones un mes después.

Tras las vacaciones de Navidad se produjeron nuevos cambios. La Orden ECD/191/2012, de 6 de febrero, derogaba el nuevo temario, cuya vigencia fue de tres meses, para retomar el temario existente anteriormente. Todo esto a unos cuatro meses de la fecha esperada para los procesos selectivos. Este cambio, por sus implicaciones y el momento en que se dio, supuso un gran revuelo entre los opositores por la inversión de tiempo y dinero realizada en balde durante tres meses y a tan poco tiempo del examen.

Con el Decreto 7/2012, de 23 de febrero, se aprobaba la oferta de empleo público para los Cuerpos Docentes, confirmándose que tan sólo saldrían 12 plazas para matemáticas.

Finalmente, la convocatoria de los procedimientos selectivos para el ingreso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria se publicó en la Orden ECD/39/2012, de 9 de mayo.

A estas alturas de año, eran pocas las Comunidades Autónomas que habían publicado convocatoria de procesos selectivos pues, entre otras cuestiones, se presionaba desde el Gobierno Central para congelar las oposiciones este año debido a la crisis. El problema de que sean pocas las Comunidades Autónomas que convocan es que aquellos opositores cuya Comunidad Autónoma no convoca se desplazan a otras Comunidades donde sí que tienen opción de presentarse, con lo que el número de presentados en las Comunidades convocantes aumenta significativamente y, en el caso particular de las Comunidades Autónomas pequeñas, como Cantabria, multiplica el número de presentados. Es lo que comúnmente se llama *efecto llamada*.

Las Comunidades Autónomas que sí que abrieron proceso de oposiciones fueron:

- Andalucía: (BOJA) Orden de 13 de febrero de 2012. Sin duda, ésta era la convocatoria más importante del país pues ofertaba 300 plazas de matemáticas. La polémica rodeó esta convocatoria desde el principio pues no se atenía a la tasa de reposición exigida, limitada a un máximo del 10%, porcentaje que la oferta andaluza superaba con creces. Finalmente, el Gobierno recurrió el 20 de abril la convocatoria andaluza de oposiciones ante el Tribunal Constitucional, dejando en el aire la celebración de las mismas. A día de hoy, aún no se han llevado a cabo los procedimientos selectivos.

- Madrid: (BOCM) Resolución de 10 de mayo de 2012. La convocatoria de Madrid suponía 190 plazas, de las que ninguna era de matemáticas.
- País Vasco: (BOPV) Resolución de 10 de febrero de 2012. El País Vasco ofertaba un total de 531 plazas, de las que 34 eran de matemáticas.

Ninguna otra Comunidad Autónoma convocó para este año. Conviene observar el siguiente detalle: suspendida la convocatoria andaluza, Cantabria se convertía en la única Comunidad Autónoma sin lengua propia que convocaba plazas de matemáticas, con lo que pasaba a ser el único destino posible para obtener una plaza en esta especialidad a nivel estatal, salvo que el opositor interesado hablase euskera.

El *efecto llamada* parecía inevitable, aunque se esgrimía un argumento en sentido contrario con la publicación en la convocatoria cántabra de que las pruebas no tendrían lugar antes del 1 de septiembre, dos meses más tarde de lo que viene siendo habitual.

Durante el verano se fue publicando más información. En la Resolución de 11 de julio de 2012 se hacían públicas las listas provisionales de admitidos y excluidos a los procedimientos selectivos; y en la Resolución de 22 de agosto de 2012, las listas definitivas. Fueron admitidos 702 opositores.

La composición definitiva de los tribunales, que fueron finalmente dos, se hizo pública con la Resolución de 26 de septiembre de 2012.

## Desarrollo de la convocatoria de 2012

Hasta la Resolución de 26 de septiembre de 2012 no se supo cuándo tendrían lugar los actos de presentación, que son los que dan comienzo a las pruebas. En tal Resolución se informó a los opositores de que dichos actos de presentación se celebrarían el 5 de octubre, a las 16:00 horas, en el Conservatorio Jesús de Monasterio, en Santander. La asistencia al acto de presentación es personal y obligatoria, no pudiendo otorgarse ninguna clase de poder a otra persona para que vaya en lugar del opositor. Todo aquél que no se presenta a tal acto queda excluido del proceso. En este acto se informa a los opositores de los materiales que pueden llevar al examen, las fechas y horas de cada prueba y se hacen públicos los criterios de corrección y valoración. Asimismo, se responde a cuantas preguntas tengan los opositores sobre las distintas pruebas.

En el acto de presentación se hizo el llamamiento público para opositores a partir de la letra O. Tuvo lugar cierto revuelo en tal acto por varios motivos. En primer lugar, la acústica no era la mejor y los miembros de los tribunales no dispusieron de medios externos de megafonía para hacerse oír bien, con lo que, teniendo en cuenta la cantidad de gente presente, eran muy pocos los que alcanzaban a oír los nombres que se iban sucediendo en el llamamiento. Quizá esto no hubiera tenido mayor importancia de no ser por el motivo siguiente. En lugar de proceder a llamar a todos los opositores por orden alfabético a partir de la O, los tribunales repartieron los nombres en dos listas, una para cada tribunal, y durante el llamamiento alternaron nombres de una y otra lista (la segunda lista encabezada por apellidos de inicial C). Los nervios brotaron, sobre todo, por este último hecho, pues muchos de los allí presentes no pudieron escuchar o no entendieron cómo iba a producirse el llamamiento. Los opositores temían ser llamados sin ellos saberlo, con la consiguiente pérdida de derechos a examen.

Pero los que podríamos catalogar como incidentes, no acabaron ahí. Dado el número de opositores presentados, el aforo del salón de actos del Conservatorio Jesús de Monasterio se quedó pequeño y tuvieron que habilitar un aula para acoger a las personas que se quedaron fuera, habiendo que repetir para ellos el acto de presentación.

Aspecto del salón de actos del Conservatorio Jesús de Monasterio, completamente abarrotado de opositores, algunos incluso de pie o sentados en las escaleras.

También se hacía pública en la Resolución de 26 de septiembre de 2012 la fecha de la primera prueba, convocándose a los opositores para la misma en el IES José María de Pereda el día 9 de octubre a las 15:30 horas.

Ese día tuvieron lugar las dos partes de la primera prueba. En primer lugar, la parte A; y, a continuación, la parte B. Para la resolución de los cinco problemas que constituían la parte A no se dejó el uso de calculadoras. La parte B consistió en desarrollar por escrito uno de los siguientes cuatro temas que salieron por sorteo: 33 – Evolución histórica del cálculo diferencial; 5 – Números racionales; 30 – Primitiva de una función. Cálculo de algunas primitivas. Aplicaciones de la integral al cálculo de magnitudes geométricas; 7 – Aproximación de números. Errores. Notación científica.

Para la corrección y valoración, tanto de la parte A como de la parte B, se siguen algunos criterios comunes y otros diferentes. Así, en ambos casos, se valora el orden, la limpieza y la claridad de la presentación junto con la corrección ortográfica. En relación a la notación matemática, en el caso de la parte A se prima el rigor y en la parte B, su adecuación. Hacer referencia a la teoría aplicada en cada caso (teoremas, propiedades, etc.) y un desarrollo y resultados correctos son aspectos imprescindibles para una buena calificación en la parte A. En la parte B se pide coherencia en el desarrollo del tema, valorando la realización de un esquema acerca del mismo.

A la primera prueba se personaron 440 opositores. Para hacerse una composición de lugar, y comparar cifras, en la actual lista de sustituciones de matemáticas, donde figuran todos los presentados en la convocatoria de 2010, constan 256 nombres.

Los nombres de aquellos opositores que resultasen aptos en esta primera prueba de carácter eliminatorio se harían públicos no antes del 15 de noviembre.

El 15 de noviembre se publicó una nota informativa en la que se comunicó en qué situación estaba el proceso de corrección de exámenes y se avanzaba cuándo sería la siguiente nota informativa, la semana del 26 al 30 de noviembre.

El 26 de noviembre se publicó la segunda nota informativa, donde se hizo público que el proceso de apertura de plicas tendría lugar el día 29 de noviembre a las 10:00 horas en el Conservatorio Jesús de Monasterio. Asimismo, se informó de que al día siguiente, 30 de noviembre, a las 14:00 horas, se harían públicas las listas de aquellos aspirantes que superasen la primera prueba.

Finalmente, fueron declarados aptos de la primera prueba 21 aspirantes del tribunal 1, y 19 del tribunal 2, es decir, un total de 40 personas, lo que supone un 9% de los opositores presentados. Estos 40 aspirantes fueron llamados a entregar su programación el día 3 de diciembre en el Conservatorio Jesús de Monasterio en horario de 10 a 14 horas y serían convocados para realizar la segunda prueba entre los días 10 y 17 de diciembre, según su apellido.

A raíz de este último proceso selectivo se incorporarán al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria 12 profesores de matemáticas a los que enviamos desde aquí nuestra felicitación, aun cuando al cierre de este Boletín aún desconozcamos sus nombres.

Tampoco nos olvidamos de aquellas personas que tras las pruebas se quedaron sin plaza o suspendieron. Entre ellos hay muchos profesionales con una extraordinaria dedicación y un gran espíritu innovador, que son merecedores de nuestro más sincero reconocimiento. A éstos queremos hacerles llegar nuestro apoyo, esperando que dentro de dos años, cuando esperamos se produzca una nueva convocatoria de este tipo de plazas, alcancen lo que en esta ocasión se les ha escapado. Para los que crean en la diosa fortuna, ¡mucha suerte! Para los que sólo crean en el esfuerzo de uno mismo, ¡mucho ánimo!

## Los problemas de la convocatoria de 2012

A continuación se hace una transcripción de memoria de los problemas planteados, esperando que sean el más fiel reflejo de los enunciados oficiales. Durante la prueba no se permitía sacar borrador alguno y la hoja de los enunciados debía ser entregada. Asimismo, nos hemos atrevido a resolver los problemas, dejando claro que en ningún caso las soluciones dadas se corresponden con las soluciones oficiales, que desconocemos.

Como podrá comprobarse, el número de problemas que constituía esta primera prueba era cinco y algunos de ellos constaban de dos apartados; en ese caso, los dos puntos con los que se calificaba cada ejercicio estaban repartidos equitativamente entre los apartados.

**Procedimiento selectivo de ingreso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria**

**Matemáticas**

**Primera Prueba - Parte A**

**1) a)** Demostrar que el polinomio $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1$ es un cuadrado perfecto.

**b)** Demostrar que $\lambda = \dfrac{\log 3}{\log 2}$ es un número irracional.

**2)** Dado el endomorfismo $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, estudiar si T es diagonalizable y, si lo es, dar la base en la que T diagonaliza.

**3) a)** Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - E(x)}{2^{E(x)}}\,dx$, donde E(x) es la parte entera de x.

**b)** Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx$, con f función continua.

**4)** Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribuciones uniformes en (0,1) y (5,9), respectivamente. Sea un rectángulo con lados de longitud X e Y. Determinar el valor esperado y la varianza del área del rectángulo.

**5)** Una cicloide es la trayectoria $\mathscr{C}$ descrita por un punto M fijo sobre el borde de un disco D de radio $a > 0$ que rueda sin deslizamiento a lo largo de una recta L. Demostrar que la curva cicloide no es algebraica.

**1) a)**

Si el polinomio P(x) es un cuadrado perfecto, deberá cumplirse que:

$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1 = (x^2+ax+b)^2 \quad (*)$

(Puesto que el polinomio dado es mónico es posible suponer que, si factoriza, puede hacerlo en polinomios mónicos).

Desarrollando el primer miembro de (*) y agrupando términos:

$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1$

Desarrollando el segundo miembro de (*) y agrupando términos:

$(x^2+ax+b)^2 = x^4+2ax^3+(2b+a^2)x^2+2abx+b^2$

Es decir:

$x^4+6x^3+11x^2+6x+1 = x^4+2ax^3+(2b+a^2)x^2+2abx+b^2$

Igualando los coeficientes de términos de igual grado en los dos polinomios de la expresión anterior:

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ 2b + a^2 = 11 \\ 2ab = 6 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

De la primera igualdad se obtiene a=3 y, llevando este valor a la tercera igualdad, se obtiene b=1.

Puesto que para esos valores se satisface el resto de igualdades, queda probado que el polinomio $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1$ es un cuadrado perfecto: $\mathbf{P(x) = (x^2+3x+1)^2}$

**1) b)**

Realizamos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\lambda = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3$ es un número racional, es decir, que $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}^*$ ( ya que $\log_2 3 > 0$ ).

$$\log_2 3 = \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad q \cdot \log_2 3 = p \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 3^q = p \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 3^q = \log_2 2^p \quad \Leftrightarrow \quad 3^q = 2^p \quad \Leftrightarrow \quad p = q = 0$$

Llegamos a una contradicción, pues hemos supuesto que $p \neq 0$ y $q \neq 0$. Queda demostrado, pues, que $\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\mathbf{log\ 3}}{\mathbf{log\ 2}} = \log_2 3$ **es un número irracional**.

**2)**

T es diagonalizable si para alguna base de $\mathbb{R}^4$, la matriz asociada a T respecto de esa base es diagonal. Por tanto, dada la matriz A, que representa a T respecto de la base canónica, T es diagonalizable si existe una matriz P inversible y con coeficientes reales tal que $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal. Entonces P se dice la matriz de paso y D la forma diagonal de A. La matriz D está determinada salvo reordenación de los elementos de su diagonal, que son precisamente los autovalores de A.

Para que T sea diagonalizable es necesario y suficiente que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1) Que A tenga todos sus autovalores en $\mathbb{R}$.
2) Y que para cada autovalor $\lambda$ de A, la dimensión del subespacio propio $V(\lambda)$ coincida con la multiplicidad de $\lambda$.

Por tanto, los pasos a seguir son el cálculo de los autovalores asociados a A (y, por tanto, su multiplicidad) y la determinación de los subespacios de valores propios (y, en consecuencia, su dimensión). Pero, en este caso, la forma un tanto peculiar de la matriz A nos permite modificar ligeramente el habitual esquema de actuación.

Si representamos por $B_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, la matriz A nos dice que:

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ T(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 - e_4 \\ T(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \\ T(e_4) = e_1 - e_2 - e_3 + e_4 \end{cases}$$

De la primera y la segunda igualdad se deduce que $T(e_1 + e_2) = 2 \cdot (e_1 + e_2)$

De la primera y la tercera igualdad se observa que $T(e_1 + e_3) = 2 \cdot (e_1 + e_3)$

De la primera y la cuarta igualdad de obtiene que $T(e_1 + e_4) = 2 \cdot (e_1 + e_4)$

♦ De las igualdades anteriores se puede afirmar que 2 es un valor propio de A con, al menos, multiplicidad 3, y con un subespacio propio asociado de dimensión 3, al menos.

Llamando $v_1 = e_1,\ v_2 = e_1 + e_2,\ v_3 = e_1 + e_3$ y $v_4 = e_1 + e_4$, B a la base formada por los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ y $v_4$ (es inmediato probar que esos vectores son linealmente independientes) y M a la matriz asociada a T respecto de B, se tiene que: $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se deja para el lector comprobar que $T(v_1) = -2 \cdot v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, expresión que arroja la primera columna de M.

♦♦Puesto que A y M son matrices asociadas a un mismo endomorfismo, tienen los mismos valores propios. Teniendo en cuenta M, podemos deducir que –2 es otro valor propio asociado y que tiene multiplicidad 1. En consecuencia, el subespacio propio asociado a –2 tiene dimensión 1.

De ♦ y ♦♦ es posible afirmar que **T es diagonalizable.** Para completar la base respecto de la cual T diagonaliza, tenemos que determinar un vector $v_1{}^*$ de coordenadas (x, y, z, t) respecto de la base B tal que:

$$(M+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+4y=0 \\ x+4z=0 \\ x+4t=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z, t) = a\cdot(-4, 1, 1, 1), \quad a \in \mathbb{R}$$

Si tomamos como $v_1{}^*$ el vector que respecto de B tiene coordenadas $(-4, 1, 1, 1)$, $v_1{}^*$ respecto de la base canónica $B_c$ tiene coordenadas $(-1, 1, 1, 1)$.

De todo ello, se deduce que respecto de la base $B^* = \{-e_1+e_2+e_3+e_4,\quad e_1+e_2,\quad e_1+e_3,\quad e_1+e_4\}$, la matriz asociada a T es:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

**3) a)**

Siendo n un número entero, $\forall\, x \in [n, n+1),\ E(x) = n$, de aquí:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-E(x)}{2^{E(x)}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{x-0}{2^0}dx + \int_1^2 \frac{x-1}{2^1}dx + \int_2^3 \frac{x-2}{2^2}dx + \ldots + \int_n^{n+1} \frac{x-n}{2^n}dx\right)$$

Se tiene que:

$$\int_k^{k+1} \frac{x-k}{2^k}dx = \frac{1}{2^k}\int_k^{k+1}(x-k)\,dx = \frac{1}{2^k}\left[\frac{x^2}{2}-kx\right]_k^{k+1} = \frac{1}{2^k}\left[\frac{(k+1)^2}{2}-k(k+1)-\left(\frac{k^2}{2}-k^2\right)\right] = \frac{1}{2^{k+1}}$$

Por tanto: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-E(x)}{2^{E(x)}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

La expresión de dentro de los paréntesis es la suma de los n+1 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $a_1 = \frac{1}{2}$ y razón $r = \frac{1}{2}$. Utilizando la fórmula general para la suma, se obtiene que: $S_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}\cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2^{n+1}}$

Así: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{x-E(x)}}{\mathbf{2^{E(x)}}}\,\mathbf{dx} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \mathbf{1}$, pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = 0$

**3) b)**

Sea $I=\int_0^{\pi} x\cdot f(\operatorname{sen}x)\,dx$ y realicemos el cambio de variable: $u=\pi-x\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} du=-dx \\ \begin{cases} x=0\Rightarrow u=\pi-0=\pi \\ x=\pi\Rightarrow u=\pi-\pi=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\int_{\pi}^{0}(\pi-u)\cdot f\big(\operatorname{sen}(\pi-u)\big)(-du)=-\int_{\pi}^{0}(\pi-u)\cdot f\big(\operatorname{sen}(\pi-u)\big)du=\int_{0}^{\pi}(\pi-u)\cdot f\big(\operatorname{sen}(\pi-u)\big)du$$

De trigonometría, se sabe que: $\operatorname{sen}(\pi-u)=\operatorname{sen}u$ .

Así, se tiene que: $I=\int_0^{\pi}(\pi-u)\cdot f(\operatorname{sen}u)\,du=\int_0^{\pi}\pi\cdot f(\operatorname{sen}u)\,du-\int_0^{\pi}u\cdot f(\operatorname{sen}u)\,du$

Pero la segunda integral de la expresión anterior es idéntica a I. Así, pues:

$$2\cdot I=\int_0^{\pi}\pi\cdot f(\operatorname{sen}u)du\ \Rightarrow\ I=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}f(\operatorname{sen}u)du$$

O lo que es lo mismo:

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}f(\operatorname{sen}x)\,dx$$

Con lo cual, queda demostrado que:

$$\boldsymbol{\int_0^{\pi}x\cdot f(\operatorname{sen}x)\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}f(\operatorname{sen}x)\,dx}$$

**4)**

Dada una variable aleatoria con distribución uniforme continua $U(a,b)$, se tiene que su función de densidad viene dada por la expresión: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\le x\le b\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

*Además, la esperanza es :* $E(x)=\mu=\dfrac{a+b}{2}$ *y la varianza es:* $Var(x)=\sigma^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

La función de densidad para la variable continua X con distribución uniforme U(0,1) es: $f_X(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

Y la función de densidad para la variable continua Y con distribución uniforme U(5,9) es: $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{si } 5\le y\le 9\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

Definimos la variable “área del rectángulo” $A=XY$ .

Como las variables X e Y son independientes, la variable de densidad conjunta, $f_A=f_{XY}$ ,satisface:

$$f_A(x,y)=f_{XY}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{si } 0\le x\le 1 \text{ y } 5\le y\le 9\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por definición de esperanza matemática:

$$E(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A\cdot f_A(x,y)\,dx\,dy=\int_5^9\int_0^1 \frac{1}{4}xy\,dx\,dy=\frac{1}{4}\int_5^9\left(\int_0^1 xy\,dx\right)dy=\frac{1}{4}\int_5^9\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy=\frac{1}{4}\int_5^9\frac{y}{2}dy=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{y^2}{2}\right]_5^9=\frac{1}{16}(81-25)=\frac{56}{16}=\frac{7}{2}\quad\Rightarrow \mathbf{E(A)=\frac{7}{2}}\,u^2$$

*Nota:*
*Este resultado se podría haber obtenido de manera más inmediata sabiendo que la esperanza del producto de dos variables independientes es el producto de sus esperanzas respectivas:*

$$E(A)=E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{1+0}{2}\cdot\frac{9+5}{2}=\frac{7}{2}$$

Por otro lado, por definición de varianza, se tiene que:

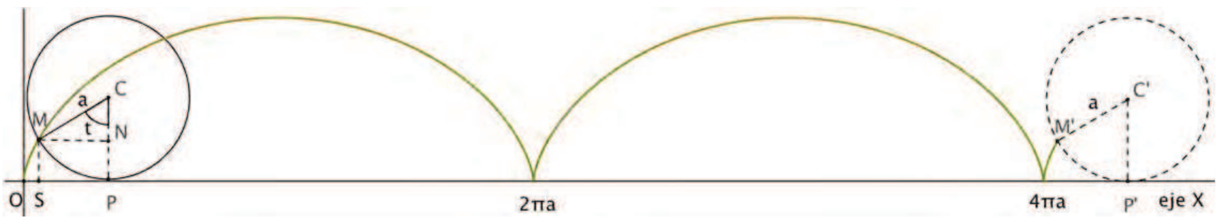
$$\mathrm{Var}(A)=\left[E(A^2)\right]-\left[E(A)\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A^2 f_A(x,y)\,dx\,dy-\left[E(A)\right]^2=\frac{1}{4}\int_5^9\int_0^1 x^2y^2\,dx\,dy-\left(\frac{7}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\int_5^9\left(\int_0^1 x^2y^2dx\right)dy-\frac{49}{4}=\frac{1}{4}\int_5^9\left[y^2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy-\frac{49}{4}=\frac{1}{12}\int_5^9 y^2dy-\frac{49}{4}=\frac{1}{12}\left[\frac{y^3}{3}\right]_5^9-\frac{49}{4}=$$

$$=\frac{1}{36}\cdot(729-125)-\frac{49}{4}=\frac{163}{36}\quad\Rightarrow \mathbf{V(A)=\frac{163}{36}}\,u^4$$

**5)**

Hallemos, en primer lugar, una expresión paramétrica de la cicloide en coordenadas cartesianas. Supongamos que la posición inicial del punto M es el origen O. Examinemos la posición (x, y) del punto M cuando el centro del disco se encuentra en el punto C. Sean P y S, respectivamente, las proyecciones de C y M sobre el eje X. Sea t el ángulo comprendido entre los radios CP y CM.




Se verifican las relaciones:

$$\begin{cases} x=x(t)=OS=OP-SP=\text{arco}MP-SP=a\cdot t-a\cdot \operatorname{sen}t=a\cdot(t-\operatorname{sen}t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, \quad t\in\mathbb{R} \\ y=y(t)=SM=PN=a-a\cdot\cos t=a\cdot(1-\cos t)\end{cases}$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas de la cicloide $\mathcal{C}$ son:

$$\begin{cases} x=x(t)=a\cdot(t-\operatorname{sen}t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, \quad t\in\mathbb{R} \\ y=y(t)=a\cdot(1-\cos t)\end{cases}$$

Demostremos ahora que la curva $\mathcal{C}$ no es algebraica. Supongamos que existe un polinomio no constante $f\in\mathbb{R}[X,Y]$ tal que $\mathcal{C}=V(f)$.

Sabemos que para cada $k\in\mathbb{Z}$, el punto $(2k\pi a,0)$ pertenece a $\mathcal{C}$, por tanto: $f(2k\pi a,0)=0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Entonces, el polinomio $\tilde{f}(X)=f(X,0)\in\mathbb{R}[X]$ posee infinitas raíces, luego es el polinomio nulo. Esto implica que Y es un divisor de $f$. Geométricamente esto significa que el eje X está contenido en la cicloide, lo que es falso. Por tanto, se concluye que la **curva cicloide no es algebraica**.