ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA RECTA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICO DE LO DIDÁCTICO.

Daniela Bonilla Barraza. Jocelyn Díaz Pallauta
danielabonillab@gmail.com - jocelyndiazpallauta16@gmail.com
Universidad de la Serena. Chile

Tema: Pensamiento Geométrico.
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras claves: Ecuación vectorial de una recta, Organización matemática.

Resumen
La presente investigación surge en el programa "perfeccionamiento en matemática para profesores de enseñanza media" realizado en el IUFM le Mirail, Universidad de Toulouse, Francia. El estudio consiste en el diseño de una propuesta didáctica para el aprendizaje de la ecuación vectorial de una recta en el espacio, en estudiantes de 16 a 18 años, el interés nace por la incorporación reciente de estos temas en el curriculum nacional. Para el diseño de la propuesta se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2001), donde se entenderá como organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas o procedimientos para resolver estas tareas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea. Entre los elementos que aportan en el surgimiento de la organización matemática, se distinguen, tipos de tareas como, establecer si puntos del plano o el espacio son colineales y determinar las condiciones para que un tercer punto sea colineal a dos puntos dados, en el plano o en el espacio.

Introducción

En los últimos años, el curriculum nacional en matemática ha incorporado elementos de la geometría vectorial, es por ello, que el programa "Perfeccionamiento en Matemática para Profesores de Enseñanza Media" realizado en el IUFM le Mirail, Universidad de Toulouse, Francia, patrocinado por el gobierno de chile, pretende actualizar a los docentes chilenos en los conocimientos de geometría, y también proveer de herramientas didácticas que permitan mejorar los procesos de enseñanza –aprendizaje de la matemática.

En este escenario, se realiza un diseño de una propuesta didáctica para el aprendizaje de la ecuación vectorial de una recta en el espacio, en estudiantes entre 16 y 18 años. Utilizando como referente teórico, elementos de la teoría antropológico de lo didáctico, donde indagaremos en las técnicas que priorizan los estudiantes cuando se enfrentan a distintos tipos de tareas con el propósito de ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto ecuación vectorial de una recta en el espacio.

Marco teórico: Teoría antropológica de lo didáctico

La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) sitúa a la actividad matemática, y en consecuencia a la didáctica de la matemática, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales.

La TAD admite que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra de praxeología, unión de los términos griegos logos y praxis – donde toda práctica o "saber hacer" está siempre acompañada de un discurso o "saber", es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Se entenderá como praxeología u organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas, de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea.

Cada tipo de tarea (T) tiene asociada una "manera de hacer", es decir, una técnica (ô), cada técnica, necesita de una justificación matemática, la cual se entiende por tecnología(θ), esta indica generalmente un discurso racional, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica, para asegurarse de que permite realizar un tipo de tareas.

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación, el de la teoría (Θ).

En resumen, Una praxeología -u organización praxeológica- está pues constituida por un bloque práctico técnico, [T/ô], y por un bloque tecnológico-teórico, [θ/ Θ].

La TAD no solo se encarga de estudiar la construcción de un objeto matemático, sino también indaga en las formas de enseñanza, para ello, cuenta con una organización didáctica, entendida como "*El conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta" (Chevallard, 1999, p.242).*

La organización didáctica distingue momentos didácticos. En esta comunicación destacamos algunos de ellos, un primer momento del estudio, es el encuentro inicial con la organización matemática que está en juego. Se espera que el estudiante solo o en equipo, descubra el objeto matemático, como aquello que permite fabricar respuesta a una situación determinada. El segundo y tercer momentos están relacionados con la exploración del tipo de tareas T , de la elaboración de una técnica relativa a este tipo de tareas y la constitución del entorno tecnológico-teórico[θ/Θ] relativo a una técnica, el cuarto momento es el del trabajo de la técnica, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz , el quinto momento es el de la institucionalización, que tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada.

Sobre la propuesta didáctica

Se describe una organización matemática que consiste en determinar la ecuación vectorial de una recta en el espacio, para ello, se plantea en un inicio el tratamiento de la ecuación de la recta en el plano. En esta etapa se distingue tipos de tareas(T) como: Determinar si tres puntos del plano son colineales (T_1), Determinar las condiciones de las coordenadas de un punto M(x,y) para que este alineado con dos puntos distintos Q y R en el plano(T_2). Para $T_1\ y\ T_2$ el estudiante puede recurrir a técnicas analíticas, como, determinar la ecuación de la recta, calcular pendientes, o bien utilizar vectores proporcionales.

Para una recta en el espacio se plantea tipos de tareas análogas a las dadas en el plano, como: Determinar si los puntos P, Q y R son colineales en el espacio (T_3), Determinar las condiciones de las coordenadas de un punto M para que este alineado con dos puntos distintos Q y R en el espacio (T_4).

Metodología y resultados

Para los propósitos de investigación, utilizaremos como estrategia metodológica, estudio de casos, en la medida que "son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo", (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). Destacamos la importancia de esta metodología, puesto que, nos proporciona de antecedentes empíricos fundamentales en la toma de decisiones para mejorar nuestra propuesta.

Las unidades de análisis están conformado por 24 estudiantes de cuarto año de enseñanza Media de un establecimiento educacional chileno.

A continuación se presentan algunas de las actividades de la propuesta didáctica con sus respectivos ejemplos, enfatizando los aspectos teóricos que priorizan los estudiantes al momento de responder. Es importante aclarar que en sesiones anteriores los educandos han identificado vectores proporcionales en el plano.

Actividad 1: *Ana intentó ubicar en su cuaderno los siguientes puntos* $P\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$*; Q (3, 6); R (-102, -204) para verificar si estaban alineados, sin embargo, por las coordenadas dadas no los consiguió ubicar con exactitud. Consulta a su compañera Claudia, quien afirma que los puntos están alineados. Ana no está convencida de esta afirmación*

¿Cómo harías tú para convencer a Ana? Desarrolla el procedimiento que justifique tu respuesta.

Actividad 2: *¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un punto M de coordenadas (x, y) para pertenecer a la recta que pasa por los puntos Q(3, 6);R (-102, -204). Justifica tu respuesta.*

La actividad 1, obedece al tipo de tarea(T_1), determinar si tres puntos distintos del plano son colineales, Se espera que los estudiantes en el encuentro inicial con la situación (actividad 1) puedan reconocer el concepto de puntos alineados, como aquellos puntos que pertenecen a una misma recta, para luego en un segundo momento elaborar técnicas que permitan responder a la tarea, las cuales, puede ser de tipo analíticas o vectoriales, puesto que la posición de los puntos P, Q y R dificulta la posibilidad de acudir a la representación gráfica.

Con esta actividades (1 y 2), se pretende que surja la caracterización de una recta como la proporcionalidad de dos vectores con un punto en común, lo que deriva en la institucionalización de la ecuación vectorial de una recta en el plano. En caso de que el estudiante se aferre a la herramienta analítica para responder a la situación, se puede proponer al aprendiz que busque otras estrategias de resolución.

Análisis de las respuestas

Las actividades propuestas fueron desarrolladas en parejas de estudiantes, para la actividad 1 la mayoría de los grupos (7 de 12) utilizan técnicas analíticas como: determinar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por dos puntos (ver figura 1) y luego verificar si el tercer punto pertenece a ella. O bien determinar las ecuaciones de las rectas PQ y QR, verificando que son iguales. 3 de 12 grupos emplean vectores proporcionales, es decir, comprueba si los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ son proporcionales (ver figura 2). Los demás grupos tratan de utilizar la representación grafica sin éxito.

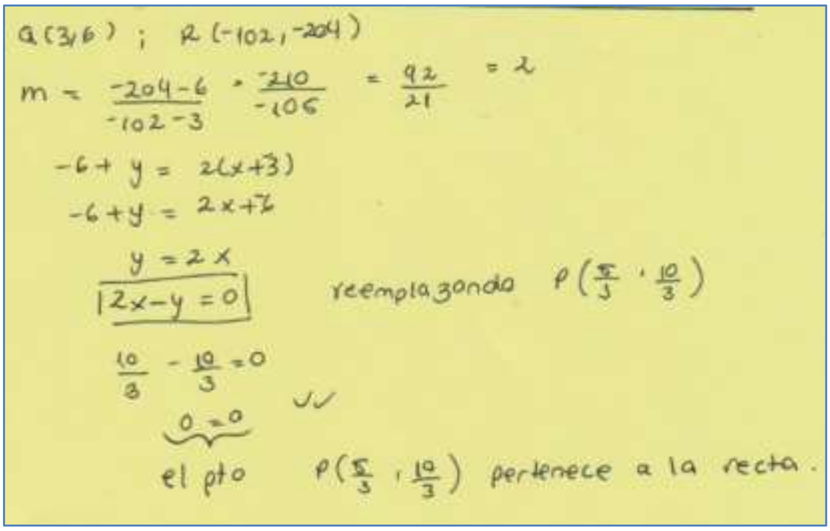


Figura 1: respuesta de grupo 3

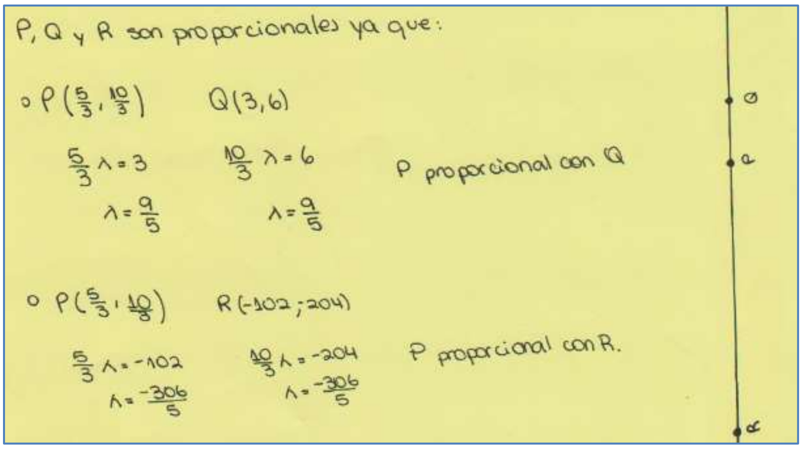
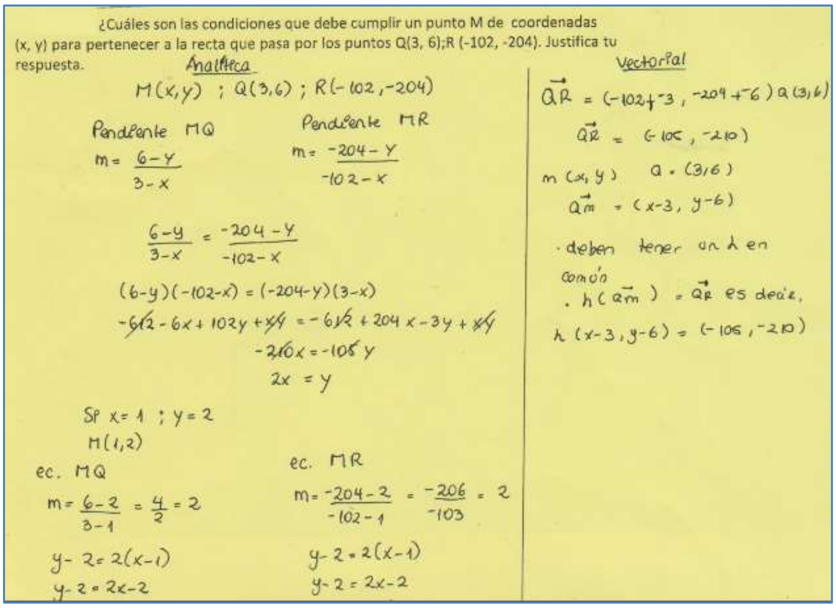


Figura 2: respuesta de grupo 1

En base a las respuestas dadas en la actividad 1, el docente sugiere a los estudiantes que para responder a la actividad 2, busquen distintas estrategias. De los grupos en estudio 5 de 12 proponen solo técnicas analíticas, otros 5 grupos construyen técnicas vectoriales y analíticas (ver figura 3).


¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un punto M de coordenadas (x, y) para pertenecer a la recta que pasa por los puntos Q(3, 6);R (-102, -204). Justifica tu respuesta.

Analítica

$M(x,y)$; $Q(3,6)$; $R(-102,-204)$

Pendiente MQ

$m = \frac{6-y}{3-x}$

Pendiente MR

$m = \frac{-204-y}{-102-x}$

$\frac{6-y}{3-x} = \frac{-204-y}{-102-x}$

$(6-y)(-102-x) = (-204-y)(3-x)$

$-\cancel{612} - 6x + 102y + \cancel{xy} = -\cancel{612} + 204x - 3y + \cancel{xy}$

$-210x = -105y$

$2x = y$

Si $x=1$; $y=2$

$M(1,2)$

ec. MQ

$m = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

$y-2 = 2(x-1)$

$y-2 = 2x-2$

ec. MR

$m = \frac{-204-2}{-102-1} = \frac{-206}{-103} = 2$

$y-2 = 2(x-1)$

$y-2 = 2x-2$

Vectorial

$\vec{QR} = (-102+^-3, -204+^-6)$ $Q(3,6)$

$\vec{QR} = (-105, -210)$

$m(x,y)$ $Q \cdot (3,6)$

$\vec{Qm} = (x-3, y-6)$

· deben tener un λ en común

· $\lambda(\vec{Qm}) = \vec{QR}$ es decir,

$\lambda(x-3, y-6) = (-105, -210)$

Figura 3: respuesta del grupo 4

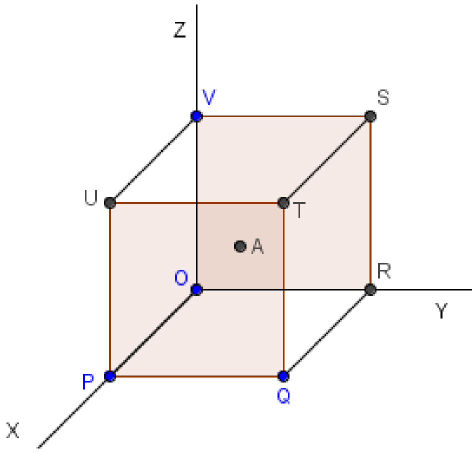
Enfocamos nuestra atención en las estrategias relacionadas con vectores proporcionales, en ellas evidenciamos la presencia de elementos tecnológicos (ver figura 3) , cuando los aprendices escriben “ $\delta\,\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QR}$ ”, el razonamiento que puede justificar esta técnica seria que, dos vectores proporcionales que tienen un punto en común, están contenidos en una misma recta. Otro elemento tecnológico que surge de la resolución de la tarea, es una ecuación vectorial para la recta, aunque no se encuentre en la forma usual, el estudiante podría estar pensando que todos los puntos que satisfacen la ecuación $\delta(x-3, y-6) = (-105, -210)$ pertenecen a la recta. En ese momento el rol del docente es fundamental, puesto que es el encargado de realizar la institucionalización de la ecuación de la recta como un objeto matemático.

Es importante destacar, que en el paso del plano al espacio, se plantea la utilización de situaciones concretas en el momento de exploración para los objetos punto y vector en el espacio. También se propone la utilización de un software (autograph u otro) que favorezca la visualización de puntos en el espacio. Lo que posteriormente deriva en la institucionalización de punto y vector en el espacio.

Para la recta en el espacio, se formula la siguiente situación que corresponde a tipos de tarea T_3 y T_4 , T_3: determinar si los puntos P, Q y R son colineales en el espacio, y

T_4: encontrar las condiciones de un punto M (x,y,z) para que sea colineal a dos puntos distintos en el espacio .

Actividad: *Sea OPQRSTUV un cubo de arista 2 unidades.*



a) El punto A corresponde al punto medio del segmento VQ, O es el origen del sistema tridimensional. Determina si los puntos P, A y S son colineales.

b) Determina las condiciones para que un punto M de coordenadas (x, y, z) sea colineal con los puntos P, A.

Análisis de las respuestas

En la actividad planteada, del total de los grupos en estudio (12), 8 de ellos resuelven la tarea T_3, considerando la herramienta vectorial, como una técnica valida, puesto que, la técnica analítica utilizada en el plano, no tiene alcance en el espacio.

Para T_4, los 8 grupos elaboran una técnica donde se evidencia presencia de elementos tecnológicos como "$\overrightarrow{PM} = \delta\overrightarrow{PA}$". 5 de ellos logran llegar a una fase de institucionalización (ver figura 4).

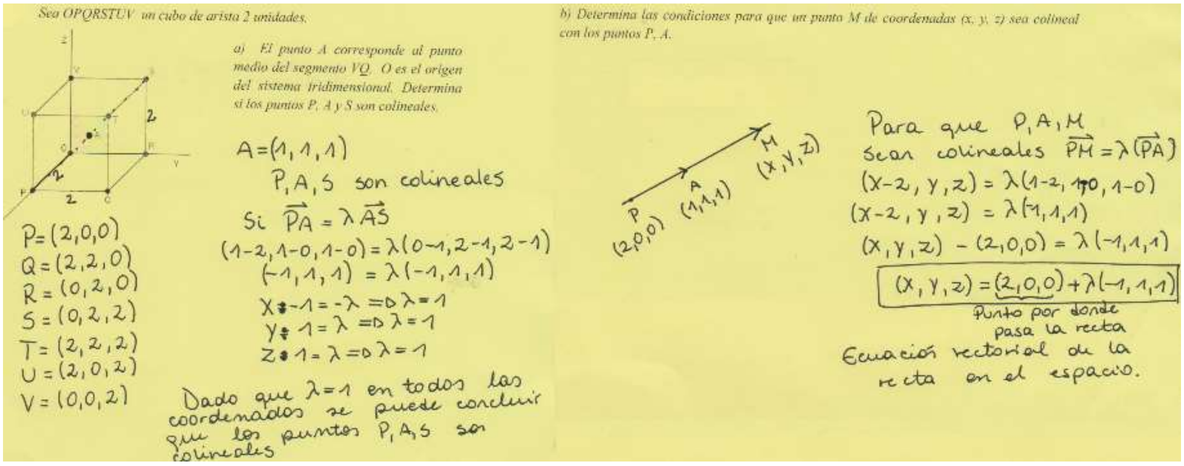


Figura 4 : respuestas del grupo 8

Conclusiones

A partir de las evidencias empíricas con sustento teórico obtenidas en la investigación, damos a conocer las siguientes sugerencias didácticas para el aprendizaje de la ecuación vectorial de una recta en el espacio.

Se sugiere la aplicación de la propuesta didáctica en estudiantes de 17- 18 años, luego del estudio, o de forma paralela, a una ecuación cartesiana de una recta en el plano. Además es fundamental, que como aprendizaje previo se trabaje con vectores proporcionales, operatoria con vectores y teorema de Chasles.

Se destaca como elemento matemático esencial en el surgimiento de la organización matemática, al concepto de puntos colineales.

Con respecto a la transición del plano al espacio, se propone la utilización de uso de software de geometría dinámica para facilitar la visualización de puntos en el espacio.

Finalmente, Es importante analizar el alcance de las técnicas utilizadas en nuestras prácticas, puesto que de ello depende, en esta teoría la construcción de los objetos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Arnal, J.; Del Rincón, D.; Latorre, A. (1992). “La investigación colaborativa”. En J. Arnal ; D. Del Rincón y A. Latorre: Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología. Barcelona, Labor.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona, Spain: ICE/Horsori.

Programa de Estudio Matemática 4º medio (2001) Ministerio de Educación. Chile.

Chevallard, Y. (1985, 1991): La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée Sauvage : Grenoble. Traducción en español de Claudia Gilman : La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado, Aique : Buenos Aires (1997)

Ivorra Castillo, C. (2010). Geometría, Valencia, España.