# UN ENTORNO FAVORABLE A LA DEMOSTRACIÓN

Susana Moriena
Silvia Bernardis
Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL). Santa Fe. Argentina
silvia.bernardis@gmail.com
Nivel secundario y universitario

**Resumen**

El objetivo de esta comunicación es presentar algunos aspectos que consideramos fundamentales tener en cuenta al diseñar una secuencia de actividades de geometría para alumnos de los últimos años del nivel secundario (15 a 17 años) y para estudiantes del nivel superior.
Las actividades deberán basarse en la exploración e investigación a través de la geometría dinámica. La aparición de este recurso ha producido una revolución en la enseñanza de la geometría y su aplicación exige un cambio en las actividades que resultan interesantes plantear.
Es necesario acostumbrar a nuestros alumnos a justificar sus afirmaciones, para ello priorizamos la "explicación", entendiendo a ésta como una forma de mostrar cómo (por qué) es verdadera una conjetura en términos de otros resultados geométricos ya conocidos, es decir, cómo "esto" es una consecuencia lógica de "estos otros" resultados.
Suponemos que algunos alumnos podrán realizar demostraciones deductivas informales sencillas, pero sobre todo queremos lograr que comprendan la *necesidad de demostrar* y que realicen aquéllas que su destreza matemática y su experiencia escolar les permitan. Así como también aprovechen al máximo las ventajas que ofrece la Geometría Dinámica en este camino.
Nuestro trabajo se enmarca dentro del proyecto de Investigación CAID 2006 (PE/227) ¨La problemática de la demostración en el aprendizaje de la Geometría¨.

**Palabras Claves**: explorar-descubrir-validar-explicar.

## 1. Introducción

El objetivo de esta comunicación es presentar algunos aspectos que consideramos fundamentales tener en cuenta al diseñar una secuencia de actividades de geometría para iniciar a los alumnos en las demostraciones geométricas. El nivel educativo al que está destinado es para estudiantes de los últimos años del nivel secundario (15 a 17 años) y del nivel superior.
Las actividades deberán basarse en la exploración e investigación a través de la geometría dinámica. La aparición de este recurso ha producido una revolución en la enseñanza de la geometría y su aplicación exige un cambio en las actividades que resultan interesantes plantear.
Nuestro trabajo se enmarca dentro del proyecto de Investigación CAID 2006 (PE/227) ¨La problemática de la demostración en el aprendizaje de la Geometría¨.

## 2. Encuadre teórico

Uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios y universitarios es que el alumno aprenda a validar sus conjeturas a través de una demostración. Para alcanzarlo es necesario que el alumno aprenda que no todo lo que se ve es verdadero. En este sentido, Balacheff (2000a) menciona dos obstáculos respecto de las demostraciones geométricas:

- ✓ La evidencia de los hechos que se impone a la razón: los alumnos no experimentan la necesidad de demostrar, ya que las figuras son evidencia de la demostración.
- ✓ La enseñanza en matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Por ejemplo, cuando el problema planteado se presenta de la forma “mostrar que…”, el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que se está por descubrir es una demostración.

El primer obstáculo puede manifestarse más notoriamente cuando se utiliza un software de geometría dinámica en la enseñanza. “Una propiedad geométrica es un invariante perceptual. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrar una propiedad. Hasta cierto punto, la eficiencia del software ha eliminado la necesidad de la demostración.”(Balacheff, 2000b; p. 95)

En relación con el segundo obstáculo, en las actividades a desarrollar en estos entornos, los estudiantes investigan sobre un problema y descubren determinadas propiedades geométricas. “En matemática, transformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de la matemática en sí, como muchas veces se ha afirmado.”(Balacheff, 2000b; p. 96)

Es importante crear en nuestros alumnos la necesidad de ***explicar la verdad*** comprobada en todos los casos con el software, es decir la demostración como una ***explicación*** a través de las propiedades conocidas (De Villiers, 1996). Mediante la exploración experimental es posible despejar las dudas en torno a la verdad del enunciado, sin embargo será necesario explicar por qué se está cumpliendo. “Tradicionalmente, el enfoque crítico de la geometría era tratar de crear dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas, esas estrategias de tratar de generar dudas para crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software de geometría dinámica.” (De Villiers, 1996; p. 2 ).

El argumento: “el resultado se debe probar para que todos los casos estén contemplados, ya que tu dibujo es uno particular”, no funciona cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación constante en estos entornos.

Es necesario acostumbrar a nuestros alumnos a justificar sus afirmaciones, argumentar lo que aseguran es verdadero en base a resultados y propiedades que ya conocen. Esta tarea no es sencilla. Como afirman Balacheff y Dreyfus (2000; p. 130), “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.”

El desafío será diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas. “ Es importante no retardar indebidamente la primera introducción de la demostración como medio de explicación, ya que los alumnos podrían acostumbrarse a ver la geometría sólo como una acumulación de hechos descubiertos empíricamente en la cual la explicación no tiene ningún rol. Usar la demostración como herramienta de descubrimiento en lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como herramienta de verificación en geometría.” (De Villiers, 1996; p. 3).

La demostración tiene muchas otras funciones: de verificación, sistematización, comunicación, de descubrimiento, reto intelectual, etc. Desde esta perspectiva resumimos aquí las funciones de la demostración matemática propuestas por De Villiers (1996):

- **Verificación**: concerniente a la verdad de una afirmación.
- **Explicación**: profundizando por qué es verdad.
- **Sistematización**: organización de resultados dentro de un sistema axiomático.
- **Descubrimiento**: descubrimiento/invención de nuevos resultados.
- **Comunicación**: transmisión del conocimiento matemático.

Para fundamentar las respuestas que esperamos de los estudiantes en estas actividades seguimos las ideas de Balacheff (2000a), quien clasifica las demostraciones de los estudiantes en dos categorías: pragmáticas o experimentales y conceptuales o deductivas. Para las demostraciones pragmáticas introduce una clasificación en varios tipos:

- ***Empirismo naïf*:** el proceso consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos sin ningún criterio. Se caracterizan por la ausencia de validación, es el tipo más elemental de demostración.
- ***Experimento crucial*:** los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, tan poco particular como le es posible, convencidos de que si se cumple allí, se cumplirá siempre.
- ***Ejemplo genérico*:** es el caso de procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Los estudiantes empiezan a usar propiedades abstractas en sus demostraciones, aunque referidas al ejemplo. Si suprimimos el dibujo usado, la demostración que queda pierde información o carece de significado.

Para las demostraciones conceptuales o deductivas, Balacheff distingue los siguientes tipos:

- ***Experimento mental*:** la explicación se centra en la acción interiorizada, separándola de su ejecución sobre un representante particular. Es una demostración deductiva abstracta organizada a partir de manipulaciones de ejemplos concretos. Es posible suprimir los dibujos realizados que acompañan a la demostración, sin que pierda significado. Este tipo de demostración aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación.
- ***Cálculo sobre enunciados*:** Son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Para situarnos en el nivel de razonamiento de los estudiantes en esta etapa, tuvimos en cuenta el proceso de aprendizaje de la demostración desde el análisis de los Niveles de Razonamiento de Van Hiele, en particular los que tienen que ver con la demostración, que resumimos a continuación: (más detalles Jaime, Gutiérrez, 1990)

***Nivel 1*:** (Reconocimiento) No hay demostración. La verdad de una afirmación se justifica por la observación de una figura.

***Nivel 2*****:** (Análisis) Demostración empírica. La verdad de una afirmación se verifica en uno o más ejemplos, realizando mediciones, transformaciones, recuentos etc.

***Nivel 3:*** (Clasificación) Demostración deductiva informal. La verdad de una afirmación se demuestra mediante un argumento deductivo informal, después de analizar ejemplos o realizar mediciones, transformaciones.

***Niveles 4*****:** (Deducción Formal) Demostración deductiva formal. La verdad de la proposición se demuestra mediante la producción de demostraciones deductivas formales. Los estudiantes son capaces de aceptar diferentes formas de demostración y de comprender la estructura axiomática de la matemática: significado y uso de axiomas, definiciones, teoremas, etc.

***Niveles 5*****:** (Rigor) Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del inicial de la geometría euclídea, capacidad para compararlos y decidir sobre su equivalencia.

Este modelo de Van Hiele refleja que el aprendizaje de la demostración es un camino largo que los estudiantes deben recorrer y no podemos saltear niveles y exigir a los estudiantes de este nivel que realicen demostraciones correspondientes a un nivel superior de razonamiento, sino que es importante que se recorra este camino acompañándolos en su evolución hacia las demostraciones deductivas.

**3. ¿Cómo diseñar una secuencia de actividades en geometría?**

Teniendo en cuenta el encuadre teórico, para diseñar una serie de actividades en torno a un problema, para el trabajo con los estudiantes en un entorno de geometría dinámica, proponemos seguir las orientaciones del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Ubicándonos en el Nivel 2, dado que los alumnos a los que estarán dirigidas realizan sólo demostraciones empíricas.

Van Hiele sugiere la organización de la enseñanza sobre la base de cinco "fases de aprendizaje": información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración (aplicables a todos los niveles). En la fase 1 de ***información***, los alumnos revisarán los contenidos previos, necesarios para abordar la actividad. La fase de ***explicación*** deberá tenerse en cuenta en el desarrollo de todas las actividades.

Las actividades deben buscar provocar un conflicto socio-cognitivo en la clase, deben tener que ver con conjeturar, validar, es decir enfrentar a los estudiantes con el problema de la verdad, con el de la eficiencia y de la comunicabilidad de las soluciones. De esta manera se movilizan varios registros de validación que favorecen el desarrollo de actividades argumentativas.

En la fase 2 de ***orientación dirigida***, proponemos realizar las actividades en etapas, que no pretenden ser fijas, sino sólo aspectos a tener en cuenta, necesarios para enriquecer el trabajo de los alumnos en los entornos de geometría dinámica.

| *Etapa 1*: Exploración libre y formulación de conjetura |
| --- |

Los estudiantes reconocerán figuras geométricas y sus propiedades, mediante experimentación comprobarán para uno o pocos casos.Abordarán el problema de manera experimental, examinarán varios ejemplos, medirán segmentos, podrán tomar como solución algún caso tan poco particular como les sea posible. Es decir esperamos obtener respuestas correspondientes al *empirismo naïf* o *experiencia crucial*.

***Etapa 2***: Exploración y formulación de la conjetura con la función "desplaza"

En esta actividad, el software les da la posibilidad del desplazamiento continuo de la figura y así podrán observar todas las posibles ubicaciones de la figura. Esto confirmará o no la conjetura inicial de la Parte 1. Responderán con una aproximación más fina. Los estudiantes necesitarán explicar razones de validez de la conjetura, separándose de su ejecución sobre un representante particular. Suponemos que ante la necesidad de explicar a otros su conjetura y debido a la visualización lograda de la situación, algunos estudiantes podrán usar el tipo de prueba de *ejemplo genérico* o bien de *experimento mental*, aunque no necesariamente utilizarán la simetría para su argumentación.

***Etapa 3***: Validación de la conjetura

En esta etapa los estudiantes se enfrentarán a la necesidad de explicar sus construcciones a otros, lo que ellos vieron, descubrieron, pensaron y concluyeron. El razonamiento se transforma en un vehículo para entender y explicar por qué puede funcionar la conjetura descubierta. Más aún, se transforma en el medio para convencer a otros de la validez de la misma.

Con esta actividad los alumnos necesitarán basarse en propiedades de los objetos geométricos para argumentar la validez de la conjetura. En un esfuerzo de explicación, deberán fundamentar las soluciones propuestas de modo que les permita liberarse de situaciones particulares y pasar a acciones interiorizadas. Suponemos que podrán encaminarse hacia el tipo de demostración de *experimento mental*.

Este trabajo previo de exploración, formulación de conjetura y validación permitirá introducir actividades correspondientes a la fase 4 de ***orientación libre***.

***Etapa 4:*** Extensiones del problema

En esta etapa los estudiantes deberán aplicar los conocimientos y lenguaje utilizados en la fase 2 para resolver las actividades.

La idea de estas extensiones del mismo problema, están pensadas como un complemento de las actividades realizadas, que podrán dejarse a los alumnos para que resuelvan de manera autónoma. Esperando que los estudiantes realicen pruebas de tipo experimento mental y argumenten las soluciones encontradas.

Finalmente para que los alumnos adquieran una visión global de todo lo aprendido, integrando los nuevos conocimientos con los ya estudiados, es necesario organizar actividades según la fase 5: ***Integración***

| |
|---|
| ***Etapa 5:*** Exploración de propiedades |

De esta manera, algunos alumnos, habrán logrado capacidades para producir demostraciones deductivas informales.

**4. Reflexiones finales**

Es necesario acostumbrar a nuestros alumnos a justificar sus afirmaciones, para ello priorizamos la "explicación", entendiendo a ésta como una forma de mostrar cómo (por qué) es verdadera una conjetura en términos de otros resultados geométricos ya conocidos, es decir, cómo "esto" es una consecuencia lógica de "estos otros" resultados.

En este marco de construcción del conocimiento, la enseñanza de la geometría utilizando un sistema de geometría dinámica está basada en la resolución de problemas, con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir. El docente cambia su papel de director y experto por el de co-partícipe, apoyo y co-aprendiz. ( Fisher,1993)

La comprobación experimental constituye una evidencia de falsedad si encontramos un contraejemplo; pero si la conjetura es cierta observaremos que se cumple para todas las posiciones que dibujemos de la figura, lo cual no constituye una prueba formal.

Pensamos que este trabajo previo, teniendo en cuenta otras funciones de la demostración como una herramienta de descubrimiento o la de explicación, deberían utilizarse para introducir la demostración como una actividad significativa para nuestros alumnos en este nivel escolar.

Somos conscientes de la complejidad del aprendizaje de la demostración, de hecho no pretendemos construir situaciones que permitan al alumno automáticamente realizar demostraciones formales de manera comprensiva, sino actividades que la problematicen.

Suponemos que algunos alumnos podrán realizar demostraciones deductivas informales sencillas, pero sobre todo queremos lograr que comprendan la *necesidad de demostrar* y que realicen aquéllas que su destreza matemática y su experiencia escolar les permitan. Así como también aprovechen al máximo las ventajas que ofrece la Geometría Dinámica en este camino.

**5. Referencias bibliográficas**

Balacheff, N. (2000a): "*Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas"*, Una empresa docente, Univ. de Los Andes. (Bogotá).

Balacheff, N. (2000b): "*Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*", en Colén, M Fraile, Y, Vidal, C (editores): ¨*Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*¨, Barcelona, GRAÓ DE Irif, S. L.

Battista , Michael y Clements, D. (1995): “*Geometry and prof*”, The Mathematics Teacher, vol 88 Nº 1.

De Villiers, Michael. (1996): “*Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría*” The Future of Secondary School Geometry, la lettre de la preuve, Noviembre-Diciembre, 1999.

Dreyfus, T. (2000): “*La demostración como contenido del currículum*”, en Colén, M Fraile, Y, Vidal, C (editores): ¨*Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional”*, Barcelona, GRAÓ DE Irif, S. L.

Duval, R. (1999): “*Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales”*, Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogía.

Fisher, E. (1993): ¨*The teacher’s role*¨, en P. Scrimshaw (Ed.), Language, classrooms and computer. (p. 57-74), London: Routledge.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): *”Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele”*, en Llenares, S; Sánchez, M.V. (eds.), Teoría y práctica en educación matemática. (Alfar: Sevilla), 295-384.

Hershkowitz, R. (2001): “*Acerca del Razonamiento en Geometría*” www.euclides.org.

Laborde, Jean-Marie y Otros. (1997): “*Geometric explorations for the classroom*”, NCTM National Conference. Minneapolis, Minnesota, EEUU.