



LOS PARÁMETROS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA ($y = mx + b$) EN UN AMBIENTE DINÁMICO

Teresa Bernal Díaz - María Teresa Rojano Ceballos
dany_tere40@yahoo.com.mx - rojanot@gmail.com
CINVESTAV-IPN, México - CINVESTAV-IPN, México

Tema: Álgebra y tecnología

Modalidad: Taller

Nivel: Básico (secundaria)

Palabras claves: Parámetros, representación, ecuación de la recta.

Resumen

Se busca que los profesores discutan la importancia que tiene lograr que un alumno pase del registro gráfico al algebraico o viceversa, ya que la investigación que aquí se reporta muestra que presenta dificultades cuando se trabaja con lápiz y papel. En este taller con el apoyo de la tecnología (computadora) y el software Cabri-Géomètre, se pretende que los profesores indaguen cómo los alumnos pueden pasar de un registro al otro y observar las dificultades que presentan en este proceso. Uno de los objetivos a alcanzar es confirmar lo planteado por Duval (2002) quien afirma que el uso de la tecnología ayuda al alumno a desarrollar la habilidad de visualización matemática, y que valoren que la geometría dinámica puede ayudar a comprender el significado de los parámetros (pendiente y ordenada al origen) en el registro gráfico y al mover la gráfica se observan los cambios que ocurren en dichos parámetros.

Introducción

En varios estudios se reportan resultados relacionados con las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de nociones tales como las de incógnita, variable y número general cuando se inician en el estudio del álgebra (Kieran, 1989, y Filloy y Rojano, 1989). Sin embargo, la literatura sobre el aprendizaje de la noción de parámetro es escasa, aunque existen estudios de este tema basados en experimentos de enseñanza con alumnos no principiantes de nivel bachillerato o universitario (por ejemplo, Yerushalmy y Chazan, 2000, y Bloedy-Vinner, 2001). Por otra parte, los parámetros están presentes desde los programas de educación secundaria; la experiencia docente en este nivel escolar ha hecho evidente que los estudiantes tienen dificultades con el empleo simbólico de esta noción, sobre todo por la falta de referentes significativos para ellos.

Tomando como referencia los antecedentes encontrados. Nuestro interés se centro en investigar la conceptualización de los parámetros en sus fases iniciales; es decir, cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez al manejo (simbólico) de éstos. En los planes y programas de matemáticas de la educación secundaria de México, uno de los primeros encuentros de los estudiantes con los parámetros se da en el tema de la



ecuación de una recta, en donde m y b son la pendiente y la ordenada al origen respectivamente. De acuerdo con Bledy-Vinner (2001), en este caso específico, una buena comprensión de los parámetros de una recta, les permitirá a los estudiantes acceder a los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales (familias de rectas) y los métodos algebraicos y geométricos de resolución de dichos sistemas.

Problema de investigación

La finalidad de esta investigación sobre parámetros en álgebra es profundizar en el análisis de los procesos de conceptualización de los estudiantes cuando trabajan con parámetros en la ecuación de la recta, a través de dos tipos de representaciones, la algebraica y la geométrica, en un ambiente dinámico. Para esta tarea de profundización se tomaron como punto de partida los resultados reportados por Bledy-Vinner (2001) sobre las dificultades que enfrentan estudiantes de bachillerato para distinguir entre los parámetros y las incógnitas, entre los parámetros y las variables, y sobre la importancia de la noción de parámetro como condición necesaria para que los alumnos accedan a la noción de familias de funciones. También se incorporan los resultados de los estudios de Hoyos (1996), Bernal (2006) y Lara (1995) sobre la importancia de proveer de fuentes de significado a los parámetros, a partir del contexto geométrico y de la interacción entre representaciones en un ambiente de geometría dinámica.

Propósito específico del estudio

Diseñar y poner a prueba una secuencia didáctica que favorezca la conceptualización de los parámetros en alumnos de tercer grado de educación secundaria y que a su vez los introduzca a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, mediante la interacción con distintos registros en el ambiente de geometría dinámica y así sentar las bases hacia la discriminación entre parámetros e incógnitas.

Preguntas de investigación

1.- ¿Qué influencia tiene el trabajo en ambiente de geometría dinámica como fuente de significados para la representación de los parámetros en los casos de la ecuación de una recta ($y = mx + b$) y de sistemas de ecuaciones lineales?



- 2.- En particular, ¿qué papel desempeña la experiencia con la variación de parámetros (representación simbólica) y su correspondiente interpretación gráfica (representación), estando vinculadas estas representaciones en el ambiente computacional?
- 3.- En términos de la teoría de Duval, ¿qué papel desempeña la conversión entre registros, en su versión virtual en la construcción de significados, de objetos algebraicos?
- 4.- ¿Qué influencia tiene el trabajo con distintas representaciones de los parámetros y de las ecuaciones lineales en la distinción que puedan hacer los alumnos entre parámetros e incógnitas específicas?
5. ¿Qué influencia tiene la asignación de significado geométrico a la representación literal de los parámetros en el aprendizaje de métodos geométricos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales?

Marco teórico

Para el aprendizaje de las matemáticas es importante el uso y manejo adecuado de símbolos y representaciones, así como la coordinación de registros, el conocimiento conceptual de múltiples representaciones semióticas y la definición de variables considerando diferentes registros de representación. Duval (1998) afirma que la palabra “representación” se emplea con frecuencia bajo su forma verbal “representar”. Un objeto matemático puede estar representado por símbolos, trazos y figuras. También afirma que jamás se debe confundir a los objetos matemáticos con su representación. La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas.

El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano es inseparable de una diversidad de registros semióticos de representación. Se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto (Duval, 1998). No hay noesis sin semiosis: no se debe enseñar las matemáticas como si la semiosis fuera una operación menos aceptable con respecto a la noesis.

Duval (1998) hace notar que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación **debe permitir las tres actividades** cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:



1.- **La formación** de una representación identificable como una representación de un registro dado: el dibujo de una figura geométrica, la elaboración de un esquema y la escritura de una fórmula.

2.- **El tratamiento**, que es la transformación al interior de un registro. El cálculo es una forma de tratamiento propio para las escrituras simbólicas.

3.- **La conversión**, que es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de determinada información de un registro a otro; es una transformación externa relativa al registro de representación de partida.

Duval menciona que la conversión de las representaciones resultaría por sí misma desde el momento en que alguien ya es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre las representaciones tales como construir una gráfica, escribir una ecuación y sustituir en ella los valores numéricos de las variables.

Los criterios de **congruencia** fueron importantes para el análisis de las actividades de la investigación que aquí se presenta:

Aludiremos a la **no congruencia** la cual es inherente a la variedad heterogénea de los registros; cuando hay **congruencia** entre la representación de partida y la de llegada, la conversión es trivial y casi podría ser considerada, intuitivamente, como una simple codificación. (Duval, 1998c, pp. 247 – 249).

Los procesos de conceptualización y visualización también se consideran de importancia en el sustento teórico para efectuar el análisis de las actividades que se reportan en este documento. La **conceptualización** implica una coordinación de registros de representación: “La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión” (Duval, 1998, p. 186). Por otra parte, “[l]a **visualización** se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica; es decir, ni mental ni física [...] La visualización está basada en la producción de una representación semiótica” (Duval, 1999, p. 14). Duval (1999) afirma que para desarrollar la visualización se requiere un entrenamiento específico para cada registro, sin reducirlo a un entrenamiento de construcción; es decir, se deben considerar las reglas del registro y de las matemáticas.



Método

Este estudio es de corte cualitativo: para documentar y analizar los procesos de estudiantes sobre la conceptualización de los parámetros de la ecuación de la recta.

Desarrollo

A partir de los planteamiento realizados en Bernal, T. (2011), este taller consta de cuatro actividades, las cuales están fundamentadas en las tres vías diferentes para interpretar una representación gráfica debidas a Duval (1994).

1) Vía del punteo.

En esta vía:

- *por referencia a dos ejes graduados, una pareja de números permite identificar un punto (e inversamente un punto se traduce a una pareja de números);*
- *queda limitada a los valores particulares y a los puntos marcados en el plano de referencia;*
- *es preferida cuando se trata de trazar la gráfica correspondiente a una ecuación de primer y segundo grado,..., o de leer las coordenadas de un punto interesante (punto de intersección o un máximo).*

2) Vía de extensión del trazo efectuado.

En esta vía:

- *el individuo se atiene a los datos del trazo y no toma en cuenta las variables visuales pertinentes de la representación gráfica;*
- *el tratamiento queda orientado hacia la búsqueda de valores particulares, sin que uno tenga que detenerse sobre la forma de la escritura algebraica.*

3) Vía de interpretación global de las propiedades de las figuras.

En esta vía:

- *el conjunto trazo / ejes forma una imagen que representa el “objeto” descrito por una expresión algebraica;*
- *toda modificación de esta imagen que entrañe una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica;*



- *es importante identificar todas las modificaciones pertinentes de esta imagen, es decir, ver las modificaciones conjuntas de la imagen y de la forma de su escritura algebraica. Esto se desprende de un análisis de congruencia entre dos registros de representaciones de un objeto o de una información. Con esta vía ya no estamos en presencia de la asociación “un punto una pareja de números”, sino de la asociación “variable visual de la representación – unidad significativa de la escritura algebraica”.*

Esta vía se vuelve necesaria cuando se trata de partir de la representación gráfica para encontrar, por ejemplo, la ecuación correspondiente o para utilizar el concepto de pendiente o el de dirección.

Los propósitos de las actividades (que se impartirán en dos sesiones) son los siguientes:

Actividad Uno

Propósito: obtener la ecuación de la recta a partir del análisis de la gráfica.

Actividad Dos

Propósito: explorar una familia de gráficas de la forma $y = mx + b$, donde se varía el parámetro ordenada al origen b o la pendiente m .

Actividad Tres

Propósito: Analizar la pendiente y ordenada al origen de una recta.

Actividad Cuatro

Propósito: Identificar las variables visuales.

Conclusiones

El manipular las rectas con el software Cabri-Géomètre les ayuda a los alumnos a tener una mejor visualización del comportamiento de los parámetros m y b (Duval, 1992).

Se espera que con las actividades que efectúen los maestros puedan apoyar a sus alumnos a:

- La identificación de los parámetros de pendiente y de ordenada al origen (m y b) y de esta manera el alumno logre pasar del registro gráfico al



algebraico y viceversa.

- Que el alumno pueda diferenciar a un parámetro de una incógnita y a un parámetro de una variable.
- Llegar a la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Referencias Bibliográficas

- Bernal, T. (2006). *Estudio Exploratorio con estudiantes de tercer grado de secundaria para hallar el significado de los parámetros m y b en la ecuación de la recta ($y = mx + b$), utilizando Cabri-Géomètre*. (Tesis de Maestría, no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Bernal, T. (2011). *Hacia la conceptualización de parámetros en álgebra en la secundaria: El papel de la geometría dinámica y los registros gráfico y algebraico*. (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Bloedy-Vinner, H. (2001). The analgebraic mode of thinking—The case of parameter. En Ponte, J.D. & Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematic Education*, (Vol. 2. pp. 82–95). University of Lisbon Portugal.
- Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. En Cambray, R; Sánchez, E; & Zubieta, G. *Antología en Educación Matemática*. (pp. 124–139). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt, F. (Ed.), En. *Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II*. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*. 9(2), 19–25 (June), Quebec.
- Hoyos V. (1996). *La transición del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico*. (Tesis doctoral, no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Kieran, C., Boileau, A. & Garançon, M. (1989). Proceses of mathematization in algebra problem solving within a Computer environment: A functional approach. En Maher, C.A.; Goldin, G.A. & Davis, R. B. (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference for the Psychology of Mathematics Education. North American, PME-NA, Annual Meeting*. (Vol.1, pp. 26-34). Montreal. Canada.



- Lara, N (1995). *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales*. (Tesis de maestría, no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Yerushalmy, M. & Chazan, D. (2000). Flux in school algebra: Curricular change, graphing, technology, and research on student learning and teacher knowledge. En English L. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 725-755). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum.