



LA GEOMETRIA DEL ESPACIO: UN FASCINANTE MUNDO POR DESCUBRIR

Dr Bernardo Camou
bernardocamou@adinet.com.uy
Liceo 10, Montevideo, Uruguay

Tema: Investigación Didáctica

Modalidad: CP

Nivel: Medio y Terciario

Palabras Claves: Integración, Representación, Aproximación, Tecnología.

Resumen

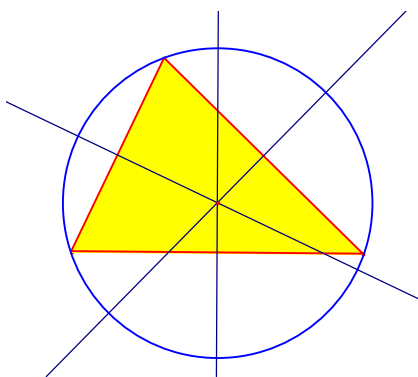
La Geometría de Espacio es un rico mundo matemático que nos rodea y sin embargo pareciera estar casi ausente de la enseñanza. El principal obstáculo para la enseñanza de la geometría del espacio es el problema de la representación de los objetos de tres dimensiones.

*A lo largo de más de 25 años he venido desarrollando un enfoque para poder aprender Geometría del Espacio al que he denominado ingeniería **iMAT** (integrando Multirepresentaciones, Aproximaciones y Tecnología). El supuesto fundamental de iMAT es que para aprender Geometría del Espacio no alcanza con usar un solo tipo de representación sino que es imperioso utilizar un conjunto de representaciones, que de diferentes formas, aproximan el mismo objeto geométrico. Los dibujos planos de los objetos 3D constituyen las representaciones más abstractas y por lo tanto deben ser ineludiblemente precedidos por representaciones concretas, semi-concretas y semi-abstractas.*

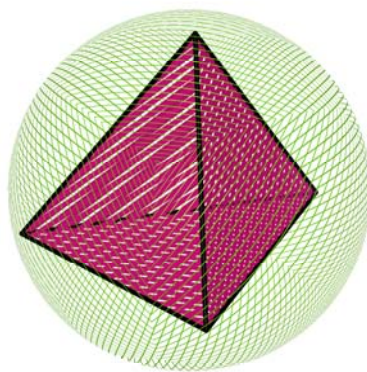
*En el marco de una tesis de Doctorado para la Universidad de Georgia (USA), se enseñó experimentalmente geometría del espacio durante dos semanas a 140 alumnos de nivel Secundario (mitad uruguayos y mitad estadounidenses) utilizando la ingeniería **iMAT**. Los alumnos al cabo del curso mostraron signos inequívocos de haber logrado un aprendizaje significativo sobre geometría del espacio.*

Desarrollo

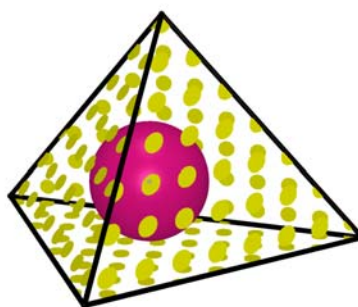
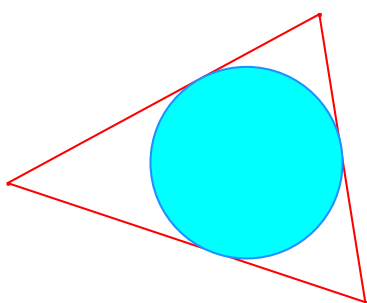
En los cursos de geometría liceales es común enseñar la propiedad de que por los tres vértices de un triángulo pasa siempre una circunferencia, como vemos en la siguiente figura:



Sin embargo la propiedad análoga en el espacio, que por los tres vértices de un tetraedro cualquiera pasa siempre una esfera, es una propiedad prácticamente ignorada.



De forma similar nuestros alumnos aprenden que existe una circunferencia interior tangente a los lados de cualquier triángulo, pero no saben que existe siempre una esfera tangente a las caras de cualquier tetraedro. Podemos ver una representación de estas dos propiedades en las siguientes figuras.



Los alumnos de nivel Secundario en su mayoría desconocen los nombres de los poliedros regulares convexos y eso que son apenas cinco. Las nociones de ángulo diedro y ángulo esférico resultan totalmente desconocidas así como los fantásticos invariantes que constituyen la fórmula de Euler y el Teorema de Descartes sobre los defectos angulares.

En el currículum de Matemática de nivel Secundario en Estados Unidos, la geometría representa solamente la quinta parte y la geometría del espacio representa tan sólo el 10% de toda la geometría que se enseña.

En nuestro país la presencia de Geometría del Espacio en los programas es mayor, pero lo efectivamente enseñado es poco por las dificultades que enfrentan los docentes de matemática para cubrir esta parte del programa.

Mi interés en intentar desarrollar la enseñanza de la geometría del espacio surgió hace más de 20 años cuando se me planteó el problema de calcular el volumen de todos los poliedros regulares y no sabía como hacerlo.

Este fue el comienzo de una investigación informal al principio que luego fue paulatinamente encontrando la forma de hacerse más profesional y rigurosa.

Estoy en condiciones de afirmar que el principal obstáculo para el estudio de la geometría del espacio está ligado con el problema de la representación.

El dibujo plano de un objeto matemático de tres dimensiones debe necesariamente ser precedido de otro tipo de representaciones: concretas, semi-concretas y semi-abstractas.

Querer aprender geometría del espacio comenzando por representaciones planas es como dice el refrán: *poner el carro delante de los bueyes*. Las representaciones planas, son elementos muy abstractos para ser el comienzo del estudio; es complejo producirlas e interpretarlas y además permiten muy escasa experimentación.



Para poder abordar eficientemente la Geometría del Espacio se ha desarrollado la ingeniería iMAT (integrando Multirepresentaciones, Aproximaciones y Tecnología). Este enfoque aborda los objetos geométricos de tres dimensiones partiendo de modelos en 3D (con cartulina o cañitos) luego utiliza figuras semi-abstractas Cabri 3D para recién al final utilizar representaciones planas. Cada nueva representación aproxima el objeto de una forma diferente y su conjunto es lo que posibilita la correcta conceptualización.

La integración tiene un doble sentido: por un lado se integra geometría con trigonometría y álgebra y por otro lado se integra geometría plana con geometría del espacio.

Durante el año 2007, junto con dos profesoras uruguayas de matemática, se escribió el primer borrador de un curso de geometría del espacio con este enfoque.

Quien escribe estas líneas tuvo la oportunidad de enseñar durante 2008 parte de este curso en la asignatura Geometría en el primer año del profesorado de matemática del IPA.

Durante 2010 y 2011 el mismo curso, ampliado y traducido al inglés, fue enseñado por el Dr. Olive y por mí en la Universidad de Georgia (USA).

El gran recibimiento que tuvo este curso motivó que fuera aceptado efectuar la tesis de Doctorado referente a este tema.

Se diseñó un pequeño curso de geometría del espacio de solamente dos semanas para ser enseñado a estudiantes uruguayos y estadounidenses para intentar mostrar la efectividad del enfoque iMAT.

Participaron alrededor de 70 alumnos uruguayos y 70 alumnos estadounidenses pertenecientes a 4 instituciones. El mini-curso de dos semanas se enseñó en forma similar en los 7 grupos a los que los alumnos pertenecían. Antes de comenzar la experimentación se hizo una prueba diagnóstica y luego de finalizar el curso se hizo una evaluación final. Se filmaron la mayoría de las clases y se le pidió a los alumnos que completaran anónimamente una evaluación. También se hicieron entrevistas en focus groups donde se recogió la opinión de los estudiantes con mayor profundidad.

La experimentación transcurrió durante 2011 y el propósito de experimentar con estudiantes de dos nacionalidades fue buscar más robustez en los resultados es decir resultados que fueran independientes de la lengua (inglés o español) y del país.

Durante la investigación el énfasis fue buscar las similitudes que se dieran en todos los grupos respecto al proceso de aprendizaje aunque inevitablemente hubo que efectuar

algunas comparaciones. Se analizó factores tales como nacionalidad, género, situación socio-económica y motivación externa utilizándose métodos mixtos (métodos cuantitativos y cualitativos) para analizar los resultados.

Cabe señalar que la investigación requirió un complejo proceso de preparación antes de llegar a la etapa de la experimentación y recolección de datos.

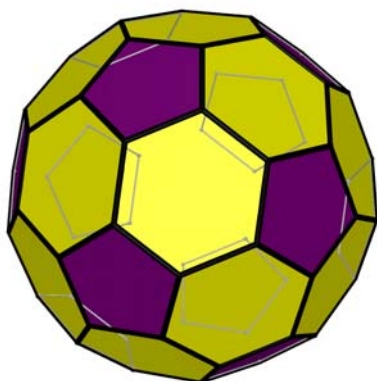
En dicho proceso colaboraron varios profesores de matemática de Uruguay y Estados Unidos así como profesores de la Universidad de Georgia quienes fueron los encargados de corregir y aprobar la metodología a emplear así como vigilar la ética de los procedimientos.

En abril de 2012 fue defendida con éxito la tesis para obtener el doctorado.

Compartiremos imágenes de la experimentación así como algunos testimonios recogidos. También se darán a conocer los resultados oficiales más importantes de la investigación así como posiblemente algunos no oficiales.

Los alumnos durante esas dos semanas conocieron los poliedros regulares. Descubrieron la fórmula de Euler. Midieron ángulos diedros y luego los calcularon usando trigonometría. Aprendieron a calcular áreas y volúmenes de los poliedros.

Aprendieron a truncar los poliedros para obtener cuerpos Arquimedianos:



Así descubrieron que el icosaedro truncado es la pelota de fútbol y, como el icosaedro tiene 20 caras y 12 vértices entonces la pelota de fútbol tiene 20 hexágonos y 12 pentágonos.

También jugaron con dados poliédricos como los de la siguiente figura.



Y mientras se divertían mucho tirando estos dados, aprendían probabilidad.

Un alumno de EEUU dijo que en esas dos semanas había aprendido más geometría de lo que había aprendido en toda su vida.

Al final con mucho gusto se contestarán preguntas relativas al contenido, a la forma o los detalles de la investigación así como de sus resultados.

Voy a terminar formulando una pregunta simple y fascinante como las muchas que tiene la geometría del espacio. Todos sabemos en geometría plana clasificar los triángulos por sus ángulos, en acutángulos, rectángulos y obtusángulos, o por sus lados, en equiláteros, isósceles y escalenos.

Ahora en geometría del espacio ¿cómo se clasifican los tetraedros?



Bibliografía

Bainville, E. & Laborde, J.M. (2004) *Cabri 3D*. Cabrilog. Grenoble, France.

Camou, B. (2006). *Diario de un Profesor de Matematica*. Montevideo, Uruguay:
Ediciones Brio.

Guillen, G. (1997). *El mundo de los poliedros*. Madrid, Spain: Editorial Síntesis.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The logic of Mathematical Discovery*.
London: Cambridge University Press.

University of Cambridge. (2002) *Why do we study geometry? Answers through the
ages*. Retrieved from: [http://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-
G_opening_ppr.pdf](http://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G_opening_ppr.pdf).

Zamora, M., Belcredi, L. & Rodriguez, M. (1997). *Geometría*. Colección Mosaicos.
Montevideo, Uruguay: Ediciones de la Plaza.