



HACIA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN

Gladis Saucedo

Facultad de Humanidades y Ciencias. UNL. Argentina.

e-mail: gsaucedo@eis.unl.edu.ar

Niveles: Básico y medio

Palabras claves: volumen, capacidad, medida, estimación

Resumen

El concepto de volumen tiene importancia en nuestra vida diaria porque nos movemos en un mundo tridimensional y en más de una ocasión hemos necesitado medir el volumen de determinados cuerpos.

Sin embargo al revisar el tratamiento escolar que se da a las magnitudes se encuentra que el volumen parece ser una de la más descuidadas en cuanto a las actividades que se realizan, ya que no sólo se dejan de lado algunas de sus variadas relaciones con otros temas, sino que muchas veces se confunde la propiedad que se mide (volumen) con su medida. Y esto se debe en parte a la influencia que tiene el Sistema Métrico Decimal (SMD) en el currículo escolar, ya que medir se lo asocia al trabajo con el SMD, dando por supuesto que ya se sabe qué es el volumen.

El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación donde se pretenden diseñar propuestas didácticas para trabajar contenidos de la geometría euclídea tendientes a superar las dificultades que supone el apropiamiento de los conceptos geométricos. En esta propuesta se aborda la noción de volumen y se analizan diferentes aspectos que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto. Estos aspectos serán de utilidad y servirán de base para la elaboración de una secuencia didáctica sobre volumen

Introducción

La utilidad del concepto de volumen y su medida es innegable, ya que es un conocimiento necesario para enfrentarse a ciertos requerimientos de la vida diaria como por ejemplo determinar el volumen de un recipiente o comprender qué significa cuando se lee en un envase 720 cm³. Por lo general este tema está presente en todos los programas escolares y un trabajo serio sobre el mismo debería incluir no sólo el desarrollo del Sistema Métrico Decimal (SMD) sino los aspectos geométricos, aritméticos y de resolución de problemas asociados al mismo. Las aproximaciones al concepto de volumen se deben regular realizando tareas adecuadas, atendiendo a los distintos años de la Educación Primaria y/o Secundaria. Se deben proporcionar distintas experiencias y con variados materiales que pongan de manifiesto la importancia del concepto y que permitan la construcción del mismo. No se deben presentar las fórmulas conocidas para calcular el volumen de ciertos cuerpos, hasta que los alumnos no hallan realizado suficientes actividades que les permitan utilizarlas comprensivamente.

En esta propuesta se aborda la noción de volumen y se analizan algunas particularidades que tienen que ver con su el tratamiento didáctico. Estas aportaciones se utilizarán como base para la elaboración de una secuencia didáctica sobre volumen con el objeto de superar las dificultades que supone su apropiamiento.



El concepto de Volumen

Con respecto al concepto no cabe duda que las definiciones de los conceptos geométricos desempeñan un papel destacado en la enseñanza de la geometría, y es necesario que el docente que va a enseñar un determinado concepto sea capaz de identificar los rasgos definitorios del mismo. Por otra parte según Alsina, Frotuny y Pérez (1997) una definición es una convención que explica el significado exacto que debe darse a una palabra, expresión o símbolo, por lo menos durante el tiempo que la misma tenga validez. Al realizar un breve rastreo entre los libros de textos que tratan el tema volumen, la mayoría cuando da la definición de volumen lo hacen referido a poliedros, previa consideración de definir suma de poliedros y la descomposición de un poliedro en cuerpos piramidales.

Tanto Sánchez Mármol (1947, p.1077), como Ferraris (1991, p. 102) y Puig Adam (1980, p. 339, 340) hacen un análisis exhaustivo del concepto de volumen. Pero al analizar otros libros de los últimos años del Primario y principios del Secundario se observa que los que se editaron en la última década dan una idea escueta de lo que es volumen para luego pasar a la medida del volumen y trabajar con el SMD. En cambio libros más antiguos, de hace más de dos décadas, hacen un tratamiento más extenso sobre el tema.

Es importante que el docente tenga acceso a distintas bibliografías y seleccione una definición sobre el tema a tratar, esto lo ayudará no sólo a hacer un uso coherente del concepto sino también a buscar situaciones didácticas que permitan a sus alumnos formar el objeto mental volumen; cuando decimos objeto mental nos referimos al sentido que le da Freudenthal (1983) cuando dice que los objetos mentales son todas las representaciones, ideas, relaciones, significados que el concepto evoca en la mente de la persona.

Trabajaremos con el concepto de volumen que toma Sánchez Mármol (1947), quién expresa que *siendo los cuerpos porciones del espacio limitadas por superficies cerradas, intuitivamente concebimos que dos cuerpos, teniendo formas geométricas distintas, pueden encerrar en su contorno porciones iguales en el espacio; tener igual extensión. A estos cuerpos se los denomina equivalentes*. Luego dice que al comparar la extensión de las figuras en el espacio se pueden definir para ellas las operaciones de adición y sustracción así como establecer las relaciones de igualdad y desigualdad; *resultando ser los sólidos una nueva especie de magnitudes homogéneas* Luego define poliedros equicompuestos, equivalentes y volumen como: *La medida de un cuerpo con relación a la unidad elegida se denomina volumen del cuerpo. La unidad elegida es el volumen del cubo que tiene por arista la unidad de longitud. Es evidente que: Dos cuerpos iguales o equicompuestos o equivalentes, tienen igual volumen.*

La equivalencia y la equicomposición entre poliedros y la equivalencia entre algunos de éstos con los cuerpos limitados por superficies curvas, permite la determinación de los volúmenes de aquellos sólidos que son objeto de estudio en la geometría elemental (p.1078)

Se considera esta definición porque que es más amplia, ya que primeramente hace referencia a cualquier sólido para luego referirse a los cuerpos poliédricos y diferencia extensión de volumen. Pero así como se utilizan indistintamente superficie o área, en este trabajo se utilizarán los términos extensión y volumen como sinónimos, sin embargo se destaca que como formadores se necesita ahondar en estas diferencias aunque no se expliciten en el desarrollo de las clases.



Algunas aportaciones para el tratamiento didáctico del Volumen

A continuación se analizan algunos aspectos necesarios conocer, que tienen que ver con la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen; teniendo en cuenta que estos conocimientos pueden dar lugar al diseño de situaciones didácticas que permitan a los alumnos ir construyendo el concepto de volumen.

A: Volumen- Capacidad

En el dictado de un curso para maestros en la UNL se realizó una encuesta a 24 docentes de distintas escuelas; el 54 % de los mismos trabaja en escuelas públicas de la ciudad de Santa Fe, mientras que la mitad del resto en escuelas confesionales (parroquiales). El 46 % de los docentes son mayores de 40 años y el mismo porcentaje dicta matemática en cursos superiores 6º, 7º y 8º año (lo que era, hasta el año pasado, el tercer ciclo de la EGB).

El 46 % de los encuestados había dictado alguna vez el tema volumen y a pesar de ser un contenido curricular de los cursos citados anteriormente sólo un docente (4%) manifestó dictarlo en la actualidad, los demás hacía que no desarrollaban dicho tema alrededor de 10 años.

Las respuestas a la pregunta ¿Qué es el volumen para usted? fueron categorizadas en cuatro grupos:

- I. Los que consideran el volumen como capacidad: 50%
- II. Los que consideran el volumen como lugar que ocupa un objeto o cuerpo en el espacio: 29 %
- III. Los que consideran el volumen en su doble aspecto, como capacidad y lugar que ocupa un objeto en el espacio: 12%
- IV. Los que hacen referencia al volumen sin especificar el concepto correctamente: 9% (es una cantidad ; una magnitud ; responde a la tridimensionalidad ; largo x ancho x alto)

Como se observa la mayoría de los docentes consideran el volumen como capacidad. Lo que pasa es que comúnmente ambos conceptos se expresan como sinónimos, sin embargo sabemos que ambos términos conllevan significados diferentes. Volumen sugiere el espacio ocupado mientras que capacidad es el espacio vacío con posibilidad de ser llenado.

Según Kerslake (1976) (citado por Dickson, 1991) la palabra volumen puede ser utilizada con dos significados:

Volumen interno de un hueco, que es sinónimo de capacidad

Volumen externo como cantidad de espacio ocupado.

Destaca que en la vida cotidiana hacemos mayor referencia al volumen interno/capacidad y al llenado total o parcial de cosas huecas y no al volumen como espacio ocupado. Además escolarmente se acentúa esta afirmación ya que en las prácticas en el aula se limitan a llenar espacios huecos y hay una marcada carencia de actividades que apunten a la noción de volumen como espacio ocupado. Kerslake considera que los alumnos encuentran más sencilla la noción de volumen interior (¿Cuánto contiene esta caja?) que la de



volumen exterior (¿Cuánto espacio ocupa este objeto?) y destaca que en general se presentan los mismos esquemas o dibujos cuando se estudian los dos modelos de volumen, por lo tanto los alumnos no tienen la oportunidad de distinguir claramente ambos tipos de volumen ni de considerar las diferentes consecuencias que comporta cada tipo de medida. Por otra parte es más fácil determinar el volumen interno (capacidad) de un objeto irregular, una pava por ejemplo, llenándola con agua y luego verterla en un vaso graduado, que estimar el volumen de un objeto sólido como puede ser una mesa o un armario.

Freudenthal (1983) expresa que el volumen está menos expuesto a un empobrecimiento fenomenológico que el concepto de área, especialmente por su doble aspecto de capacidad y volumen, pero destaca que la relación entre capacidad y volumen es complicada, sobre todo por el uso que se le da en la vida diaria; ya que es bastante frecuente utilizar medidas de volumen para medir capacidades o contenidos, por ejemplo: la cantidad de agua de una piscina, la cantidad de gas que puede almacenar un depósito o la capacidad de un motor.

Piaget e Inhelder (citado por Dickson, 1991) estudiaron que la noción de volumen ocupado se adquiere más tarde que la de volumen interno (capacidad). Y que el volumen desplazado resulta más difícil de adquirir, entendiendo como volumen desplazado la idea de que el volumen de un objeto es equivalente al volumen del líquido que desplaza al ser sumergido en un recipiente con agua. Para muchos alumnos el volumen desalojado parecería depender del peso del objeto sumergido, de la profundidad o tamaño. De ahí la importancia de proponer en el aula actividades que pongan de relieve estos aspectos.

B: Estimación - Medida exacta- Medida entera

Hemos analizado que la mayoría de la bibliografía escolar hace un tratamiento prioritario del SMD dando por supuesto que se sabe lo que es la magnitud que ha de ser medida, en este caso el volumen. Si bien el SMD ofrece una gran ventaja no hay que perder de vista que un uso prematuro de tal sistema lleve aparejada la incomprensión (Chamorro, 1994; p. 43). Es importante tener en cuenta los conceptos previos que el alumno necesita para el trabajo con el SMD, ya que el mismo funciona por agrupamientos de potencias de diez y es necesario que el alumno maneje el sistema de numeración decimal entre otras cosas. Tampoco se observan propuestas de estimación en la medida del volumen, a pesar que en los diseños curriculares (Pcia de Santa Fe) incluyen recomendaciones sobre la necesidad de la misma, en general no suelen realizarse actividades de estimación, tal vez porque no se tiene desarrollada esta habilidad, o porque no se dispone de orientaciones de cómo hacerlo, o por falta de tiempo.

Para ahondar sobre este punto, en la encuesta citada anteriormente, otra de las preguntas se refería a la estimación: ¿Cuánto estima que es el volumen de su cuerpo?

Las respuestas fueron clasificadas en dos grupos:

- I) Los que responden con una medida.



Los que responden con una medida totalizan 42% y sus estimaciones varían desde 48 cm³ hasta 14,4 m³. Se observa que sólo el 21 % del total de los encuestados hace una estimación razonable.

II) El 58 % fue incapaz de estimar una medida: El 25 % del total no responde.

Mientras que el restante 33% responde erróneamente: por ejemplo: Volumen de mi cuerpo es mi peso. Sería masa mi cuerpo no volumen, de acuerdo a sus medidas

Esta experiencia fue realizada por Kerslake (1976) en distintos países y la conclusión, al igual que la nuestra, fue que la mayoría de los docentes fueron incapaces de dar una estimación racional del volumen de sus propios cuerpos. Y esto en parte se debe a que la mayoría de las experiencias cotidianas se refieren al volumen interno (capacidad) y no al volumen ocupado. La autora citada sostiene que los ejercicios escolares sobre volumen ocupado se refieren al cálculo del volumen de cuerpos como el ortoedro o cono, sin importar lo que ocurre fuera del aula, los alumnos se preocupan por calcular volúmenes mediante una fórmula sin comprender el concepto y cómo se obtiene la misma. Hay una marcada inexperiencia en la noción de volumen ocupado, en el sentido de la falta de relación entre la situación idealizada presentada en el aula y cualquier problema práctico de la vida cotidiana.

Tanto la construcción del concepto de área como de volumen son procesos complejos que no se adquieren inmediatamente sino en forma gradual. Se debe construir el concepto de unidad entre otras cosas y hacer uso de la iteración de la misma para asignar un número al objeto que se mide. Y la dificultad radica fundamentalmente que ese número generalmente no es natural y se confunde la medida entera con la medida exacta. Hay que trabajar en la medición con las aproximaciones y los encuadramientos para evitar de este modo que los alumnos creen que las medidas son enteras, además de analizar que tanto el encuadramiento como la aproximación a aplicar en una medida dependen del tipo de medida y del uso de la misma. Al respecto Chamorro (1994) dice Pocos adultos recordarán, a pesar de haberlo estudiado en la escuela, los litros que contiene un metro cúbico... y lo que es peor, carecen de estrategias para resolver cuestiones reales de medición y ningún sentido de la estimación (p. 41) . En el aula por lo general los problemas se refieren a hallar el volumen de sólidos regulares y cuando en la vida cotidiana se encuentra, por ejemplo, con que tiene que hallar el volumen de un objeto irregular, es raro que se disponga de medios para resolver el problema. Por lo tanto es importante que el alumno tenga oportunidades de ejercitar problemas prácticos de medida y de estimación que encontrará en su entorno. Ya que la estimación es imposible desarrollarla si no se practican medidas de objetos reales, de manera que el error cometido vaya disminuyendo con la práctica. Hay dos momentos en donde debemos trabajar la estimación, uno es antes de haber utilizado el SIMELA mediante la comparación directa de objetos y la otra , luego de haber introducido el Sistema Legal, ésta es imprescindible para la vida diaria, ya que muchas veces hay que dar una medida sin utilizar instrumentos. Si se trabajan ambas cuestiones la representación intuitiva de las unidades y la relación de las unidades con lo real cobrará sentido para el alumno. Se considera que una estimación es aceptable si el error cometido no supera el 10% de la medida del objeto en cuestión. Es aconsejable practicar la estimación con cada una de las unidades de medidas que se vayan trabajando, de este modo no sólo se ejercitará la estimación sino el



aprendizaje de qué unidades usar en la medición. Durante el proceso de construcción de las unidades es necesario la comprobación con el instrumento de medida. Una primera aproximación es dar los objetos y pedir que realicen la estimación, una segunda es dar la medida y solicitar objetos que su medida se aproximen a la dada y por último estimar medidas utilizando unidades que ya han sido interiorizadas.

C: unidimensionalidad o tridimensionalidad

Se puede interpretar el volumen como una magnitud física unidimensional, se lo puede medir, estimar, comparar, sumar, etc. directamente, el cálculo consiste en el conteo de las unidades de volumen. O como una magnitud matemática tridimensional calculable como: a) producto de tres longitudes b) producto de una superficie por una longitud (Maza, 2005)

Según Vergnaud (1983) (citado por del Olmo, 1993) interpretar el volumen como una magnitud tridimensional corresponde a tratarlo como un modelo multiplicativo, lo que puede acarrear ciertas dificultades al haber trabajado anteriormente modelos aditivos (perímetro). Según este autor deben trabajarse coordinadamente los aspectos unidimensional y tridimensional, para lo cual son útiles las actividades de rellenado. Aparentemente, la constitución del volumen como magnitud tridimensional susceptible de ser hallado en función de otra magnitud (la longitud), sería obstaculizada por la representación plana de los objetos tridimensionales y por el aprendizaje previo de los algoritmos de cálculo (Maza, 2005; p. 90). Abordar estos temas, junto con la proporcionalidad hace que el volumen sea un concepto poderoso y a la vez difícil de construir por los alumnos.

D: Visualización- Representaciones

Los objetos de la geometría, en este caso los cuerpos pertenecen a un espacio teórico conceptualizado y los dibujos que realizan nuestros alumnos son una representación de esos objetos teóricos. Muchas veces los alumnos al mirar o dibujar una figura no analizan su concepto ni sus propiedades sino que se dejan llevar por lo que ven. Fischbein (1993) se refiere a estas tensiones que se originan en el tratamiento de las figuras geométricas, analizando que las mismas poseen simultáneamente características conceptuales y figurales, lo que denomina conceptos figurales. Y los errores que a veces se dan en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de estos conceptos figurales. La tendencia a rechazar la definición bajo la presión de limitaciones figurales, representa un obstáculo principal en el razonamiento geométrico (p.13). Desde el planteamiento de distintas actividades áulicas se debería trabajar este doble aspecto, ya que generalmente no es un proceso que se da naturalmente.

Tampoco dominan la visualización espacial, que es el proceso que permite manipular mentalmente figuras rígidas; el mismo requiere dos tipos de habilidades, una relacionada con la interpretación de la información figural, o sea poder leer, comprender e interpretar las representaciones visuales y la otra, relacionada con el procesamiento de imágenes mentales o sea la posibilidad de manipular, analizar y poder transformar los conceptos relacionados con ella en otra clase de información, a través de representaciones visuales externas.



Estas habilidades se pueden desarrollar mediante la representación secuenciada de objetos de tres dimensiones en dibujos de dos y la construcción de objetos tridimensionales a partir de su representación bidimensional. En este punto cuando se trabaja la representación de un objeto tridimensional en el plano el docente debe analizar cuál utiliza el texto seleccionado o cuál elegirá él para representar las figuras en E_3 (espacio de tres dimensiones), teniendo en cuenta que hay distintos tipos de representaciones, cada una de las cuales resalta un aspecto determinado del objeto. Entre las representaciones más significativas, según Alsina (1989) tenemos las proyecciones ortogonales (donde un grupo de dibujos corresponde a cada una de las caras de un objeto cuando el mismo es observado perpendicularmente enfrente de cada cara); los dibujos isométricos (se reproducen tres caras adyacentes del objeto de manera que los ángulos del punto de vista sean de 120°); los dibujos en perspectiva (donde se da una imagen más acertada del objeto) y los de cortes de nivel topográfico (donde se dan diferentes cortes planos a alturas determinadas). En el caso que nos ocupa es conveniente utilizar varias a la vez, para desarrollar y completar la percepción espacial, como así también proponer otras representaciones personales.

Comentarios finales

Para el estudio del volumen y su medida debe realizarse un estudio completo de la cualidad que permita aislarla, comparar objetos, usar diferentes unidades de medida, establecer la necesidad de una en particular, estimar la medida del volumen de un objeto,...o sea se deben poder proponer actividades variadas y con diferentes materiales que pongan de manifiesto los aspectos mas importantes del concepto de volumen y se eliminen aquellos que entorpecen la comprensión.

Sólo manipulando es posible distinguir las distintas propiedades de los objetos; es difícil comprender usando sólo el sentido de la vista que un objeto pesa más que otro, ó que un recipiente tiene más o menos capacidad que otro sin recurrir al trasvasado de líquido. La actividad de empaquetar es importante para la construcción del concepto de volumen, también lo son las de llenar y vaciar recipientes con distintos materiales. Es necesario que el alumno realice este tipo de actividades y no se quede sólo con la observación de un dibujo o con su relato. Además se debe permitir que descubra y aprenda de sus errores, fomentar las discusiones en grupo confrontando ideas, plantear situaciones problemáticas relacionadas con la vida diaria, usar y desarrollar el sentido común.

Freudenthal (1983) considera que para lograr que los alumnos se formen el objeto mental volumen es necesario trabajar actividades como:

- Realizar transformaciones con sólidos como modelar, verter, transformaciones de romper y rehacer, sumergir en líquidos, etc. A través de las actividades diferenciar volumen y área y volumen y capacidad.
- Realizar repartos equitativos de líquidos, masa, plastilina, etc. aprovechando la regularidad de ciertos cuerpos; estimando y midiendo.
- Comparar y reproducir sólidos, ya sea comparando bases y alturas, o por estimación, o por medición, o usando transformaciones que conserven el volumen. Se consideran también situaciones en las que hay



que comparar dos volúmenes pero también aquellas en las que se debe realizar una reproducción de un volumen con una forma diferente.

- Medir, ya sea por exhaustión con una unidad y afinando la medición con subunidades, o por acotación entre un nivel superior e inferior, o por inmersión, o por medio de relaciones geométricas generales midiendo las dimensiones lineales y aplicando fórmulas para obtener la medida.
- Realizar construcciones: cuerpos de igual área y distinto volumen, cuerpos de igual volumen y diferentes áreas, etc. Y luego representarlos en la hoja utilizando diferentes sistemas de representación.

Lo importante es que haya variedad de actividades para que la comprensión del concepto de volumen sea la adecuada.

Referencias Bibliográficas:

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R (1997) *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Síntesis. Madrid

Alsina, C., Burgués C. y Fortuny, J. (1989) *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Síntesis. Madrid.

Castelnuovo, E. (1963) *Geometría Intuitiva* Segunda parte. Labor. Bs. As.

Chamorro, C. y Belmonte, J. (1994) *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales* Síntesis. Madrid.

Del Olmo, M.A., Moreno, M.F. y Gil, F. (1993) *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis Madrid.

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.; (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. Labor

Ferraris, Cristina (1991) *Espacio*. Universidad Nacional del Comahue.

Fischbein, E. (1993): *The theory of figural concepts* en *Educational Studies in Mathematics*, 24. 139 - 162. (Traducción al español por Victor Larios Osorio, CICB, UAQ, México, 2002, 1 - 18)

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company. Boston.

Maza, Ma Elena (2005) *El problema didáctico del aprendizaje del volumen*. Tesis de Maestría en Didácticas Específicas. FHUC. UNL

Puig Adam, Pedro (1980) *Curso de Geometría Métrica* Tomo I. Decimoquinta edición. Gomez Puig Ediciones. Madrid

Saíz Roldan, Mariana. *El volumen ¿por dónde empezar?* En HYPERLINK <http://www.matedu.cinvestav.mx> [en línea mayo 2007]

Sanchez-Marmol, L. y Perez-Beato, M (1947) *Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación* Tomo II. Segunda edición. S.A.E.T.A. Madrid

Segovia, J. Castro, E. y Rico, L. (1989) *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis. Madrid.