VISUALIZAR, CONJETURAR Y DEMOSTRAR UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA

Margot Madama – Mary Curbelo
margot.madama@hotmail.com marycur5771@hotmail.com
Liceo "José Alonso y Trelles" de la ciudad de Tala, Uruguay.

Tema: Uso de tecnologías.
Modalidad: T (Taller)
Nivel educativo: Medio (de 11 a 17 años)
Palabras clave: Geometría dinámica; observación.

Resumen

La interpretación geométrica en sala de informática permite al estudiante reinterpretar, afianzar y elaborar los conceptos dados en clase sobre el tema y descubrir características o propiedades de los mismos, ya que el alumno cuenta con un número mayor de casos a observar pues moviendo puntos, descubre propiedades, conjetura en torno a ellas, para luego demostrarlas utilizando el software Geogebra. La misma tiene la ventaja de otorgar mayor significado a las situaciones algebraicas presentadas, creando un fuerte vínculo entre álgebra y geometría. En el taller se presentarán distintos trabajos que hemos propuesto en primer y segundo ciclo de Enseñanza Secundaria para que los participantes realicen dichas actividades y así crear un ambiente de opinión y discusión que enriquezca los trabajos entusiasmando a los participantes en el uso de esta herramienta. Luego se propondrá crear una actividad en Geogebra que permita visualizar e inferir propiedades para luego demostrarlas utilizando el software

Introducción

La interpretación geométrica en sala de informática permite al estudiante, además de desarrollar habilidades de visualización, reinterpretar, afianzar, y elaborar los conceptos dados en clase sobre el tema y descubrir características o propiedades de los mismos, ya que el alumno cuenta con un número mayor de casos a observar pues moviendo puntos, descubre propiedades, conjetura en torno a ellas, para luego demostrarlas utilizando el software Geogebra. La misma tiene la ventaja de otorgar mayor significado a las situaciones algebraicas presentadas, creando un fuerte vínculo entre álgebra y geometría.

La utilización del programa permite agilidad, ya que se aumenta la cantidad de casos que se pueden observar, además de generar mayor certeza con que se puede trabajar el tema. De esta forma la observación de imágenes implica un trabajo no rutinario, lo cual no significa que no se realice un trabajo manual, pues éste también es importante y necesario.

La exploración informal de relaciones geométricas por construcción y medición con lápiz y papel, consumen demasiado tiempo (y son relativamente inexactas), esas figuras construidas son "estáticas" y uno tiene que redibujar la figura o ser capaz de visualizar cómo podría cambiar de forma. El dinamismo de las figuras que se construyen con el software Geogebra, facilita la visión global de un problema, el desarrollo de conceptos ya que en la visualización experimentan y descubren regularidades que, con el trabajo manual, requeriría mucho más tiempo y esfuerzo. Con éste tipo de programa las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos al que se usa en el universo del " lápiz y papel", con la ventaja de poder realizar construcciones complejas para luego modificarlas. Una vez creadas, estas figuras pueden redibujarse moviendo sus elementos básicos directamente mientras se mantienen las propiedades que se les han dado explícitamente.

De esta forma el trabajo en Geogebra permite estimular la observación, la experimentación y la generalización, así como la elaboración de conjeturas, su verificación experimental, permitiendo que el alumno no se pierda en construcciones intermedias y su posterior demostración.

ACTIVIDADES CREADAS PARA TRABAJAR CON GEOGEBRA

ACTIVIDAD 1:

Unidad: Geometría: Método de los lugares geométricos.

Tema: Ángulo inscripto en una circunferencia. Ángulo al centro

Curso: 4° año

Objetivos: * Observar que los puntos del plano que ven a un segmento bajo un ángulo constante es un arco capaz. * Definir ángulo inscripto en una circunferencia y ángulo al centro a partir de su construcción. * Deducir y justificar la propiedad que relaciona ángulo inscripto y ángulo al centro que abarca el mismo arco.

Actividad previa: Antes del siguiente trabajo, se les presenta a los alumnos un problema y una actividad en Geogebra dónde, a partir de ellas, deducen la definición de arco capaz y justifican que es un lugar geométrico.

Ficha de trabajo: Ángulo inscripto y ángulo al centro: una relación particular

PRIMERA PARTE: En busca de una propiedad

*Eliminar ejes (vista-ejes)

1.- Construir una circunferencia de centro O y dos puntos A y B en ella (Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos. Para llamar O a su centro: señala el punto A y con el secundario elige: renombra. Para hallar otro punto A en la cfa selecciona: punto en objeto y señala la cfa)

2.- Construir el ángulo ACB con C en uno de los arcos de la cfa anterior, medirlo y comprobar que el ángulo ACB siempre mide igual cuando C varía en un mismo arco AB (para ello busca punto en objeto y señala la cfa para encontrar C, traza las semirrectas CA y CB con: semirrecta por dos puntos y mide el ángulo convexo que esas dos semirrectas determinan con: ángulo, si te da la medida del ángulo no convexo ACB señala las semirrectas en orden contrario, luego mueve el punto C con: elige y mueve).

3.- Podemos afirmar entonces que**:**

EL ______________________________ DE LOS PUNTOS DE UNO DE LOS SEMIPLANOS DE BORDE [A,B] QUE SON VÉRTICES DE ÁNGULOS QUE MIDEN α Y CUYOS LADOS PASAN POR A Y B ES ______________________________ DE SEGMENTO AB Y ÁNGULO α

4.- ¿Qué nombre recibe un ángulo convexo cuyo vértice pertenece a una circunferencia y sus lados son secantes a ella? ______________________________

(Puede servirte de ayuda el libro con el que trabajamos en clase: Matemática 4)

5.- Construir el ángulo AOB y medirlo (si el punto C elegido está en el mayor arco de cuerda AB debes medir el ángulo AOB convexo, pero si C pertenece al menor arco de cuerda AB, el ángulo AOB es el no convexo)

6.- ¿Qué nombre recibe un ángulo cuyo vértice es el centro de una cfa? ____________

7.- ¿Cómo es el ángulo AOB con respecto al ACB? ______________________________

Puede servirte de ayuda calcular el doble de α.

8.- Podemos decir entonces que:

LA MEDIDA DE UN ÁNGULO ______________ EN UNA CIRCUNFERENCIA ES IGUAL A LA ____________ DE LA MEDIDA DEL ÁNGULO ____________ QUE ABARCA EL MISMO ARCO.

<u>**SEGUNDA PARTE**</u>: Demostración de la propiedad

* Archivo-nuevo-no guardar

1.- Construir una circunferencia de centro O, los puntos A, B y C en ella (elige C en el arco mayor AB), las semirrectas CA, CO y CB, OA y OB.

2.- Definir el punto E, intersección de la semirrecta CO y la cfa (intersección de dos objetos y señalar ambas). Observa que el punto C aparece como D en la vista gráfica, para que vuelva a aparecer como C: en vista algebraica dar un clic sobre D.

3.- Medir los ángulos convexos $A\hat{C}O$,$O\hat{C}B$, $A\hat{O}E$ y $E\hat{O}B$. Observa que el tercer ángulo es el doble del primero y que el cuarto el doble del segundo.

4.- Medir los ángulos convexos $O\hat{A}C$ y $C\hat{B}O$.

5.- ¿Por qué miden lo mismo los ángulos $A\hat{C}O$y $O\hat{A}C$? ___________________________

¿Y los ángulos $C\hat{B}O$ y $O\hat{C}B$? ____

6.- ¿Por qué el ángulo $A\hat{O}E$ es igual a la suma de $A\hat{C}O$ y $O\hat{A}C$?____________________

¿Por qué el ángulo $E\hat{O}B$ es igual a la suma de $C\hat{B}O$ y $O\hat{C}B$?______________________

7.- De la parte 5 y la 6 podemos concluir que: $A\hat{O}E$ = __ $A\hat{C}E$ y que $E\hat{O}B$ = __ $E\hat{C}B$

Por lo tanto: **AOB = __ ACB** Lo que comprueba la propiedad de la primera parte

8.- Comprobar que la propiedad es válida cualquiera sea la posición de D.

(En la ficha de los alumnos aparece la guía para realizarlo)

ACTIVIDAD 2:

Unidad: Álgebra-Funciones

Tema: Funciones racionales

Curso: 4° año

Objetivos: *Retomar y aplicar a una función racional dada por su gráfico los conceptos de: función, raíz y signo. *Explicar el concepto de dominio de una función y cómo se encuentra el mismo a partir de su gráfico, además cómo obtener la raíz y el dominio a partir de la expresión de la función racional dada. *Observar, conjeturar y fundamentar cómo hallar: dominio, raíz, signo, corte con Oy y asíntotas de una función racional a partir de su gráfico.

Ficha de trabajo: Estudio de la función racional

PRIMERA PARTE: Analizando un gráfico realizado en Geogebra

1.- En la barra de entrada escribe la función: f(x) = (3x - 6)/(x + 1) y presiona enter

2.- Observando el gráfico obtenido: i) explicar por qué corresponde al de una función, ii) indicar cuál es el dominio de la misma, la raíz y el signo. iii) Observando la expresión analítica de la función, ¿cómo crees que puedes hallar el dominio de la función? ¿y la raíz? iv) Traza las rectas: y = 3, x = -1 y observa que ninguna de la "ramas" del gráfico las cortan.

<u>SEGUNDA PARTE</u>: Trabajo en Geogebra

1.- Crear los deslizadores: a, b, c y d (Deslizador y hacer clic en la vista gráfica donde irá el deslizador, selecciona un rango entre -10 y 10 en cada uno de los cuatro deslizadores y "aplica".

2.- En la barra de entrada escribe la función: f(x) = (a x + b)/(c x + d) y presiona enter

3.- Mueve los deslizadores para: a=4, b=-8, c=1 y d=-1 con: elige y mueve.

4.- Traza las rectas y = 4, x = 1 (en barra de entrada escribe: y = 4 y presiona enter, luego x = 1 y enter. Puedes volver a desplazar el gráfico, alejarlo o acercarlo)

5.- Señala un punto sobre la hipérbola que quedo dibujada (Nuevo punto y señalar la hipérbola)

6.- OBSERVACIONES:

Observando el gráfico de la función f / f (x) = $\frac{4x-8}{x-1}$ que dibujaste contesta:

a) ¿Todos los valores de x tienen imagen? ________ Mueve el punto A y observa sus coordenadas en la vista algebraica, ¿es posible que A tenga abscisa 1? _____________

¿Cómo puedes hallar ese valor teniendo la expresión de f? ______________________

Decimos que el dominio de la función f es: __________ y escribimos: **D (f) = R – { 1 }**

b) ¿Cuál es la raíz de la función? ________ Mueve el punto A hasta que coincida con el punto de corte de la hipérbola con el eje x, ¿cuáles son sus coordenadas? __________

¿Cómo puedes hallar ese valor teniendo la expresión de f? _______________________

c) Escribe el signo de f según el gráfico ______________________________________

d) ¿Cuál es el corte con el eje Oy? __________ ¿Cómo puedes hallar ese valor teniendo la expresión de f? ____

e) ¿Qué sucede con el comportamiento de la función cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto? ____

Escribimos: $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}$ y se lee: f de x tiende a ___ cuando x tiende a mas o menos infinito

Decimos que la recta y = 4 es una asíntota horizontal (A.H.: y = 4)

f) ¿Qué sucede con el comportamiento de la función en las cercanías de la recta x = 1?

____

Escribimos: * $f(x) \longrightarrow$ y se lee: f de x tiende a _____ cuando x tiende a

$x \to 1^{+}$ 1 por derecha

* $f(x) \to$ y se lee: f de x tiende a _____ cuando x tiende

$x \to 1^{-}$ a 1 por izquierda

Decimos que la recta x = 1 es una asíntota vertical (A.V.: x = 1)

10.- Realiza el estudio efectuado en la parte anterior con la función $f \,/\, f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$

ACTIVIDAD 3:

Unidad: Geometría analítica del espacio.

Tema: Ecuación cartesiana de planos en distintas posiciones.

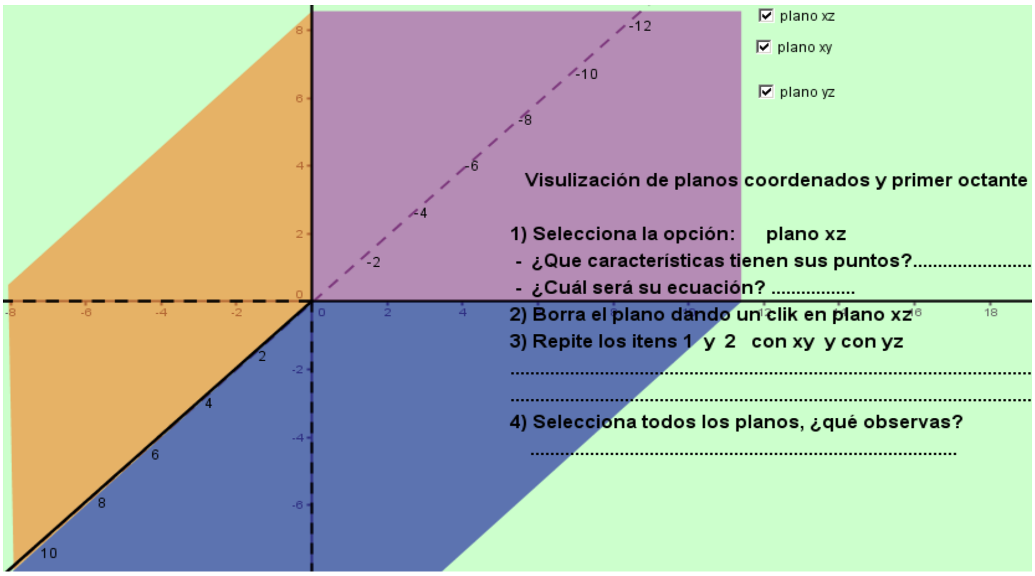
Curso: 5° año, Matemática 1, Núcleo Común.

Objetivos: *Visualizar e inducir ecuación del plano en diferentes posiciones en el espacio y aplicarlo luego a cuerpos cuyas caras son planas.

Representación de planos. Ecuación cartesiana de un plano según su ubicación en el plano

Visualización de planos coordenados, primer octante y planos paralelos a los coordenados. Ecuaciones de cada plano.

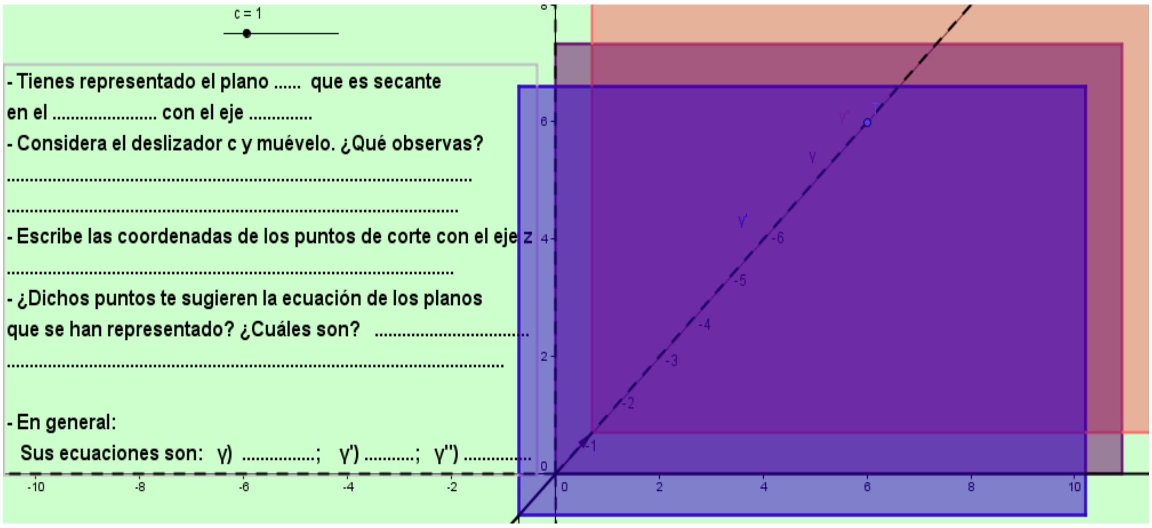
Para ello busca la actividad: 1) realizada en geogebra:



Visualización de los planos paralelos a los coordenados y deducción de ecuación:

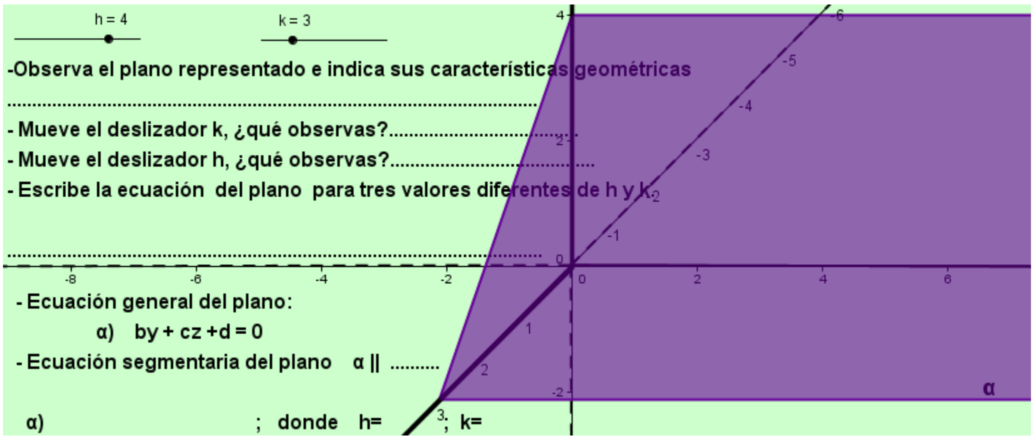
Para ello busca las actividades: 2); 3); 4); 5) creadas con el software Geogebra.

A modo de ejemplo se muestra la ficha 3:

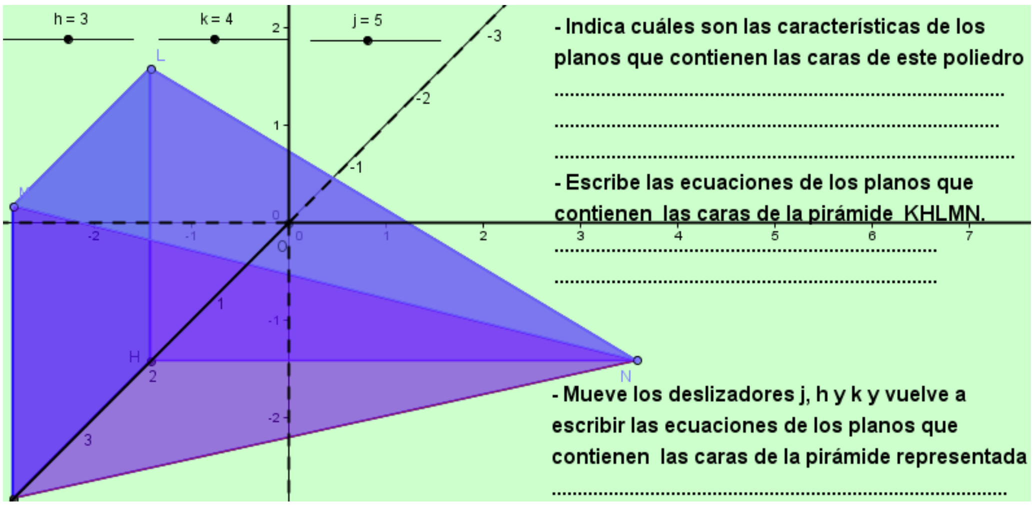


<u>Visualización de los planos secantes a dos o tres ejes coordenados</u>: Deducción de su ecuación. (Para ello busca las fichas: 6); 7); 8); 9) creadas en Geogebra).

A modo de ejemplo se muestra la ficha 6:



<u>Ejercicios: (fichas 10 y 11)</u> (A modo de ejemplo ficha 11)



<u>ACTIVIDAD 4</u>:

Unidad: Geometría del triángulo.

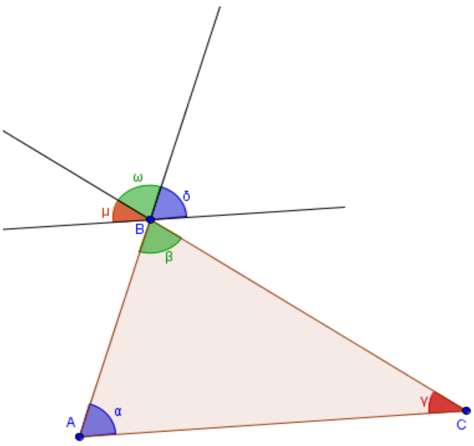
Tema: Propiedades relativas a ángulos de un triángulo

Curso: 2° año

Objetivos: *Observar, deducir y demostrar propiedades sobre suma de ángulos internos de un triángulo, relación entre ángulo interno y su correspondiente ángulo externo y teorema del ángulo externo.

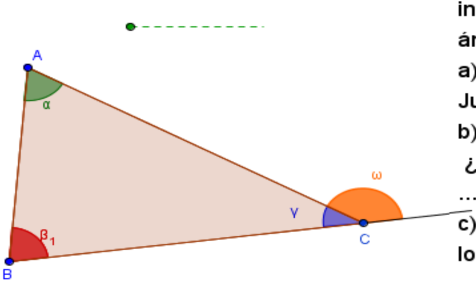
Suma de los ángulos internos de un triángulo.

- Primero se trabaja con una ficha donde se deduce la propiedad a través de mediciones y sumas de ángulos internos del triángulo.
- Luego se trabaja con la ficha 4 para su demostración apoyándonos en el software Geogebra.



Se ha representado un triángulo ABC y se han indicado sus ángulos interiores.
Mueve el deslizador que tienes en la parte superior.
¿Qué se ha representado?...
....
....
¿Qué relación encuentras entre los ángulos azules? justifica
....
¿Y los marrones?Justifica ....
¿Y los verdes? Justifica...
¿Cuánto es μ + ω + δ? Justifica ....
¿Qué puedes decir acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ....

Relación entre ángulo internos y sus correspondientes ángulos externos. (ficha 5)



Se ha representado un triángulo ABC, se han indicado sus ángulos internos y uno de los ángulos externos del mismo.

a) ¿Cuál es la suma del ángulo azul con el ángulo anaranjado? Justifica. ....

b) Mueve el deslizador que encuentras en la parte superior. ¿Qué observas?..
....

c) Busca alguna relación entre el ángulo externo indicado y los ángulos internos del triángulo no adyacentes a él
. ...,

d) Conclusión:...

e) Vamos a demostrarlo:

$\alpha+\beta+\gamma=$ ....

$\gamma+\omega=$...

Como γ es el mismo en ambos casos, se concluye que: $\omega=\alpha+\beta$