



Departamento de Didáctica de la Matemática
y de las Ciencias Experimentales
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Almería

Tesis Doctoral

**EVOLUCIÓN DE ACTITUDES Y COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE
SECUNDARIA AL INTRODUCIR GEOGEBRA EN EL
AULA**

María del Mar García López

ALMERÍA, 2011



Departamento de Didáctica de la Matemática
y de las Ciencias Experimentales
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Almería

**EVOLUCIÓN DE ACTITUDES Y COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE
SECUNDARIA AL INTRODUCIR GEOGEBRA EN EL
AULA**

Tesis Doctoral que presenta
MARÍA DEL MAR GARCÍA LÓPEZ

Dirigida por la doctora
ISABEL MARÍA ROMERO ALBALADEJO

ALMERÍA, 2011

El trabajo que se presenta en esta memoria tiene una doble finalidad. Por una parte ha contribuido al desarrollo de mi experiencia investigadora dentro del campo de la Educación Matemática y a la mejora de mi práctica docente, es decir, ha incidido simultáneamente en mi labor como profesora-investigadora. Por otra parte, me permite cumplir con los requisitos para optar al grado de doctor dentro del programa “Doctorado en Investigación Didáctica” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Almería. También, al incluir en la presente memoria un anexo conteniendo el resumen y las conclusiones de este estudio en inglés, me brinda la oportunidad de optar a la mención de “Doctor europeus”.

Durante el curso escolar 2008-09 disfruté de una licencia por estudios de un año, concedida por la Junta de Andalucía, por la que me siento muy agradecida. Durante este periodo pude dedicarme plenamente a avanzar en este trabajo y además, me fue posible realizar una estancia de tres meses (desde el 1 de abril al 30 de junio de 2009) en la Universidad de Leeds (Inglaterra), bajo la supervisión del Dr. Jaume Amatller, para complementar mi formación investigadora y que me permite asimismo optar a la mención de “Doctor europeus”.

A mi familia,
y en especial,
a Miguel Ángel

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a mis alumnos y a todos mis compañeros del IES Murgi (profesores, equipo directivo y coordinador TIC) por su contribución al desarrollo de esta investigación y por su inestimable apoyo.

A mi directora, Isabel Romero Albaladejo, por permitirme trabajar a su lado y transmitirme su experiencia y sabiduría, no solamente en el ámbito de la investigación matemática. Sin duda, su apoyo incondicional ha sido determinante en los momentos difíciles y ha sabido contagiarme su positividad para afrontar los retos que la vida nos pone por delante.

A todos los miembros del departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Almería, en especial a los doctores Francisco Gil Cuadra y María Francisca Moreno Carretero por sus correcciones y sugerencias, así como por su disponibilidad para ayudarme y ofrecerme su conocimiento y experiencia.

A los miembros del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada por sus aportaciones a este trabajo de investigación a lo largo de su desarrollo y por su apoyo.

Al doctor Jaume Ametller, por brindarme su gran sabiduría y experiencia investigadora y guiarme y orientarme durante la difícil tarea de analizar los datos, contribuyendo así a garantizar la calidad de este proceso. También quiero alabar su calidad humana, pues no solamente tramitó mi estancia en Leeds, sino que consiguió que ésta fuese agradable y me sintiese arropada por él y todos sus compañeros del CSSME (Centre for the Study of Science and Mathematics Education, School of Education), a los que también quiero agradecer su buena acogida y el apoyo recibido.

A la doctora Inés María Gómez-Chacón, por su constante interés, apoyo y disposición para comentar aspectos de esta investigación, aportándome su gran conocimiento y experiencia.

Gracias a los doctores Ángel Gutiérrez Rodríguez (Universidad de Valencia), Juan Fernández Sierra (Universidad de Almería), Daniela Padua Arcos (Universidad de Almería) por ofrecerme su ayuda y conocimientos, cuando así se lo solicité.

A mi familia, en especial a mi hermana Rocío, siempre dispuesta a escuchar y entregarme su dulzura y cariño. A todos mis amigos y compañeros de trabajo, quienes nunca han dejado de transmitirme palabras de ánimo y ofrecerme su ayuda incondicional.

A Miguel Ángel, mi marido y compañero, mi principal apoyo en la vida y mi amor. Tenerlo a mi lado me ha ayudado a no desanimarme en los momentos más difíciles y me ha hecho tener fuerzas para dedicarme en cuerpo y alma a que esta investigación vea la luz. Ha sabido comprender la importancia para mí de este trabajo y ser paciente, y por ello, con estas palabras quiero darle las gracias una vez más.

En definitiva, en estas líneas pretendo mostrar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas, que de una u otra manera, han contribuido con sus aportaciones, sugerencias y apoyo a que esta investigación se haya llevado a cabo.

ÍNDICE

Estructura de la memoria y de la investigación de tesis.....	1
---	----------

BLOQUE I. ENCUADRE DEL ESTUDIO Y MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1. Encuadre del estudio.....	9
--	----------

1.1. Origen y motivación	9
1.2. Conjetura de investigación.....	10
1.3. Objetivos de investigación.....	15
1.4. Antecedentes	16
1.5. Interés de la investigación.....	25

CAPÍTULO 2. Las tecnologías de la información y la comunicación y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.....	31
---	-----------

2.1. Incidencia de las TIC en matemáticas	31
2.2. Las herramientas informáticas como apoyo a la enseñanza	39
2.3. Las TIC y la enseñanza-aprendizaje de la Geometría.....	44
2.4. Integración de las nuevas tecnologías en el aula	55
2.4.1. El papel del profesor	56
2.4.2. La naturaleza de las tareas de aula.....	58
2.4.3. La cultura social de aula: trabajo colaborativo	60

CAPÍTULO 3. Las actitudes en matemáticas	65
---	-----------

3.1. Importancia de las actitudes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.....	65
3.2. Caracterización de las actitudes relacionadas con las matemáticas.....	68
3.2.1. Actitudes hacia la Matemática	73
3.2.2. Actitudes matemáticas	77
3.3. Transformación de actitudes en matemáticas. Influencia de las TIC	89
3.4. Variables a tener en cuenta para transformar las actitudes de los estudiantes.....	92

CAPÍTULO 4. Aprendizaje matemático basado en competencias	101
--	------------

4.1. Competencias en el marco curricular. Noción de competencia.....	101
4.2. Competencia matemática	104
4.3. Elección y caracterización de las competencias matemáticas	111
4.3.1. Caracterización de las competencias matemáticas desde el punto de vista Geométrico.....	114

BLOQUE II. METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

CAPÍTULO 5. Marco metodológico	131
---	------------

5.1. Paradigma de investigación: La Investigación-Acción.....	131
---	-----

5.1.1. Justificación de elección	131
5.1.2. Definición y características.....	133
5.2. Experimentos de enseñanza dirigidos por una conjetura.....	136
5.2.1. Caracterización	136
5.2.2. Recogida de datos y análisis	138
5.2.3. Evaluación de la investigación.....	139
5.3. Posicionamiento de esta investigación.....	142

CAPÍTULO 6. Planificación145

6.1. Revisión del plan general de investigación.....	145
6.2. Conjetura y objetivos de esta investigación.....	148
6.3. El Análisis Didáctico	149
6.4. Diseño de la secuencia didáctica.....	153
6.4.1. Análisis de contenido	154
6.4.2. Análisis cognitivo	160
6.4.3. Análisis de instrucción.....	166
6.4.4. Planificación del análisis de actuación	176
6.5. Instrumentos para la recogida de datos.....	177
6.5.1. Instrumentos no basados en la observación.....	178
6.5.2. Instrumentos basados en la observación	183

CAPÍTULO 7. Acción y Observación193

7.1. Descripción del contexto.....	193
7.2. Acción.....	195
7.2.1. Análisis de actuación durante la acción.....	197
7.3. Respuesta al primer objetivo de investigación.....	213
7.4. Observación	214
7.4.1. Muestra de estudiantes.....	215

BLOQUE III. ANÁLISIS GLOBAL Y REFLEXIÓN

CAPÍTULO 8. Consideraciones para el análisis de datos223

8.1. Métodos de análisis.....	223
8.2. Fases de análisis.....	227
8.3. Consideraciones y criterios de análisis	228
8.3.1. Triangulación de la información.....	230
8.4. Esquema de análisis	232

CAPÍTULO 9. Análisis de Actitudes.....237

9.1. Análisis de las transformaciones actitudinales	237
9.1.1. Perfil actitudinal previo de los estudiantes	238
9.1.2. Transformación de las actitudes hacia las matemáticas.....	239
9.1.2.1. Análisis del total de estudiantes.....	239
9.1.2.2. Análisis de la muestra de estudiantes.....	260
9.1.2.3. Estudio de casos	267

9.1.2.3.1. Historia de A8	268
9.1.2.3.2. Estudio de A3, A7, A9 y A10	284
9.1.2.3.2.1. Estudio de A3.....	292
9.1.2.3.2.2. Estudio de A7.....	297
9.1.2.3.2.3. Estudio de A9 y A10.....	305
9.1.3. Transformación de las actitudes matemáticas.....	305
9.1.3.1. Análisis del total de estudiantes.....	314
9.1.3.2. Análisis de la muestra de estudiantes.....	330
9.1.3.3. Estudio de casos.....	330
9.1.3.3.1. Historia de A8	358
9.1.3.3.2. Estudio de A3, A7, A9 y A10	359
9.1.3.3.2.1. Estudio de A3.....	367
9.1.3.3.2.2. Estudio de A7.....	377
9.1.3.3.2.3. Estudio de A9 y A10.....	387
9.1.4. Respuesta global al objetivo 2 de la investigación	391
9.2. Características de Geogebra asociadas a la transformación actitudinal.....	393
9.2.1. Características de Geogebra asociadas a la transformación de actitudes hacia las matemáticas.....	396
9.2.2. Características de Geogebra asociadas a la transformación de actitudes matemáticas	400
9.2.3. Respuesta global al objetivo 3 de la investigación	

CAPÍTULO 10. Análisis de competencias.....403

10.1. Análisis del desarrollo de competencias durante el trabajo con Geogebra.....	403
10.1.1. Análisis del total de estudiantes.....	414
10.1.2. Análisis de la muestra de estudiantes.....	425
10.1.3. Estudio de casos.....	425
10.1.3.1. Historia de A8	459
10.1.3.2. Estudio de A3, A7, A9 y A10	460
10.1.3.2.1. Estudio de A3.....	468
10.1.3.2.2. Estudio de A7.....	476
10.1.3.2.3. Estudio de A9 y A10.....	488
10.1.4. Respuesta global al objetivo 4 de la investigación	491
10.2. Características de Geogebra asociadas al desarrollo de competencias.....	491
10.2.1. Atributos y ventajas que influyen en el desarrollo de cada competencia	496
10.2.2. Respuesta global al objetivo 5 de la investigación	

BLOQUE IV. CONCLUSIONES Y APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 11. Conclusiones y aportaciones de la investigación.....505

11.1. Recordando el problema de investigación	506
11.2. Conclusiones y reflexiones finales.....	507
11.3. Limitaciones de la investigación.....	529
11.4. Aportaciones del trabajo	530
11.5. Implicaciones para futuras investigaciones	535

REFERENCIAS537

ANEXOS.....573

Anexo A. Ciclo 1 de la investigación.....	575
Anexo B. Búsqueda de información (Revisión de antecedentes en la literatura)	615
Anexo C. Efectos de la investigación en mi desarrollo profesional docente	621
Anexo D. Revisión fenomenológica de los contenidos de teselaciones del plano.....	627
Anexo E. Análisis para validación del cuestionario “Me Interesa tu Opinión”	635
Anexo F. Guión de las entrevistas grupales	641
Anexo G. Muestra de fichas de trabajo para las tareas con lápiz y papel y con Geogebra	645
Anexo H. Parrillas de observación de actitudes y competencias	659
Anexo I. Análisis individualizado de los estudiantes de la muestra no pertenecientes al estudio de casos	667
Anexo J. Análisis realizados con SPSS a las respuestas del cuestionario “Actitud hacia las mates”	691
Anexo K. Secuencia definitiva de tareas de mosaicos con Geogebra.....	715
Anexo L: Resumen y conclusiones en inglés.....	721

Índice de Tablas

<i>Tabla 1-1.</i> Estudios referentes a la incorporación y uso de las TIC.....	17
<i>Tabla 1-2.</i> Estudios sobre características de las TIC	18
<i>Tabla 1-3.</i> Estudios relacionados con nuestra investigación.....	18
<i>Tabla 1-4.</i> Estudios sobre actitudes relacionadas con las matemáticas	21
<i>Tabla 1-5.</i> Estudios referentes a la competencia o alfabetización matemática.....	22
<i>Tabla 1-6.</i> Estudios sobre competencias matemáticas específicas.....	23
<i>Tabla 4-1.</i> Competencias matemáticas.....	105
<i>Tabla 6-1.</i> Focos conceptuales	157
<i>Tabla 6-2.</i> Capacidades generales	161
<i>Tabla 6-3.</i> Capacidades asociadas a los contenidos de teselaciones del plano	161
<i>Tabla 6-4.</i> Capacidades-competencias asociadas a los contenidos de teselaciones del plano	163
<i>Tabla 6-5.</i> Foco 1: Mosaicos (teselas cualesquiera)	174
<i>Tabla 6-6.</i> Foco 2: Mosaicos regulares	174
<i>Tabla 6-7.</i> Foco 3: Mosaicos demirregulares.....	174
<i>Tabla 6-8.</i> Foco 4: Mosaicos de Escher	175
<i>Tabla 6-9.</i> Instrumentos empleados para la recogida de datos	178
<i>Tabla 6-10.</i> Puntuaciones de los cuestionarios de actitudes	179
<i>Tabla 6-11.</i> Ítems de la escala EAHM-U agrupados por dimensiones	179
<i>Tabla 6-12.</i> Parrilla de observación de actitudes	186
<i>Tabla 6-13.</i> Parrilla de observación de competencias de tarea 5	191
<i>Tabla 7-1.</i> Gráfico temporal de la fase de acción.....	196
<i>Tabla 7-2.</i> Instrumentos de recogida de datos usados para dar respuesta a cada objetivo.....	214
<i>Tabla 7-3.</i> Perfiles de los alumnos de la muestra.....	217
<i>Tabla 7-4.</i> Instrumentos empleados análisis final de actitudes y competencias	218
<i>Tabla 8-1.</i> Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada	224
<i>Tabla 8-2.</i> Fases de análisis según conjuntos de estudiantes implicados.....	226
<i>Tabla 8-3.</i> Instrumentos y fuentes de datos empleados para análisis de actitudes y competencias por conjuntos de alumnos.....	227

<i>Tabla 8-4.</i> Instrumentos triangulados por conjuntos de estudiantes para el análisis de actitudes y competencias	234
<i>Tabla 9-1.</i> Cuestionario “Actitud hacia las Mates” (Pretest y Postest).....	241
<i>Tabla 9-2.</i> Porcentajes de estudiantes según la opinión reflejada en el Pretest y Postest.....	242
<i>Tabla 9-3.</i> Cuestionario “Me Interesa tu Opinión” (MIO).....	244
<i>Tabla 9-4.</i> Varianza total explicada con cuatro factores antes y después de la rotación Varimax.....	245
<i>Tabla 9-5.</i> Matriz de componentes.....	246
<i>Tabla 9-6.</i> Matriz de componentes rotados.....	246
<i>Tabla 9-7.</i> Ítems que definen cada factor del cuestionario MIO.....	247
<i>Tabla 9-8.</i> Porcentajes de estudiantes según la opinión reflejada en los factores de MIO	248
<i>Tabla 9-9.</i> Opiniones de los estudiantes sobre sus actitudes durante las tareas GG.....	256
<i>Tabla 9-10.</i> Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada.....	260
<i>Tabla 9-11.</i> Indicadores de la parrilla de observación referentes a actitudes hacia las matemáticas	262
<i>Tabla 9-12.</i> Respuestas de A8 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”	270
<i>Tabla 9-13.</i> Respuestas de A8 al cuestionario “Me interesa tu opinión”.....	271
<i>Tabla 9-14.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase TR20	275
<i>Tabla 9-15.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase GM25.....	278
<i>Tabla 9-16.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase CO23.....	280
<i>Tabla 9-17.</i> Respuestas de A3 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”	286
<i>Tabla 9-18.</i> Respuestas de A3 al cuestionario “Me interesa tu opinión”.....	287
<i>Tabla 9-19.</i> Respuestas de A7 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”	293
<i>Tabla 9-20.</i> Respuestas de A7 al cuestionario “Me interesa tu opinión”.....	294
<i>Tabla 9-21.</i> Respuestas de A9 y A10 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”	299
<i>Tabla 9-22.</i> Respuestas de A9 y A10 al cuestionario “Me interesa tu opinión”.....	300
<i>Tabla 9-23.</i> Porcentajes de alumnos y sesiones asociados a cada actitud matemática ..	309
<i>Tabla 9-24.</i> Actitudes matemáticas analizadas con cada instrumento	311
<i>Tabla 9-25.</i> Indicadores de la parrilla de observación referentes a actitudes Matemáticas	315
<i>Tabla 9-26.</i> Valores estadísticos para actitudes evidenciada globalmente por estudiantes de la muestra.....	316
<i>Tabla 9-27.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase FP3	334
<i>Tabla 9-28.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase FP1	337
<i>Tabla 9-29.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase EC4	340
<i>Tabla 9-30.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase PE9.....	343
<i>Tabla 9-31.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase PR10	345
<i>Tabla 9-32.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase C13.....	348
<i>Tabla 9-33.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase AU16.....	350
<i>Tabla 9-34.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase SS17.....	354
<i>Tabla 9-35.</i> Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase SS19.....	354
<i>Tabla 10-1.</i> Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada.....	414
<i>Tabla 10-2.</i> Porcentaje de sesiones en que cada estudiante de la muestra manifestó cada competencia	415
<i>Tabla 10-3.</i> Niveles de competencias de A8.....	428
<i>Tabla 10-4.</i> Análisis global de las capacidades de nivel 2 asociadas a PR manifestadas por A8.....	430

<i>Tabla 10-5.</i> Influencia, en %, de cada factor en las capacidades nivel 2 más relevantes, asociadas a PR.....	431
<i>Tabla 10-6.</i> Análisis global de capacidades de nivel 3 asociadas a PR manifestadas por A8.....	432
<i>Tabla 10-7.</i> Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de las capacidades nivel 3 más relevantes, asociadas a PR	433
<i>Tabla 10-8.</i> Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de capacidades de nivel 3 asociadas a AD	438
<i>Tabla 10-9.</i> Capacidades generales comunes a todas las tareas, asociadas con C.....	441
<i>Tabla 10-10.</i> Influencia de cada factor en el desarrollo de A8 de la capacidad CG2.2	442
<i>Tabla 10-11.</i> Influencia de cada factor en el desarrollo de A8 de la capacidad CG3 ...	444
<i>Tabla 10-12.</i> Capacidades asociadas a la competencia Modelar	446
<i>Tabla 10-13.</i> Influencia de cada factor en el desarrollo de A8 de la capacidad CG1	446
<i>Tabla 10-14.</i> Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de A8 de capacidades asociadas a RP	449
<i>Tabla 10-15.</i> Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de capacidades de nivel 2 asociadas a R	451
<i>Tabla 10-16.</i> Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de capacidades de nivel 3 asociadas a R	452
<i>Tabla 10-17.</i> Influencia, en %, de cada factor en desarrollo de capacidades de nivel 2 asociadas a HR	456
<i>Tabla 10-18.</i> Influencia, en %, de cada factor en desarrollo de capacidades de nivel 3 asociadas a HR	456
<i>Tabla 10-19.</i> Niveles de competencias alcanzados por A3.....	462
<i>Tabla 10-20.</i> Niveles de competencias alcanzados por A7.....	470
<i>Tabla 10-21.</i> Niveles de competencias alcanzados por A9 y A10.....	478
<i>Tabla 10-22.</i> Niveles de desarrollo alcanzados por cinco casos estudiados trabajando con Geogebra	486
<i>Tabla 10-23.</i> Relaciones encontradas en cinco casos estudiados entre competencias y actitudes.....	488

Índice de Figuras

<i>Figura 2-1.</i> Atributos, ventajas y peligros del uso de SGD en el aula.....	54
<i>Figura 2-2.</i> Fases para la integración efectiva de la tecnología.....	64
<i>Figura 3-1.</i> Actitudes Matemáticas Deseables en los Estudiantes.....	78
<i>Figura 3-2.</i> Variables influyentes en las actitudes del alumnado consideradas en este trabajo	98
<i>Figura 4-1.</i> Niveles de Complejidad de las Tareas	113
<i>Figura 5-1.</i> Protocolo de I-A.....	134
<i>Figura 6-1.</i> Relación entre competencias, capacidades y tareas.....	152
<i>Figura 6-2.</i> Clasificación de los contenidos.....	156
<i>Figura 6-3.</i> Mapa conceptual de mosaicos	158
<i>Figura 6-4.</i> Sistemas de representación	159
<i>Figura 6-5.</i> Relación entre subestructura y fenómenos	160
<i>Figura 8-1.</i> Fragmento de la tarea 9 de A8 y A15 reconstruida con Atlas.ti.....	229
<i>Figura 8-2.</i> Códigos o indicadores empleados para el análisis con Atlas.ti	230
<i>Figura 8-3.</i> Esquema del Análisis de actitudes y competencias realizado	235

<i>Figura 9-1.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante tareas LP y GG en las actitudes hacia las matemáticas	263
<i>Figura 9-2.</i> Porcentajes medios globales de los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en las actitudes hacia las matemáticas	263
<i>Figura 9-3.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la componente afectiva.....	264
<i>Figura 9-4.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la componente cognitiva.....	265
<i>Figura 9-5.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la componente comportamental	266
<i>Figura 9-6.</i> Porcentajes obtenidos por A8 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG	273
<i>Figura 9-7.</i> Porcentajes obtenidos por A3 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG	289
<i>Figura 9-8.</i> Porcentajes obtenidos por A7 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG	295
<i>Figura 9-9.</i> Porcentajes obtenidos por A9 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG	302
<i>Figura 9-10.</i> Porcentajes obtenidos por A10 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG	302
<i>Figura 9-11.</i> Porcentajes medios de sesiones en las que la muestra manifestó globalmente cada actitud.....	316
<i>Figura 9-12.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Perseverancia.....	317
<i>Figura 9-13.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Espíritu Crítico	318
<i>Figura 9-14.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Sistematización.....	319
<i>Figura 9-15.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Autonomía	321
<i>Figura 9-16.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Precisión y Rigor.....	322
<i>Figura 9-17.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Creatividad	324
<i>Figura 9-18.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Flexibilidad de Pensamiento	325
<i>Figura 9-19.</i> Puntuaciones obtenidas por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Flexibilidad de Pensamiento.....	326
<i>Figura 9-20.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en indicador FP3	327
<i>Figura 9-21.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en indicador FP1	328
<i>Figura 9-22.</i> Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en indicador FP2	328
<i>Figura 9-23.</i> Porcentajes obtenidos por A8 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG	332
<i>Figura 9-24.</i> Porcentajes obtenidos por A3 en actitudes matemáticas durante tareas LP y GG	360
<i>Figura 9-25.</i> Porcentajes obtenidos por A7 en actitudes matemáticas en las tareas LP y GG	368

<i>Figura 9-26.</i> Porcentajes obtenidos por A9 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG.....	378
<i>Figura 9-27.</i> Porcentajes obtenidos por A10 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG.....	378
<i>Figura 9-28.</i> Características de Geogebra asociadas al desarrollo de actitudes hacia las matemáticas	395
<i>Figura 9-29.</i> Características de Geogebra asociadas al desarrollo de actitudes Matemáticas	399
<i>Figura 10-1.</i> Atributos y ventajas de Geogebra asociadas al desarrollo de Competencias	496

Índice de Ejemplos

<i>Ejemplo 9-1.</i> Influencia de Geogebra en la componente comportamental de A8.....	276
<i>Ejemplo 9-2.</i> Componente afectiva de A8 (indicador GM22)	277
<i>Ejemplo 9-3.</i> Influencia de Geogebra en la componente afectiva de A8 (indicador GM25).....	278
<i>Ejemplo 9-4.</i> Influencia de Geogebra en la componente afectiva de A8 (indicador GM25).....	278
<i>Ejemplo 9-5.</i> Componente afectiva de A8 (indicador GM27)	279
<i>Ejemplo 9-6.</i> Influencia de A8 en la componente cognitiva de A8.....	281
<i>Ejemplo 9-7.</i> Influencia de Geogebra en las actitudes hacia las matemáticas de A3.....	290
<i>Ejemplo 9-8.</i> Influencia de Geogebra en las actitudes hacia las matemáticas de A7.....	296
<i>Ejemplo 9-9.</i> Aportación al buzón de sugerencias de A9.....	303
<i>Ejemplo 9-10.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase FP3.....	335
<i>Ejemplo 9-11.</i> Influencia de la interacción de A15 para que A8 manifestase FP3	335
<i>Ejemplo 9-12.</i> Influencia de la interacción con la profesora para que A8 manifestase FP3.....	335
<i>Ejemplo 9-13.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase FP1 (y Perseverancia, Espíritu Crítico y Autonomía)	337
<i>Ejemplo 9-14.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase Espíritu Crítico (y Perseverancia, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización).....	341
<i>Ejemplo 9-15.</i> Perseverancia de A8	344
<i>Ejemplo 9-16.</i> A8 manifiesta el indicador PR12 (se contenta con soluciones aproximadas)	347
<i>Ejemplo 9-17.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase Creatividad (y Sistematización).....	349
<i>Ejemplo 9-18.</i> Influencia de la interacción con A15 para que A8 manifestase Autonomía.....	352
<i>Ejemplo 9-19.</i> Influencia de la tarea para que A8 manifestase Autonomía	352
<i>Ejemplo 9-20.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase Sistematización.....	355
<i>Ejemplo 9-21.</i> Extracto del diario y de los mosaicos construidos por A3 en la tarea 9	361
<i>Ejemplo 9-22.</i> Sistematización de A3	365
<i>Ejemplo 9-23.</i> Espíritu Crítico de A7	369
<i>Ejemplo 9-24.</i> Precisión y Rigor de A7.....	372
<i>Ejemplo 9-25.</i> Influencia de Geogebra para que A7 manifestase Autonomía	373
<i>Ejemplo 9-26.</i> Mosaicos semirregulares realizados por A9 y A10	380
<i>Ejemplo 9-27.</i> Creatividad de A10	383

<i>Ejemplo 10-1.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestara a nivel medio la competencia Pensar y Razonar	432
<i>Ejemplo 10-2.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestara a nivel alto la competencia Pensar y Razonar.....	434
<i>Ejemplo 10-3.</i> Influencia de la interacción con A15 para que A8 manifestara a nivel alto la competencia Pensar y Razonar (y Argumentar-Demostrar y Resolver y Plantear Problemas)	435
<i>Ejemplo 10-4.</i> Influencia de la interacción con la profesora para que A8 manifestase a nivel alto la competencia Argumentar-Demostrar.....	439
<i>Ejemplo 10-5.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase la competencia Argumentar-Demostrar	439
<i>Ejemplo 10-6.</i> Influencia de la interacción con A15 para que A8 hablara matemáticamente de modo correcto	443
<i>Ejemplo 10-7.</i> Influencia de la interacción con la profesora para que A8 hablara de matemáticas de modo correcto	444
<i>Ejemplo 10-8.</i> Influencia de la interacción con A15 para que A8 desarrollase las competencias Modelar (modelado vertical) y Plantear y Resolver Problemas	447
<i>Ejemplo 10-9.</i> Modelado de la tarea 1 de A8	447
<i>Ejemplo 10-10.</i> Influencia de Geogebra para que A8 manifestase la competencia Plantear y Resolver Problemas a nivel alto	449
<i>Ejemplo 10-11.</i> Influencia de Geogebra para que A8 desarrollase la competencia Representar.....	453
<i>Ejemplo 10-12.</i> Influencia de Geogebra para que A8 desarrollase la competencia Representar.....	454
<i>Ejemplo 10-13.</i> Influencia de las representaciones manipulables de Geogebra para que A8 desarrollase la competencia Representar	454
<i>Ejemplo 10-14.</i> Mosaicos original y deformado por dragging o arrastre.....	454
<i>Ejemplo 10-15.</i> Mosaicos realizados en las tareas 9 y 10	457
<i>Ejemplo 10-16.</i> Uso de Herramientas y Recursos a nivel alto de A8	458
<i>Ejemplo 10-17.</i> Muestra de mosaicos contruidos por A3 en la tarea 1	463
<i>Ejemplo 10-18.</i> Muestra de mosaico construido por A3 en la tarea 8.....	467
<i>Ejemplo 10-19.</i> Mosaicos contruidos por A7 en la tarea 5.....	471
<i>Ejemplo 10-20.</i> Fragmento del protocolo escrito de resolución de la tarea 5 de A7 en el que habla matemáticamente de forma adecuada	473
<i>Ejemplo 10-21.</i> Fragmento del protocolo escrito de resolución de la tarea 5 de A7 en el que habla matemáticamente de forma inadecuada	473
<i>Ejemplo 10-22.</i> A9 y A10 no hablaban matemáticamente de modo adecuado.....	481

Estructura de la memoria y de la investigación de tesis

Se presenta esta memoria de investigación estructurada en cuatro bloques diferenciados, añadiendo a continuación un apartado dedicado a las referencias bibliográficas usadas y un último apartado dedicado a los anexos que se incorporan. Los cuatro bloques se dividen en un total de 11 capítulos, de los que a continuación informo resumidamente.

El **bloque I** recoge el encuadre del estudio y el marco teórico y está formado por los capítulos 1 a 4. En el *capítulo 1* se presenta el problema de investigación y sus antecedentes. Después de exponer el origen y motivación de este estudio, se indican sus principales etapas, la evolución de la conjetura que lo guía y los objetivos de investigación. A continuación, se expone un esquema de los trabajos que se han considerado como antecedentes de éste y, por último, se atiende al interés o pertinencia de este trabajo de investigación dentro del campo de la Didáctica de la Matemática. En el *capítulo 2*, se aporta una visión general de las herramientas tecnológicas desde distintas perspectivas. En primer lugar se muestran las características de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y se ofrece una clasificación de tales herramientas, centrándose en el software de Geometría dinámica, dado que éste se ha seleccionado para su uso durante la intervención en el aula. Después, se exponen cuestiones relacionadas con su inclusión en las aulas para trabajar contenidos matemáticos: funciones, ventajas e inconvenientes. Finalmente, se atiende a los aspectos que se han tenido en cuenta para garantizar una satisfactoria integración de estas tecnologías en las aulas. En el *capítulo 3* se analiza la importancia de las actitudes en educación matemática, partiendo de la revisión de los documentos curriculares y la literatura. A partir de esta revisión, se caracterizan las actitudes relacionadas con las matemáticas y se llega a su categorización. A continuación, se consideran los aspectos que han de tenerse en cuenta para lograr una transformación positiva de dichas actitudes en los estudiantes, mostrando las variables que inciden en ellas y cómo se integran en este trabajo de investigación. El *capítulo 4*, que cierra este primer bloque, expone una aproximación al aprendizaje matemático basado en el desarrollo de competencias matemáticas, siguiendo el marco curricular actual. Se

profundiza en ello a partir de una revisión detallada de los estudios previos y la bibliografía relativa a este tema. A continuación, se aporta una visión de las competencias en general y después se atienden las competencias específicas del ámbito de las matemáticas. Finalmente, se presentan las competencias seleccionadas para este trabajo y su caracterización en tres niveles de desarrollo.

El **bloque II** está dedicado a la metodología y desarrollo de la experiencia y engloba los capítulos 5, 6 y 7. En el *capítulo 5* se atiende al marco metodológico y se detallan los principales rasgos del paradigma en el que se sitúa este trabajo, la investigación-acción, argumentando su elección, para después pasar a caracterizarlo. Se presentan también los experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por una conjetura, a los que esta investigación se aproxima en su diseño. En el *capítulo 6* se presenta el diseño de la experiencia, es decir, se detalla la fase de Planificación de este trabajo de investigación. Para ello, se parte de la conjetura que lo guía y de los objetivos que pretende. A continuación, se expone el procedimiento empleado para el diseño de las secuencias de tareas implementadas en el aula (Análisis Didáctico). Por último, se describen los instrumentos para la recogida de datos durante dicha implementación. El *capítulo 7*, que completa este segundo bloque, informa del contexto y las condiciones en que se ha llevado a cabo la puesta en práctica de las secuencias didácticas diseñadas, así como del modo en que se ha realizado la recogida de datos, dando cumplimiento así a las fases de Acción y Observación de esta investigación-acción. Además, se expone el análisis de actuación durante la acción que, junto con el diseño de dicha secuencia presentado en el capítulo anterior, permite dar respuesta al objetivo 1 de este trabajo.

El **bloque III** se ocupa de las consideraciones para el análisis de datos y del propio análisis de datos realizado una vez concluida la experiencia en en aula; incluye los capítulos 8, 9 y 10. En el *capítulo 8*, se presentan las distintas fases en las que se realizó el análisis, los métodos empleados, las consideraciones y criterios tenidos en cuenta, así como la técnica utilizada para extraer conclusiones (triangulación). En el *capítulo 9* se incluyen los análisis de las actitudes relacionadas con las matemáticas llevados a cabo para los diferentes conjuntos de estudiantes: total de estudiantes, muestra de estudiantes y estudio de cinco casos particulares, triangulando la información recogida con cada instrumento para cada conjunto de estudiantes y, más tarde, triangulando conjuntamente los resultados de los tres conjuntos. Dicho análisis permite informar de las transformaciones actitudinales producidas durante la puesta en




práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra (objetivo 2), describiendo qué factores del software contribuyeron a ellas (objetivo 3). El *capítulo 10* que cierra este bloque presenta el análisis de competencias. Dicho análisis pretende mostrar el desarrollo de cada una de las siete competencias analizadas durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra (objetivo 4), describiendo al mismo tiempo los factores del software que contribuyeron a dicho desarrollo (objetivo 5). Se expone el análisis siguiendo la misma estructura del capítulo anterior.

El **bloque IV**, que se compone únicamente del capítulo 11, se ocupa de las conclusiones y aportaciones de esta investigación. El *capítulo 11* empieza recordando el problema de investigación. A continuación, se presentan las conclusiones extraídas de los análisis de datos expuestos en los capítulos 9 y 10, incluyendo una reflexión final que da respuesta al problema planteado. Más tarde, se abordan las limitaciones que se han encontrado a este estudio y se presentan sus principales contribuciones. Finalmente, se atienden las implicaciones para futuros estudios, es decir, las cuestiones abiertas o líneas de investigación que pueden ser objeto de trabajos posteriores.



En la siguiente figura, se muestra la estructura general de la investigación recogida en esta memoria:

ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN



Encuadre del Estudio y Marco Teórico

-  El problema de investigación y Antecedentes (Capítulo 1)
-  Interés de la Investigación (Capítulo 1)
-  Fundamentos Teóricos:
 - Nuevas Tecnologías en Matemáticas (Capítulo 2)
 - Actitudes en Matemáticas (Capítulo 3)
 - Aprendizaje matemático basado en Competencias (Capítulo 4)


Metodología


-  Marco metodológico (Capítulo 5)
-  Desarrollo de la experiencia:
 - Diseño de la experiencia (Capítulo 6)
 - Recogida de datos (Capítulo 7)
 - Consideraciones para el Análisis (Capítulo 8)

Análisis de Datos

-  Análisis de Actitudes (Capítulo 9)
-  Análisis de Competencias (Capítulo 10)

Conclusiones y Aportaciones

-  Conclusiones de la Investigación (Capítulo 11)

-  Aportaciones del trabajo (capítulo 11)

+
ANEXOS



BLOQUE I:

Encuadre del estudio y Marco teórico



No existe ningún libro sin profesor, sin bibliotecario, sin documentalista. Se ha podido creer que se iba a modificar esa estructura gracias a la televisión ayer y a Internet hoy. Siempre estamos ante el mismo error: creer que la tecnología puede sustituir al hombre. Las nuevas tecnologías no tocan la muerte de los profesores, sino más bien lo contrario, el principio de su revalorización. (Dominique Wolton)

Este primer bloque de la memoria está destinado a presentar el problema de investigación, la conjetura que la guía y sus objetivos, así como el marco teórico que la sustenta.

El capítulo 1 permite encuadrar el estudio, explicando las razones por las que se llevó a cabo. En él se muestra cuál es la conjetura de investigación y cuáles son los objetivos de este trabajo. También se indican aquellas investigaciones que se han considerado como antecedentes de ésta y han contribuido a su diseño, puesta en práctica y evaluación. Por último, se atiende al interés de este estudio, tanto a nivel docente como científico.

Los capítulos 2, 3 y 4 se dedican a exponer el marco teórico existente sobre las tres líneas de investigación de este trabajo, en cuya confluencia reside el interés de este estudio: la introducción de las TIC¹ como herramienta de trabajo en el aula (capítulo 2), la transformación de actitudes en matemáticas (capítulo 3) y el desarrollo de competencias matemáticas (capítulo 4). Además, en tales capítulos se estudian los posibles efectos del uso de estas tecnologías en dichos aspectos (actitudinal y cognitivo) de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

¹ Las TIC se encargan del estudio, desarrollo, puesta en práctica, almacenamiento y distribución de la información mediante la utilización de hardware y software como medio de sistema informático. Son una parte de las tecnologías emergentes que hacen referencia a la utilización de medios informáticos para almacenar, procesar y difundir todo tipo de información o procesos de formación educativa. Recuperada el 15 de abril de 2008 de http://www.tecnologiahechapalabra.com/tecnologia/glosario_tecnico/articulo.asp?i=2060

CAPÍTULO 1

Encuadre del estudio

En este capítulo se explica cómo surgió este estudio y cuál fue la motivación que le dio origen. Se indican, asimismo, sus principales etapas y las sucesivas formulaciones de la conjetura de investigación que lo ha guiado, las cuales se fueron realizando a raíz de las revisiones de la literatura y de la puesta en práctica de las fases iniciales. Este proceso permitió, al mismo tiempo, ir perfilando los objetivos de la investigación hasta su formulación final. Una vez explicitados la conjetura y los objetivos de investigación, se hace un esquema de los trabajos que se han considerado como antecedentes de éste y de su relevancia para este estudio. Por último, se atiende al interés de la problemática planteada para la Didáctica de la Matemática, tanto a nivel científico como a nivel de la comunidad educativa.

1.1. ORIGEN Y MOTIVACIÓN

Esta investigación nace de mi necesidad, como profesora de matemáticas de Educación Secundaria, de aumentar la motivación de mis alumnos² por esta asignatura, así como de mejorar su aprendizaje. Desde mi primer contacto con el alumnado de Secundaria en 2002 y a lo largo de estos años, en los que he impartido docencia en todos los niveles de ESO y Bachillerato, he observado un denominador común en un alto porcentaje de los estudiantes: falta de interés por aprender los contenidos que la “escuela” les brinda, que suele venir acompañada de dificultades de aprendizaje. Este desinterés no se refiere únicamente a nuestra área, sino que más bien se produce en general, a lo largo de la etapa obligatoria, y es un sentimiento percibido por muchos otros docentes. En el caso de las Matemáticas, he encontrado en gran parte de los discentes una acusada falta de motivación que, unida a una imagen distorsionada de esta materia, les lleva a considerarla como aburrida, difícil y

² A lo largo de esta memoria voy a utilizar el término alumnos, en masculino, para referirme de forma general al colectivo de estudiantes, y de este modo, contribuir a la fluidez de la lectura del documento. No obstante, en algunas ocasiones en las que se haga referencia a estudiantes concretos, se especificará su sexo si se considera pertinente, utilizándose el término alumna o alumno.

desconectada del mundo real. Me considero una enamorada de las matemáticas e intento transmitir este sentimiento a mis alumnos, pero soy consciente de que no siempre lo consigo. Por ello, busco nuevos caminos que me ayuden a evolucionar en mi forma de enseñar, con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes y transformar esa mala concepción que muchos de ellos tienen de la asignatura. En otras palabras, busco maneras de ser mejor “maestra”, forma en que ellos suelen llamarme y que a mí tanto me gusta.

La convicción de que indagar e investigar sobre mi práctica docente diaria podía abrirme nuevos horizontes para la enseñanza de las matemáticas me llevó de nuevo a la universidad, pero esta vez, no tanto en búsqueda de instrucción como de respuestas. Por ello, tanto la investigación previa realizada para la obtención de la Suficiencia Investigadora (García y Romero, 2007), como ésta, han partido de mis propios interrogantes e inquietudes profesionales y han buscado poner las herramientas teóricas al servicio de su resolución.

1.2. CONJETURA DE INVESTIGACIÓN

En términos de diseño, la presente investigación se aproxima a la línea de *experimentos de enseñanza transformativos dirigidos por una conjetura* (Confrey y Lachance, 2000). Aunque me extenderé al respecto en el bloque II de este trabajo, haré uso de la *conjetura* para explicar la evolución de esta investigación y de sus propósitos, desde sus inicios hasta la fase final, que constituye el objeto de esta Memoria. Por conjetura se entiende “una inferencia basada en pruebas incompletas y no concluyentes” que es revisada y elaborada a lo largo de la investigación (Confrey y Lachance 2000), la cual es de naturaleza cíclica. Se diferencia de las hipótesis, en que no se trata de algo que haya que probar o falsar, sino que constituye la guía de la investigación. Además, no está fijada de antemano desde el principio, sino que evoluciona constantemente conforme ésta progresa. A medida que el investigador-docente adquiere más experiencia, va pasando de formulaciones intuitivas a formulaciones cada vez más analíticas.

Así pues, de acuerdo con la problemática expuesta en el apartado anterior, partí de la siguiente conjetura:

Es posible encontrar modos de aumentar la motivación de los estudiantes de secundaria hacia las matemáticas y de mejorar, al mismo tiempo, su aprendizaje.

En lo que sigue, describo cómo esta primera formulación fue perfilándose.

Durante la realización de los cursos de doctorado, la obtención de destino definitivo como profesora de secundaria en un centro TIC añadió una variable de importancia fundamental a la concreción de mi interés. En efecto, cuando comencé a impartir clase en este centro, cuyas aulas contaban con equipos informáticos con conexión a Internet para cada pareja de estudiantes, sufrí inseguridad y desconfianza acerca del uso de estas tecnologías en mis clases. Junto a ellas, tenía un sentimiento profundo de ignorancia, pues durante mi formación previa no había trabajado con estas herramientas y no sabía cómo integrarlas en el proceso de enseñanza de modo que tuvieran un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

En la búsqueda de trabajos o investigaciones que pudiesen asesorarme sobre cómo incorporar las TIC a mi práctica diaria, además de las que más adelante expongo, encontré algunas que contribuyeron a tranquilizarme, al dar evidencias de que esas indeseadas sensaciones que yo había experimentado eran habituales en muchos otros docentes y mostrarme cómo podía hacerles frente. Así, la siguiente cita extraída de las conclusiones de una investigación realizada por Marchesi et al. (2003), me abrió nuevos horizontes respecto a la incorporación de las TIC para trabajar matemáticas en el aula:

Formación, experiencia y actitud positiva constituyen tres factores estrechamente relacionados, que van a influir decisivamente en la incorporación de las TICs³ en la educación escolar. Cuando los docentes conocen cómo enseñar con las TICs y viven experiencias positivas, en las que comprueban que los alumnos aprenden e incluso que están más motivados, su valoración de este modo de enseñar se hace más positiva, lo que a su vez, les anima a seguir formándose. Las actitudes de los profesores a su vez dependen de su habilidad en el manejo del ordenador y de sus ideas sobre el valor de las TICs en la enseñanza y aprendizaje. (p.13)

Por tanto, yo debía trabajar en los tres factores anteriores. Mi actitud hacia el uso de las TIC en el aula era positiva, pues mi intuición me llevaba a pensar que el uso de estas tecnologías podría contribuir a mi objetivo de aumentar la motivación y el aprendizaje de los estudiantes. Mi formación en el uso de estas herramientas, aunque inicialmente no era adecuada ni suficiente, no suponía un obstáculo, pues siempre he estado dispuesta a aprender. Al ser nula mi experiencia en la enseñanza de las matemáticas con TIC, comencé por revisar investigaciones y trabajos anteriores llevados a cabo con este mismo propósito y que

³ Estos autores emplean el término TICs en plural con el mismo significado que TIC en singular, siendo el uso de éste último más extendido. Ambos hacen referencias a las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

pudieran mostrarme el sendero a seguir, al tiempo que iba mejorando mi alfabetización tecnológica. Algunas de las investigaciones que me ayudaron en este sentido fueron la realizada por Lee y Hollebrands (2008), quienes subrayan la importancia de preparar a los profesores para enseñar a los estudiantes de matemáticas un uso apropiado de las tecnologías, a la vez que proporcionan herramientas para ello, o la llevada a cabo por el Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1996, 1997), que concluyeron que las TIC tienen un gran potencial para favorecer el progreso de los alumnos y de los profesores, si son utilizadas de forma apropiada. De igual modo, pusieron de manifiesto ventajas de su uso en las habilidades de los alumnos para resolver problemas y en el interés por la materia estudiada con este tipo de materiales. Otros autores como Arias, Maza y Saenz (2005), sostenían que la integración de las TIC en el aula de matemáticas no sólo mejoraría, en relación a la metodología tradicional de enseñanza, el aprendizaje en matemáticas de los alumnos, sino que sería evaluada por los alumnos y profesores como una metodología eficaz y satisfactoria, y constituiría una mejora sistemática independientemente del nivel educativo del alumno.

De esta forma, mi circunstancia profesional, unida a la información obtenida en la revisión de la literatura realizada, nos llevó a mí y a mi directora de tesis a incluir el uso de las nuevas tecnologías como un factor central para alcanzar mi propósito inicial de investigación. La conjetura inicial se reformuló en consecuencia de la forma que sigue:

Se pueden utilizar las TIC en el aula de secundaria (como recurso) para influir positivamente en la motivación y en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

Llegados a este punto, se hizo necesario adoptar un posicionamiento particular sobre los aspectos motivacionales en los que incidir, así como sobre la visión del aprendizaje escolar adoptada. Respecto a la primera cuestión, la revisión de la literatura puso de relieve la importancia de fomentar la motivación intrínseca de los estudiantes: “realizar una actividad por el placer y la satisfacción que uno experimenta mientras aprende, explora o trata de entender algo nuevo. La persona explora, tiene una actitud de curiosidad, trabaja por los objetivos de aprendizaje para aprender” (Gómez-Chacón, 2005). Para aumentar la motivación intrínseca de los escolares, es necesario incidir en sus emociones, actitudes y creencias acerca de las matemáticas, que se consideran descriptores del dominio afectivo. Dada la relevancia otorgada en los documentos curriculares a los factores de tipo actitudinal en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (MEC, 2002, 2006a,c), el presente trabajo se centra en el estudio de las actitudes relacionadas con las matemáticas, buscando una transformación

positiva que revierta en una mayor motivación de los alumnos en matemáticas. Debido a que los tres descriptores anteriormente mencionados intersecan entre sí, al analizar las actitudes se aborda tangencialmente el estudio de ciertas emociones y creencias de los alumnos en matemáticas; sobre todo ello me extenderé en el capítulo 3.

En cuanto al aprendizaje de los escolares, éste se centró en el desarrollo de su competencia matemática, que siguiendo la línea de los estudios PISA⁴ (OCDE, 2005b) constituye el fin de la enseñanza de las matemáticas. El estudio PISA 2003 entiende por competencias el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. En este sentido, Rico y Lupiáñez (2008) afirman que las competencias marcan una perspectiva más amplia y comprensiva en relación con las expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes, que expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de las actuaciones de los escolares ante tareas. Por otra parte, en términos de mi situación profesional, lo anterior está en consonancia con la caracterización del currículo en términos de competencias básicas, propuesta para la Educación Secundaria desde la legislación educativa vigente (Ley Orgánica de Educación (MEC, 2006a)). En referencia a ello, Rico y Lupiáñez (2008) exponen que una de las claves de la reforma en curso se sitúa en un nuevo concepto de currículo, que incorpora el aprendizaje basado en competencias, por un lado, como una finalidad educativa general y, por otro, como la consideración de nuevas expectativas de aprendizaje, complejas pero concretas, denominadas competencias básicas. Todo lo anterior, permitió una nueva formulación, más analítica, de la conjetura:

Se pueden utilizar las TIC en el aula de secundaria (como recurso) para transformar positivamente las actitudes de los estudiantes relacionadas con las matemáticas, así como para desarrollar sus competencias en esta área.

A partir de esta formulación, comenzó el primero de los ciclos de experimentación que se han llevado a cabo durante esta experiencia (ciclo 0). Durante el ciclo 0, el uso de TIC se centró básicamente en la búsqueda de información por Internet y en el manejo puntual de software estadístico, que facilitaron a los alumnos el estudio de ciertos contenidos matemáticos (contenidos de Trigonometría, Estadística y Probabilidad). Los resultados de la experiencia⁵

⁴ Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes)

⁵ Puede consultarse el análisis de datos y resultados en García y Romero (2007)

confirmaron la conjetura, al evidenciar una mejora actitudinal, así como un desarrollo notable de las competencias matemáticas, por parte de un gran porcentaje de los estudiantes. Por otra parte, se puso de manifiesto que la intensidad de los cambios producidos por las TIC no fue la misma para todas las competencias.

Entre las limitaciones del ciclo 0 destacó el hecho de que las distintas actitudes y competencias no se analizaron sistemáticamente y que el uso de las TIC se limitó fundamentalmente a la navegación por las páginas web seleccionadas. Por ello, se consideró oportuno para futuras experimentaciones profundizar en dicho análisis y trabajar con software específico, en concreto software de geometría dinámica (SGD), desde la creencia de que éste incidiría en mayor grado en el desarrollo de actitudes y competencias matemáticas. Así pues, los resultados del ciclo 0, una nueva revisión de la literatura y mi progresión en el manejo de distintos software educativos proporcionaron un nuevo avance en la formulación de la conjetura que guiaría el ciclo 1 de investigación, correspondiente a la segunda experimentación:

Se puede realizar un uso de SGD en el aula para trabajar contenidos geométricos que contribuya a una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas y a un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, siendo su influencia más notable en la transformación de determinadas actitudes y competencias.

El análisis de datos de este ciclo 1 se centró en comprobar la bondad de las decisiones adoptadas después del ciclo 0, como consecuencia del cambio de la conjetura inicial. Así, se exploró la adecuación de los software elegidos (Regla y Compás (C.a.R.) y Geogebra) y de la secuencia de enseñanza diseñada. También se revisó la utilidad de las parrillas de observación de actitudes y competencias, así como de las grabaciones de aula, para describir e informar de las transformaciones actitudinales y del desarrollo de competencias de los estudiantes. Los resultados de este análisis confirmaron la adecuación y utilidad para mis propósitos de los elementos introducidos, al tiempo que confirmaron la conjetura para este ciclo, pues pusieron de relieve una mejora actitudinal y cognitiva por parte de los alumnos, aportando evidencias de diferencias entre el desarrollo de unas actitudes y otras y de unas competencias y otras debido al trabajo con SGD⁶. Además, pusieron de manifiesto ciertos aspectos que aún debían limarse con vistas al ciclo 2 ó tercera experimentación. Ello condujo

⁶ Puede consultarse el análisis de datos y los resultados del ciclo 1 en el Anexo A

a tomar decisiones sobre el software más adecuado para ser empleado por los estudiantes (que resultó ser Geogebra), el rediseño de la secuencia de tareas mediante un procedimiento fundamentado: el Análisis Didáctico (Gómez, 2002a, 2004, 2006, 2007) y los instrumentos de observación para informar sistemáticamente del desarrollo de cada actitud y competencia. Por otra parte, al observar durante el ciclo 1 que ciertas características o factores de los softwares empleados incidían en mayor grado en determinadas actitudes y competencias, se decidió profundizar en este aspecto para informar más detalladamente de la contribución del software, (en este ciclo Geogebra) a la mejora de cada actitud y competencia.

De este modo, se llegó a la formulación de la conjetura que guía el ciclo 2 de la investigación, correspondiente a su tercera experimentación y que constituye el objeto central de esta memoria de tesis:

Se puede diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza basada en el uso de Geogebra que promueva una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas y un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes de secundaria. El uso de Geogebra potenciará en mayor grado determinadas actitudes y competencias. Ciertas características y atributos del software guardarán relación directa con las transformaciones provocadas en determinadas actitudes y competencias de los estudiantes.

1.3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Dado que esta memoria se centra en el desarrollo del ciclo 2 del proceso de investigación (correspondiente a la tercera experimentación), a partir de la conjetura que lo guía, expondré los objetivos que permiten hacer operativa dicha conjetura. Éstos se fueron perfilando al mismo tiempo que las conjeturas de investigación, siendo su formulación final la siguiente:

1. Diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de software Geogebra.
2. Analizar las transformaciones que la puesta en práctica de dicha secuencia provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de Secundaria.
3. Identificar las características de Geogebra que pueden influir en la transformación de determinadas actitudes relacionadas con las matemáticas.
4. Describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de Secundaria al implementar la secuencia anteriormente descrita.

5. Identificar qué factores de Geogebra intervienen en el desarrollo de determinadas competencias matemáticas.

1.4. ANTECEDENTES

En este apartado se presentan las principales investigaciones que, tras la revisión de la literatura, han resultado de interés para la que expongo en esta memoria. En el Anexo B se pueden consultar los medios y fuentes de información utilizados. Como son tres las sendas que confluyen en este estudio (TIC, actitudes y competencias matemáticas), se clasifican los trabajos que he considerado como antecedentes a éste en tres apartados, si bien algunos de ellos pueden estar relacionados con más de uno. En primer lugar, se presentan los estudios relacionados con TIC, desde diversas perspectivas: uso en el aula, características de estas tecnologías, software de Geometría dinámica (en especial, Geogebra) e influencia y efectos del uso de las TIC en los campos actitudinal y cognitivo. En segundo lugar, se recogen los antecedentes correspondientes al estudio de las actitudes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: actitudes hacia las matemáticas, actitudes matemáticas, relación entre actitudes y rendimiento y actitudes hacia el uso de TIC. En tercer lugar, se hace mención a trabajos sobre alfabetización y competencia matemática, así como sobre determinadas competencias matemáticas específicas y caracterización de habilidades geométricas, en particular.

Estudios sobre TIC y Matemáticas

En las últimas décadas, y sobre todo en los últimos años, se ha incrementado el número de docentes e investigadores que han estudiado la utilidad y las distintas aplicaciones de las TIC en diversas áreas, siendo una de ellas, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. El origen de esta actividad puede situarse, según distintos autores, a finales de la década de los sesenta. De acuerdo con Marchesi et al. (2003), el trabajo de Atkinson de 1968 se considera como uno de los pioneros en el intento de utilizar los ordenadores para favorecer el aprendizaje de los alumnos. El recorrido histórico acerca de la investigación en TIC en educación que se encuentra en Vidal (2006), sitúa la década de los setenta como el momento en el que los medios de comunicación de masas, en especial la radio y la televisión, despegaron como factor de gran influencia social, y cómo el desarrollo de la informática consolidó la utilización de los ordenadores con fines educativos, concretamente en aplicaciones como la Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO).

Se muestran a continuación una serie de investigaciones que han aportado información útil para el diseño y desarrollo de este trabajo. Se presentan clasificadas según diferentes temáticas, si bien algunas de ellas pueden incluirse en varias simultáneamente:

- a) Estudios referentes a la incorporación y uso de las TIC en el aula:

Tabla 1-1. Estudios referentes a la incorporación y uso de las TIC

Escudero, García y Sánchez (2007)	Analizan la incorporación de las TIC como soporte que permita el desarrollo de trayectorias de enseñanza/aprendizaje en la formación inicial de profesores
Adelman et al. (2002); Gross, Truesdale y Bielec (2001); Mously, Lambdin y Koc (2003)	Investigan sobre los distintos usos que los profesores hacen de las TIC y cómo mejorarlos
Cifuentes y Ozel (2008); Driscoll (2002); Garofalo, Drier, Harper, Timmerman y Shockey (2000); Lesh, Hamilton y Kaput (2007); Preiner (2008); Roblyer (2006)	Estudian qué factores influyen a la hora de trabajar con TIC en el aula de matemáticas y proponen distintos modos de integrarlas eficazmente
Arias, Maza y Saenz (2005)	Estudian la mejora del aprendizaje con TIC y la visión de la enseñanza con TIC de profesores y alumnos
Sinclair (2005)	Analizan los estilos y estrategias de interacción entre estudiantes usando TIC
Russell, Goldberg y O'Connor (2003)	Destacan efectos significativos en las evaluaciones de los estudiantes, comparando el entorno TIC con el de Lápiz y Papel
European Comisión DG Education and Culture (2004)	Analizan los nuevos entornos de aprendizaje con TIC y las innovaciones producidas en las escuelas
Pedró y Benavides (2007)	Analizan cómo las TIC transforman los sistemas escolares y propician innovaciones educativas en los centros
OCDE (2001)	Indagan sobre el impacto de las TIC en la enseñanza, en la escuela y en la política

b) Estudios sobre características de las herramientas tecnológicas:

Tabla 1-2. Estudios sobre características de las TIC

Cabero (1999); Cabero y Duarte (2000)	Aportan una definición, clasificación y evaluación de los medios y materiales de enseñanza
Ozel, Yetkiner y Capraro (2008)	Analizan distintas herramientas TIC y los efectos de su uso.
Alemán de Sánchez (2002)	Señalan las ventajas teóricas del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas
Crowe and Zand (2000); Gargallo et al. (2004)	Estudian las diferentes formas de usar Internet en el aula con fines educativos
Abarca (2005)	Define los atributos genéricos del software educativo
Tabach, Hershkowitz y Arcavi (2008)	Investigan el aprendizaje del álgebra en un entorno tecnológico (usando software específico)

c) Estudios de especial interés para esta investigación, muchos de los cuales, como ya he comentado anteriormente, pueden ubicarse en varias categorías, aunque para evitar repeticiones los he clasificado en la que he considerado más representativa:

Tabla 1-3. Estudios relacionados con esta investigación

<i>Relacionados con Software de Geometría Dinámica (en especial, Geogebra)</i>	
Sánchez (2001)	Estudia los atributos genéricos del SGD
Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006); Smith, Hollebrands, Iwancio y Kogan (2007)	Indagan sobre los distintos usos que hacen los estudiantes de los programas de geometría dinámica
Sordo (2005)	Realiza un estudio sobre el aprendizaje y la evaluación de la geometría dinámica a través de una estrategia basada en las nuevas tecnologías
Lavicza (2006); Kreis (2004)	Estudian las ventajas de trabajar con un software de geometría dinámica, destacando la mejora de la visualización de los estudiantes
Olkunn, Sinoplu y Deryakulu (2005)	Estudian las ventajas del software de geometría dinámica en el modo de pensar y razonar de los estudiantes
Or (2005)	Analiza el ciclo construir-experimentar-conjeturar en un entorno de geometría dinámica con alumnos de secundaria
Hohenwarter y Jones (2007)	Analizan las características y ventajas de Geogebra

Preiner (2008)	Investiga la potencialidad de Geogebra y aporta razones para su uso en el aula
Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis y Lavicza (2008)	Indagan sobre el uso y grado de satisfacción de los estudiantes al trabajar con Geogebra
Barroso y Gavilán (2003)	Trabajan la resolución de problemas de geometría con Cabri II y analizan las características del software
Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002)	Identifican distintas modalidades de dragging ⁷ con Cabri
<i>Referentes a la relación entre uso de TIC y mejora de las actitudes de los estudiantes</i>	
Barkatsas, Gialamas y Kasimatis (2008); Cretchley, Fogarty, Harman y Ellerton (2000, 2001); Cretchley y Galbraith (2002); Galbraith y Haines (1998, 2000); Gómez-Chacón y Haines (2008); Pierce y Stacey (2004); Pierce, Stacey y Barkatsas (2007)	Analizan las interacciones entre actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y hacia el ordenador
León y Gómez-Chacón (2007)	Investigan el uso de una WebQuest con estudiantes de secundaria, destacando los aspectos cognitivos, afectivos, didácticos y tecnológicos.
Forgasz (2002)	Analiza las creencias de los estudiantes acerca del uso de TIC en matemáticas y recaba información también acerca de las actitudes hacia las matemáticas y hacia las TIC.
Artigue (2002); Christensen (2002); Galbraith (2006); Noss (2002); Pierce y Stacey (2004); Tofaridou (2007)	Describen el impacto positivo que el uso de las TIC produce en las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes
Hoyles y Sutherland (1989); Ursini, Sánchez, Orendain y Butto (2004); Yelland (2001); Sinclair, Renshaw y Taylor (2004)	Estudian la influencia del uso de TIC en ciertas actitudes matemáticas de sus estudiantes

⁷ Dragging puede traducirse como “arrastre”. En un entorno de geometría dinámica puede definirse como una función del software que permite mover o arrastrar un elemento de un objeto geométrico, que deforman dicho objeto preservando todas las propiedades geométricas que se usaron para su construcción.

<i>Referentes a la relación entre uso de TIC y mejora de las competencias matemáticas</i>	
Underwood et al. (2005); Yerushalmy (2005)	Investigan qué características deben tener las herramientas tecnológicas (software) para mejorar competencias como: resolución de problemas, argumentar o representar
Battista (2002); Christou, Mousoulides, Pittalis y Pita-Pantazi (2004); Hanna (2000); Hollebrands (2003); Healy y Hoyles (2001); Küchemann y Hoyles (2006); Lavy (2006); Mariotti (2000, 2006); Olivero y Robutti (2001); Sinclair y Yurita (2008)	Estudian los tipos de conjeturas, razonamientos y argumentaciones que los alumnos realizan al trabajar en un entorno de geometría dinámica
Clemens (2000a,b); Santos-Trigo (2008)	Indaga sobre las ventajas del uso de las TIC para mejorar la competencia resolución de problemas
Murillo y Marcos (2007)	Analizan los niveles de competencias mostrados por los estudiantes al trabajar la resolución de problemas con TIC
Pellegrino et al. (1991)	Obtienen mejoras observables en la resolución de problemas complejos, así como en las actitudes hacia las matemáticas, del grupo que usó TIC con respecto al grupo que usó Lápiz y Papel.

Estudios sobre Actitudes relacionadas con las Matemáticas

Para el aspecto actitudinal, he considerado como marco de referencia los trabajos de Gómez-Chacón y del NCTM, y adoptado su categorización de las actitudes en: actitudes hacia la matemática y actitudes matemáticas, que expongo en el capítulo 3. Comparto con Gómez-Chacón (2002) que, “la importancia y la insistencia dada al tema de las actitudes en educación matemática es, hoy en día, asumida y aceptada por el profesorado cada vez más dispuesto a reconocerlas como elementos de indiscutible valor e interés en el proceso de enseñanza-aprendizaje” (p. 24). En efecto, es cada vez más frecuente en el ámbito educativo la preocupación por las actitudes del alumnado y, como consecuencia de ello, el número de investigaciones sobre el tema va en aumento. Sin embargo, este crecimiento es relativamente lento comparado con el incremento de investigaciones sobre TIC, por citar un ejemplo. Los estudios relativos a actitudes que he considerado más interesantes son los que a continuación expongo, clasificados en categorías:

Tabla 1-4. Estudios sobre actitudes relacionadas con las matemáticas

<i>Investigaciones acerca de las Actitudes Hacia las Matemáticas</i>	
DeBellis y Goldin (2006); Gómez-Chacón (2000a,b, 2003, 2005); Hannula (2002, 2005, 2006); McLeod (1992, 1994); Schorr y Goldin (2008)	Estudian los descriptores del dominio afectivo y la influencia de esta dimensión afectiva en el aprendizaje de los estudiantes
De Corte, Op't Eynde y Verschaffel (2002); Gómez-Chacón, Op't Eynde y De Corte (2006); Op't Eynde y De Corte (2003); Op't Eynde, De Corte y Verschaffel (2006)	Analizan las creencias de los estudiantes y su relación o interacción con el aprendizaje
Bazán y Sotero (1998); Cubillo y Ortega (2002); Curtis (2006); Gil, Guerrero y Blanco (2006); Hernández, Palarea y Socas (2001); Hernández y Socas (1999); Tapia y Marsh II (2004)	Investigan acerca de las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes
<i>Investigaciones acerca de las Actitudes Matemáticas</i>	
Hoyles y Sutherland (1989); Sinclair, Renshaw y Taylor (2004); Ursini, Sánchez, Orendain y Butto (2004); Yelland (2001)	Estudian la influencia del uso de TIC en ciertas actitudes matemáticas de sus estudiantes (referencias ya expuestas en Tabla 1-3 y repetidas en esta categoría por ser las únicas consideradas de interés)
<i>Investigaciones acerca de la Relación entre Actitudes y Rendimiento</i>	
Akey (2006); Blanco y Guerrero (2002); Dowson y McInerney (2001); Furinghetti y Morselli (2008); Gil, Guerrero y Blanco (2006); Handcock y Betts (2002); Kirsch, Lafontaine, Moqueen, Mendelovits y Monseur (2002); Zan, Brown, Evans y Hannula (2006)	Analizan la relación entre estados afectivos y cognitivos

<i>Investigaciones acerca de las Actitudes Hacia las TIC</i>	
Frantom, Green y Hoffman (2002); Mitra (2002); Vargas (2003)	Estudian los aspectos a tener en cuenta para evaluar las actitudes hacia las TIC
Gómez-Chacón y Haines (2008)	Analizan la relación entre las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y hacia las tecnologías
Vale (2001, 2003); Volman y van Eck (2001)	Exploran los comportamientos y actitudes hacia los ordenadores de los estudiantes al introducirlas en clases de matemáticas
Pierce (2001)	Analiza las actitudes de los alumnos hacia el uso de software algebraico en el aula, así como la influencia de este software en su aprendizaje y los distintos usos que los estudiantes hacen de él

Estudios sobre Competencias Matemáticas

Para analizar el aprendizaje de los estudiantes, he adoptado el marco de competencias propuesto por la OCDE para el Proyecto PISA, que presento en el capítulo 4. Aunque en España la incorporación de los términos “competencia matemática” y “competencias básicas” se ha producido hace pocos años, este enfoque del aprendizaje cuenta con más tradición en otros países, tal y como ponen de manifiesto las investigaciones existentes sobre este tema. De éstas y siguiendo la misma línea anterior, expongo los estudios que han resultado relevantes para esta investigación, excluyendo aquellos que ya han sido presentados en apartados precedentes:

- a) Estudios referentes a Competencia Matemática en sentido global:

Tabla 1-5. Estudios referentes a la competencia o alfabetización matemática

Junta de Andalucía (2006); MEC (2006c); NCTM (2000b, 2003); Niss (1999, 2003); OCDE (2000, 2003, 2004, 2005b, 2006b); Perrenoud (2000); Sekerák y Sveda (2008); WNCP (2006)	Definen el término competencia matemática y hacen una clasificación de las distintas competencias o capacidades específicas que lo componen
Recio (2006)	Estudia la evolución del término competencia en la legislación educativa española

Puig (2008)	Analiza los usos del término competencia, en la elaboración de modelos de competencia en algunas investigaciones. Examina la relación entre la competencia en un dominio matemático y el análisis fenomenológico de dicho dominio.
Rico (2004, 2005a,b, 2006)	Estudia las competencias matemáticas en el Proyecto PISA de la OCDE
Rico y Lupiáñez (2008)	Analizan en profundidad las competencias matemáticas desde una perspectiva curricular
Pérez, Gallego y Torres (2005)	Analizan las competencias en las que se centran las pruebas nacionales de evaluación del ICFES en Colombia

b) Estudios referentes a Competencias Matemáticas específicas:

Tabla 1-6. Estudios sobre competencias matemáticas específicas

<i>Investigaciones acerca de Argumentar-Demostrar</i>	
Balacheff (1988a,b); Gutiérrez (2005); Harel y Sowder (1998); Ibáñez (2001); Marrades y Gutiérrez (2000); Martínez y Díaz (2001)	Clasifican los distintos tipos de demostraciones matemáticas
Duval (1989, 1999)	Analiza las diferencias entre argumentación y demostración
Jahnke (2005)	Indaga cómo argumentan los estudiantes y cómo mejorar su capacidad para argumentar
Toulmin (1958); Yang y Ling (2008)	Investigan las fases de un argumento/demostración
<i>Investigaciones acerca de Comunicar</i>	
Duval (2001); Godino (2001); Nesher (2000); Niss (1999)	Estudian la capacidad de comunicarse matemáticamente
<i>Investigaciones acerca de Modelar</i>	
Blomhøj (2004); Llinares y Roig (2008); Ortiz, Rico y Castro (2007); Verschaffel, Greer y De Corte (2002)	Estudian el proceso de modelización en matemáticas
Zbiek y Conner (2006)	Describen y esquematizan el proceso de modelar

<i>Investigaciones acerca de Resolver Problemas (RP)</i>	
Anderson y White (2004)	Indagan sobre cómo mejorar el proceso de resolución de problemas de los alumnos
Beswick y Muir (2004); Muir (2003); Muir y Beswick (2005); Muir, Beswick y Williamson (2008)	Investigan las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas y su efectividad, analizando cómo se comunican oralmente y por escrito
Carlson y Bloom (2005)	Trabajan en las distintas fases de la resolución de problemas y proporcionan un marco para analizar las interacciones entre el proceso de resolución de problemas y los procesos cognitivos, metacognitivos y respuestas afectivas de los estudiantes
<i>Investigaciones acerca de Representar</i>	
Castro y Castro (1997); Lupiáñez (2000)	Clasifican las distintas representaciones matemáticas
Duval (2002); Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis (2007); Gagatsis, Elia y Mougi (2002); Mousoulides y Gagatsis (2004); NCTM (2000a)	Analizan la importancia del uso de múltiples representaciones de un mismo objeto matemático y de la conexión entre ellas
<i>Investigaciones acerca de la Caracterización de Habilidades Geométricas</i>	
Arcavi (2003); Calvo (2001); Dreyfus (1994); Figueiras y Deulofeu (2005)	Investigan acerca de la visualización matemática
Hoffer (1981); Ojeda, Medina y Peralta (2003)	Estudian las habilidades geométricas

Los trabajos presentados en este apartado tratan un amplio espectro de temas que comparten algún aspecto de interés con los propósitos de esta investigación. Sin embargo, después de realizar sistemáticas búsquedas, no he encontrado ningún estudio que integre las tres líneas de interés (Geogebra, actitudes y competencias), de un modo tan específico como en este trabajo de tesis pretendo llevar a cabo.

1.5. INTERÉS DE LA INVESTIGACIÓN

El interés del trabajo recogido en esta memoria radica en las aportaciones, tanto a nivel teórico como práctico, que se realizan en torno a los tres focos de interés señalados con anterioridad: el uso de TIC en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Secundaria (particularizado en el software de geometría dinámica Geogebra), la mejora de las actitudes de los estudiantes relacionadas con las matemáticas y el desarrollo de sus competencias matemáticas. Por último, el enfoque metodológico adoptado, que ha conllevado el estudio en profundidad de la evolución del alumnado en ciclos sucesivos y en un contexto real de aula, constituye otra de las contribuciones que se espera realizar con este trabajo.

Por lo que respecta al uso de las TIC, Área (2005) propone una clasificación de las distintas líneas de investigación, desarrolladas en la última década, que han analizado y evaluado los fenómenos vinculados con su incorporación y utilización en los centros y aulas de los sistemas escolares. Su clasificación diferencia cuatro grandes tipos:

- a) Estudios sobre indicadores cuantitativos que describen y miden la situación de la penetración y uso de ordenadores en los sistemas escolares a través de ratios o puntuaciones concretas de una serie de dimensiones.
- b) Estudios sobre los efectos de los ordenadores en el rendimiento y aprendizaje del alumnado.
- c) Estudios sobre las perspectivas, opiniones y actitudes de los agentes educativos externos (administradores, supervisores, equipos de apoyo) y del profesorado hacia el uso e integración de las tecnologías en las aulas y centros escolares.
- d) Estudios sobre las prácticas de uso de los ordenadores en los centros y aulas desarrollados en contextos reales.

El presente trabajo se encuadra dentro de las líneas segunda y cuarta. En relación a los estudios pertenecientes a ésta última, Área afirma que “tienen por objeto el indagar y explorar cuáles son los fenómenos que rodean y acompañan al uso de ordenadores en la práctica educativa desarrollada en centros y aulas. Ésta es una perspectiva de estudio relativamente reciente, pero que está en crecimiento ya que proporciona conocimientos valiosos sobre lo que ocurre en la realidad escolar y tienen el potencial de ser transferidos de unos contextos a otros” (p. 12). Desde estas consideraciones, investigar la forma de integrar SGD con éxito en las clases de matemáticas, explorando la potencialidad de estos recursos tecnológicos para su enseñanza-aprendizaje, resulta pertinente para la comunidad científica de una parte, pero

también para la comunidad educativa. Así, desde el punto de vista científico, se pretende contrastar, entre los atributos y ventajas teóricas de las TIC los que realmente se ponen de relieve y resultan relevantes al introducirlas en el aula. Por otra parte, esta experiencia puede ser de utilidad para el profesorado de secundaria que desee desarrollar y evaluar experiencias de aula innovadoras basadas en el uso de tecnologías, sobre todo teniendo presente que en la actualidad se nos exige a los docentes la incorporación de tales herramientas a nuestra práctica diaria.

Entre los distintos software educativos empleados por los profesores de matemáticas en los últimos años, ha cobrado relevancia el software Geogebra. Su uso en las aulas se está extendiendo, contando la web del programa, durante el año 2009, con más de tres millones y medio de visitas de profesores europeos. En concreto, en España, una prueba de su difusión es la reciente creación de tres asociaciones o institutos (la Associació Catalana de GeoGebra, el Instituto GeoGebra de Cantabria y el Instituto GeoGebra de Andalucía), estando en vías de constitución otros varios. Estos Institutos forman parte de la red del “International GeoGebra Institute” y tienen como misión la difusión y enseñanza de GeoGebra, la certificación del nivel de conocimientos adquirido por el usuario, el desarrollo de materiales y, en general, el apoyo al profesorado para su utilización en un contexto educativo. Parte del propósito de este trabajo es precisamente la aplicación de Geogebra en entornos escolares, realizando para ello un diseño de materiales, que posteriormente son objeto de evaluación. También en la comunidad científica se observa cómo en los últimos años una línea de investigación que ha cobrado relevancia es la que se ocupa de estudiar la potencialidad del SGD, en particular de Geogebra, desde las perspectivas teórica y práctica, o aplicada a situaciones educativas reales (Sinclair y Yurita, 2008; Hohenwarter y Jones, 2007; Preiner, 2008). Este trabajo se encuadra dentro de esta línea de investigación y puede aportar información que complemente a las anteriores, informando de las potencialidades teóricas que se confirmen en mis experiencias de aula y cómo éstas inciden en la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

Con respecto al campo actitudinal, a pesar de que el tema de las actitudes goza de reconocida importancia dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Gómez-Chacón, 2002), son escasos los estudios previos que aportan información acerca de estrategias metodológicas que favorezcan la transformación de actitudes relacionadas con las matemáticas en los estudiantes y del modo en que ésta tiene lugar. La literatura precedente,

en su mayoría, se interesa por las actitudes de los escolares hacia las matemáticas, es decir, por su carácter afectivo, quedando las actitudes matemáticas, de carácter cognitivo, marginadas o relegadas a un plano secundario. Sin embargo, tanto la comunidad educativa como la científica, acepta que estas actitudes influyen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Gómez-Chacón, 2002; OCDE, 2005b), de ahí el valor de su estudio en el presente trabajo. Además, se pretende describir la evolución de dichas actitudes matemáticas como proceso y a través de la observación de comportamientos, mientras que hasta el momento, la mayoría de los estudios se realizan a través de la toma de datos de forma declarativa y en momentos puntuales. Coincido con Gómez-Chacón (2010) en que cuando se trata de medir actitudes, no basta con la información recogida de un estudiante a través de cuestionarios, sino que sus afirmaciones necesitan ser confirmadas mediante la observación de su comportamiento cuando resuelve tareas matemáticas. Por ello, a la hora de analizar las actitudes de los estudiantes, se triangula la información recogida mediante cuestionarios y otras técnicas no observacionales con la información recogida mediante la observación en el contexto del aula, mientras los alumnos resuelven tareas interactuando con sus compañeros y con la profesora. Con esta forma exhaustiva de análisis se espera obtener elementos para contribuir al desarrollo del marco teórico existente. Otro punto a resaltar es que son escasos los trabajos que estudian conjuntamente cómo se transforman ambas categorías actitudinales, así como la relación entre ellas. Ésta constituye otra de las aportaciones del presente estudio.

En lo concerniente al aprendizaje de los estudiantes, en la actualidad existe una marcada preocupación por establecer los fines y metas de la educación en términos de las *competencias* que deberían desarrollar los estudiantes durante su formación, tanto en el periodo obligatorio como durante la educación superior (Lupiáñez y Rico, 2008). Esta investigación se propone analizar en profundidad el desarrollo de las competencias matemáticas que se consideran necesarias en los escolares y cómo el trabajo con Geogebra puede contribuir a dicho desarrollo. El modo en que se llevará a cabo dicho análisis, dentro del marco del Análisis Didáctico (Gómez, 2002, 2004, 2006, 2007), aportará un procedimiento fundamentado para realizar la evaluación por competencias en el aula de Secundaria. Dicha forma de evaluar se nos exige a los docentes desde las administraciones educativas (LOE); no obstante, no contamos con directrices claras acerca del modo en que ésta debe realizarse, lo que supone una preocupación para muchos de nosotros. En este sentido, el procedimiento empleado en este trabajo puede resultar de utilidad para otros docentes, como guía o marco de referencia. Por otra parte, debido a que el Análisis Didáctico

se ha utilizado hasta ahora en procesos de formación inicial de profesorado, esta experiencia supondrá una oportunidad para contrastar el modelo teórico en sus fases de aplicación en el aula y contribuir a su refinamiento.

Por último, el enfoque metodológico adoptado responde a una naturaleza cíclica, lo que ha propiciado que la recogida de datos se llevase a cabo en tres ciclos⁸, desarrollados en cursos escolares sucesivos con distintos niveles educativos. Dichos ciclos de investigación fueron guiados por una conjetura, cuyas sucesivas fases de refinamiento se han expuesto en el apartado 1.2, y por unos objetivos que fueron redefinidos y revisados progresivamente aportando así coherencia y validez al trabajo. A lo largo de la puesta en práctica de las tres propuestas didácticas en el aula, para las que se necesitaron 20, 13 y 25 sesiones, respectivamente, que duraron tres, uno y tres meses, respectivamente, se recogió información continuada a través de una gran variedad de instrumentos de corte cuantitativo y cualitativo, lo que otorga riqueza y fiabilidad a los resultados que se presentan en los capítulos finales. Además, mi doble papel de profesora-investigadora para los grupos de alumnos con los que se han llevado a cabo las sucesivas experimentaciones, posibilita un conocimiento en profundidad de la complejidad del proceso acaecido en el aula, que difícilmente se obtendría con pruebas o investigaciones externas. Brown (1992) considera que los avances teóricos pueden emerger tanto de investigaciones externas (lo que ella llama estudios de laboratorio) como de situaciones de aula. Asimismo, esta autora considera que los experimentos de diseño, cuya finalidad es la de convertir las aulas en entornos de aprendizaje, propician una práctica reflexiva entre estudiantes, profesores e investigadores. Dentro de este marco, que está adquiriendo gran relevancia en los últimos años (Molina, 2006), este estudio puede enlazarse con la línea de investigación propuesta por dicha autora, quien adopta como enfoque metodológico el de los experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por una conjetura, el cual se describe en profundidad en el capítulo 5 y se ajusta en gran medida a mis propósitos investigadores.

Para cerrar este primer capítulo de presentación del estudio, quiero matizar que debido al carácter progresivo de la metodología adoptada para esta investigación, únicamente he expuesto la problemática general, la conjetura que la guía y sus objetivos. La evolución detallada y sistemática del trabajo se expone en el segundo bloque de esta memoria, una vez

⁸ El primer ciclo (ciclo 0) puede consultarse en García y Romero (2007), el segundo ciclo (ciclo 1) se encuentra recogido en el Anexo A de la presente memoria y el tercer ciclo (ciclo 2) constituye la parte central de dicha memoria.

realizada la revisión de la literatura en torno a las tres líneas de investigación cuya concurrencia resulta de interés para este trabajo (TIC, actitudes y competencias). Dicha revisión se lleva a cabo en los capítulos 2, 3 y 4, respectivamente, que, junto con este capítulo, conforman el primer bloque del presente trabajo.

CAPÍTULO 2

Las tecnologías de la información y la comunicación y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

En este capítulo se ofrece una visión general de las herramientas tecnológicas desde distintas perspectivas y se tratan aspectos relacionados con su inclusión en el aula de matemáticas, como recurso para mejorar la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina, tanto en términos cognitivos como actitudinales. Se empieza mostrando las características de las TIC y se ofrece una clasificación de dichas tecnologías, centrando el interés en las que se han seleccionado para su uso durante la intervención en el aula, en especial, el software de Geometría dinámica. Se analizan las características de este software, así como los resultados de investigaciones previas acerca de su potencialidad para satisfacer los objetivos del presente trabajo de investigación. Se continúa con la exposición de los aspectos relacionados con su inclusión en las aulas para trabajar contenidos matemáticos: funciones, ventajas e inconvenientes. Por último, se atienden aquellas cuestiones que se consideran importantes y se han tenido en consideración para garantizar una integración exitosa de las TIC en el aula: el papel del profesor, la naturaleza de las tareas, la cultura social del aula y el trabajo colaborativo.

2.1. INCIDENCIA DE LAS TIC EN MATEMÁTICAS

¿Alguien no ha oído hablar de las TIC? En las últimas décadas, los avances tecnológicos han ido ganando terreno hasta invadir por completo nuestras vidas. En cualquier situación de nuestra realidad cotidiana, como una simple llamada telefónica, un mensaje por correo electrónico, cuando vemos los informativos en televisión o los escuchamos en la radio o cuando usamos un cajero automático, estamos haciendo uso de las TIC. Por ello, es lógico pensar que si muchas de nuestras acciones están condicionadas por el uso de la tecnología, debemos incorporarlas a la educación para garantizar la alfabetización tecnológica de nuestros estudiantes. Siguiendo a la OCDE (2003), ésta podría definirse como el interés, actitud y habilidad de los individuos para usar apropiadamente la tecnología digital y las

herramientas de comunicación con el fin de acceder, gestionar, integrar y evaluar información, construir nuevo conocimiento y comunicarse con otros, a fin de participar efectivamente en la sociedad.

Uno de los propósitos del estudio previo realizado (García y Romero, 2007) era explorar la potencialidad del uso de TIC: Internet, software educativo, etc. en las aulas. En él se comprobó que las siguientes funciones atribuidas a las tecnologías (Zabalza, 1989) se pusieron de manifiesto en el aula:

- ▶ *función innovadora*. Permite el diseño de nuevas y novedosas actividades ya que cambia la interacción sujeto-aprendizaje.
- ▶ *función motivadora*. Estimulan la participación del alumnado acercando el aprendizaje de la materia al mundo real.
- ▶ *función estructuradora de la realidad*. Nos llevan a conocer mejor determinados contenidos, mostrándolos de forma diferente (efecto visual) la realidad. Mejoran los aprendizajes al dotarlos de sentido real.
- ▶ *función de relación alumno/a-conocimientos*. El tipo de medio condiciona el tipo de operación mental que la persona va a desarrollar en el manejo del medio y en el procesamiento de la información que el medio transmite.
- ▶ *función solicitadora u operativa del aprendizaje*. Facilitan y organizan las acciones instructivas, incluyendo no sólo el contacto con los contenidos presentados a través del medio, sino el contacto con el propio medio.
- ▶ *función formativa global*. Ayuda a transmitir valores educativos y actitudes: cooperación, implicación emocional, intensidad de esfuerzo exigido, etc.

No solamente se comprobó que las TIC cumplieran estas funciones, sino que se encontraron otras ventajas de su uso, coincidiendo en este punto con Alemán de Sánchez (2002, citado en Macías, 2007), quien señala como ventajas del uso de la computadora en la enseñanza las siguientes:

- Participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje.
- Interacción entre el alumno y la máquina.
- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante.
- La posibilidad de crear micromundos que le permiten explorar y conjeturar.
- Permite el desarrollo cognitivo del estudiante.
- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el alumno.

- A través de la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.

Los buenos resultados obtenidos en nuestro estudio previo acerca del trabajo con TIC en el aula, que informaron de una mejora global de las actitudes y competencias matemáticas de la mayoría de los estudiantes, así como mi deseo de continuar investigando el modo de sacar el máximo partido a estos recursos tecnológicos, me llevó a interesarme por las conclusiones de estudios recientes sobre el uso de estas tecnologías en el aula de matemáticas. Así, pude comprobar que, desde hace unos años, el uso educativo de las TIC se ha convertido en un tema de debate e investigación en el campo de la Educación Matemática y son muchos los autores que han indagado acerca de la potencialidad de tales herramientas.

Según Beeland (2002) y Weaver (2000), la instrucción con tecnología ha demostrado tener efectos positivos, tanto en el rendimiento en matemáticas de los estudiantes como en sus actitudes hacia las matemáticas. Reflexión compartida por Pellegrino et al. (1991), quienes trabajando las mismas tareas con dos grupos de estudiantes, obtuvieron mejoras observables en la resolución de problemas complejos, así como en las actitudes hacia las matemáticas, del grupo de estudiantes que usó TIC con respecto al grupo que usó lápiz y papel.

Preiner (2008) aporta una visión comparativa de las ventajas que, según su experiencia, proporciona el ordenador con respecto a otros medios o herramientas no tecnológicas, tanto para los estudiantes como para los profesores:

- Permite enseñanza individualizada y por tanto la acomodación a gran número de alumnos y a estudiantes con dificultades de aprendizaje, variando el punto de entrada al programa informático, el tipo y cantidad de *feedback* y el tiempo y lugar de aprendizaje.
- Desde el punto de vista de la organización docente permite un trabajo más autónomo del estudiante, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal, al tiempo que favorece el trabajo en equipo. En definitiva, permite el aprendizaje centrado en el estudiante, responsabilizándole de su propio aprendizaje.
- Crea situaciones de enseñanza impersonal donde los estudiantes pueden cometer errores en privado.
- Obvia las dificultades de muchos alumnos con la operatoria gracias a su potencia de cómputo y evita los errores de cálculo.

- Da oportunidades a los estudiantes de consolidar y demostrar dominio de conceptos previamente aprendidos. Permite a los estudiantes practicar toma de decisiones y destrezas de resolución de problemas.
- Proporciona una ayuda a los profesores para que reconsideren los objetivos y métodos de su enseñanza. Puede suministrar información a los profesores del rendimiento de los estudiantes.
- Enseña temas repetitivos o de bajo nivel que resultan aburridos y tediosos para los profesores.
- Permite que prime la reflexión y el análisis de resultados porque se requiere menos tiempo para hacer cálculos rutinarios.
- Incrementa la posibilidad de hacer matemáticas experimentales en el aula. A veces, la mejor forma de comprender el alcance de un teorema o la efectividad de un algoritmo es analizar los resultados que se obtienen al variar las hipótesis, condiciones iniciales, etc.

Del mismo modo que se tienen en consideración los aspectos positivos de estudiar matemáticas con TIC, no pueden obviarse los posibles inconvenientes que su introducción en el aula puede provocar. En esta línea, Sordo (2005) advierte de lo que él llama peligros a tener en cuenta al integrar las TIC en el aula de matemáticas, que he tenido presentes en esta investigación:

- La posibilidad de perder el sentido de las operaciones que realiza el ordenador de forma automática. Esta pérdida de sentido operativo puede provocar una pérdida de destrezas aritméticas básicas.
- Podemos confundir manipulación con conocimiento matemático, típico de cuando se adquiere un aprendizaje memorístico de las matemáticas consistente en el almacenamiento de algoritmos, definiciones y teoremas, en vez de una construcción de las matemáticas para la resolución de problemas. Los ordenadores no ofrecen garantías de la comprensión de los objetos manipulados.
- Debemos tener en cuenta la limitación del medio, ya que si no podemos caer en el error de creer que el ordenador lo resuelve todo. Se puede perder el sentido crítico debido a la fe ciega en la máquina.
- Podemos caer en peligros como la infodependencia. Podemos llegar a no saber resolver problemas si no es con el uso del ordenador.

En esta línea, el NCTM (2003) advierte de que, “el uso eficaz de la tecnología en clase de matemáticas depende del profesor. La tecnología no es una panacea. Como cualquier herramienta puede ser usada bien o deficientemente. La tecnología no sustituye al profesor...Al trabajar con medios tecnológicos, los alumnos pueden mostrar sus formas de pensar sobre las matemáticas que, de otro modo, son con frecuencia difíciles de observar” (p. 27). Por su parte, Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001) afirman que existe la creencia bastante extendida de que si los estudiantes usan herramientas tecnológicas para trabajar en matemáticas, entonces la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mejorará. Sin embargo, esta afirmación no reconoce que la introducción de nuevas herramientas tecnológicas en el aula implica la redefinición de los contenidos, de la metodología y del papel del profesor, puesto que las TIC son un recurso más cuya bondad está ligada a su uso coherente. Por ello, creo importante analizar cómo garantizar una efectiva integración de las TIC en las aulas y para ello, se hace necesario que el profesor planifique de antemano el modo de integrarlas en sus clases, diseñando actividades que brinden oportunidades para aprovechar sus bondades y a la vez resulten útiles para la consecución de sus objetivos de aprendizaje.

Asimismo, Leung (2006) sostiene que diferentes formas de aproximarnos a las mismas matemáticas (por ejemplo, usando distintas herramientas de aprendizaje) pueden dar lugar a diferentes representaciones de las matemáticas. Pero las herramientas no cambiarán las matemáticas objeto de estudio, y las diversas aproximaciones solo añadirán riqueza a nuestra comprensión de la verdad matemática. Adoptando este enfoque, las TIC nos proveen de una forma alternativa para entender la matemática y enriquecen nuestra comprensión de la matemática como tradicionalmente se entiende.

Puesto que mi intención es precisamente trabajar la resolución de problemas contextualizados con TIC en la línea de PISA, he tenido en cuenta, a la hora de elegir el software con el que llevar a cabo este estudio, los principios sugeridos por Clemens (2000a) y Underwood et al. (2005) para el desarrollo de herramientas tecnológicas como apoyo a la resolución de problemas matemáticos. Para Clemens sería deseable que las tecnologías permitieran a los estudiantes testar ideas y recibir feedback, manipular directamente objetos y comprometerlos en exploraciones matemáticas lúdicas. Underwood et al., comparten esas sugerencias de Clemens y además recomiendan que las herramientas tecnológicas deberían apoyar múltiples

aproximaciones y estrategias de solución, emplear múltiples representaciones y hacer obvia la relación entre representaciones.

Considerando todo lo anterior, llama la atención la discordancia entre la potencialidad otorgada a las TIC para mejorar la calidad de la enseñanza, avalada empíricamente, y la escasa utilización de estas tecnologías en las aulas en la actualidad. Comparto en este punto la observación de Hoyles y Noss (2003) de que, “cambios en el dominio computacional abren sólo el potencial de cambio, no el cambio real en el terreno didáctico”.

Bottino y Chiappini (2002) citados por Leung, lamentan que, en el caso concreto de los ordenadores, las altas expectativas sobre su potencial para impulsar el cambio e innovación en las escuelas parecen haber permanecido en gran medida incumplidas. La revisión de los informes de evaluaciones internacionales realizados en la última década, que informaron del uso de los ordenadores en el aula de matemáticas por los estudiantes, avalan esta afirmación. Así, los resultados del TIMMS 1999 (Mullis et al., 2000, p. 299) pusieron de relieve que, entre los países en los que se realizó el estudio, el 80% de los estudiantes (valor medio internacional) informó no usar nunca los ordenadores en clase de matemáticas. Al comparar estos resultados con los datos del TIMMS 1995, encontraron que había un pequeño, pero estadísticamente significativo, cambio desde la categoría de respuesta “nunca” a “de vez en cuando”, mostrando que aunque el uso de ordenadores en las clases de matemáticas era muy escaso en países de todo el mundo, había una señal de un ligero aumento en su uso entre 1995 y 1999.

En lo referente a España, Gutiérrez (2000) afirma que a pesar de los reconocidos beneficios del uso de los ordenadores en las clases de matemáticas de todos los niveles educativos, y de su creciente disponibilidad, en España todavía no se ha producido una modificación sustancial de los hábitos de enseñanza que favorezca su uso generalizado, sino que una mayoría de las clases matemáticas de hoy siguen ancladas en las metodologías de pizarra y libro de texto, y se diferencian poco de las de hace algunas décadas. El informe⁹ “*Are students ready for a technology-rich world? What PISA studies tell us*” (OCDE, 2006a) aporta información relevante al respecto, obtenida de las pruebas PISA 2003. El porcentaje medio de uso frecuente de las TIC en la escuela en los países de la OCDE fue de un 44%, mientras que el porcentaje de uso frecuente de las TIC por los estudiantes en sus casas fue del

⁹ Un informe homólogo a éste para el estudio PISA 2006 no se ha publicado, aunque existe la posibilidad de que se publique dicho informe para los resultados del estudio PISA 2009 en junio de 2011

74%. Este informe mostró que los estudiantes con experimentación reducida en el uso de ordenadores, puntuaron pobremente en PISA 2003, hecho que acentúa la necesidad de acortar la diferencia de uso de los escolares de estas tecnologías respecto del uso que ellos hacen de ellas en sus casas, reflejados en los porcentajes anteriores. Por lo que respecta a nuestro país, se observa que en los últimos años el uso de TIC en clase de matemáticas ha ido incrementándose, aunque investigaciones como la realizada por Gargallo y otros (2004), ponen de relieve que el progreso ha sido más lento de lo que se esperaba. El “*Informe sobre la implantación y el uso de las TIC en los centros docentes de educación primaria y secundaria (2005-2006)*” realizado en 2006 y publicado en formato electrónico en 2008¹⁰, avala esta afirmación. Dicho informe pone de relieve que en el caso de Educación Secundaria, sólo en las asignaturas de Tecnología y en Ciencias sociales, el 38% y el 20% de los alumnos, respectivamente, usan el ordenador con una frecuencia media (entre una vez a la semana y una vez al mes) o alta (casi todos los días o varias veces a la semana). En el resto de las asignaturas, más del 80% de los estudiantes afirma no emplearlo nunca o casi nunca. En lo referente a las aulas de matemáticas de dicha etapa, resultan sorprendentes los bajos porcentajes de uso de los estudiantes, con una frecuencia media o alta, para la navegación en busca de información (30.4% para ESO y 35.5% para Bachillerato), el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de programas o software específico (16.5% para ESO y 11.2% para Bachillerato), el uso de hojas de cálculo (16.2% para ESO y 18.2% para Bachillerato), etc. Estos datos confirman la distancia antes señalada entre el uso potencial y real de las TIC en las aulas de educación secundaria.

Si se comparan los datos anteriores sobre del uso de los ordenadores en la escuela, y más concretamente en las aulas de matemáticas, con los obtenidos por el INE en la *encuesta sobre equipamiento y uso de tecnologías de información y comunicación en los hogares*¹¹, acerca del uso de los niños de entre 10 y 15 años (alumnos de ESO) de las TIC en sus casas, se observa una marcada diferencia, a la que ya he hecho referencia anteriormente. Los resultados de esta encuesta¹² en los últimos años revelaron que la proporción de uso de tecnologías de información por la población infantil (de 10 a 15 años) es, en general, muy alta y en los últimos años ha ido incrementándose. Los datos de 2006 mostraron que el 75.8% y el

¹⁰ Recuperado el 10 de enero de 2009 de <http://www.ontsi.red.es/educacion/articulos/id/2605/informe-sobre-implantacion-uso-las-tic-los-centros-docentes-educacion-primaria-secundaria-curso-2005-2006.html>

¹¹ Recuperado el 5 de febrero de 2010 de <http://www.ine.es/jaxi/menu.do?type=pcaxis&path=%2Ft25/p450&file=inebase&L=0>

¹² Datos referidos a los tres últimos meses de cada año

71.1% de los niños de esas edades eran usuarios de los ordenadores e Internet, respectivamente, en sus hogares y que el 87.7% de ellos afirmaba emplearlos, entre otros usos, para realizar trabajos escolares. En el año 2009 los resultados de la encuesta mostraron que el uso de ordenador entre los menores era prácticamente universal (94.5%), obteniendo un 85.1% de ellos que utilizaba Internet en sus hogares, encontrando que el 93.4% de ellos los utilizó para realizar trabajos escolares. El alto porcentaje de estudiantes considerado usuario de las TIC, por emplearlas con una frecuencia media o alta en sus hogares, transmite una actitud hacia el uso de las TIC por su parte bastante positiva, que debería aprovecharse para mejorar las actitudes hacia el aprendizaje de las distintas materias, incorporando estas tecnologías en las aulas.

Todos los resultados presentados reflejan una necesidad de cambio en los métodos de enseñanza-aprendizaje, que involucre un mayor uso de estas tecnologías en las aulas, para salvar la distancia entre el uso de TIC de los escolares en las aulas y en los hogares, y como modo de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes (los resultados del informe de la OCDE (2005a) informaron de resultados menos positivos para aquellos estudiantes con escasa experiencia en el uso de los ordenadores con fines educativos).

Creo que la falta de concordancia entre el uso potencial y real de las TIC en el aula se debe, en gran parte, a una falta de formación del profesorado sobre este tema, que les otorga una visión limitada de las posibilidades que su incorporación llevaría consigo. No obstante, coincido con Sepúlveda y Calderón (2007) en que el profesorado es consciente de que tiene que evolucionar, ya que la introducción de las TIC ha supuesto un cambio substancial en la estructura física de los centros y, cómo no, en su labor como docentes. Este cambio indudablemente conlleva invertir más tiempo, dedicación y esfuerzo, pues supone romper con normas, tradiciones, formas de trabajar, etc. y no se puede esperar que sea inmediato. Además, desde las autoridades educativas se debe potenciar la formación del profesorado en el uso efectivo de TIC (para mejorar su proceso de enseñanza-aprendizaje), pues autores como Parsad, Lewis y Farris (2001) señalan que la mayoría de las oportunidades de desarrollo tecnológico profesional para maestros en servicio se ofrece en forma de talleres de corta duración que se centran en impartir los conocimientos generales acerca de un nuevo software educativo así como, las habilidades básicas necesarias para su manejo. Sin embargo, debido a la escasez de tiempo, muchos talleres no cubren la cuestión de cómo integrar este software con éxito en la enseñanza de las matemáticas, y por lo tanto, la transferencia de estas

nuevas habilidades a sus aulas se hace más difícil de lo necesario para los profesores. En este sentido, este trabajo puede ser útil, pues la secuencia de enseñanza basada en el uso de TIC que he diseñado y llevado a la práctica, puede ser implementada directamente por otros profesores en sus aulas o puede servirles de modelo para el diseño de otras secuencias que les resulten de interés.

2.2. LAS HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS COMO APOYO A LA ENSEÑANZA

Comienzo poniendo de manifiesto cuáles son las competencias digitales básicas deseables en todo docente, para mostrar después el abanico de posibilidades tecnológicas que tenemos a nuestro alcance, centrándome en las que se emplean en este trabajo.

Según Marqués (2008), se entiende por competencias digitales del profesorado las competencias relacionadas con el uso de las TIC. En el caso de los docentes serán las mismas que requieren todos los ciudadanos y, además, las específicas derivadas de la aplicación de las TIC en su labor profesional, para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y gestión de centro. Al igual que los alumnos, los profesores necesitamos una alfabetización digital que nos permita utilizar de manera eficaz y eficiente estos nuevos instrumentos tecnológicos que constituyen las TIC en nuestras actividades profesionales (docentes, de investigación, de gestión) y personales. Necesitamos competencias instrumentales para usar los programas y los recursos de Internet, pero sobre todo adquirir competencias didácticas para el uso de todos estos medios TIC en nuestros distintos roles docentes como mediador, orientador, asesor, tutor, proveedor de recursos para el aprendizaje, fuente de información, organizador de aprendizajes, motivador...

El Centre for Learning & Performance Technologies (C4LPT), en colaboración con profesionales de la Educación de todo el mundo, elaboraron un directorio¹³ con los tipos de herramientas de mayor utilidad para la enseñanza/aprendizaje (tanto libres como de pago), que agruparon en una docena de categorías por funciones, que resultan de utilidad para el desarrollo de las competencias digitales antes mencionadas:

1. Navegación: navegadores y extensiones (utilidades para configurar tu navegador con más funciones.

¹³ Recuperado el 12 de marzo de 2009 de <http://camarotic.es/?p=50>

2. Búsqueda: buscadores e investigación.
3. Ofimática: textos, hojas de cálculo y bases de datos, calculadoras, agendas y localizadores, escritorios, apuntes y pizarras compartidas, conversores PDF, lectores PDF, gestores de información personal, herramientas diversas de productividad personal.
4. Etiquetado de recursos favoritos y sindicación de contenidos: marcadores sociales, lectores y alertas RSS, páginas de inicio, creación y gestión de canales RSS.
5. Comunicación: correo y mensajería, foros, voz sobre IP y vídeo-llamadas, salas de chat y videoconferencia, herramientas para telefonía móvil, multiconferencia y pantallas compartidas.
6. Redes sociales y comunidades virtuales, herramientas de trabajo en grupo, entornos virtuales multiusuario.
7. Uso de repositorios y alojamiento de archivos en plataformas sociales.
8. Gestión y publicación de contenidos: creación de blogs, CMS (sistemas de gestión de contenidos, portales), wikis, edición de páginas web, portafolios, accesorios para sitios web.
9. Gestión de cursos y aprendizaje: creación de cursos, LMS (edición y gestión de cursos).
10. Edición multimedia, presentaciones, vídeo-tutoriales, simulaciones y capturas de pantalla.
11. Generación de contenidos en canales multimedia: tv/vídeo, audio.
12. Creación de materiales didácticos: materiales interactivos, ejercicios y cuestionarios, juegos, mapas conceptuales, libros electrónicos, encuestas.

Para el diseño y puesta en práctica de la secuencia de enseñanza diseñada para ser trabajada con TIC, en algún momento he necesitado y empleado las herramientas anteriores, aunque algunas me han sido de mayor utilidad que otras para mis propósitos docentes e investigadores y por ello, en adelante las describo más en profundidad.

Ha sido de gran provecho la red Internet que, como espacio educativo, ofrece un gran abanico de posibilidades para el desarrollo de procesos innovadores de aprendizaje, incluyendo las señaladas por los autores anteriores. De entre todas las utilidades o aplicaciones de Internet, destaca la World Wide Web (*www*), como el espacio de mayor potencialidad y difusión de materiales. Las llamadas páginas *www* permiten publicar cualquier elemento informático

(texto, foto, música, vídeo) o creaciones personales de tipo educativo sin la ayuda de editores comerciales, de ahí su crecimiento exponencial en los últimos años. Además de los materiales didácticos y contenidos alojados en sitios web, accesibles desde cualquier punto de la red y en cualquier momento y lugar, cuando hablo de recursos web para uso educativo, me estoy refiriendo también a las herramientas o aplicaciones que permiten desarrollar actividades de aprendizaje con tecnologías de la información y la comunicación.

Otras de las anteriores herramientas que me han sido de gran utilidad son las *Plataformas de Gestión del Conocimiento*, dado que ofrecen un espacio educativo ubicado en la red en el que cada docente puede diseñar e incluir actividades, cuestionarios, tareas... para realizar con el alumnado y pueden adaptarse a las necesidades de cada cual. Son muchas las plataformas ya diseñadas que se encuentran en Internet que permiten el acceso y uso por parte de los docentes. En el caso de la comunidad autónoma andaluza, la Junta de Andalucía pone a nuestra disposición varias plataformas educativas de manera gratuita, de entre las cuales he seleccionado para esta investigación: Helvia y Moodle. Estas herramientas han permitido la ubicación de los materiales que he diseñado para trabajar con TIC y el acceso permanente a ellos por parte de mis estudiantes. Las diferencias entre ambas plataformas pueden resumirse diciendo que Moodle permite el diseño de mayor tipo de instrumentos (como cuestionarios, test o exámenes) y espacios para interactuar con los estudiantes (como chats, foros, etc.) que Helvia. Sin embargo, Helvia no necesita conexión a Internet, lo cual ayuda en aquellos momentos en los que se presentan problemas técnicos con la conexión. Además, Helvia dispone de gran cantidad de memoria a disposición de cada profesor donde guardar las tareas resueltas con TIC de los estudiantes. Las razones expuestas me llevaron a trabajar con ambas plataformas simultáneamente.

Entre los materiales web, los que están manifestando mayor potencialidad pedagógica son los programas de ordenador creados con la finalidad de ser usados como medios didácticos, y que componen lo que comúnmente se llama Software Educativo. De los diferentes tipos que lo componen, según Drijvers y Trouche (2007), Fuglestad (2005) y Leuders, Barzel y Hußmann (2005), los usados comúnmente para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son los de álgebra, geometría dinámica y las hojas de cálculo. Estos programas pueden ser diseñados por expertos o por los propios docentes con fines educativos adaptados a su entorno. Pueden crearse con carácter comercial y uso privado, o bien gratuitos y de uso público, denominándose estos últimos como Software Libre.

Preiner (2008) hace un recorrido histórico de la evolución del software educativo y señala cómo, a finales de la década de los 80, los aspectos pedagógicos adquirieron gran importancia, demandando así software de fácil uso que permitiese centrarse en el contenido en lugar de en la tecnología en sí misma. “Una integración significativa de las nuevas tecnologías en la enseñanza se convirtió en el objetivo general, que fue apoyado por el desarrollo del primer software de geometría dinámica Cabri y el sistema de álgebra computacional Derive (Weigand y Weth, 2002). Además, los programas de ejercicio-práctica y la enseñanza asistida por computadora (Kaput, 1992, Kaput y Thompson, 1994), que fueron las primeras aplicaciones de los ordenadores para aprender matemáticas, fueron progresivamente reemplazadas por los entornos de aprendizaje multimedia”(pp. 22-23). Una vez más, tuvo lugar el debate sobre el uso efectivo de estas nuevas herramientas y se plantearon preguntas acerca de la integración selectiva de las nuevas tecnologías en la enseñanza y su papel en la evaluación. Sin embargo, para Weigand y Weth, (2002), “las expectativas relativas a los posibles cambios de la educación matemática en términos de objetivos, contenidos y métodos de instrucción fueron más realistas en esta ocasión: las nuevas tecnologías se suponía que iban a ser sucesivamente integradas en la enseñanza y el aprendizaje, apoyando una ‘evolución’ en lugar de causar una ‘revolución’ ” (p. 23).

Centrándose en los tipos de tecnologías, Preiner propone una clasificación de las que normalmente son usadas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, los manipulativos virtuales o applets, que consisten en entornos interactivos específicos de aprendizaje, usualmente accesibles online, y que permiten a los estudiantes explorar conceptos matemáticos sin necesidad de habilidades tecnológicas especiales ni conocimiento sobre paquetes de programas educativos específicos. Por otro lado, está el software matemático, que es apropiado para propósitos educacionales y puede ser usado para una amplia variedad de tópicos o contenidos matemáticos.

Aunque usar applets puede ser conveniente para los profesores, su limitación de los experimentos matemáticos a un cierto rango de actividades y tópicos son obvios. Por tanto, muchos profesores (además) usan paquetes de software educativo que les permiten más flexibilidad y posibilitan a ambos, estudiantes y profesores, visualizar y explorar conceptos matemáticos en sus propias formas creativas (Barzel, 2007). Las herramientas más utilizadas

para la Educación Matemática incluyen software de geometría dinámica (SGD¹⁴), algebraico (CAS), hojas de cálculo y software de matemática dinámica (SMD).

Un SGD permite a los usuarios crear y modificar dinámicamente construcciones euclídeas. Las propiedades geométricas y las relaciones entre objetos usados en una construcción se mantienen al manipular un objeto y además modifican los objetos dependientes en consecuencia. El CAS transforma simbólicamente álgebra, geometría analítica y cálculo. Usando ecuaciones de objetos geométricos, el programa puede decidir sobre la posición relativa de cada uno y mostrar sus representaciones gráficas. Las hojas de cálculo son aplicaciones que permiten mostrar textos alfanuméricos o valores numéricos en celdas de tablas que están organizadas en filas y columnas. Las fórmulas pueden ser usadas para calcular nuevos valores referidos a otras celdas, de modo que cuando el contenido de una celda es modificado, los valores de todas las celdas relacionadas con ella son automáticamente actualizados. El SMD es aquel que combina ciertas características del SGD, CAS y además de las hojas de cálculo, algunos ejemplos de estos programas son Geogebra desarrollado por Markus Hohenwarter, Regla y Compás o C.a.R. creado por René Grothmann, y GEONEXT producido en la Universität Bayreuth, todos ellos de uso gratuito.

La revisión de los distintos software educativos me ayudó a decidirme por el uso de SGD. Por una parte, porque considero una razón de peso que sea uno de los tipos de software más utilizados por los profesores actualmente y, por otra parte, debido a los buenos resultados obtenidos por otros autores sobre la potencialidad de su uso para la enseñanza-aprendizaje de la geometría, que se exponen en el siguiente apartado. En otro orden de cosas, las dificultades que los alumnos manifiestan para comprender los contenidos geométricos a edades tempranas, la extensión de los currículos de cada curso y la infravaloración de los contenidos geométricos respecto de otros bloques de contenido como Números y Álgebra, hacen que el tiempo que se le dedica a la Geometría en los primeros cursos de la ESO resulte insuficiente. El estudio de la Geometría queda relegado al último lugar, es decir, se trabaja una vez estudiados los restantes bloques de contenidos, y con frecuencia se reduce a la aplicación mecánica de ciertas fórmulas matemáticas de perímetros, áreas y volúmenes. La posibilidad de trabajar contenidos geométricos con los estudiantes y suplir estas carencias geométricas,

¹⁴ Las siglas SGD y SMD, en castellano, son homólogas a DGS y DMS, en inglés, usadas para Dynamic Geometry Software y Dynamic Mathematics Software, respectivamente.

fue otra de las razones que me hizo decantarme por el SGD, desde la convicción de que el software contribuiría a mejorar la comprensión de estos contenidos.

Dedico el siguiente apartado 2.3 a fundamentar por qué considero adecuado que los estudiantes estudien Geometría usando SGD y también a justificar la elección de los dos software con los que los alumnos trabajaron en el aula: Geogebra y C.a.R.

2.3. LAS TIC Y LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Clements y Battista (1992) describen la geometría escolar como el “estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales” (p. 420). En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte están los objetos espaciales, que se deben entender como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

El estudio de la Geometría escolar puede realizarse de distintos modos, diferenciando principalmente dos vertientes: el estudio de los conocimientos espaciales *estática o dinámicamente*.

La forma tradicional de enseñar la Geometría se ha basado en el estudio de Geometría estática, pudiendo considerar la Geometría dinámica como un campo relativamente novedoso. Según Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006):

La enseñanza de la Geometría está basada en el uso de dos registros: diagramas y lenguaje. El lenguaje es un medio de describir objetos geométricos y relaciones usando terminología específica, mientras que los diagramas en 2D juegan un papel ambiguo. Por un lado, los diagramas se refieren a objetos teóricos, mientras que por otro lado, ofrecen propiedades gráfico espaciales que pueden dar lugar a una actividad de percepción para el individuo (Parzysz, 1988; Laborde, 1998). Esto es como si fuese posible leer las

propiedades del objeto teórico, el cual está representado por el diagrama, pero solamente mirando el diagrama. Una de las consecuencias es que los estudiantes con frecuencia asumen que es posible construir un diagrama geométrico usando solamente señales visuales, o deducir una propiedad empíricamente por comprobación en el diagrama, como ha sido mostrado por muchos investigadores (Chazan, 1993). Cuando el profesor pide a los estudiantes construir un diagrama, el profesor espera que ellos usen conocimiento teórico, mientras que los estudiantes con mucha frecuencia permanecen en el nivel gráfico e intentan satisfacer únicamente limitaciones visuales. Desde esta enseñanza de la Geometría, la construcción de la naturaleza dual: empírica/teórica de los conceptos geométricos puede ser ignorada.

Contrastando con esta enseñanza práctica, sobre la base de sus investigaciones, investigadores y educadores acentuaron la importancia del papel de la visualización en una actividad geométrica (Duval (2000) distingue tres clases de procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica: procesos de visualización, de construcción y de razonamiento). Es comúnmente asumido que la enseñanza de la Geometría debería contribuir al aprendizaje de: (1) la distinción entre relaciones gráfico espaciales y relaciones geométricas teóricas, (2) el movimiento entre objetos teóricos y su representación espacial, (3) el reconocimiento de relaciones geométricas en un diagrama, (4) la habilidad para imaginar todos los posibles diagramas asociados a un objeto geométrico. La segunda clase de habilidad es particularmente crítica en el proceso de resolución de estudiantes enfrentados a problemas geométricos que requieren exploración, en la cual un ciclo de interpretar, conjeturar y probar debe tener lugar a causa de esta flexibilidad entre representaciones espaciales y conocimiento teórico. Tales supuestos sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría han llevado a muchos investigadores a centrarse en el papel de las representaciones gráficas provistas por los entornos informáticos. (p. 277)

En los últimos años ha ido cobrando relevancia el uso de herramientas o recursos como SGD en las aulas de matemáticas para fomentar el estudio dinámico de la Geometría. Desde los Estándares de Geometría del NCTM se propone el uso de software de geometría dinámica en las aulas argumentando que:

La Geometría ha sido siempre un campo rico en el que los estudiantes pueden descubrir patrones y formular conjeturas. El empleo de programas de geometría dinámica les permite examinar muchos casos y, por tanto, ampliar su habilidad para hacerlo. Sin

embargo, enjuiciar, construir y comunicar matemáticamente argumentos apropiados sigue siendo un aspecto central del estudio de la Geometría. Los alumnos deberían ver la potencia de la demostración deductiva para establecer la validez de resultados generales a partir de unas condiciones dadas. El centro de atención debería estar en producir argumentos lógicos y presentarlos con una cuidadosa explicación del razonamiento, más que en la forma de demostración utilizada (por ejemplo, argumentado con texto redactado, o de modo formal con proposiciones lógicas). Un desafío específico para los profesores de la escuela secundaria es integrar la tecnología en su enseñanza, como una muestra de animar a los alumnos a explorar ideas y desarrollar conjeturas, mientras continúan ayudándoles a comprender la necesidad de las demostraciones o contraejemplos de las conjeturas. (p. 314)

El profesorado de matemáticas se enfrenta en la actualidad al reto de innovar e introducir cambios en el modo tradicional de enseñar Geometría, empujados por la corriente o revolución tecnológica que invade nuestras vidas y que afecta también al ámbito educativo. Recientemente, el uso de la geometría dinámica ha atraído la atención de muchos investigadores en el campo de la educación matemática, que han subrayado su naturaleza flexible como una de las primeras ventajas sobre los materiales tradicionales de aprendizaje (Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer, 2006). Para el estudio de la Geometría dinámica contamos con bastantes posibilidades tecnológicas, pero según Sträßer (2002), el Software de Geometría Dinámica (SGD) desde sus inicios, hace más dos décadas, ha ido ganando relevancia hasta convertirse en uno de los software más ampliamente usados en las escuelas y colegios de todo el mundo. No obstante, considero que el uso de estos software y de cualquier otro, debe ir precedido de un examen exhaustivo que garantice los mejores resultados y se debe considerar una reestructuración dinámica del currículum y admitir el software de geometría dinámica como herramienta en la que el conocimiento oficial puede basarse.

A la hora de elegir SGD específicos para trabajar con los estudiantes en el aula, en primer lugar llevé a cabo una revisión de las investigaciones realizadas por otros autores, que me informaron de los software actuales más destacados y de las ventajas e inconvenientes, teóricos y encontrados en la práctica por aquellos que experimentaron con estos programas con los estudiantes. De entre ellos, destacó el software Geogebra como el más popular y más utilizado en los últimos años entre los software libres, afirmación avalada por los creadores del programa Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis y Lavicza (2008) quienes estimaron que más

de 100.000 profesores en todo el mundo ya habían usado Geogebra para la enseñanza de las matemáticas, creando materiales estáticos e interactivos para fomentar el aprendizaje de sus estudiantes. Estos autores crearon el Instituto Internacional de Geogebra¹⁵ (IIG), accesible online, como espacio en el que profesores e investigadores de todo el mundo puedan trabajar juntos para promover el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas mediante el apoyo y la coordinación de las actividades siguientes:

- desarrollo de materiales libres para usar con GeoGebra.
- talleres para los docentes y futuros formadores GeoGebra.
- desarrollo y puesta en práctica de nuevas funcionalidades del software.
- desarrollo de un sistema de apoyo en línea para profesores.
- evaluación y mejora de las actividades de desarrollo profesional y materiales.
- diseño y puesta en práctica de proyectos de investigación con Geogebra.
- presentaciones en congresos nacionales e internacionales.

Asimismo, estos autores expusieron los resultados de una investigación llevada a cabo con Geogebra con cientos de estudiantes de centros de secundaria de Australia en 2006, los cuales revelaron que, en general, los participantes encontraron este material dinámico e interactivo, útil para comprender y visualizar los conceptos matemáticos subyacentes.

Con la idea en mente de usar Geogebra en esta experiencia, dada la aceptación y bondades encontradas por otros autores, pero reacia a elegirlo sin comprobar por mí misma qué otros programas podrían ser de utilidad, realicé un curso de formación ofertado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (curso 2006/07). Dicho curso me permitió una primera toma de contacto con los diferentes SGD en aquel momento disponibles, además del mencionado Geogebra, y analizarlos en detalle para comprobar cuáles de estos software serían de ayuda para satisfacer mis objetivos de aprendizaje. En especial, me cercioré de que dispusiesen de las herramientas necesarias para que los alumnos trabajasen con éxito los contenidos geométricos seleccionados. Además, en su elección y posterior análisis tuve en cuenta los escasos conocimientos de mis alumnos en el bloque de Geometría, que según mi propia experiencia, suelen ocasionarles bastantes problemas de asimilación y comprensión. Todo ello me hizo decantarme por el uso de Geogebra y Regla y Compás (C.a.R.).

¹⁵ Accesible desde www.geogebra.org/IGI/

A lo largo del ciclo 1 de esta investigación (Anexo A) se emplearon ambos programas con los estudiantes y esta experiencia me llevó a adoptar la decisión de considerar únicamente Geogebra para el ciclo 2 o definitivo, dada su mayor adecuación a mis propósitos. En un primer momento elegí C.a.R., porque facilitaba el que los estudiantes accediesen a él desde sus ordenadores¹⁶, y debido a ello, en el ciclo 1 los estudiantes comenzaron trabajando con este software las tareas diseñadas. Durante dicha puesta en práctica se puso en evidencia cierta limitación de la versión de C.a.R. con la que trabajé, en cuanto a ausencia de algunas herramientas geométricas (Isometrías del plano) necesarias para la correcta realización de las tareas diseñadas que, sin embargo, estaban incluidas en el menú o barra de herramientas de la versión de Geogebra disponible. Por ello, decidí usar también Geogebra para la realización de la última de las tareas de este ciclo. El uso conjunto de ambos software me permitió evaluar cuál se adaptaba mejor a mis objetivos de aprendizaje y, en función de esa información, tomé la decisión de trabajar únicamente con Geogebra para el ciclo 2 que se presenta en esta memoria de investigación. Geogebra, además de compartir con C.a.R. algunos atributos importantes para mis objetivos de aprendizaje, como su facilidad de manejo y adecuada interfaz, incorporaba algunas herramientas adicionales (herramientas para el estudio de las Isometrías del plano) que lo hacían adecuado para trabajar los contenidos geométricos seleccionados permitiendo diferentes niveles de profundidad.

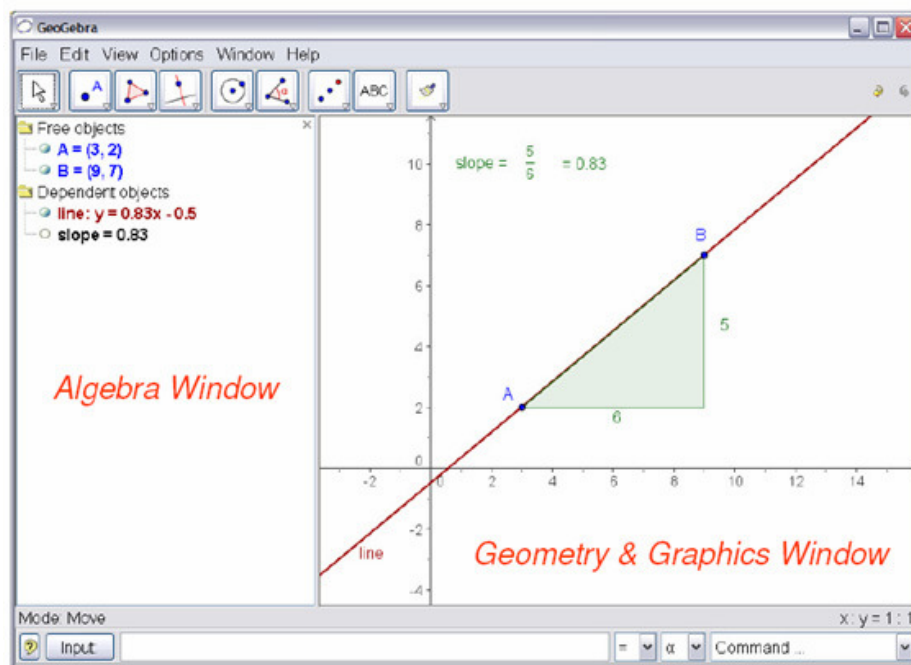
En lo que sigue presentaré en mayor profundidad el software Geogebra, así como las ventajas que algunos autores atribuyen a este software como herramienta útil para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría escolar.

El software Geogebra puede asignarse a cualquiera de las dos categorías anteriormente expuestas: SGD o SMD, puesto que en realidad los SMD son programas de geometría dinámica con algunas particularidades algebraicas añadidas, por lo que me referiré indistintamente a Geogebra como SGD o SMD.

En concreto, el software multi-plataforma Geogebra (Hohenwarter y Preiner, 2007), intenta combinar la facilidad de uso de un software de geometría dinámica con las versátiles

¹⁶ Ninguno de los dos software elegidos estaban instalados en los ordenadores y no era posible su instalación para ser usados durante los meses en los que se desarrolló la fase de acción del ciclo 1, puesto que las actualizaciones del software educativo de los equipos las realizaba la Junta de Andalucía anualmente. Sin embargo, se podía trabajar con ellos en versión live, resultando más rápido y sencillo acceder de este modo a C.a.R. que a Geogebra desde las aulas en cada sesión (una vez descargado en la carpeta de usuario de cada estudiante el archivo ejecutable de C.a.R., sólo era necesario ejecutarlo para que el programa comenzase a funcionar).

posibilidades del software algebraico. La idea básica del programa es unir geometría, álgebra y cálculo, que otros paquetes tratan por separado, en un único paquete para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde nivel elemental hasta nivel universitario, permitiendo conectar diferentes representaciones del mismo objeto dinámicamente. Ofrece dos representaciones de cada objeto: la componente numérico-algebraica muestra coordenadas, ecuaciones explícitas, implícitas o en forma paramétrica, mientras que la componente geométrica muestra el correspondiente conjunto de soluciones. Ambas representaciones pueden ser modificadas por los usuarios: la geométrica arrastrando el ratón (dragging) y la algebraica usando el teclado. Al modificar una de estas representaciones la otra se actualiza dinámicamente.



El uso de Geogebra para trabajar contenidos geométricos está justificado en la literatura reciente por diversos autores, quienes señalan los atributos y ventajas de este software como razones para introducirlo como herramienta de trabajo en el aula. Preiner (2008) señala las siguientes razones para usar Geogebra:

- Es software libre y por ello, gratuito para uso no comercial. Puede descargarse fácilmente y también hay una versión para usarla online: Geogebra WebStart, que además cuenta con la ventaja de que se actualiza automáticamente.
- Investigaciones demuestran que SGD es efectivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Es un software de matemáticas dinámico, que combina geometría, álgebra y cálculo.

- Proporciona múltiples representaciones de un mismo objeto matemático, que fomenta la comprensión de los estudiantes de los conceptos matemáticos.
- Conecta bidireccionalmente las diferentes representaciones de un objeto, adaptando cada representación a las modificaciones de su homólogo.
- Ha sido diseñado para los estudiantes para ser manejado intuitivamente y sin necesidad de habilidades tecnológicas avanzadas.
- Permite la creación de hojas de trabajo dinámicas o virtuales manipulativos (applets), que pueden compartirse en el espacio web: GeogebraWiki.
- Está programado en Java y puede ser usado en cualquier sistema operativo.
- Está traducido a 39 idiomas y la comunidad internacional de usuarios de Geogebra sigue creciendo, permitiendo compartir actividades de enseñanza interactivas gratuitamente en el GeogebraWiki, accesible desde la página del Instituto Internacional de Geogebra antes mencionada.

Entre los atributos de los SGD, atribuibles por tanto a Geogebra, destaco aquellos que me han parecido más relevantes para esta investigación. Según la perspectiva de Sánchez (2001), el SGD posee los siguientes atributos genéricos, que resultan especialmente adecuados para la mejora buscada en nuestros estudiantes:

A/ Constructividad. Es la posibilidad de construir nuevos escenarios a partir de la combinación de objetos en espacio y tiempo. El aprendiz hace cosas, construye, tiene actividad. El desarrollo del software depende de las acciones que el aprendiz haga y de las decisiones que tome. Este concepto está muy ligado al modelo constructivista de aprender.

B/ Navegabilidad. Es la posibilidad de explorar libre y flexiblemente (en contraposición a una linealidad y secuencialidad), los ambientes que componen el mundo, dominio o estructura de información presentada en el software.

C/ Interactividad. Es la capacidad dinámica que refleja un sistema que provee retroalimentación al usuario en tiempo real, adapta o modifica dinámicamente su comportamiento en función de los eventos recibidos y entabla alguna modalidad conversacional con cierto grado de detalle, complejidad y modalidad.

D/ Contenido. Es la calidad, fiabilidad, organización y relevancia de la información entregada en el software. Es un atributo ortogonal a la presentación y debe ser adaptado y organizado, dependiendo de la audiencia.

E/ Interfaz. Es la superficie de contacto entre el aprendiz y el computador. Es la pantalla con la cual el aprendiz interactúa, su estructura y funcionalidad. Es el modo de capturar la acción y atención del aprendiz y de reflejar el estado y contenido del sistema. La interfaz tiene fuerte impacto en la navegación, construcción e interactividad provista.

Otra característica del uso de SGD que considero relevante es que, para que los estudiantes representen objetos matemáticos, necesitan conocer los problemas en términos de propiedades matemáticas. Por ejemplo, para construir un rectángulo, los estudiantes deben identificar propiedades asociadas con esta figura, tales como pares de líneas paralelas o lados perpendiculares que les ayuden a elegir los comandos correctos para representar la figura. Con el uso del software, los estudiantes pueden, además, construir configuraciones geométricas dinámicas formadas por figuras simples (líneas, segmentos, triángulos, mediatrices, etc.), que deben ser usadas como punto de partida para identificar conjeturas o relaciones matemáticas. En este punto, la herramienta *dragging*¹⁷ puede ser muy útil.

Del mismo modo, destaco y expongo a continuación las ventajas del uso de SGD (entre ellos, Geogebra) como herramienta de trabajo en el aula, encontradas por otros investigadores. Estas ventajas hacen referencia al desarrollo de algunas de las competencias investigadas, no habiendo encontrado estudios que informen de la influencia del SGD en las restantes, ni tampoco trabajos que hayan indagado sobre sus efectos en las actitudes de los estudiantes relacionadas con las matemáticas. Espero que los resultados de este trabajo contribuyan en este sentido.

Investigadores tales como Battista (2002), Hollebrands (2003), Mariotti (2000) y Yu y Barret (2002) han indagado las formas características de razonamiento que los SGD ocasionan y que con frecuencia no tienen homólogas en los entornos de aprendizaje tradicionales. Investigaciones relacionadas con los usos de los estudiantes de secundaria de tales programas, mostraron cómo éstos produjeron una mejora de la comprensión de los conceptos

¹⁷ Ya expuse en el capítulo 1 la definición de *dragging* que ahora retomo: función del software que permite mover o arrastrar un elemento de un objeto geométrico, que deforma dicho objeto preservando todas las propiedades geométricas que se usaron para su construcción. Entre los tipos de arrastre según Arzarello, Olivero, Paola y Robutí (2002) se identifican 3 modalidades:

- *Arrastre errático* (*wandering*): Arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, cuando los estudiantes empiezan a explorar una construcción.
- *Arrastre de test* (*test*): El arrastre se hace para comprobar la corrección de la construcción.
- *Arrastre sobre un lugar oculto* (*lieu muet*): El arrastre se hace procurando que los sucesivos dibujos conserven cierta/s propiedades matemáticas.

geométricos y apoyaron el desarrollo de demostraciones formales por parte de los estudiantes. (Laborde, Kynigos, Hollebrands y Straesser, 2006). En relación con la demostración en geometría, Or (2005) estudió con un grupo de estudiantes de secundaria de Hong Kong el ciclo construir-experimentar-conjeturar en un EGD¹⁸ y observó que, en episodios de exploración exitosos de los estudiantes, este ciclo actúa como un ciclo recursivo fundamental que genera una espiral cognitiva vertical en la que cada nivel se sitúa en un plano cognitivo más elevado que el anterior. Este proceso de espiral eventualmente finaliza cuando se llega a una explicación. También, Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2004) trataron de comprobar si el hecho de que el SGD propicie una mayor participación de los estudiantes durante la fase previa a la demostración (en la que los estudiantes se convencen de la validez de sus conjeturas) les lleva a la necesidad de encontrar una demostración más formal. Encontraron, a diferencia de resultados obtenidos en investigaciones previas, que el SGD y cuestiones apropiadas motivaron a los estudiantes a buscar justificaciones para sus conjeturas y que éstos encontraron bastante más satisfactorio encontrar un argumento deductivo como intento de explicación que de verificación.

Ciertos aspectos de la resolución de problemas matemáticos que mejoran con el uso de SGD según Santos-Trigo (2008) son los siguientes:

- 1) la construcción de una representación dinámica de un problema requiere que los estudiantes piensen en el problema en términos de propiedades relevantes.
- 2) la construcción inicial llega a ser un punto de partida para identificar conjeturas matemáticas y puede ser extendida fácilmente a una familia de objetos para verificar si las relaciones o conjeturas observadas se mantienen.
- 3) el uso del software facilita el proceso de verificación de conjeturas considerando distintos métodos que incluyen visual, empírica, dragging (arrastre) y demostraciones formales para apoyar las conjeturas. (p. 138)

Respecto a las desventajas de usar SGD como herramienta de trabajo en el aula, la revisión de la literatura realizada no ha aportado información adicional a la expuesta en la página 34, que hacía referencia a los peligros que según Sordo (2005) se han de tener en cuenta al integrar las TIC en el aula de matemáticas.

¹⁸ EGD, en castellano, se corresponde DGE: Dynamic Geometry Environment, en inglés.

A lo largo de este apartado, he ido exponiendo las diferentes razones que me llevaron a usar Geogebra, que fundamentalmente pueden atribuirse a las ventajas que he encontrado en la literatura esgrimidas por los autores mencionados y a las observadas durante la experimentación directa de algunos de mis estudiantes con este software. Las razones expuestas se pueden resumir atendiendo a dos aspectos muy importantes: facilidad de uso y potencialidad para la enseñanza-aprendizaje. Por un lado, he aludido en reiteradas ocasiones a la sencillez de manejo del software, siendo éste un aspecto positivo para el trabajo de los estudiantes y también para mí como profesora, pues la adaptación a este medio de las tareas diseñadas resultó fácil y rápida. Por otro lado, los resultados obtenidos durante la puesta en práctica de los ciclos de esta investigación (ciclos 0 y 1) precedentes al ciclo 2, que se presenta en esta memoria, me llevaron a la convicción de que el uso de este software produciría una mejora de las actitudes relacionadas con las matemáticas, así como un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes. En este estudio pondré de manifiesto cuáles fueron las mejoras que se produjeron, si es que llegaron a producirse. Pero, además, informaré acerca de cómo influyó el software en estas mejoras y qué características o factores podían haberlas propiciado. Por otra parte, expondré también los posibles efectos negativos (limitaciones del software) del uso de SGD en los estudiantes, si éstos tuvieron lugar.

Así pues, mediante la puesta en práctica en el aula de una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de SGD, pretendía introducir y estudiar contenidos geométricos nuevos con los estudiantes y analizar cuáles de los atributos y ventajas atribuidas a los SGD propiciaron cambios positivos en sus actitudes y competencias matemáticas. Con tal fin, elaboré un marco de referencia en el que resumo los atributos, ventajas y limitaciones atribuidas al uso de los SGD en el aula expuestos a lo largo del capítulo (figura 2-1). Dicho marco servirá de base a la hora de analizar la influencia del SGD en la posible transformación de actitudes y el desarrollo de competencias de los estudiantes durante las sesiones de aula en las que los estudiantes trabajaron con Geogebra.

<i>Atributos</i>
<ol style="list-style-type: none">1. Constructividad: posibilidad de construir y crear micromundos que permiten conjeturar (posibilidad de actuar por ensayo-error).2. Navegabilidad: posibilidad de explorar libre y flexiblemente.3. Interactividad: retroalimentación inmediata y efectiva que permite la toma de conciencia y conciliación de los errores cometidos.4. Interfaz: modo de capturar la acción y atención del aprendiz.5. Facilidad de uso y rapidez de respuesta: animan a la búsqueda de distintas estrategias de solución.6. Precisión: ejecuta las acciones del usuario con precisión y rigor.
<i>Ventajas</i>
<ol style="list-style-type: none">7. Función formativa global: ayudan a transmitir valores educativos y actitudes: cooperación, implicación emocional, intensidad del esfuerzo exigido, etc.8. Función motivadora: gusto por el trabajo con el software.9. Permiten que prime la reflexión y el análisis de resultados porque se requiere menos tiempo para hacer representaciones y cálculos.10. Potencian el trabajo autónomo del estudiante, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal, al tiempo que favorecen el trabajo en equipo.11. Obligan a pensar y razonar los problemas en términos de propiedades matemáticas.12. Motivan al alumnado en la búsqueda de demostraciones y facilita este proceso al posibilitar la generación de modo rápido y sencillo de gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar.13. Ofrecen la posibilidad de testar ideas, recibir feedback o manipular objetos (representaciones manipulables o ejecutables mediante dragging), que se consideran principios necesarios como apoyo para la resolución de problemas.14. Mejoran el aprendizaje de contenidos geométricos: mejoran la visualización (las representaciones mentales y la conexión entre distintas formas de representación) y la contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos.
<i>Peligros o limitaciones</i>
<ol style="list-style-type: none">15. Dependencia tecnológica: caer en el error de atribuir a los medios tecnológicos más importancia de la que tienen, pues no dejan de ser recursos que deben estar al servicio del proceso educativo, pero no a la inversa. Para evitar esta dependencia, debemos fomentar su uso adecuado.16. Confundir manipulación con conocimiento matemático, típico de cuando se adquiere un aprendizaje memorístico consistente en el almacenamiento de algoritmos, definiciones y teoremas, en vez de una construcción de las matemáticas para la resolución de problemas.17. Dificultad en la gestión del tiempo en caso de producirse problemas técnicos.

Figura 2-1. Atributos, ventajas y peligros del uso de SGD en el aula

2.4. INTEGRACIÓN DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA

No se puede obviar el hecho de que las nuevas tecnologías están presentes en la mayoría de los hogares y según la encuesta realizada por el INE en 2009, mencionada en la página 37, más del 90% de los niños de entre 10 y 15 años, tenían acceso a ellas con regularidad. Por ello, el uso de las TIC en el aula puede servir de medio de aproximación a los intereses de los estudiantes, demostrando así que la escuela no está desconectada de los modos de vida actuales, sino que se adapta a los cambios que en la sociedad se producen.

Favorecer el desarrollo físico, social, afectivo e intelectual es la finalidad educativa de la enseñanza reglada. Para conseguir este objetivo, se ha elaborado un Currículo Oficial de carácter prescriptivo, pero a la vez abierto y flexible, que puede y debe ser adaptado a las características propias de cada centro. En las orientaciones didácticas de documentos curriculares actuales como el R.D. 1631/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, nivel que nos ocupa, se encuentra en referencia al uso de las TIC lo siguiente:

En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad (MEC, 2006c, p. 751).

Una vez asumida que la integración de las TIC como herramienta didáctica es un hecho necesario, expongo qué aspectos hay que tener en cuenta para garantizar una efectiva integración. Introducir las TIC requiere de ciertos cambios que aún no se han concretado: cambios que no pueden ser únicamente de material y de formato, sino que habrían de abarcar qué, cómo y cuándo enseñar y aprender. Si los tiempos son distintos, la implicación del alumnado es diferente (con mayor protagonismo y motivación) y la utilización del lenguaje digital supone romper la linealidad de los textos, entonces la organización de los contenidos, y las secuencias también se ven afectadas (Alba, 2006; Área, 2004; Sancho, 2006). En referencia a este tema, autores como Marín (2001) o Suh, Johnston y Douds (2008) afirman que un entorno tecnológico influye en cuatro aspectos críticos del aprendizaje de las matemáticas: el papel del profesor; la naturaleza de las tareas del aula; la cultura social del

aula, la equidad y la accesibilidad; y la herramienta informática como apoyo al aprendizaje. Para el diseño y desarrollo de este trabajo de investigación se tuvieron en cuenta estos aspectos, que en lo que sigue se abordan individualmente.

2.4.1. El Papel del Profesor

La integración de las TIC en las aulas es función de los profesores, pero antes de introducirlas, es necesario plantearse el modo de hacerlo eficazmente, para que sea coherente con la propia visión del proceso de enseñanza-aprendizaje. De ello dependerá la selección y diseño de las tareas que se trabajarán en el aula con estos recursos.

Se adoptó, como paradigma de aprendizaje, el constructivismo. El constructivismo, en su visión cognitiva, entiende que la construcción de significados en matemáticas (estructuras cognitivas) surge de los desequilibrios que los alumnos perciben cuando comparan el resultado de su experiencia con sus expectativas. Por otra parte, el constructivismo social entiende las matemáticas escolares como una construcción social y el aula de matemáticas el espacio en el que una comunidad de alumnos y profesores construyen conjuntamente un conocimiento matemático escolar (Gómez y Rico, 2002, pp. 19-20).

El modelo de enseñanza elegido para la experiencia objeto de estudio de esta memoria es el que corresponde al aprendizaje por descubrimiento guiado de los alumnos, el cual es coherente con la posición constructivista que acabo de explicitar. Este tipo de aprendizaje se produce cuando el docente le presenta todas las herramientas necesarias al alumno para que éste descubra por sí mismo lo que se desea aprender y considera como condición indispensable para aprender una información de manera significativa, tener la experiencia personal de descubrirla, ya que “el descubrimiento fomenta el aprendizaje significativo¹⁹”.

Las funciones del profesor y del alumno en un entorno tecnológico casan con el modelo de enseñanza del aprendizaje por descubrimiento guiado. En este modelo el profesor debe proporcionar el material adecuado y estimular a los estudiantes para que, mediante la observación, la comparación, el análisis de semejanzas y diferencias, etc., lleguen a descubrir de un modo activo los contenidos seleccionados por el profesor. Respecto a cuál debe de ser

¹⁹ El psicólogo estadounidense D. P. Ausubel (1963, 1968) propuso el concepto de aprendizaje significativo como el proceso según el cual los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

el papel del profesor en la sociedad de la información, Barberá, Mauri y Onrubia (2008), lo resumen en los siguientes calificativos: proveedor de recursos, facilitador del aprendizaje, supervisor académico, guía para sus alumnos, colaborador del grupo-clase, motivador del saber, consultor de información, activador de conocimientos previos, planificador escrupuloso, asesor de técnicas de estudio y estrategias de aprendizaje, evaluador continuo, gestor de conocimientos, potenciador del aprendizaje, entre otros. La actividad del alumno no supone la inactividad del profesor, al contrario, en esta perspectiva es precisamente la intervención del profesor la que determina que la actividad del alumno sea más o menos constructiva, que se oriente en un sentido o en otro... En los procesos educativos en los que intervienen las TIC es aún más evidente la necesidad de este nuevo rol del profesor en entornos tecnológicos. En cuanto al alumno, su papel, tanto en el paradigma del aprendizaje por descubrimiento como en la sociedad de la información (entorno tecnológico), es el mismo: pensador autónomo, creativo y crítico, responsable de su propio aprendizaje (comenzará formulando suposiciones intuitivas que posteriormente intentará confirmar sistemáticamente).

Con respecto a la influencia de usar el SGD para favorecer la metodología de trabajo llevada a cabo en el aula, Olkunn, Sinoplu y Deryakulu (2005), entre otros autores, estudiaron cómo el uso de SGD en matemáticas facilitaba el aprendizaje por descubrimiento guiado y qué beneficios de esta metodología obtenían los estudiantes. Según los autores, trabajando en este entorno guiado sus alumnos participaron más en las actividades, reflexionaron sobre diferentes aproximaciones al mismo problema desde distintos ángulos y encontraron varias explicaciones para la misma verdad matemática. Con la guía del profesor los estudiantes primero formularon cuestiones, después hicieron conjeturas sobre las posibles respuestas, y entonces intentaron justificar sus conjeturas basándose en sus exploraciones, llegando algunos de estos estudiantes a desarrollar demostraciones matemáticas más formales. Para De la Chica (2010) los estudios acerca de los efectos del uso de TIC en educación han puesto de relieve cambios en la forma de enseñar y aprender, al comprobar que estas tecnologías suscitan la colaboración en los estudiantes, les ayuda a centrarse en los aprendizajes, mejora la motivación y el interés, favorecen el espíritu de búsqueda, promueven la integración y estimulan el desarrollo de ciertas habilidades intelectuales tales como el razonamiento, la resolución de problemas, la creatividad y la capacidad de aprender a aprender. Estas transformaciones observadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje se sitúan en la línea de las teorías constructivistas (entre ellas, el aprendizaje por descubrimiento guiado) que

preconizan estrategias de aprendizaje que hagan de los alumnos elementos activos y dinámicos en la construcción del saber. Lo anterior evidencia que el aprendizaje por descubrimiento se ve favorecido por el trabajo en entornos tecnológicos.

Haciendo acopio de todo lo anterior, mi visión de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y, por consiguiente, mis funciones como profesora, han experimentado algunos cambios respecto a mi práctica docente anterior. Antes de llevar a cabo la puesta en práctica en el aula de las tareas diseñadas para esta investigación, exponía a los estudiantes los contenidos a estudiar en la pizarra y después ellos realizaban actividades para consolidar su aprendizaje. Durante la puesta en práctica de las secuencias de enseñanza-aprendizaje diseñadas para el presente estudio trataba de potenciar el aprendizaje por descubrimiento guiado, para cuyo desarrollo consideré las herramientas tecnológicas como recursos de indudable valor. Así, los estudiantes, a través de las tareas que diseñé, descubrieron y aprendieron (por ellos mismos) contenidos nuevos, siendo mi labor la de guiar el proceso y prestar asistencia o ayuda cuando fue necesario. Además, tratando de mejorar mi competencia como docente, llevé a cabo algunas acciones formativas regladas y no regladas (autofomación) relativas al conocimiento y manejo de software de geometría dinámica, que me permitieron reflexionar acerca de las estrategias metodológicas más adecuadas para poner en práctica en un contexto real de aula dicha secuencia de enseñanza, entre ellas la adopción del trabajo colaborativo, que abordé específicamente en el apartado 2.4.3.

2.4.2. La Naturaleza de las Tareas de Aula

Algunos autores citados en páginas anteriores, entre ellos Preiner (2008), vinculan TIC y resolución de problemas, llegando a la conclusión de que estas tecnologías ayudan a los estudiantes a mejorar sus estrategias de resolución. Ello es debido a que les permite trabajar de un modo más autónomo y dedicar más tiempo a la reflexión y el análisis de resultados, pues con ayuda de las TIC se reduce el tiempo necesario para realizar operaciones rutinarias y se facilita el proceso de verificación de conjeturas.

Por otra parte, la secuencia de enseñanza-aprendizaje diseñada se centra en la resolución de problemas situados en contextos reales, pues coincido con PISA (OCDE, 2003) en que “los conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental” (OCDE, 2004, p. 36). Desde esta perspectiva, son muchas las ventajas que proporciona la resolución de problemas de la

vida real para introducir conceptos y procedimientos matemáticos, permitiendo vincularlos a su fenomenología y a su evolución histórica. Asimismo, los resultados obtenidos en algunas investigaciones actuales, como las de Jurdak (2006), Ku y Sullivan (2002) o Palm (2008), ponen de manifiesto la misma conclusión: los estudiantes se esfuerzan más y obtienen mejores resultados cuando resuelven problemas que les parecen interesantes. Por ello, creo que a través de situaciones problemáticas reales, es posible aumentar la motivación e implicación de mis estudiantes, eligiendo una temática adecuada a sus intereses, desde la cual trabajar los contenidos que queremos introducir. Además, la contextualización de las tareas en la vida cotidiana, puede ayudar a poner de relieve la utilidad de las matemáticas para desenvolverse con soltura en la vida real y la frecuencia con la que, consciente o inconscientemente, recurrimos a ellas en multitud de situaciones del día a día.

En lo referente a la naturaleza de las tareas para ser trabajadas con TIC, éstas deben explotar la potencialidad de estas herramientas para trabajar contenidos matemáticos. Antes de diseñar la secuencia de enseñanza basada en el uso de TIC, tuve en consideración qué posibilidades ofrecían estas tecnologías, con el fin de sacarle el máximo partido a su uso en el aula por parte de los estudiantes. Asimismo, seguí las recomendaciones de Clemens (2000a) y Underwood et al. (2005), expuestas en el apartado anterior, sobre las características que deben cumplir las tecnologías para favorecer la resolución de problemas. Por tanto, para el diseño de los problemas contextualizados que los estudiantes trabajaron con estas tecnologías, presté especial atención a conectar las posibilidades de la tarea con las que ofrecía la herramienta tecnológica, de forma que las tareas permitieran que mis estudiantes investigasen múltiples aproximaciones y estrategias de solución. Bajo estas consideraciones, los enunciados de estas tareas o problemas jugaron un papel muy importante, y me cercioré de que satisficieran los siguientes criterios:

- ▶ No responder a contextos estandarizados, demasiado familiares para el alumno.
- ▶ No mostrar la estrategia de resolución del problema.
- ▶ No mostrar evidencias de los conocimientos matemáticos que es necesario movilizar para su resolución.
- ▶ Constituir un desafío para los estudiantes que los inciten a intentar resolverlos, haciendo que el miedo que suele manifestar la mayoría de ellos a enfrentarse a un problema cuyo contexto es desconocido se desvanezca.

Todas estas reflexiones sobre la naturaleza de las tareas me sirvieron como referencia a la hora de diseñar las de mi secuencia didáctica. Por razones metodológicas que se explican en el capítulo 6, fue necesario el diseño de dos secuencias de tareas, una para ser trabajada con lápiz y papel y otra con SGD, que favoreciesen el aprendizaje por descubrimiento. Asimismo, fue necesario adaptar la secuencia basada en el uso de SGD a la herramienta tecnológica con la que los alumnos trabajaron: Geogebra.

2.4.3. La Cultura Social de Aula: Trabajo Colaborativo

A la hora de trabajar con TIC, uno de los aspectos que se debe cuidar es el clima social de aula, de modo que no se produzcan situaciones indeseadas. Me estoy refiriendo a que se debe prestar especial atención en mantener condiciones de equidad para el acceso de todos y cada uno de los estudiantes a los recursos tecnológicos y generar un clima de trabajo que fomente la colaboración entre iguales.

Como metodología de trabajo en el aula, he optado por el trabajo colaborativo de pares de estudiantes, cuya elección es coherente con mi deseo de fomentar el aprendizaje por descubrimiento guiado mediante el uso de TIC. Del trabajo colaborativo se deriva el aprendizaje colaborativo, el cual es entendido como “el intercambio y cooperación social entre grupos de estudiantes para el propósito de facilitar la toma de decisiones y/o la solución de problemas. La colaboración entre aprendices les permite compartir hipótesis, enmendar sus pensamientos y trabajar mediante sus discrepancias cognitivas” según Ralph y Yang (1993).

Desde las perspectivas constructivistas de los procesos de enseñanza y aprendizaje aplicados a la educación con TIC, entre las que se encuentra la enseñanza para fomentar el aprendizaje por descubrimiento guiado, los procesos de enseñanza y aprendizaje confluirían en los procesos de interacción, en los que se produciría la construcción de significados compartidos entre los elementos del ámbito didáctico (entre profesor y estudiante y entre estudiantes). Según Wilson (1995), el aprendizaje colaborativo es otro de los postulados constructivistas, que parte de concebir a la educación como proceso de socioconstrucción que permite conocer las diferentes perspectivas para abordar un determinado problema, desarrollar tolerancia en torno a la diversidad y pericia para reelaborar una alternativa conjunta.

Pero, ¿qué se entiende por trabajo colaborativo? Codina (2008) habla de trabajo colaborativo cuando se hace referencia a procesos metodológicos basados en la premisa de que el conocimiento es descubierto por los alumnos y transformado a través de la interacción con el medio, para posteriormente reconstruirlo y ampliarlo con nuevas experiencias de aprendizaje. Calzadilla (2001), afirma que el aprender en forma colaborativa permite al individuo recibir retroalimentación y conocer mejor su ritmo y estilo de aprendizaje, lo que facilita la aplicación de estrategias metacognitivas para regular el desempeño y optimizar el rendimiento; por otra parte este tipo de aprendizaje incrementa la motivación, pues genera en los individuos fuertes sentimientos de pertenencia y cohesión, a través de la identificación de metas comunes y atribuciones compartidas, lo que incidirá directamente en su autoestima y desarrollo.

Prendes (2000) afirma, citando a Martí (1997), que los procesos psicológicos que se desarrollan en la dinámica interna del grupo al trabajar de modo colaborativo son los siguientes:

- Distinción, oposición y confrontación de puntos de vista; juegos de argumentaciones y reconsideración del propio punto de vista; resolución de conflictos sociocognitivos y divergencias.
- Distribución de roles: reparto de cargas cognitivas y afectivas, lo que permite lograr objetivos difíciles de alcanzar yendo por separado; reparto de responsabilidades y esfuerzo compartido; se facilitan procesos de toma de conciencia y autorregulación.
- Interacciones basadas en procesos en los cuales se comparten significados, se crean lazos comunicativos en un ajuste progresivo de actuaciones.
- Procesos conjuntos de toma de decisión y elaboración de posibles soluciones a problemas.

En cuanto a la relación entre trabajo colaborativo y entorno tecnológico, Sordo (2005) afirma que los ordenadores y los programas diseñados para la enseñanza de las matemáticas ofrecen posibilidades educativas que se diferencian de los sistemas tradicionales de enseñanza, destacando entre ellas que, el uso del ordenador potencia el aprendizaje colaborativo de los alumnos, al tiempo que facilita unas condiciones adecuadas para reforzar la dimensión social de la educación. Asimismo, Calzadilla establece una relación bilateral entre ambos. Por un lado, el desarrollo de las nuevas tecnologías y su utilización en el proceso educativo, requiere del soporte que proporciona el aprendizaje colaborativo para optimizar su intervención y

generar verdaderos ambientes de aprendizaje que promuevan el desarrollo integral de los aprendices y sus múltiples capacidades. Por otra parte, las tecnologías también benefician el logro del aprendizaje colaborativo, porque permiten desarrollar, extender y profundizar las habilidades interpersonales y penetrar en las barreras culturales, a medida que estudiantes y docentes aprenden a comunicarse mediante las nuevas formas que propone este medio. Además, favorecen experiencias positivas de aprendizaje cuando los alumnos comparten sus descubrimientos, se brindan apoyo para resolver problemas y trabajan en proyectos conjuntos.

Los resultados de investigaciones recientes confirman un buen maridaje entre ambos. Sfard y Kieran (2001) señalan que “un reciente estudio de Lavy sobre aprendizaje colaborativo en un entorno computerizado, puso de manifiesto que el progreso de aprendizaje podría no haber ocurrido si los estudiantes hubiesen trabajado por separado” (p. 71). Sin embargo, la investigación de Sfard y Kieran nos recuerda que el trabajo en grupo no es una panacea y que los profesores deben asumir la función de vigilancia activa, interviniendo cuando sea necesario para orientar el proceso de aprendizaje.

El trabajo de Lavy y Leron (2004), hace hincapié en el papel del entorno tecnológico para facilitar la interacción social entre estudiantes, llegando a la conclusión de que el entorno proporciona a los estudiantes un lenguaje común para hablar acerca de sus exploraciones matemáticas, y facilita su participación en los procesos de generalización, abstracción, resolución de problemas y el refinamiento de sus sucesivas intuiciones matemáticas. Cuando dos (o más) alumnos toman conciencia de cómo las características de cada uno complementan las del otro (o las de los demás), y aprenden a aceptarlas y aplicarlas, entonces están preparados para una fructífera colaboración. Debido a los objetivos de su investigación, exponen que el papel del profesor se limitó a dirigir mínimamente las indagaciones de los estudiantes, no con actos explícitos de enseñanza de cualquier tipo. Sin embargo, los autores recomiendan una intervención más directa de los docentes, en forma de discusiones o debates para resumir las investigaciones de los estudiantes y ayudar en la conceptualización de los contenidos matemáticos emergentes.

La investigación realizada por Sinclair (2005) aporta conclusiones tales como: “los estudiantes se mostraron activamente comprometidos con sus compañeros durante todas las sesiones: señalaron detalles en la pantalla, se corrigieron el uno al otro, se mantuvieron mutuamente en la tarea, y argumentaron sobre sus interpretaciones. De hecho, el papel del

‘compañero’ tuvo un impacto mucho mayor sobre el ambiente de aprendizaje del que el investigador esperaba” (p. 100).

Por todo lo anterior, y teniendo presentes las consideraciones acerca de cómo se debe planificar la intervención en el aula, sostengo que el aprendizaje colaborativo en pequeños grupos es ideal para ponerlo en práctica, usando como recursos las nuevas tecnologías. En efecto, como evidencian los resultados anteriores, los entornos telemáticos favorecen la interacción entre alumnos, son flexibles y proporcionan cierto grado de libertad en la adquisición de conocimientos (permitiendo diferentes tiempos y estrategias individuales), al tiempo que logran distintas reconstrucciones de la información que conducen a una construcción compartida de conocimientos. A la hora de decidir el número de integrantes de cada grupo, se ha de tener en cuenta las características de las aulas, ya que en muchos de los centros adheridos al proyecto TIC, entre ellos el centro en el que desarrollé esta experiencia, la disposición del mobiliario de aula es fijo y obliga a que los estudiantes trabajen por parejas, puesto que cada par de alumnos comparten un ordenador, no siendo posible otro tipo de agrupamiento.

La cultura social del aula, la equidad y la accesibilidad fue otro de los aspectos que se cuidaron para garantizar que todos los alumnos estuviesen en igualdad de condiciones. El acceso a las TIC en el aula estuvo garantizado para todos ellos, disponiendo de un equipo informático para cada pareja de estudiantes. Asimismo, aquellos estudiantes con ordenador en casa (la gran mayoría) podían trabajar voluntariamente en sus casas con Geogebra, por ser éste un software de libre distribución. En este trabajo, para fomentar un clima y una cultura de aula adecuados, también se tuvo en cuenta la recomendación de Lavy y Leron de realizar discusiones o debates al finalizar las tareas. De este modo, durante mi intervención en el aula llevé a cabo puestas en común de las investigaciones de los estudiantes, realizadas en cada problema o tarea, como forma de lograr una mejor conceptualización de los contenidos matemáticos emergentes por parte de los alumnos y, al mismo tiempo, buscando que ellos se sintiesen protagonistas de la actividad matemática realizada.

Para finalizar este capítulo, tras exponer las consideraciones que tuve presentes a la hora de diseñar la intervención en el aula, expongo el modelo de planificación para la efectiva integración de la tecnología (TIP: Technology Integration Planning) propuesto por Roblyer (2006) que sugiere 5 fases:

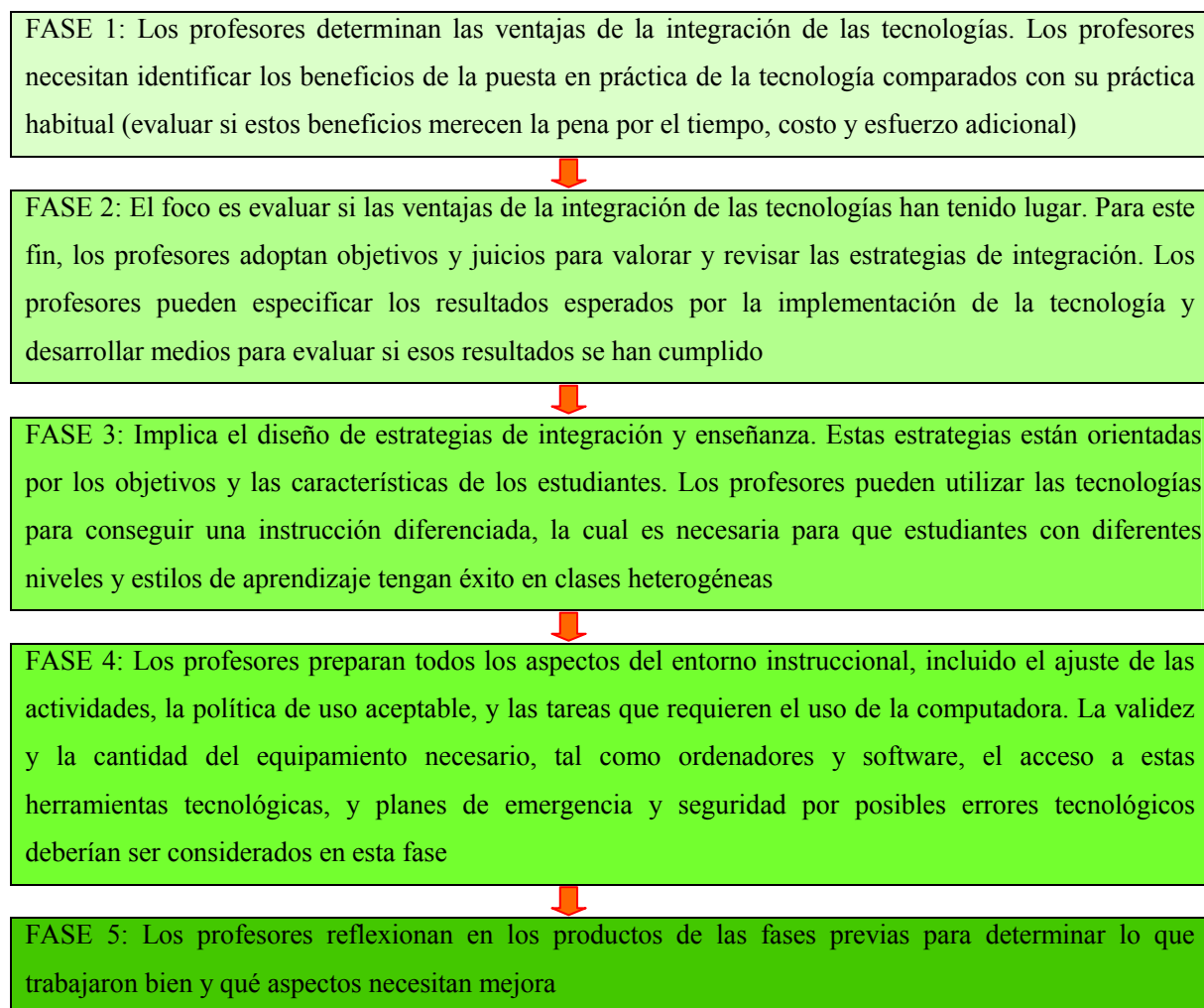


Figura 2-2. Fases para la integración efectiva de la tecnología

Siguiendo el anterior esquema (Figura 2-2), a lo largo de este Capítulo 2 he mostrado las muchas ventajas y algunos de los inconvenientes del uso de las TIC en el aula. He presentado las herramientas tecnológicas que he seleccionado para este estudio, justificando su elección en términos de beneficios para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. He evaluado los resultados obtenidos durante mi investigación previa (García y Romero, 2007), que informaron de mejoras actitudinales y de desarrollo de competencias en un gran porcentaje de los estudiantes. Dichos resultados compensaron el esfuerzo empleado en el diseño de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de TIC, así como el tiempo o sesiones que fueron necesarias para su puesta en práctica en el aula. Ello me animó a continuar en esta línea de investigación y a profundizar en algunos aspectos relativos a la transformación de actitudes y desarrollo de competencias, así como al diseño y planificación de la nueva experiencia, que en capítulos posteriores atenderé debidamente.

CAPÍTULO 3

Las actitudes en matemáticas

Este capítulo está dedicado a las actitudes en Matemáticas. En primer lugar, se justifica la importancia de su estudio sobre la base de las investigaciones sobre este tema. A continuación, y partiendo de dichas investigaciones, se desarrolla una caracterización de actitudes relacionadas con las matemáticas. Por último, se abordan las variables personales y escolares en las que se debe incidir para lograr la búsqueda transformación positiva de estas actitudes en los estudiantes.

3.1 IMPORTANCIA DE LAS ACTITUDES EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La importancia y la insistencia dada al tema de las actitudes es, hoy en día, asumida y aceptada por el profesorado, cada vez más dispuesto a reconocerlas como elementos de indiscutible valor e interés en el seguimiento y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje (Gómez-Chacón, 2002, p. 24). Sin embargo, la formación del profesorado refleja algunas lagunas con respecto a la forma de enseñarlas y evaluarlas, como señala Auzmendi (1992), citado por Hernández y Gómez-Chacón (1997):

Por una parte se pide a los profesores que consideren las actitudes como otros elementos más a educar y a evaluar. Ahora bien, la mayoría de ellos desconocen qué son, no saben cómo medirlas y no poseen los criterios suficientes para determinar su peso en el rendimiento de los alumnos. Otro problema radica en que, en el área de las actitudes, no se ha dado a los profesores unos objetivos y contenidos análogos a los que poseen para la enseñanza de las diferentes materias del currículum. Los profesores tienen que enseñar y juzgar durante el año algo que desconocen. En definitiva, el problema radica en que la insistencia dada al tema de las actitudes en la educación no se ha acompañado de técnicas relevantes, medios adecuados, ni de una labor de concienciación de los educadores para que éstos asuman la necesidad de tomar en consideración este aspecto. (p. 18)

Comparto la opinión de Auzmendi y creo que ésta se ve reflejada en los documentos curriculares, dado que las orientaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las actitudes no aportan la información necesaria para que ésta se lleve a cabo con éxito. Por otra parte, se observa que el deslizamiento del término *contenidos* al de *competencias* en las recientes reformas educativas acaecidas en nuestro país afecta también al ámbito actitudinal. Haciendo un rápido recorrido por diferentes documentos curriculares, empezando por la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE) (MEC, 2002), antecedente más reciente de la Ley Orgánica de Educación (LOE) (MEC, 2006a), encontramos una categorización de los contenidos en tres tipos²⁰: conceptuales, procedimentales y actitudinales. Esto suponía un intento de cambiar la antigua concepción de la enseñanza de las matemáticas, basada únicamente en la adquisición de conceptos y destrezas, para pasar a un enfoque más amplio. Desde esta perspectiva, se reconocía la relación existente entre aprendizaje de contenidos y actitud en relación a los mismos y, por ello, se proponía un estudio de los contenidos considerando los conceptos, procedimientos y actitudes que el alumno debía aprender.

Continuando con el actual currículo propuesto por la LOE, López (2006), Subdirector General de Formación Académica del MEC, resume los cambios derivados de esta ley:

De acuerdo con lo dispuesto en la LOE, las competencias básicas forman parte de las enseñanzas mínimas de la educación obligatoria, junto con los objetivos de cada área o materia, los contenidos y los criterios de evaluación. Por lo tanto, no vienen a sustituir a los elementos que actualmente se contemplan en el currículo, sino que constituyen el elemento referencial para los mismos. Es necesario poner las competencias básicas en relación con los objetivos establecidos, con los contenidos de las áreas o materias y con los criterios de evaluación, si se quiere conseguir su desarrollo en la práctica educativa cotidiana. (p. 5)

El Real Decreto 1631/2006 (MEC, 2006c) de concreción de la LOE, además de las competencias básicas, expone los contenidos para cada área y nivel agrupados en bloques sin diferenciar según las tres categorías anteriores. Para el caso de las matemáticas establecen seis bloques de contenidos: Contenidos Comunes, Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas, y Estadística y Probabilidad. El bloque de contenidos comunes constituye el eje

²⁰ Esta categorización tuvo su origen en los estudios que sirvieron de fundamento para el Estudio Cockcroft y ya aparecía en el Diseño Curricular Base (DCB, 1989) y en el RD 1007/1991, de 14 de junio, que estableció las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1991). En Rico (1997) puede consultarse más detalladamente la organización cognitiva de los contenidos en matemáticas.

transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca y hace referencia expresa a la resolución de problemas. También se introducen en este bloque la capacidad de expresar verbalmente los procesos que se siguen y la confianza en las propias capacidades para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que incluyen soporte matemático, aludiendo a la importancia de los factores de tipo actitudinal en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De lo anterior se deduce que es importante trabajar las actitudes con los estudiantes en el área de matemáticas. Sin embargo, no se incluye ninguna orientación para el profesorado acerca de cómo integrarlas en su enseñanza. En el caso de la LOE, la información referente a actitudes es todavía más escueta que la encontrada en documentos anteriores, lo que deja al profesorado sin estrategias que faciliten su enseñanza para promover el desarrollo deseado en los estudiantes. Por ello, se hace necesaria una revisión de la literatura en busca de trabajos que estudien el tema de las actitudes, de entre los cuales expondré los que me han parecido más relevantes.

El proyecto PISA, cuya finalidad es producir indicadores del rendimiento del alumnado de Secundaria en diferentes disciplinas y del que se habla en el capítulo 4, considera, en referencia a las matemáticas, que aunque las actitudes y los sentimientos que éstas suscitan, como la seguridad en uno mismo, la curiosidad, los sentimientos de interés y relevancia o el deseo de hacer o comprender ciertas cosas, no forman parte de la definición de *competencia matemática*, ciertamente contribuyen a ella de una forma nada desdeñable. Suponen que en teoría se puede ser competente en matemáticas sin poseer esas actitudes y sentimientos, pero en la práctica es poco probable que dicha competencia se ejerza o se ponga de manifiesto si el individuo no posee un cierto grado de seguridad en sí mismo, curiosidad, sentimientos de interés y relevancia o el deseo de realizar y comprender temas de contenido matemático. Así pues, si bien estas actitudes y sentimientos no forman parte de la evaluación de la *competencia matemática*, PISA reconoce la importancia que tienen como correlato de la competencia matemática y, en consecuencia, las abordan en una parte del estudio (OCDE, 2006b, p. 75).

Otros autores como Del Puerto y Minnaard (2003), afirman que las actitudes hacia las matemáticas influyen en el aprendizaje matemático y consideran que los alumnos con actitudes positivas obtienen generalmente logros matemáticos superiores a los que alcanzan

los alumnos con actitudes negativas; del mismo modo, un alumno con facilidad para esta disciplina disfrutará más que aquel que tiene problemas en su estudio. Según Blanco y Guerrero (2002), la historia repetida de fracasos lleva a los alumnos a dudar de su capacidad intelectual en relación con las tareas matemáticas y llegan a considerar sus esfuerzos inútiles, manifestando sentimientos de indefensión, pasividad o frustración, que les llevan a abandonarlas rápidamente ante la dificultad. Esta situación determina nuevos fracasos que refuerzan la creencia de que efectivamente son incapaces de lograr el éxito, desarrollándose una actitud negativa que bloquea sus posteriores oportunidades de aprendizaje. En este sentido, Bazán y Aparicio (2006) afirman que es frecuente observar la preocupación de alumnos y profesores por el rendimiento inadecuado y por el rechazo a la asignatura de Matemáticas. Experimento esta preocupación en mi práctica diaria pero, al mismo tiempo, los resultados de mi experiencia docente previa (García y Romero, 2007) y los de los autores antes expuestos, me animan a trabajar el ámbito actitudinal en clase, desde el convencimiento de que una transformación positiva de las actitudes de los estudiantes revertirá en una mejora de su aprendizaje en matemáticas.

Encontrar un marco teórico único para las actitudes no es tarea sencilla. Con este fin, Gómez-Chacón (2003) realizó un recorrido histórico de las investigaciones sobre este campo dentro del ámbito de la educación matemática. Según la autora, el tema de las actitudes emerge periódicamente y desde aproximaciones diferentes. Por ejemplo, en los años 70 aparece en los estudios sobre obstáculos para el aprendizaje matemático de la mujer (como ejemplo, Fennema y Sherman, 1976) y en estudios con población universitaria y en educación de adultos en general. En Educación Matemática, el paradigma alternativo de investigación en afecto, que ha surgido con más fuerza en los años 90, se ha desarrollado al margen de la psicología evolutiva, a la sombra de los trabajos más recientes de la psicología cognitiva y del socioconstructivismo (McLeod, 1988, 1992, Goldin, 1988). La reconceptualización del dominio afectivo en la década actual viene marcada por dos intencionalidades esenciales: por el intento de consolidación de un marco teórico y por la apertura para tomar en cuenta el contexto social de aprendizaje (Gómez-Chacón, 1997, p. 77).

3.2. CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTITUDES RELACIONADAS CON LAS MATEMÁTICAS

McLeod (1992) estableció tres componentes del dominio afectivo en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas: emociones, actitudes y creencias, que varían en

su duración (emociones son las que cambian más rápidamente, y creencias las más duraderas). Posteriormente, Gómez-Chacón (1997, 2003) caracterizó dichas componentes como:

- *Emociones*: Son rápidos cambios de sentimientos y de fuerte intensidad, respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial.
- *Actitudes*: Moderada y estable predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento.
- *Creencias*: Parte del conocimiento, perteneciente al dominio cognitivo, compuesta por elementos afectivos, evaluativos y sociales, con una fuerte estabilidad.

Gómez-Chacón (1997) coincide con Hart (1989) en que describir el dominio afectivo no es una tarea fácil, dado que los términos tienen significados diferentes en el ámbito de la psicología o en el de la educación matemática e incluso dentro del mismo campo utilizando la misma terminología no se estudia el mismo fenómeno, por ejemplo la ansiedad que en algunos casos se describe como una emoción intensa y en otros como respuesta actitudinal. También el subdominio de las creencias y de las actitudes interseca, dado que algunas veces puede ser comprendido como creencia y como actitud. Por ejemplo, la expresión “soy bueno en cálculo mental” puede comprenderse como creencia concerniente a uno mismo y también como actitud hacia las matemáticas (Gómez-Chacón, 2003, p. 235).

De entre los descriptores afectivos expuestos me centraré en este trabajo de investigación en el campo de las actitudes, tal como señalé en el primer capítulo. No obstante, y como he expuesto, se ha de tener en cuenta que emociones, actitudes y creencias intersecan entre sí. Por lo tanto, al abordar el estudio de las actitudes, necesariamente se tratarán también algunas emociones y creencias de los estudiantes.

El diccionario de la Real Academia Española (RAE) nos proporciona la siguiente definición de actitud:

actitud. (Del lat. *actitūdo).

1. f. Postura del cuerpo humano, especialmente cuando es determinada por los movimientos del ánimo, o expresa algo con eficacia. Actitud graciosa, imponente. Las actitudes de un orador, de un actor.
2. f. Postura de un animal cuando por algún motivo llama la atención.

3. f. Disposición de ánimo manifestada de algún modo. Actitud benévola, pacífica, amenazadora, de una persona, de un partido, de un gobierno.

Atendiendo a la tercera acepción del término, que es la que se considera objeto de interés de esta investigación, incluyo la caracterización de Bolívar (1992), quien define las actitudes más detalladamente como:

▶ Las actitudes son un conjunto organizado de convicciones y creencias (componente cognitiva). Representa lo que una persona suele considerar como verdadero/falso, bueno/malo, deseable/indeseable.

▶ Las actitudes son una predisposición o tendencia a responder (componente comportamental) de un modo determinado.

▶ Las actitudes predisponen favorable o desfavorablemente. Tienen, además, componentes afectiva-emocionales (sentimientos positivo/negativo, agrado/desagrado, etc.), por lo que la actitud va siempre acompañada de una carga afectiva, asociada a determinados sentimientos.

▶ Las actitudes tienen un carácter estable y permanente. Ello no implica que no puedan cambiar, por el contrario, dentro de una cierta estabilidad pueden crecer, deteriorarse o desaparecer, por diversos tipos de factores externos o internos.

▶ Las actitudes son aprendidas. En su proceso de aprendizaje intervienen factores muy diversos y a veces, contradictorios: ambiente social y familiar, escolar, medios de comunicación, grupos, personalidad, etc.

▶ Las actitudes desempeñan igualmente, un papel dinamizador en el conocimiento y en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se suele tender a conocer aquello hacia lo que se tiene una actitud positiva y a no prestar atención a los objetos, situaciones o personas asociadas a elementos negativos.

▶ Las actitudes son transferibles, es decir, se pueden generalizar y transferir en diferentes situaciones y de diversos modos.

Castro (2004) analiza los aspectos fundamentales del enfoque popular que denota las actitudes en función de sus implicaciones individuales y sociales, y complementa la definición anterior destacando los siguientes aspectos:

1. Las actitudes son adquiridas. Toda persona llega a determinada situación, con un historial de interacciones aprendidas en situaciones previas (Tejada y Sosa, 1997).

Así, pueden ser consideradas como expresiones comportamentales adquiridas mediante la experiencia de nuestra vida individual o grupal.

2. Implican una alta carga afectiva y emocional que refleja nuestros deseos, voluntad y sentimientos. Hacen referencia a sentimientos que se reflejan en nuestra manera de actuar, destacando las experiencias subjetivas que los determinan; constituyen mediadores entre los estados internos de las personas y los aspectos externos del ambiente (Morales, 1999).
3. La mayoría de las definiciones se centran en la naturaleza evaluativa de las actitudes, considerándolas juicios o valoraciones (connotativos) que traspasan la mera descripción del objeto y que implican respuestas de aceptación o rechazo hacia el mismo.
4. Representan respuestas de carácter electivo ante determinados valores que se reconocen, juzgan y aceptan o rechazan. Las actitudes apuntan hacia algo o alguien, es decir, representan entidades en términos evaluativos de ese algo o alguien. "...cualquier cosa que se puede convertir en objeto de pensamiento también es susceptible de convertirse en objeto de actitud" (Eagly y Chaiken, 1998).
5. Las actitudes son valoradas como estructuras de dimensión múltiple, pues incluyen un amplio espectro de respuestas de índole afectivo, cognitivo y conductual.
6. Siendo las actitudes experiencias subjetivas (internas) no pueden ser analizadas directamente, sino a través de sus respuestas observables.
7. La significación social de las actitudes puede ser determinada en los planos individual, interpersonal y social. Las actitudes se expresan por medio de lenguajes cargados de elementos evaluativos, como un acto social que tiene significado en un momento y contexto determinado (Eiser, 1989).
8. Constituyen aprendizajes estables y, dado que son aprendidas, son susceptibles de ser fomentadas, reorientadas e incluso cambiadas; en una palabra, enseñadas.
9. Están íntimamente ligadas con la conducta, pero no son la conducta misma; evidencian una tendencia a la acción, es decir, poseen un carácter preconductual.
10. Esta conceptualización proporciona indicios que permiten diferenciar las actitudes de elementos cercanos a ellas como son los valores, los instintos, la disposición, el hábito, entre otros. Las actitudes se diferencian de los valores en el nivel de las creencias que las componen; los valores trascienden los objetos o situaciones, mientras que las actitudes se ciñen en objetos, personas o situaciones específicas. Se

diferencian de los instintos en que no son innatas sino adquiridas y no se determinan en un solo acto, como el caso de los instintos. Se distinguen de la disposición por el grado de madurez psicológica; la actitud es más duradera, la disposición es más volátil. La actitud difiere de la aptitud en el grado de la integración de las distintas disposiciones. La aptitud es la integración de varias disposiciones; la actitud es la unión de varias aptitudes, lo que se expresa con una fuerte carga emocional. Por su parte el hábito, referido a acción, se integra a las aptitudes para brindar mayor solidez y estructura funcional a las actitudes (Alcántara, 1988).

Según Di Martino y Zan (2010), a pesar de existir una gran cantidad de estudios sobre actitudes, éstos no proveen una clara definición del constructo en sí mismo. Con frecuencia, la actitud es definida implícitamente y a posteriori a través de instrumentos usados para medirla (Di Martino y Zan, 2001, 2002, 2003). Además, los estudios que dan explícitamente una definición de actitud no comparten una única definición. Desde el punto de vista de estos autores, la variedad de definiciones de actitud no está limitando sino enriqueciendo a los investigadores, porque diferentes problemas de investigación pueden requerir diferentes definiciones. Comparto esta opinión y por ello, para este trabajo se ha realizado una caracterización de las actitudes en matemáticas a partir de otras caracterizaciones encontradas en la literatura, pero con la mirada puesta en mis objetivos de investigación.

Las siguientes definiciones, que muestran cómo las actitudes son entendidas por distintos autores, me han servido de sustento teórico:

- Si se comprenden las actitudes como aquellas tendencias a actuar de una manera determinada, una actitud positiva en matemáticas parece que lleva a que el alumnado construya patrones para apreciar las matemáticas, su valor y su contenido. Y eso es complejo, puesto que lo actitudinal tiene elementos cognitivos (conocimientos y creencias), afectivos (sentimientos, emociones y preferencias) y conductuales o comportamentales (acciones y declaraciones de intenciones) entre otros. Si bien la incidencia de esas componentes es variable, la importancia que juega el entorno social y cultural previos de profesorado y alumnado es fundamental (Jiménez, 1997, p. 5).
- Para Ellington (2003), la noción cotidiana de la actitud se refiere al gusto o disgusto de alguien por un tema o una idea. La actitud es un comportamiento que se mide por varios procesos evaluativos. El Proyecto de Investigación y Evaluación de Minnesota identifica los siguientes factores relacionados con la actitud: la actitud hacia las

matemáticas, la ansiedad hacia las matemáticas, autoconcepto en matemáticas, la motivación para aumentar los conocimientos matemáticos, la percepción de los profesores de matemáticas, y el valor de las matemáticas en la sociedad.

- Gómez-Chacón (1994, 1997, 2000b) adopta la definición de Hart (1989) quien plantea la actitud como una predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Consta, por tanto, de tres componentes: una cognitiva que se manifiesta en las creencias subyacentes a dicha actitud, una afectiva que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo de la tarea o de la materia, y una intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento. Si el objeto es la matemática, Gómez-Chacón distingue dos grandes categorías:
 - Actitudes hacia la Matemática.
 - Actitudes Matemáticas.

Para llevar a cabo esta investigación he adoptado esta última categorización de las actitudes relacionadas con las matemáticas²¹, compartida por NCTM (1991), Callejo (1994)), y adoptada por otros autores como Guerrero y Blanco (2004), Martínez (2008) y Sangiacomo (2008), que además coincide con la percepción de las mismas que a lo largo de mi experiencia docente me he ido forjando. A continuación, paso a describirlas en profundidad.

3.2.1. Actitudes Hacia la Matemática

La definición de las actitudes hacia las matemáticas propuesta por Hernández y Gómez-Chacón (1997) hace referencia a que las actitudes que comprenden este grupo pueden referirse a cualquiera de los aspectos siguientes:

- Actitud hacia la matemática y los matemáticos (aspectos sociales de la matemática).
- Interés por el trabajo matemático, científico.
- Actitud hacia las matemáticas como asignatura.
- Actitud hacia determinadas partes de las matemáticas.
- Actitud hacia los métodos de enseñanza.

De entre los aspectos anteriores, para este trabajo se contemplan las actitudes hacia las matemáticas como asignatura y la actitud hacia los métodos de enseñanza. La actitud hacia

²¹ Se usa el término “actitudes relacionadas con las matemáticas” para hacer referencia conjuntamente a ambos tipos o categorías de actitudes: actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas.

los aspectos sociales de la matemática se aborda de modo tangencial en los cuestionarios, al hilo de los otros dos aspectos mencionados. Por otra parte, el interés por el trabajo matemático y la actitud hacia determinadas partes de la matemática, creo que pueden englobarse dentro de la actitud hacia las matemáticas como asignatura, que sí es objeto de estudio.

En esta investigación, la actitud hacia los métodos de enseñanza se centra en la actitud de los estudiantes hacia el uso de las TIC para trabajar contenidos matemáticos, dado que son las consecuencias de esta forma de enseñanza-aprendizaje las que se investigan y, por tanto, las actitudes de los estudiantes a este respecto se consideran relevantes. En referencia a las actitudes hacia el uso de las tecnologías, comparto la opinión de Ruthven y Hennessy (2002), quienes mostraron que una de las razones por la que los profesores de Secundaria usaban los ordenadores en matemáticas era para mejorar el ambiente de la clase, siendo ésta una de mis metas. Según estos autores, los profesores percibieron que los estudiantes disfrutaron más con las matemáticas, percepción que los estudiantes con sus opiniones acerca de las ventajas de usar ordenadores en matemáticas corroboraron. Estos resultados, que también se confirmaron en mi investigación previa (García y Romero, 2007), me mantienen en el deseo de indagar qué actitudes tienen los estudiantes hacia el uso de las TIC en matemáticas (les resulta más fácil/difícil, les gusta o no, les motiva o no, etc.).

Para caracterizar las actitudes hacia las matemáticas como asignatura y hacia el uso de las TIC como método de enseñanza-aprendizaje, se han tenido en cuenta los trabajos de Rodríguez (1991), Auzmendi (1992), Gil (1999), Gómez Chacón (2000), Estrada, Batanero y Fortuny (2003), Castro (2004) y Martínez (2008) para estructurar las actitudes hacia las matemáticas en tres componentes pedagógicas: cognitiva, afectiva o emocional y conductual o tendencial. La componente cognitiva se refiere a las expresiones de pensamiento, concepciones y creencias, sobre las matemáticas. La componente afectiva está constituida por expresiones de sentimiento hacia el objeto de referencia. La componente conductual aparece vinculada a las actuaciones en relación con el objeto de las actitudes.

Para Castro (2004), la condición de las actitudes como estado psicológico interno constituye la mayor dificultad para su estudio y determinación de manera directa, no obstante, existe consenso en considerar su estructura de dimensión múltiple como vía mediante la cual se manifiestan sus componentes expresados en respuestas de tipo cognitivo, afectivo y conativo: "...la coexistencia de estos tres tipos de respuestas como vías de expresión de un único

estado interno (la actitud), explica la complejidad de dicho estado y también que muchos autores hablen de los tres componentes o elementos de la actitud” (Morales, 1999, p.195).

Dicha autora señala como enfoque generalizado en la actualidad el que considera las actitudes como mediadoras entre los estímulos del entorno social y las respuestas o reacciones de las personas ante dicho ambiente. Consecuente con la concepción estructural de las actitudes, supone que "...la actitud es el resultado de toda una serie de experiencias de la persona con el objeto actitudinal y, por tanto, producto final de aquellos procesos cognitivos, afectivos y conductuales a través de los que dichas experiencias han tenido lugar" (Morales, 1999, p.197). Desde esta perspectiva los procesos cognitivos, afectivos y conductuales como parte de la experiencia, constituyen los antecedentes que en definitiva configurarán nuestras actitudes.

A continuación, se muestra la caracterización de tales actitudes que se tendrá en cuenta para la recogida de información durante la experiencia y posteriormente para analizar los dos aspectos de las mismas antes expuestos (actitud hacia las matemáticas como asignatura y hacia los métodos de enseñanza). Para realizarla, he tomado como referente la caracterización de dichas componentes aportada por distintos autores:

- *Componente cognitiva: Creencias de los estudiantes*

Siguiendo a Castro, considero que esta componente incluye el dominio de hechos, opiniones, creencias, pensamientos, conocimientos y expectativas (especialmente de carácter evaluativo) hacia el objeto de la actitud. Asimismo, comparto con Rodríguez (1991) que, para que exista una actitud, es necesario que exista también una representación cognoscitiva del objeto, en este caso de las matemáticas. De este modo, esta componente está formada por las percepciones y creencias hacia las matemáticas, así como por la información que tenemos sobre ellas (valoración y percepción social de su importancia).

Teniendo en cuenta lo anterior, dentro de esta componente, trato de indagar acerca de las creencias de los estudiantes sobre sus propias posibilidades y limitaciones. Es decir, la confianza en la propia habilidad matemática (autoconfianza) y la percepción de los estudiantes sobre la propia capacidad (conocimientos) y sobre sus habilidades intelectuales en matemáticas (si confían en poder estudiar matemáticas más difíciles, si consideran que tienen dificultades para estudiarlas, etc.). También me interesa conocer las creencias de los estudiantes acerca de la aplicabilidad de las matemáticas (si la consideran una asignatura

valiosa y necesaria para su futuro, etc.). Al mismo tiempo, intento averiguar sus creencias sobre el papel de los métodos de enseñanza (en mi caso, acerca del aprendizaje con Geogebra y del trabajo colaborativo), y si éstas inciden en las anteriores.

- Componente Afectiva: *Gusto por las Matemáticas*

Para Martínez (2008) esta componente se pone de manifiesto por medio de las emociones y los sentimientos de aceptación o de rechazo, que el sujeto activa motivacionalmente ante la presencia del objeto, persona o situación que genera dicha actitud. También se remite al valor que el sujeto le atribuye a ellos. Según Castro, esta componente integra aquellos procesos que avalan o contradicen las bases de nuestras creencias, expresados en sentimientos evaluativos y preferencias, estados de ánimo y las emociones que se evidencian (física y/o emocionalmente) ante el objeto de la actitud (tenso, ansioso, feliz, preocupado, dedicado, apenado, etc.).

Siguiendo estas consideraciones, baso el estudio de esta componente en tratar de conocer los sentimientos positivos o negativos y reflejar el agrado o desagrado de los estudiantes por la materia: gusto/rechazo por la asignatura y los contenidos trabajados en matemáticas, gusto por los distintos tipos de actividades realizadas, gusto por la metodología de trabajo (en especial, por el uso de TIC y por el trabajo colaborativo), etc.

- Componente Comportamental: *Trabajo e Implicación en Matemáticas*

Castro considera que esta componente muestra las evidencias de actuación a favor o en contra del objeto o situación de la actitud. Martínez considera que es expresada por los sujetos mediante su inclinación voluntaria de realizar una acción y constituye la conducta observable propiamente dicha, concebida como un conjunto de comportamientos. En esta misma línea, Rodríguez la considera como la tendencia a reaccionar hacia las matemáticas de una determinada manera y la califica de componente activo de la actitud.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, decido centrarme en el comportamiento o conducta observable de los alumnos durante las sesiones de aula. Mi intención es describir el comportamiento de los estudiantes en referencia a la resolución de problemas contextualizados: trabajan y se implican en las tareas durante las sesiones mostrando interés, se niegan a trabajar en clase o trabajan poco. Al mismo tiempo, informar de posibles reacciones de ansiedad frente a la asignatura (sentimientos de incomodidad, nerviosismo, inseguridad, bloqueo, etc.).

3.2.2. Actitudes Matemáticas

Desde una perspectiva teórica, las actitudes matemáticas tienen un carácter marcadamente cognitivo (entendido aquí no como creencia, sino como proceso intelectual que precede al aprendizaje) y comportamental. Se refieren al modo de utilizar capacidades generales como la flexibilidad del pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, la perseverancia, la precisión, la creatividad, etc. que son importantes en el trabajo en matemáticas. En el estándar 10 de la NTCM (1991) se afirma en relación a esta categoría:

La actitud matemática es mucho más que una afición por las matemáticas. A los alumnos podrían gustarles las matemáticas pero no demostrar el tipo de actitudes que se indican en este estándar (se refiere a la flexibilidad, el espíritu crítico, etc.). Por ejemplo, a los alumnos podrían gustarles las matemáticas y a la vez creer que la resolución de problemas constituye siempre la búsqueda de una respuesta correcta de la manera correcta. Estas creencias, a su vez, influyen sobre sus acciones cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Aunque estos alumnos tengan una disposición positiva hacia las matemáticas, no muestran sin embargo los aspectos esenciales de lo que venimos llamando actitud matemática. (p. 241)

Las actitudes matemáticas se puede decir que se encuentran a caballo entre lo actitudinal y lo cognitivo, es decir, pueden ser consideradas como actitudes deseables en cualquier estudiante y a la vez como competencias básicas que contribuyen a una correcta alfabetización matemática. Por ello, las he considerado como actitudes que están íntimamente relacionadas con el desarrollo cognitivo en matemáticas.

Con el fin de decidir el conjunto de actitudes matemáticas objeto de esta investigación, he hecho una recopilación de las que aparecían en los diferentes documentos curriculares, así como en las investigaciones que he encontrado que abordan este tema.

Como ya he comentado anteriormente, se observa un cambio en los documentos curriculares, así el Decreto 148/2002, de 14 de mayo, por el que se modifica el Decreto 106/1992, de 9 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, centrándonos en nuestra área, hace referencia expresa a las siguientes actitudes:

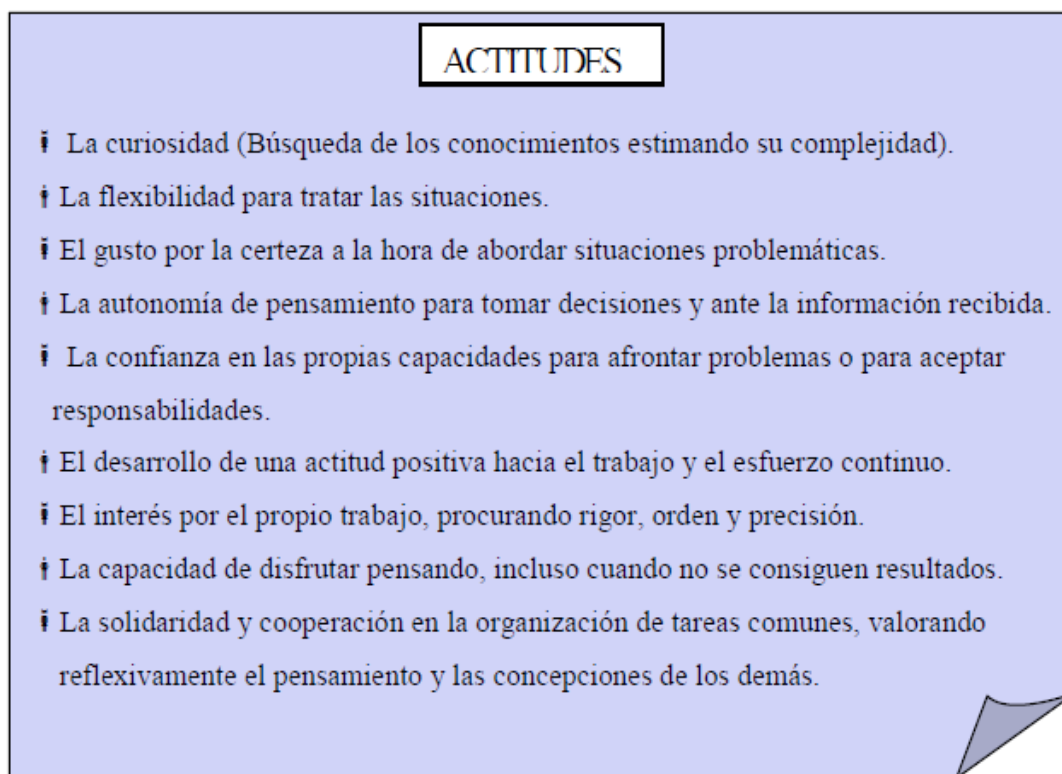


Figura 3-1. Actitudes Matemáticas Deseables en los Estudiantes

En la LOE éstas no aparecen explícitamente. La LOE, aunque no establece unas actitudes para cada área, sí que considera algunas como deseables, como medio para alcanzar las competencias básicas. Ello se debe a que participan, en mayor o menor medida, de rasgos descriptivos, finalidades, destrezas y actitudes comunes a todas ellas y están dotadas de valor fundamental, instrumental y relacional. Resumidamente expongo las señaladas por los documentos curriculares:

- ▶ Participación activa en el propio aprendizaje y una actitud positiva que conduzcan al sentimiento de competencia personal y a una progresiva autonomía. Para ello se necesita responsabilidad y compromiso personal, curiosidad para hacerse preguntas que generen nuevos aprendizajes así como perseverancia, saber administrar el esfuerzo, aceptar los errores y aprender “de” y “con” los demás.
- ▶ El alumnado debe ejercitar su disposición para mostrar iniciativas propias y asumir valores personales como la honestidad, el espíritu de superación, la perseverancia y la responsabilidad.
- ▶ Deben desarrollarse actitudes que favorezcan la cooperación y el trabajo en equipo; saber relacionarse y ponerse en el lugar del otro para comprenderle y valorar sus ideas.

Los principios y estándares del NCTM (2000a, 2003) también han abogado por una enseñanza basada en la adquisición de competencias y, al igual que ha ocurrido en la legislación educativa, no hace mención expresa a las actitudes matemáticas como lo hiciera en las ediciones previas de 1989 y 1991. Sin embargo, señalan como necesario que la enseñanza de las matemáticas capacite a los estudiantes para reconocer la importancia de reflexionar sobre su propio razonamiento y así aprender de sus errores, tener confianza en sus habilidades para afrontar problemas difíciles, mantener su perseverancia aún cuando la tarea sea compleja, adquirir formas de pensar, hábitos de persistencia y curiosidad, y confianza al enfrentar situaciones nuevas los cuales les servirán fuera de la clase.

Revisando los currículos de otros países, encuentro que también otorgan importancia a la creatividad, autonomía, espíritu crítico, flexibilidad de pensamiento, sistematización y trabajo colaborativo (Statutory Rules of Northern Ireland²², 2007).

Por otra parte, la revisión literaria realizada me ha aportado un número reducido de investigaciones que tratan de modo sistemático el estudio de las actitudes matemáticas, las cuales expongo a continuación. Hernández y Gómez-Chacón (1997) indagaron acerca de los efectos producidos en actitudes como la flexibilidad de pensamiento, espíritu crítico y perseverancia en un grupo de estudiantes de secundaria durante una intervención en el aula que pretendía realizar un acercamiento a los contenidos actitudinales en matemáticas. Hoyles y Sutherland (1989), Yelland (2001) y Ursini, Sánchez, Orendain y Butto (2004) investigaron acerca de la flexibilidad de pensamiento, perseverancia, creatividad y autonomía de los estudiantes al trabajar con tecnología en el aula de matemáticas.

En ausencia de un marco teórico definido sobre cuáles son las actitudes matemáticas básicas deseables, he establecido una categorización propia de tales actitudes, a partir de la revisión realizada de los anteriores documentos curriculares e investigaciones. Para ello, he seleccionado las actitudes señaladas en todos ellos, por considerar que constituyen las actitudes matemáticas mínimas deseables en cualquier estudiante. De este modo, he decidido indagar acerca de las siguientes actitudes matemáticas:

- Flexibilidad de pensamiento
- Espíritu crítico

²² Currículo recuperado de la página:
http://www.nicurriculum.org.uk/docs/key_stage_3/areas_of_learning/statutory_requirements/ks3_mathematics_new.pdf

- Perseverancia
- Precisión y rigor
- Creatividad
- Autonomía
- Sistematización

Las siete actitudes anteriores merecen mi atención, pues considero que su desarrollo favorece el aprendizaje de las matemáticas, si bien, podrían aplicarse a otras áreas. Por lo que respecta a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y como expongo en el capítulo 5, adopto la perspectiva constructivista, la cual es coherente con una metodología de aprendizaje por descubrimiento guiado a través de la resolución de problemas. De este modo, se pretende que los estudiantes sean los artífices de la construcción de su propio conocimiento, siendo mi labor la de guiarlos en el proceso y prestarles ayuda, cuando sea necesario. Por ello, actitudes como la autonomía, sistematización, espíritu crítico, perseverancia y precisión y rigor son deseables y necesarias en los escolares, y es mi interés investigar si el uso de TIC contribuye a su desarrollo. También, he seleccionado las actitudes flexibilidad de pensamiento y creatividad, de mayor carga psicológica, por su importancia para la resolución de problemas que desde el enfoque instruccional elegido constituye una actividad primordial (Labatut, 2004), y también porque creo que el uso de estas herramientas tecnológicas puede potenciarlas.

A continuación, paso a caracterizar las actitudes matemáticas seleccionadas y que son objeto de estudio en esta investigación. Para llegar a esta caracterización, me he ayudado de la información extraída de la revisión bibliográfica realizada, he empleado diccionarios enciclopédicos y monografías electrónicas encontradas en la web y también he tenido en cuenta mis percepciones de cada actitud forjadas a lo largo de mi experiencia docente.

- *Flexibilidad de Pensamiento (FP)*

Paz (1990) citado por Olea (1993) define la Flexibilidad de Pensamiento como la cualidad que se caracteriza por la búsqueda de nuevas vías en la solución de problemas, por resolver un mismo problema a través de varias vías y por ser capaz de cambiar el sentido de dirección de sus procesos mentales.

Según Zaldívar y Pérez (1997) ser flexible no es cambiar el camino, el método, la vía, la forma de actuar, etc. cuando no es conveniente por condición externa, sino, hacerlo cuando

resulta necesario o cuando resulta del proceso de desarrollo consciente, nivel que se alcanza cuando el alumno determina explorar todas las vías posibles porque resulta productivo para su desarrollo personal.

Mi concepción de la Flexibilidad de Pensamiento incluye el hecho de que el alumno no sólo intente resolver el problemas de varias formas, sino que se interese por las formas en que otros compañeros han resuelto la tarea, así como la capacidad de cambiar el sentido de la dirección de los procesos mentales, siempre que este cambio esté debidamente justificado y argumentado. No se trata de cambiar de opinión sin estar convencido de ello, sólo porque el profesor u otro compañero lo sugieran, sino que el cambio se produzca porque el alumno siente la necesidad de hacerlo y comprende que es el camino correcto.

Mi experiencia como docente me lleva a reconocer esta actitud como poco usual en la mayoría de los estudiantes cuando éstos trabajan en resolución de problemas, ya que no sienten necesidad de buscar distintas estrategias de resolución ni tienen en cuenta las utilizadas por otros compañeros y además suelen tomar decisiones arbitrariamente, en muchas ocasiones sin pararse a reflexionar acerca de ellas. Por ello, me merece especial atención indagar si el hecho de realizar esta actividad matemática con SGD influye positivamente en su desarrollo.

- *Espíritu Crítico (EC)*

Para González (2006), el Pensamiento Crítico es una forma de pensar de manera responsable relacionada con la capacidad de emitir buenos juicios. Es una forma de pensar por parte de quien está genuinamente interesado en obtener conocimiento y buscar la verdad y no simplemente salir victorioso cuando está argumentando.

Según el consenso explicitado en el Informe Delphi²³, pensar críticamente consiste en un proceso intelectual que, en forma decidida, regulada y autorregulada, busca llegar a un juicio razonable. Este se caracteriza por: 1) ser el producto de un esfuerzo de interpretación, análisis, evaluación e inferencia de las evidencias; y 2) puede ser explicado o justificado, por consideraciones evidenciables, conceptuales, contextuales y de criterios, en las que se fundamenta.

²³ Proyecto Delphi: <http://www.insightassessment.com/dex.html>

Otra definición que he tenido en cuenta es la de Ennis (1992) que lo caracteriza como pensamiento reflexivo y razonado enfocado en decidir qué creer o hacer.

Podemos entonces trasladar esta concepción a la resolución de problemas, diciendo que un estudiante demuestra Espíritu Crítico si cuando obtiene una solución o respuesta a una tarea o aún no siendo capaz de obtener una solución que considere adecuada, analiza su validez, revisando todo el proceso seguido para encontrar los posibles errores que le lleven a la solución que está buscando. Es decir, no se contenta con haber respondido a la tarea, sino que desea hacerlo correctamente, por eso es crítico con su modo de actuar y comprueba que tanto el procedimiento como la solución son correctas y se ajustan a las exigencias de la tarea. Por el contrario, un estudiante que no ha obtenido una solución correcta y aunque es consciente de ello, no se preocupa de comprobar o averiguar por qué no ha obtenido la respuesta que esperaba, es considerado como carente de Espíritu Crítico.

En general, los escolares se sienten más que satisfechos con dar una respuesta a un problema, sin plantearse en muchas ocasiones su bondad y adecuación. Creo que la posibilidad de trabajar con software de Geometría dinámica, puede mejorar esta actitud y por ello, es objeto de investigación.

- *Perseverancia (PE)*

Si una persona es perseverante, aunque sea dura de entendimiento, se hará inteligente; y aunque sea débil se transformará en fuerte.

(Leonardo Da Vinci)

La definición de la Real Academia Española (RAE) de Perseverancia conduce a la de Perseverar (Del lat. *perseverāre*):

1. intr. Mantenerse constante en la prosecución de lo comenzado, en una actitud o en una opinión.
2. intr. Durar permanentemente o por largo tiempo.

La Perseverancia es la actitud de mantener constancia al llevar a cabo una actividad o cumplir un objetivo trazado. El perseverante continúa con sus proyectos a pesar de los obstáculos y adversidades que encuentra en el camino. La persona perseverante muestra una actitud

positiva y tiene la firmeza de continuar con los procesos que comenzó, no deja nada a medias y logra, en la medida de lo posible, todos sus sueños y aspiraciones²⁴.

Entiendo que un estudiante se muestra perseverante cuando trabaja en una tarea hasta que llega a la solución correcta o, al menos, a la que él/ella considera correcta (no es consciente de lo contrario ni nadie se lo comunica). En el lado opuesto, están los estudiantes que cuando abordan una tarea y no logran resolverla inmediatamente, en lugar de seguir intentándolo, la abandonan sin obtener una respuesta y también aquellos que logran llegar a una solución, pero cuando se dan cuenta de que ésta no es correcta, bien por cuenta propia o porque otra persona se lo haga ver, en lugar de continuar con la tarea (analizando la estrategia seguida en busca de fallos o intentando una nueva estrategia) la abandonan y se conforman con la respuesta obtenida.

El tiempo de dedicación de los estudiantes de Educación Secundaria, etapa en la que desempeño mi labor docente, a la resolución de problemas matemáticos es bastante reducido. Con frecuencia, un considerable porcentaje de ellos suelen abandonar las tareas antes de obtener una respuesta y por esta razón, considero interesante investigar si el uso de TIC puede mejorar esta situación.

- *Precisión y Rigor (PR)*

Estos dos términos, cuyo significado es distinto, aparecen siempre como un dúo inseparable cuando se consideran una actitud matemática, de hecho para definir uno de ellos se emplea el otro. El diccionario de la Real Academia Española y de María Moliner nos proporcionan, respectivamente, estos resultados:

Precisión. (Del lat. *praecisio*, -ōnis).

1. f. Obligación o necesidad indispensable que fuerza y precisa a ejecutar algo.
2. f. Determinación, exactitud, puntualidad, concisión.
3. f. Concisión y exactitud rigurosa en el lenguaje, estilo, etc.
4. f. Fil. Abstracción o separación mental que hace el entendimiento de dos cosas realmente identificadas, en virtud de la cual se concibe la una como distinta de la otra.

²⁴ Extraído de http://www.miportal.edu.sv/Home/Estudiantes_y_Docentes/la_perseverancia.htm

Rigor. (Del lat. rigor, -ōris).

1. m. Actitud de la persona que no tolera faltas en las sometidas a su autoridad: "Trata con rigor al personal". Dureza, severidad.
2. Exactitud o precisión en un cálculo o medición. Exactitud en un relato o historia. Cualidad de riguroso o de estricto: "No pudieron soportar el rigor del frío. El rigor de la disciplina". Rigurosidad.
3. Brusquedad de carácter.

No es sencillo encontrar una definición de Precisión y Rigor que haga referencia a estos términos como actitud matemática. Una búsqueda en la web nos conduce a la siguiente definición de Rigor: el rigor tiene diferentes significados, dependiendo del contexto donde lo apliques: en el ámbito religioso, se habla del rigor en la práctica intensa y dedicada de un devoto; en el ámbito jurídico, se refiere a la aplicación de la ley de manera precisa, al pie de la letra como diríamos. En el ámbito intelectual, a veces es sinónimo de consistencia, algo sistemático. Esto es parecido a la aplicación en las ciencias; algo riguroso es algo que se ha realizado según los procedimientos establecidos, con mucha precisión, sin dejar nada al azar²⁵.

Allende (2004) propone una definición de Rigor, que incluye la Precisión, consistente en:

La aplicación disciplinada de la razón a temas del conocimiento y/o la comunicación. El rigor es muchas cosas. Es insatisfacción con la incertidumbre, con las respuestas inexactas, con las mediciones poco precisas, con la amplitud del más y del menos. El rigor también es metódico, apego al procedimiento experimental, exigencia al control de todos los parámetros que pueden incidir en el resultado de nuestros ensayos. Pero el rigor es también apego a la verdad, es desnudarnos de nuestros prejuicios y entusiasmos cuando interpretamos nuestros resultados, es buscar todas las posibles explicaciones de lo que observamos, es aceptar un resultado que demuestra la falacia de nuestra más querida hipótesis. (p. 1)

En este trabajo he adoptado las siguientes consideraciones respecto de esta actitud. Un estudiante se muestra riguroso y preciso cuando al realizar cálculos y representaciones, si el resultado que obtiene no se ajusta a sus expectativas, los deshace y/o repite hasta quedar satisfecho con ellos, y también cuando no se trata sólo de falta de precisión en los cálculos y

²⁵ Extraído de <http://tuspreguntas.misrespuestas.com/preg.php?idPregunta=9713>

representaciones que haya obtenido, sino que posiblemente éstos no son precisos porque no ha sido riguroso en su razonamiento, con lo que continúa trabajando en la tarea hasta que lo consigue. Por el contrario, un alumno no es preciso cuando al hacer cálculos no tiene demasiado cuidado, creyendo que un pequeño error de cálculo no será importante. También considero falta de Rigor y Precisión cuando la estrategia seguida no es del todo correcta y por ello, la solución obtenida no es precisa sino aproximada, pero en lugar de cambiarla o ajustarla, se conforma con ella, aún siendo consciente de que la solución podría mejorarse si fuese más riguroso.

La definición adoptada es adecuada para ambientes de lápiz y papel y tecnológicos dado que, aunque el uso de software matemático puede ayudar a realizar los cálculos y representaciones más rápidamente, la precisión de éstos dependerá de las acciones y los razonamientos del estudiante. Tanto con lápiz y papel como con TIC si un alumno no es riguroso en la búsqueda de la solución de un problema, los resultados que obtendrá no serán precisos sino aproximados. Por esta razón, la visión que tengo de esta actitud matemática es independiente de las herramientas que se utilicen para resolver los problemas.

A lo largo de la historia de las matemáticas y empezando por Euclides, muchos matemáticos se han preocupado de garantizar la precisión y el rigor de sus resultados, asociando el concepto de rigor con el de demostración matemática. Sin embargo, he observado cómo para muchos estudiantes esta actitud no es de vital importancia, es decir, no sienten la necesidad de ser precisos en todo momento, ni tampoco de dotar de cierto rigor a sus respuestas y argumentaciones, al nivel que deberían. El trabajo con SGD puede contribuir a despertar estas necesidades en los estudiantes, teniendo en cuenta algunas de las ventajas señaladas a este respecto en el capítulo anterior.

- *Creatividad (C)*

La Dirección General de Escuelas Libres de República Dominicana ofrece la siguiente definición: la Creatividad, denominada también inventiva, pensamiento original, imaginación constructiva, pensamiento divergente, pensamiento creativo, es la generación de nuevas ideas o conceptos, o de nuevas asociaciones entre ideas y conceptos conocidos, que habitualmente producen soluciones originales²⁶.

Otra definición que encontramos en la web es la siguiente:

²⁶ Extraído de <http://creatividadlibre.blogspot.com/2009/02/siete.html>

Es la capacidad de asociar, seleccionar, reestructurar, organizar y transformar las experiencias vividas o la información recibida en combinaciones únicas que dan lugar a producciones diferentes, nuevas y valiosas. La creatividad es considerada también como una cualidad humana que puede ser vista como aptitud y como actitud:

- Como aptitud porque, es la habilidad o capacidad que tiene el ser humano de elaborar un producto nuevo.
- Como actitud porque, es la forma de enfrentar la vida, la persona a partir de sus experiencias vividas genera sus propias alternativas para la solución de sus problemas²⁷.

En resumen, la Creatividad puede entenderse como el hacer y comunicar nuevas ideas, partiendo de un conocimiento previo, el cual ayudará a pensar, experimentar a los alumnos de diferentes formas, tomar diferentes puntos de vista y seleccionar las alternativas más adecuadas. Considero que los estudiantes se muestran creativos cuando al trabajar en una tarea les gusta probar distintas estrategias o caminos (aunque se salgan de las indicaciones dadas por el profesor), explotan su imaginación y, además, les complace seguir caminos distintos a los seguidos por la mayoría de sus compañeros. También cuando, habiendo resuelto una tarea, se interesan por buscar otras formas de resolverla. Afirmo que un alumno se muestra poco o nada creativo cuando resuelve las tareas de un único modo (generalmente el empleado por la mayoría de sus compañeros o el sugerido por el profesor, si ése es el caso) y no siente la necesidad de buscar otras estrategias o explorar nuevos caminos.

• *Autonomía (AU)*

Autonomía, del griego *auto* (uno mismo) y *nomos* (normas), en términos generales, puede entenderse como la capacidad de un individuo de tomar decisiones sin ayuda de otro o la condición de quien, para realizar ciertas cosas, no necesita la ayuda de nadie. Referida al proceso de aprendizaje, la Autonomía se refiere a la capacidad del educando de tomar sus propias decisiones en el proceso educativo, regulándolo en relación a la meta que quiere alcanzar o al conocimiento que desea integrar. En una palabra, el concepto de “autonomía intelectual” se relaciona estrechamente al de “aprender a aprender”, tan importante en nuestros tiempos y que permite al estudiante continuar aprendiendo durante toda su vida. El estudiante, poco a poco, será capaz de controlar sus propias actividades en el proceso

²⁷ Extraída de <http://fisn.zoomblog.com/>

educativo, haciendo todos los cambios que crea conveniente para alcanzar el objetivo previsto²⁸.

La autonomía está muy relacionada también con el aprendizaje por descubrimiento, entendiendo éste como aquel en el que el alumno construye sus conocimientos de forma autónoma, asumiendo una actitud protagonista, sin la ayuda permanente del educador, quien puede no obstante, guiar el proceso y facilitar los medios.

Un estudiante no autónomo, cuando se enfrenta a una tarea no se plantea qué estrategia seguir, no piensa cómo debe actuar sino que en lugar de ello, pide ayuda a otros compañeros o al profesor. Para avanzar en una tarea necesita ayuda externa. Habría que diferenciar dos situaciones, para hacer referencia a la falta de autonomía del alumno, pero que tienen distinta interpretación:

- Un alumno trabaja de modo autónomo hasta que llega a una situación de bloqueo de la que no sabe salir por sí solo, pese a haberlo intentado, y entonces pide ayuda para continuar.
- Un alumno que prefiere no pensar por sí mismo y antes de actuar siempre pide ayuda, no se esfuerza ni es autónomo.

Un estudiante que realiza la tarea trabajando solo o con su compañero y que cuando tiene algún problema, busca el modo de solucionarlo por sí mismo se considera autónomo. También lo es aquél que trabaja por su cuenta y en alguna situación de bloqueo, pese a probar otras estrategias que le ayuden a continuar, sigue teniendo dificultades para continuar con la tarea, con lo que finalmente pide ayuda externa. Por el contrario, se considera falta de Autonomía a aquel que se encuentra en la segunda de las situaciones anteriormente expuestas, es decir, para poder trabajar en una tarea necesita y solicita ayuda externa.

Creo primordial cultivar esta actitud en los estudiantes para otorgarles libertad en su forma de aprender a aprender. Considero que el uso de herramientas tecnológicas potencia el trabajo autónomo del alumno, y pretendo con este trabajo contrastar esta opinión, es decir, si esta ventaja teórica se pone de relieve en la práctica en el aula.

²⁸ Extraída de <http://www.eumed.net/rev/ced/03/sl.htm>

- *Sistematización (SS)*

Investigaciones como la de Sánchez (1992) citada por Porcar (2008), referentes a las dificultades asociadas a la resolución de problemas en matemáticas, demuestran que las personas no pueden resolver problemas si no logran la representación mental o interna de éstos. Para ello se necesita comprender el enunciado del problema y visualizar las relaciones entre los datos, el resultado esperado y los operadores que permiten pasar del estado inicial del problema al estado final; o sea, a la solución mediante un proceso sistemático de razonamiento. Es decir, ser sistemático ayuda a esta actividad tan usual e importante en matemáticas como es la resolución de problemas.

Siguiendo a Jara (1994), la sistematización es aquella interpretación crítica, de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explica la lógica del proceso vivido, los factores que han intervenido en dicho proceso, cómo se han relacionado entre sí y por qué lo han hecho de ese modo. Así, cuando un alumno sistemático trabaja en una tarea tiene claro cómo actuar en cada momento, cuál debe ser el siguiente paso, y dónde quiere llegar, en otras palabras, se ha marcado una estrategia a seguir. Además en cada paso sabe qué es lo que ha obtenido y no tiene problemas en sintetizar y comunicar sus respuestas (cálculos, estrategias seguidas, etc.). Ha seguido una estrategia y es capaz de explicar los pasos que ha ido dando y las decisiones que ha ido tomando hasta obtener la respuesta que esperaba. Por el contrario, un estudiante no sistemático, normalmente, no dedica un tiempo a analizar el problema y buscar una estrategia adecuada, sino que suele decantarse por la estrategia de ensayo-error. No obstante, cómo no sabe cómo empezar o incluso a dónde debe llegar, empieza a probar lo primero que se le ocurre, para ver si ello le ayuda a comprender qué debe hacer y, en ocasiones, tiene suerte y da con la solución.

Esta actitud es muy importante en resolución de problemas y en matemáticas, en general, y por ello es objeto de investigación. Con frecuencia he observado que los estudiantes menos hábiles en esta actividad, ponen en práctica cualquier estrategia de resolución o realizan cálculos y representaciones, sin pararse a pensar si les llevarán a la respuesta buscada, por lo que después manifiestan dificultades para comunicar sus hallazgos. El trabajo con software interactivo puede contribuir al desarrollo de esta actitud proporcionando retroalimentación en tiempo real, que ayude a reconducir las estrategias de aquellos estudiantes que actúen inicialmente por ensayo-error.

3.3. TRANSFORMACIÓN DE ACTITUDES EN MATEMÁTICAS. INFLUENCIA DE LAS TIC

Singh, Granville, y Dika (2002) encontraron que las actitudes hacia las matemáticas y otras conductas relacionadas de los estudiantes de enseñanzas medias son flexibles y pueden ser transformadas a través de políticas y cambios en las prácticas de enseñanza. Ejemplos de ello son el trabajo de Curtis (2006), quien comprobó que ciertos cambios o innovaciones curriculares (aprendizaje colaborativo durante la resolución de problemas y el uso de la calculadora gráfica) mejoraron las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes o el de Georgiou, Stavrinides y Kalavana (2007), quienes analizaron la influencia en estas actitudes de ciertos aspectos como la cuestión del género (diferencias de actitudes entre chicos y chicas).

A continuación, analizo qué variables influyen en la transformación de actitudes relacionadas con las matemáticas, prestando especial atención a la incidencia de las TIC en dicha transformación. Para ello, destaco aquellos estudios que he considerado relevantes, abordando en primer lugar las actitudes hacia las matemáticas:

- Los trabajos de Galbraith y Haines (1998) y Pierce y Stacey (2004) sobre las actitudes hacia el aprendizaje matemático con TIC, encontraron necesario el análisis de las interacciones entre actitudes hacia las matemáticas y hacia el ordenador, considerando la motivación y la confianza en matemáticas y en la tecnología y la interacción entre ambas (matemáticas y TIC). Cretchley y Galbraith (2002), empleando los cuestionarios de actitudes que ellos mismos elaboraron, teniendo en cuenta las dimensiones anteriores (Mathematics-Computing Attitudes scales elaborada por Galbraith y Haines (2000) y la USQ *MathTech scale* elaborada por Cretchley, Fogarty, Harman y Ellerton (2000, 2001)), confirmaron “una débil relación entre actitudes hacia las matemáticas y hacia los ordenadores (midiendo en ambas la confianza y la motivación) y que las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas con tecnología correlaciona más fuertemente con sus actitudes hacia los ordenadores que con sus actitudes hacia las matemáticas” (p. 8).
- Los trabajos de Hernández y Socas (1999); Hernández, Palarea y Socas (2001); Cubillo y Ortega (2002). Dichos autores estudiaron la influencia del modelo didáctico, así como de los materiales empleados, en las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, encontrando una correlación positiva entre ambos factores.

- Estudios que se han centrado en analizar la bondad del uso de determinados software para mejorar las actitudes de los estudiantes, como los realizados por Pierce (2001) y Artigue (2002), que usaron software algebraico (CAS) o León y Gómez-Chacón (2007), que emplearon Webquest en Geometría.
- Los trabajos de Gómez-Chacón y Haines (2008), quienes indagaron acerca de las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y hacia la tecnología, obtuvieron los mismos resultados que los autores anteriores: existe una débil relación entre actitudes hacia las matemáticas y hacia los ordenadores; y en el aprendizaje de las matemáticas con ordenadores existe una más fuerte correlación con sus actitudes hacia los ordenadores que con sus actitudes hacia las matemáticas.
- Pierce, Stacey y Barkatsas (2007) desarrollaron la escala (MTAS) para monitorizar las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas con tecnología, que posteriormente fue empleada por Barkatsas, Gialamas y Kasimatis (2008) para estudiar dichas actitudes explorando las relaciones entre género, compromiso, confianza y rendimiento. Concluyeron que los dos factores que parecían estar asociados con el desarrollo de una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas con ordenadores eran la confianza en matemáticas (la percepción de los estudiantes de su capacidad para obtener buenos resultados y su seguridad de que ellos pueden manejar sus dificultades en matemáticas) y el compromiso afectivo (cómo se sienten los estudiantes respecto a las matemáticas). En este sentido, obtuvieron también que, en general, los chicos tenían una actitud más positiva para el aprendizaje de las matemáticas con las computadoras, que las niñas.

A diferencia de las actitudes hacia las matemáticas, en lo que respecta a la literatura de investigación, el campo de las actitudes matemáticas está menos explorado y es difícil encontrar trabajos que informen de las variables que inciden en tales actitudes y del modo de transformarlas. Es escaso el número de investigaciones en el tema y muchas de ellas se centran en analizar las diferencias de género; es decir, investigan si algunas de estas actitudes son más evidenciadas en chicos o chicas o existe equidad entre sexos, por ejemplo, las investigaciones de Hoyles y Sutherland (1989) o Yelland (2001).

Centrándome en la incidencia de las TIC en el desarrollo de las actitudes matemáticas, encuentro autores como Sinclair, Renshaw y Taylor (2004) quienes estudiaron la efectividad

de la Instrucción Asistida por Computador (IAC²⁹) para la enseñanza de gráficos logarítmicos y análisis dimensional y encontraron que IAC no solamente mejoró las habilidades memorísticas (aprendizaje sin comprensión), sino que produjo una mejora de orden superior en sus habilidades de pensamiento crítico. Además de la anterior, he de destacar la investigación de Ursini, Sánchez, Orendain y Butto (2004), por tener objetivos comunes con los de mi investigación: el estudio de las modificaciones producidas por la introducción de la tecnología en clase, en las siguientes actitudes de los estudiantes: participación, iniciativa y autonomía, dedicación al trabajo (perseverancia), defensa de sus ideas, creatividad y preferencia por el trabajo en grupo o individual³⁰. El propósito de este estudio era investigar si cambiaba y cómo cambiaba el comportamiento de los alumnos en la clase de matemáticas cuando se usa la tecnología como apoyo didáctico. También indagar si cuando se usa la tecnología procurando crear un ambiente que invita a la discusión, al trabajo en equipo y al intercambio de ideas, se propicia una mayor equidad o se refuerzan las diferencias de género. Sus resultados mostraron que el uso continuado de la tecnología llevó a la gran mayoría de los estudiantes, sin distinción de sexo, a demostrar una buena capacidad para analizar los problemas que se les planteaban y para interpretar las hojas de trabajo, manifestaban tener más iniciativa, se dedicaban más al trabajo, defendían mejor sus ideas y tenían una actitud más creativa al enfrentarse a los problemas que se les planteaban. Asimismo, el uso de la tecnología contribuyó a que se fuesen modificando ciertos patrones culturales de conducta que contribuyen a reforzar las diferencias de género y, de este modo, se puede ayudar a lograr una mayor equidad.

Los resultados obtenidos en los trabajos anteriores, cuyo propósito era indagar sobre las transformaciones de las actitudes hacia las matemáticas y/o las actitudes matemáticas de los escolares debido al uso de tecnologías en el aula, no han hecho sino confirmar mi intuición de que estas herramientas pueden convertirse en un medio útil para mejorar el ambiente actitudinal del aula (a nivel afectivo, cognitivo y comportamental), planificando un uso adecuado de las mismas.

²⁹ IAC es la traducción al español de las siglas CAI para Computer-Assisted Instruction.

³⁰ En este estudio se analizan todas esas actitudes, aunque al adoptar la clasificación de las actitudes en actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas, la participación e iniciativa se contempla dentro de la componente comportamental de las actitudes hacia las matemáticas; la defensa de las ideas propias está recogida en la actitud Sistematización; y la preferencia por el trabajo en grupo o individual se considera al indagar sobre la actitud de los estudiantes hacia el trabajo colaborativo desarrollado en el aula.

3.4. VARIABLES A TENER EN CUENTA PARA TRANSFORMAR LAS ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES

Siguiendo a Gairín (1987) y Estrada (2002), las actitudes de los alumnos relacionadas con las matemáticas se insertan en complejos actitudinales más amplios (actitudes hacia la educación, escuela, profesorado, etc.), pudiéndose distinguir entre las variables asociadas a estas actitudes: variables personales, familiares y escolares. Además de las anteriores, Castro (2004) subraya la importancia de las variables sociales: “la formación de actitudes está altamente relacionada con la experiencia personal y social que cada individuo vive. Cuando somos niños, recibimos incentivos o castigos que contribuyen a generar en nosotros actitudes positivas o negativas hacia los objetos; de igual forma, buscamos imitar las actitudes de otras personas que representan ideales para nosotros y finalmente, somos permeables a los patrones sociales, prejuicios, medios de comunicación e influencia cultural” (pp. 60-61).

Para lograr una transformación de las actitudes, es necesario atender a todas las variables antes mencionadas, aunque en la práctica es difícil para un docente llegar a un conocimiento profundo de todas las variables o factores que en cada estudiante están ejerciendo una influencia en el desarrollo de sus actitudes relacionadas con las matemáticas. Por ello, en la presente investigación, decidí centrarme en las variables escolares y personales, dado que es éstas en las que puedo influir directamente desde mi posición como profesora. Dentro de las variables escolares, tampoco consideré la influencia de las variables sociales e institucionales, dado que el contexto sociocultural de los estudiantes no cambió por trabajar en un entorno tecnológico.

Variables Personales

Comienzo con el estudio de las variables personales y, dentro de éstas, con aquellas personas pertenecientes al ámbito escolar cuyas relaciones con los estudiantes inciden en sus actitudes.

Es clara la influencia que en mayor o menor grado tiene la conducta o *actitud del profesorado* sobre el alumnado. Si el estudiante percibe buenas sensaciones del profesor, como pueden ser grandes expectativas sobre su aprendizaje, un trato amigable basado en la confianza o refuerzos positivos a su esfuerzo y trabajo, mejorará su actitud hacia las matemáticas. Si, por el contrario, el alumno percibe que el profesor considera que sus expectativas de mejora son bajas, su interés y esfuerzo se verán mermados. Éstas son algunas de las conclusiones que fueron extraídas de la investigación de Gómez-Chacón (2002), realizada en 1995 con

alumnos y alumnas que estaban concluyendo la etapa de Primaria. Dicha investigación puso de manifiesto que, aunque en un principio las dificultades de algunos de los alumnos y alumnas eran cognitivas, luego pasaron a ser de interacción cognición y afecto, al no sentirse reconocidos y valorados por el profesor/a, derivándose como consecuencia un bloqueo fuerte al aprendizaje. Desde esta perspectiva, es de crucial importancia que el profesorado tenga especial cuidado en la relación con los estudiantes y en la forma de expresar su opinión sobre sus posibilidades de aprendizaje, ya que ésta puede condicionar su actitud en relación a las matemáticas.

Mi propósito es animar al alumnado y desafiarlo a resolver problemas desde una situación contextualizada que les resulte interesante, invitándoles a superar sus deficiencias y a convertirse en los generadores de las matemáticas necesarias para resolver tales problemas. Mi función consistirá en proporcionar recursos y materiales útiles y en ayudarles a solucionar las dudas que se les planteen en su resolución y que les ocasionen una situación de bloqueo que por sí mismos o con ayuda de sus compañeros no puedan superar. Esta es la actitud que siempre he adoptado en el aula y que continuaré manifestando porque considero que contribuye a crear en el aula un clima de confianza mutua entre docentes y discentes. Asimismo, a lo largo de mi práctica docente he ido observando cómo el apoyo ofrecido por el profesor a los estudiantes suele ser percibido por éstos como una valoración positiva de su esfuerzo, lo que les empuja a continuar trabajando.

Otro de los factores influyentes en la generación de actitudes positivas o negativas en matemáticas, explorado ya desde hace décadas por autores como Purkey (1970), Covington y Beery (1976) o Beltrán (1985), y que puede enmarcarse dentro de las variables personales, son *actitudes del alumnado hacia sí mismo*. Éstas se basan fundamentalmente en el *autoconcepto*, entendiendo éste como la valoración personal y subjetiva que una persona hace de sí mismo. Young y Ley (2002) definen autoeficacia como una valoración de las propias capacidades. La autoeficacia de las matemáticas es una evaluación, en una situación o problema específico, de la confianza de una persona en su capacidad para realizar con éxito una determinada tarea o problema. Algunos investigadores han establecido que la autoeficacia de un estudiante influye en sus funciones cognitivas (Bandura, 1993) y rendimiento (Pajares, 1996). Como Pajares (2002) explica:

Las creencias de autoeficacia también ayudan a determinar cuánto esfuerzo gastarán los estudiantes en una actividad, cuánto tiempo perseverarán a la hora de afrontar obstáculos,

y lo resistentes que serán frente a situaciones adversas. Cuanto mayor sea el sentido de eficacia, mayor será el esfuerzo, la persistencia y la resistencia. Las creencias de autoeficacia también influyen en la cantidad de estrés y ansiedad que los estudiantes experimentarán cuando ellos efectúen una tarea. (p. 117)

El informe PISA 2003 aborda en su capítulo tercero el aprendizaje de los alumnos basándose en las actitudes, implicación y estrategias y afirma que:

Los alumnos que tienen éxito no sólo poseen confianza en sus capacidades. También creen que la dedicación puede marcar la diferencia en el aprendizaje y ayudarles a superar las dificultades; esto es, poseen un fuerte sentido de su propia eficacia. Por el contrario, los alumnos que carecen de confianza en su capacidad para aprender lo que ellos juzgan importante y para superar las dificultades, se encuentran expuestos a fracasar, no sólo en el colegio, sino también en sus vidas adultas. La autoeficacia va más allá de lo que piensan los alumnos acerca de su competencia en materias como las matemáticas. Tiene más que ver con la clase de confianza necesaria para superar con éxito tareas específicas de aprendizaje. De esta forma, no es simplemente un reflejo de las capacidades de un estudiante y de su rendimiento, sino que se ha demostrado también que mejora la actividad de aprendizaje y, por tanto, el rendimiento del alumno. (pp. 136-137)

En este sentido, he observado en muchos de mis estudiantes escasa confianza en sus posibilidades de éxito en matemáticas y por ello, deseo comprobar si el trabajo con SGD fomenta la autoconfianza durante la resolución de problemas de aquellos estudiantes que evidencien previamente carencia de ella, desde la consideración de los trabajos anteriores que evocan la importancia de que los alumnos tengan confianza en sus posibilidades para mejorar sus resultados.

Variables Escolares

Entre las variables escolares que repercuten en la conformación de las actitudes de los estudiantes se encuentran las estrategias metodológicas, la materia estudiada, el contexto-clase, etc., pero el estudio de todas ellas se desvía de los objetivos de esta investigación. Por ello, abordo las dos variables escolares que considero más relevantes para este trabajo: la influencia de las estrategias metodológicas llevadas a cabo en el aula y de la materia estudiada.

La incidencia de las *estrategias metodológicas* para el aprendizaje en la generación de actitudes es de vital interés para este estudio, dado que uno de los objetivos es comprobar si las actitudes de los alumnos en relación con las matemáticas se modifican positivamente al producirse una variación de la metodología empleada en el aula. Dicha variación metodológica pivota sobre la introducción de software de Geometría dinámica como recurso generador de conocimientos geométricos y repercute en otros elementos como las funciones del profesor, la naturaleza de las tareas o la cultura social del aula, expuestas en los apartados 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3. Además de la introducción de las TIC, una estrategia metodológica que vengo poniendo en práctica cuando los estudiantes practican la resolución de problemas, es la de fomentar el trabajo colaborativo por parejas³¹, porque considero que esta actividad se ve enriquecida por este modo de trabajar, aspecto que se abordó en el apartado 2.4.3. Para trabajar de este modo, es muy importante establecer con los alumnos un contrato didáctico, entendiendo éste como el “conjunto de cláusulas implícitas y explícitas que regulan los comportamientos del profesor y el alumno con relación al saber matemático a enseñar” (Montiel, 2002, p. 33) o como el medio para establecer las reglas del juego y las estrategias de base, y después adaptarlas a los cambios de juego del alumno (Brousseau, 1986).

De esta forma, la presente investigación se encuadra en los estudios que apoyan la innovación metodológica a través de la introducción en el aula de materiales y recursos, pudiendo destacar entre éstos, el realizado por León y Gómez-Chacón (2007) sobre los usos matemáticos de Internet y de WebQuest para la enseñanza Secundaria. Algunas de las conclusiones extraídas de este estudio fueron las siguientes:

La actitud que mostraron los estudiantes hacia las matemáticas durante esta investigación fue positiva, un 60% de los estudiantes se interesaron por el tema trabajado y un 70% se sintieron satisfechos con la experiencia vivida durante el desarrollo de la unidad didáctica. Los grupos de trabajo se mostraron con mucha curiosidad y muy motivados al involucrarse en las actividades propuestas. Esto apoya otros estudios realizados con ordenadores y Matemáticas (Galbraith y Haines, 1998, Gómez-Chacón, Figueras y Marín, 2001) en los que se ha señalado que las respuestas afectivas son esencialmente cognitivas (de creencia) basadas y determinadas por la experiencia; y en las que se pone de relieve dos dimensiones claves de la actitud hacia la matemática, que

³¹ La disposición de los ordenadores en las mesas de los estudiantes (un equipo para cada pareja de alumnos), dificulta otros agrupamientos, pues no es posible desplazar el mobiliario de aula. Por esta razón, los escolares siempre trabajan por parejas.

son la motivación y la confianza. Desde la visión cooperativa del trabajo escolar, la presente investigación confirma que *la metodología de WebQuest promueve y facilita la cooperación y colaboración entre los estudiantes*.

La Webquest como estrategia de aprendizaje contribuyó en el proceso de construcción del conocimiento matemático geométrico de los alumnos y a su mejora de actitudes hacia la matemática, perfilándose como un instrumento válido. (p. 32)

Así pues, el uso controlado de los ordenadores en el aula, que tiene lugar cuando el profesorado diseña y controla su uso según la adecuación de los contenidos curriculares y haciendo las agrupaciones pertinentes de alumnos, puede proporcionar experiencias reales e inmediatas para los alumnos y fomentar las relaciones sociales entre iguales, siendo una muestra de ello los resultados expuestos en el párrafo anterior. Además, Calzadilla (2001) añade que la utilización de las nuevas tecnologías en el proceso educativo, requiere del soporte que proporciona el aprendizaje colaborativo, para optimizar su intervención y generar verdaderos ambientes de aprendizaje que promuevan el desarrollo integral de los aprendices y sus múltiples capacidades.

La otra variable escolar considerada para este trabajo como variable influyente en la generación de actitudes en los estudiantes es *la materia* estudiada. Las actitudes del alumnado hacia una determinada materia se forman según el éxito o fracaso experimentado en su estudio, aunque también tienen gran relevancia las actitudes que la familia y el profesorado muestran por la materia en cuestión. En lo que se refiere a la materia de Matemáticas, de sobra es conocida la importancia atribuida desde tiempos remotos a su estudio y superación, que se pone de manifiesto en los currículos escolares. A pesar de su utilidad, las matemáticas son concebidas por gran parte de los estudiantes como una materia aburrida, difícil, abstracta y sólo al alcance de unos “pocos privilegiados”. Algunos estudios (Marks, 2000; Steinberg, 1996) han encontrado que entre el 40% y 60% de los estudiantes de Secundaria están crónicamente desconectados, presentando falta de atención, falta de esfuerzo, incapacidad o falta de voluntad para realizar las tareas educativas y altos niveles de aburrimiento. Estas cifras tienen en cuenta solamente los estudiantes que están aún en la escuela, no aquellos quienes han abandonado. El National Research Council (2003) añade lo siguiente: la proporción de estudiantes con bajos ingresos, minorías o urbanos quienes informan estar desconectados es incluso mayor.

La categorización de “la asignatura más difícil” no hace sino entorpecer el aprendizaje de los estudiantes, ya que en numerosos casos produce desaliento y desánimo que para nada ayudan a la mejora del rendimiento en esta materia. Además, coincido con Gómez-Chacón (2003) en que “muchos estudiantes de secundaria creen que todos los problemas de matemáticas se pueden resolver mediante la aplicación directa de hechos, reglas, fórmulas y procedimientos mostrados por el profesor o presentados en los libros de texto (...). Invertirán más tiempo en hacer que en reflexionar sobre el problema, sobre lo que hacen y sobre para qué les sirve lo que están haciendo” (p. 241-242). Considero que estas creencias influyen en el interés mostrado por los estudiantes en matemáticas y limitan en cierto modo su rendimiento en la materia, lo que nos conduce a la situación educativa actual, en la que una de las áreas con mayor índice de fracaso escolar es la nuestra.

Por ello, los docentes debemos explorar tales creencias limitativas de nuestros alumnos para actuar evitando el bloqueo que éstas producen en la resolución de actividades matemáticas, fomentando un aumento positivo de su estado de motivación. Considero que recurrir a nuevas estrategias metodológicas, en mi caso centradas en el uso de TIC, puede ayudar a que los estudiantes adquieran una concepción de la materia diferente, que les resulte atractiva y les conduzca a una transformación actitudinal positiva.

Para lograr una transformación de las actitudes de mis estudiantes, considero esencial atender, en la medida de mis posibilidades, a todas las variables antes expuestas, que inciden en mayor o menor grado en la formación de sus actitudes relacionadas con las matemáticas, y que a modo de esquema-resumen, expongo en la siguiente figura:

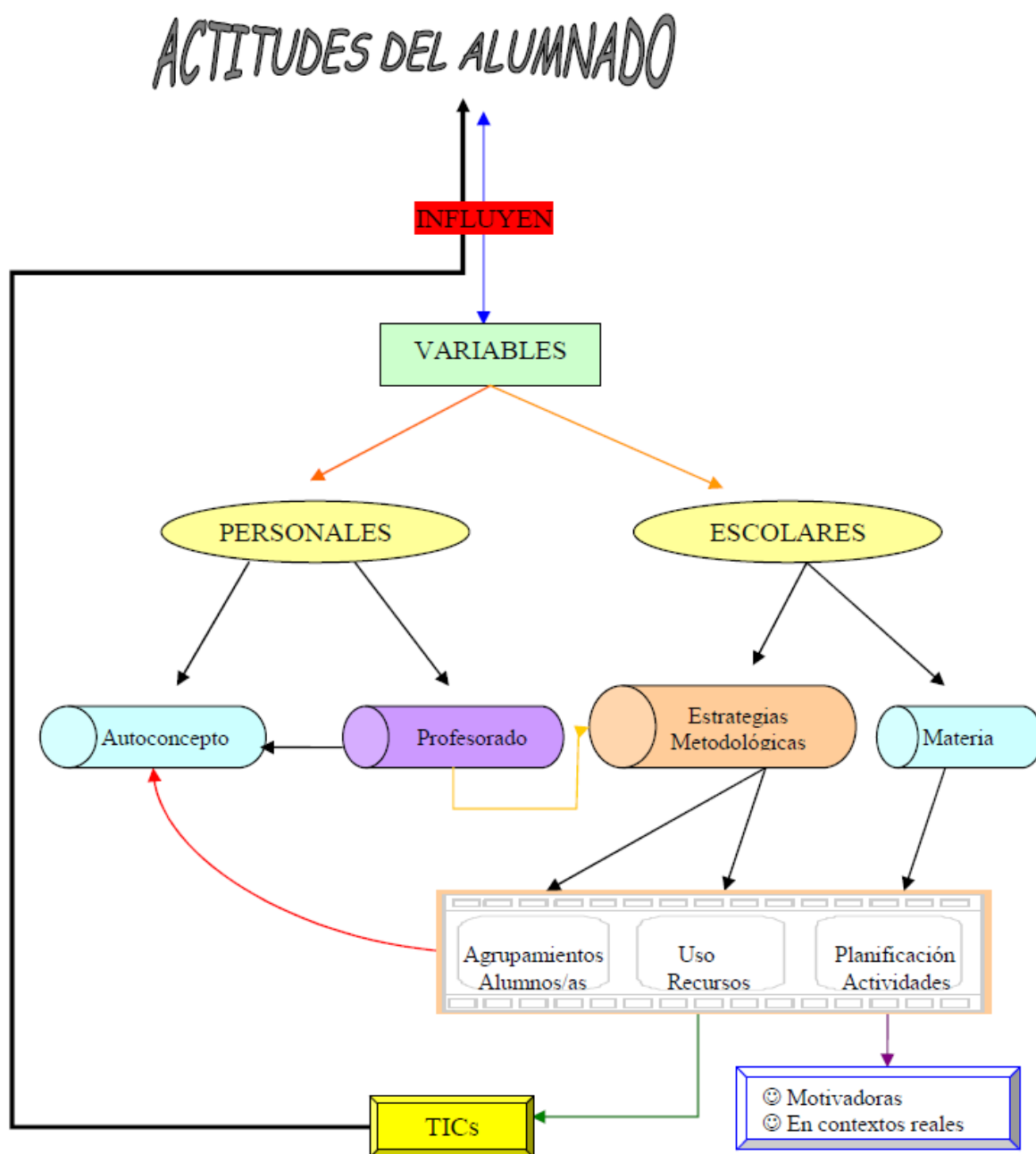


Figura 3-2. Variables influyentes en las actitudes del alumnado consideradas en este trabajo

He considerado todas las variables de la Figura 3-2 para el diseño de la secuencia didáctica, como he ido exponiendo a lo largo de este capítulo. Por una parte, dentro de las variables personales, me he centrado en intentar mejorar el autoconcepto de los estudiantes en matemáticas, aspecto que desde el inicio de mi labor docente he tratado de potenciar. Por otra parte, considerando las variables escolares, me ha parecido importante y necesario mejorar su visión de las matemáticas, realizando para ello cambios metodológicos que residen fundamentalmente en la introducción de SGD para trabajar por parejas de modo colaborativo

la Geometría, así como en el diseño de actividades que puedan resultar motivadoras para los estudiantes.

En el presente capítulo he expuesto mi visión sobre la importancia de fomentar las actitudes en Educación Matemática, incluyendo la caracterización adoptada para las mismas. Esta caracterización ha servido de base para el diseño propio de algunos de los instrumentos de recogida de datos y también para la elección de instrumentos diseñados por otros autores que son coherentes con la caracterización expuesta. Asimismo, caracterizar y definir cada actitud de forma exhaustiva proporciona un marco teórico que sustentará el posterior análisis de los datos recogidos, de ahí su importancia para este trabajo. Por último, también he abordado en este capítulo una serie de variables personales y escolares en las que incidiré, a través de mi propuesta didáctica, para lograr la búsqueda transformación positiva de estas actitudes en los estudiantes.

CAPÍTULO 4

Aprendizaje matemático basado en competencias

En este capítulo se expone una aproximación al aprendizaje matemático basado en el desarrollo de una serie de competencias matemáticas. Considerar el aprendizaje en términos de competencias y, consecuentemente, evaluar su adquisición, es una corriente imperante en la actualidad en nuestro país y en la Unión Europea. Ello se pone de manifiesto en la Ley Orgánica de la Educación (MEC, 2006a,b), en la que se nos exige a los docentes adoptar esta nueva visión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Para abordar la cuestión se estudian en primer lugar las competencias en general, ahondando después en el ámbito de las matemáticas. Se presentan las competencias matemáticas objeto de estudio, precedidas de las investigaciones y trabajos de los autores que han servido de guía para su selección. Por último, se expone la caracterización de dichas competencias en términos geométricos, graduándolas según los niveles de complejidad de las tareas con las que se pretende que los estudiantes las desarrollen.

4.1. COMPETENCIAS EN EL MARCO CURRICULAR. NOCIÓN DE COMPETENCIA

Coincido con Recio (2006) en que:

De un tiempo a esta parte parece plantearse, implícitamente, una minusvaloración del contenido curricular (esto es, de la organización del aprendizaje a través de unos ítems concretos en un programa) y una sobrevaloración de los objetivos finales y generales del currículo, tales como la adquisición de competencias para enfrentarse a problemas de la vida cotidiana, de modo que esta noción va ganando, aceleradamente, terreno entre determinados sectores de la comunidad educativa. (p. 268)

Se puede hacer una búsqueda de la palabra “competencia” en los textos de la LOGSE, LOCE o LOE y constatar el creciente número de veces que aparece en unos y otros. Se habla ahora (en todos los niveles educativos, incluido el universitario) de adquisición y evaluación de

competencias, de competencias básicas, transversales, genéricas, específicas... Y por supuesto, de competencias matemáticas (Prólogo del libro de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 13).

Ahondando en el tema, se aprecia que la interpretación del término currículo en la LOGSE y la LOE no es exactamente igual. En concreto:

Artículo 4.1 (LOGSE): A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente (MEC, 1990, p. 28930).

Artículo 6.1 (LOE): A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas (MEC, 2006a, p. 17166).

En los artículos anteriores, se aprecia cómo la LOE amplía la noción de currículo recogida en la LOGSE, incluyendo las competencias básicas como uno de sus elementos. En referencia al currículo, comparto con Rico y Lupiáñez (2008) que, hasta la llegada de la LOE, el procedimiento estándar de planificación del currículo tenía en los objetivos una de sus herramientas principales y la consecución de éstos servía como indicador de logro de los aprendizajes expresados. Con la llegada de la LOE, estos autores contemplan ciertos cambios curriculares y afirman que “a diferencia de leyes anteriores, en la actualidad las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares no quedan determinadas en el currículo por los objetivos de aprendizaje en exclusiva, ya que tienen un complemento adecuado en el enunciado de competencias” (p. 73). Ahora los objetivos tienen un carácter local y se refieren a una etapa o curso y unos contenidos determinados y se enuncian en términos de las capacidades que los estudiantes deben adquirir para lograr el desarrollo de una o varias competencias. Dichas competencias tienen un carácter global para toda la etapa de educación secundaria y en este sentido la LOE expone lo siguiente:

La incorporación de competencias básicas al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos. De ahí su carácter básico. Son aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida (MEC, 2006b, p. 43058).

El actual enfoque de la educación basado en el desarrollo de competencias básicas tiene antecedentes académicos y científicos próximos, que se remontan a la década de los 90. Este enfoque ha sido debatido y estudiado por organismos, agencias estatales, parlamentos e instituciones internacionales. Entre ellos, incluyo los que Rico y Lupiáñez (2008) destacan respecto de la etapa de la Educación Secundaria:

- ❖ Las directrices y recomendaciones sobre competencias propuestas por el Parlamento Europeo y el Consejo de la Unión Europea. El documento elaborado por la Unidad Europea de Eurydice³² (2002) sobre competencias clave en educación obligatoria.
- ❖ Los estudios de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) referentes a las competencias escolares, en concreto, el proyecto PISA y DeSeCo³³.

Noción de competencia: distintas perspectivas

En lo que sigue, expongo distintas aproximaciones o definiciones del concepto de competencia:

- ✓ Perrenoud (2000) define la competencia como una capacidad de actuar eficazmente en un tipo definido de situaciones, capacidad que se apoya en los conocimientos pero que no se agota en ellos. Las competencias son un “saber-hacer” de alto nivel pues son válidas para una gran variedad de problemas e incluyen procesos de abstracción, generalización y transferencia.
- ✓ Niss (2002) afirma que poseer una competencia (ser competente) en algún dominio personal, profesional o de la vida social es dominar los aspectos esenciales de la vida en ese dominio.
- ✓ Para el proyecto DeSeCo, una competencia es más que conocimientos y destrezas. Involucra la habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose en y movilizando recursos psicosociales (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto particular. Por ejemplo, la habilidad de comunicarse efectivamente es una competencia que se puede apoyar en el conocimiento de un individuo del lenguaje, destrezas prácticas en tecnología e información y actitudes con las personas que se comunica (OCDE, 2005a).

³² Proyecto gestionado por la Dirección General de Educación y Cultura de la Comisión Europea. Disponible en la página: <http://www.eurydice.org>

³³ Proyecto de Definición y Selección de Competencias

- ✓ Gresalfi, Martín, Hand y Greeno (2008) se refieren a competencia como una colección de destrezas o habilidades que son atribuidas a los individuos aparte de los contextos específicos en los que ellos participan.
- ✓ Para Sekerák y Sveda (2008), las competencias presentan la unificación de todos los conocimientos, habilidades, capacidades y actitudes que los individuos adquieren a lo largo de toda su vida. Las competencias individuales permiten a su portador actuar adecuadamente en determinadas situaciones de campos específicos de actividad. Las competencias clave son aquellas que se pueden utilizar, no sólo en uno, sino en diversos campos de actividad, y se caracterizan como sigue:
 - Tienen carácter activo y procedimental: se forman sobre la base de la experiencia y actividad práctica personal y son aplicadas en la praxis.
 - Forman una unidad compleja: son la unión de conocimientos, habilidades, capacidades y actitudes y otros elementos que eran percibidos más independientemente hasta ahora.
 - Son dinámicas y desarrolladas en varios niveles: cambian sus cualidades durante toda la vida.
 - Son el resultado del aprendizaje formal, no formal e informal: son el resultado del aprendizaje permanente.

Mi forma de entender el término competencia, se desprende de las anteriores definiciones, pues comparto la idea de que para considerar a una persona competente en una actividad o dominio, además de conocimientos y destrezas, debe poseer una serie de habilidades y capacidades que le permitan desenvolverse con soltura en variadas situaciones asociadas a dicha actividad o dominio.

4.2. COMPETENCIA MATEMÁTICA

La competencia matemática ocupa un lugar destacado en los informes, estudios y reformas curriculares nacionales e internacionales antes revisados. A continuación, muestro, de entre las distintas definiciones de este término, aquellas que han sido de ayuda para conformar mi visión acerca de lo que entiendo por competencia matemática y por ser competente matemáticamente o en matemáticas:

- El NCTM (2003) en su visión de las matemáticas escolares, alude a objetivos y competencias matemáticas generales:

En este mundo cambiante, aquellos que entiendan y puedan utilizar matemáticas tendrán oportunidades y opciones significativamente mejores para enfrentar su futuro. Las competencias matemáticas abren puertas hacia futuros productivos. La falta de competencias matemáticas mantiene esas puertas cerradas. (...) los estudiantes deben tener la oportunidad y la ayuda necesarias para aprender contenidos matemáticos que sean relevantes con profundidad y comprensión. (p.1)

- Para Niss (2002) dominar las matemáticas quiere decir poseer competencia matemática y entiende la competencia matemática como la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra-y-extra-matemáticas, en las que las matemáticas desempeñan o pueden desempeñar un papel. Requisitos previos necesarios, pero sin duda no suficientes, para la competencia matemática son muchos de los conocimientos conceptuales y habilidades técnicas, de la misma manera que el vocabulario, la ortografía y la gramática son requisitos previos necesarios pero no suficientes para la alfabetización.
- En el proyecto PISA, que más adelante se trata en profundidad, el dominio que se evalúa es la alfabetización o competencia matemática general, que se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (OCDE, 2005b, p. 23).
- La definición aportada por la LOE de competencia matemática, que aparece en las páginas 686 y 687 del R.D. 1631 (MEC, 2006b) desarrollada en 6 párrafos, es resumida por Rico y Lupiáñez (2008) en las siguientes ideas centrales:
 - La competencia matemática se muestra en la *habilidad para el uso de conceptos y procedimientos matemáticos diversos, con el fin de producir, interpretar, y expresar información en términos matemáticos, ampliar el conocimiento de la realidad, y abordar y resolver problemas.*
 - La competencia matemática *incluye conocimientos matemáticos básicos y procesos de razonamiento*, desde algoritmos de cálculo a elementos de lógica para establecer la validez de los razonamientos.
 - La competencia matemática supone la capacidad para *aplicar los conocimientos matemáticos a una variedad de situaciones y contextos.*
 - La competencia matemática incluye *actitudes positivas*, basadas en el rigor y la certeza que aportan los razonamientos bien hechos. (p. 187)

- Puig (2008) considera que:

En el ámbito más general, el del conjunto de las matemáticas, la competencia proporciona una descripción de la conducta del sujeto epistémico de las matemáticas, es decir, ha de explicar y predecir el conjunto potencialmente infinito de todas sus actuaciones. Pero también podemos hablar, y esto es lo más habitual en nuestros trabajos, de la competencia en un dominio más o menos concreto de las matemáticas —ya sea la resolución heurística de problemas, la resolución heurística de problemas de construcción con regla y compás, la resolución algebraica de problemas, la resolución (algebraica) de problemas en el entorno de la hoja de cálculo, o las estructuras conceptuales de razón, proporción y proporcionalidad, casos que trataremos someramente más adelante—, entonces el modelo de competencia ha de proporcionar una descripción de la conducta del sujeto ideal en ese dominio, y, por tanto, ha de explicar y predecir su conjunto de actuaciones posibles en ese dominio. (p. 93)

De las definiciones anteriores sobre competencia matemática destaco el que se basan en expectativas de aprendizaje³⁴, que pueden aplicarse a diferentes dominios o contextos, mediante el planteamiento y resolución de problemas en situaciones de la vida real. Es decir, expresan unas expectativas sobre el aprendizaje matemático de los estudiantes, relativas al conocimiento matemático en acción.

He adoptado como marco teórico para el estudio de la competencia matemática el proyecto PISA 2003 y 2006 (OCDE 2004, 2005b, 2006b). Las razones para adoptar dicho marco pueden resumirse diciendo que el proyecto PISA es un referente importante a nivel internacional, al tratarse de un proyecto diseñado por un grupo de reconocidos expertos, que al haberse llevado a la práctica en repetidas ocasiones, ha sufrido remodelaciones y refinamientos sucesivos, ofreciendo un marco teórico bastante consolidado. Además, el proyecto PISA se ha tomado como base para el diseño de las evaluaciones de diagnóstico y para la selección de las competencias matemáticas a evaluar mediante dichas pruebas, que la Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa de la Junta de Andalucía realiza anualmente en Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

³⁴ El término expectativas de aprendizaje denomina, de manera genérica, aquellas capacidades que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares, y por tanto son objeto de interés para esta investigación. La relación entre capacidades y competencias, se expone más detalladamente en el capítulo 6, cuando se aborda el procedimiento del Análisis Didáctico.

En los diferentes informes relacionados con el estudio PISA 2003, Rico (2007) destaca cuatro aproximaciones distintas a la noción de competencia matemática encontradas:

- Primero: Dominio que se evalúa, al que se denomina Alfabetización o Competencia Matemática de los estudiantes.
- Segundo: Marco teórico y componentes que establecen la evaluación del dominio: Contenido, Contexto y Competencias.
- Tercero: Variables y Niveles de complejidad en las tareas para el diseño de los instrumentos de evaluación de competencias.
- Cuarto: Estudio empírico: análisis y escalamiento en niveles de las competencias de los escolares. (p. 42)

Según analiza Puig (2008), estos cuatro significados sólo se encuentran en la versión castellana del informe PISA, dado que la versión inglesa emplea para el primer significado la palabra *proficiency*, para los significados segundo y tercero emplea el mismo término *competence* y usa el término *literacy* para el último de estos significados. A este respecto, Rico (2006) expone que “en los sucesivos documentos se produce un deslizamiento de términos, desde los primeros a los últimos informes, que comienzan por destacar la Alfabetización y concluyen con un mayor uso del término Competencia Matemática” (p. 282).

En el presente trabajo, ser competente en matemáticas tiene el significado de estar alfabetizado matemáticamente, por lo que se emplean ambos términos indistintamente.

Por Alfabetización Matemática, se entiende una adecuada formación matemática, que más detalladamente puede definirse como:

La capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (OCDE, 2006b, p. 74).

Las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (OCDE, 2005b, p. 23).

Continuando con el análisis de los estudios PISA, referente para el diseño de esta investigación de tesis, destaco y comparto su finalidad evaluativa de conocer cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido (OCDE, 2004).

Unida a esa finalidad evaluativa, está mi meta como docente: lograr que mis estudiantes alcancen un adecuado nivel de alfabetización matemática. Para ello, es preciso enfatizar no únicamente en la enseñanza de los contenidos, sino las situaciones en las que pueden aplicarse, poniendo de manifiesto su utilidad y el modo en que el alumnado moviliza sus conocimientos para resolver variadas situaciones. Éstas, de acuerdo con el proyecto PISA, deben ser lo más contextualizadas y atractivas posible, pues es una forma de acercar las matemáticas al mundo real. PISA no excluye el currículo basado en el conocimiento, pero lo valora en términos de la adquisición de conceptos y procedimientos amplios, que pueden aplicarse en una gran cantidad de situaciones.

Comparto con OCDE (2004) y Rico (2005a) que “la forma de enseñar matemáticas debe fundamentarse en la actividad de *matematización*. El matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes” (p. 15). La actividad matemática se concreta en la actividad de matematización, que se identifica en el proyecto con la *resolución de problemas* y se compone de las siguientes fases:

❶ Traducir los problemas desde el mundo real al matemático, conocida esta fase como **matematización horizontal**.

❷ Una vez traducido el problema a una expresión matemática, el estudiante puede plantear cuestiones en las que utiliza conceptos y procedimientos matemáticos, lo que se llama **matematización vertical**.

❸ La fase posterior implica reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados, interpretando los resultados con actitud crítica y validando el proceso completo, denominada **fase de validación y reflexión**.

En esta misma línea, los responsables del estudio (OCDE, 2003; 2004) caracterizan mediante cinco fases la actividad de hacer matemáticas:

1. Comenzar con un problema situado en la realidad.
2. Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.

3. Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
4. Resolver el problema.
5. Proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

La secuencia de estas fases caracteriza en sentido amplio, la metodología de enseñanza de las matemáticas; es así como los matemáticos hacen matemáticas y las personas emplean las matemáticas en variedad de profesiones y trabajos (Pajares, Sanz y Rico, 2004).

La OCDE (2004) destaca que “un individuo que deba participar con éxito en la matematización en una gran variedad de situaciones, contextos intra y extramatemáticos e ideas principales, necesita poseer un número suficiente de competencias matemáticas que, juntas, puedan ser consideradas como una competencia matemática comprensiva. Cada una de estas competencias puede dominarse a diferentes niveles” (p. 40). Para evaluar estas competencias, el Proyecto OCDE/PISA decidió utilizar, partiendo de la propuesta de Niss (2002) las ocho competencias matemáticas características. Rico y Lupiáñez hacen un balance del tratamiento que se da a la competencia matemática en los documentos curriculares españoles, encontrando una serie de competencias transversales, vinculadas significativamente con la competencia básica matemática, “que son prácticamente coincidentes con las ocho competencias del estudio PISA” (p. 239). En la tabla 4-1 se incluyen las competencias matemáticas consideradas en éstos y otros estudios:

Tabla 4-1. Competencias Matemáticas

<i>ESTUDIOS</i>	<i>COMPETENCIAS MATEMÁTICAS</i>
Proyecto Danish-KOM (Niss, 2002)	<ol style="list-style-type: none">1. Pensar matemáticamente2. Plantear y resolver problemas matemáticos3. Modelar matemáticamente (analizar y construir modelos)4. Razonar matemáticamente5. Representar entidades matemáticas (objetos y situaciones)6. Manejar símbolos matemáticos y formalismos7. Comunicar en, con y sobre matemáticas8. Hacer uso de recursos y herramientas (TI³⁵ incluidas)

³⁵ Tecnologías de la Información

<p>Estudios PISA (OCDE, 2004, 2005b, 2006b)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pensar y razonar 2. Argumentar 3. Comunicar 4. Modelar 5. Plantear y resolver problemas 6. Representar 7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones 8. Emplear soportes y herramientas tecnológicos
<p>Pruebas de Evaluación de Diagnóstico (Junta de Andalucía, 2006)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Organizar, comprender e interpretar información 2. Expresar 3. Plantear y resolver problemas
<p>Estándares del NCTM (NCTM, 2003)</p>	<p>Establecen los siguientes estándares de proceso:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Resolución de problemas 2. Razonamiento y demostración 3. Comunicación 4. Conexiones 5. Representación
<p>Sekerák y Sveda (2008)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pensamiento y reflexión matemática 2. Términos, hechos, afirmaciones y procedimientos matemáticos 3. Uso de términos simbólicos, formales y técnicos, relaciones y operaciones 4. Calcular, describir y representar objetos y situaciones matemáticas 5. Plantear preguntas, determinar problemas y su solución 6. Modelar matemáticamente 7. Argumentación matemática, demostración 8. Uso de herramientas 9. Comunicación 10. Competencias en el manejo de la información 11. Competencia relacionada con las actitudes y los sistemas de valores 12. Competencias personal e interpersonal

Se observa en todas las clasificaciones anteriores elementos o competencias comunes como son la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la representación o la argumentación, hecho que subraya su importancia en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. He adoptado para esta investigación, igual que ya lo hiciera para mi estudio

previo (García y Romero, 2007), siete de las ocho competencias matemáticas seleccionadas para los estudios PISA³⁶ que incluyen las destacadas en líneas anteriores. La elección de las competencias matemáticas realizada por PISA abarca todas las competencias matemáticas que parecen indiscutibles en todas las clasificaciones presentadas en la Tabla 4-1, siendo ésta una razón más para adoptar este marco. Estas siete competencias, que se exponen en el apartado siguiente, se han adaptado a los objetivos de esta investigación, es decir, se han matizado convenientemente a la luz de las demás referencias.

4.3. ELECCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Todo lo expuesto con anterioridad en este capítulo justifica la elección y caracterización de las siguientes competencias matemáticas, objeto de evaluación en esta investigación y que básicamente coinciden con la formulación de las competencias PISA, con algunos cambios y matizaciones:

- ▶ **Pensar y Razonar**: Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas ... hay?”, “¿Cómo encontrar ...?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.
- ▶ **Argumentar-Demostrar**³⁷: Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos-demostraciones matemáticos.

³⁶ La competencia “Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones” comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. Se ha descartado para este estudio por considerar que parte de la información recogida en esta competencia queda englobada en la competencia Representar, con la que está estrechamente relacionada (Rico y Lupiáñez, 2008) y además por las propias peculiaridades del trabajo (estudio de contenidos geométricos sobre Teselaciones del Plano) que no propician el manejo de fórmulas y ecuaciones.

³⁷ Coincido con Rico y Lupiáñez (2008) en que, aunque en los documentos originales de PISA, esta competencia se llama simplemente “argumentar”, dentro de las investigaciones en educación matemática, es frecuente y está documentado, que la argumentación es un tipo de validación que en su propia estructura se basa en el lenguaje con la intencionalidad de convencer (Duval, 1999). Sin embargo, en las matemáticas escolares tienen cabida otras formas de demostración o justificación que promueven diferentes actuaciones de los escolares, como la explicación o el descubrimiento, entre otros (de Villiers, 1999; Hanna, 2000). Por estas razones y las que expongo en las páginas 115-118, he decidido indagar acerca del modo en que los estudiantes argumentan y demuestran cuando resuelven problemas contextualizados en matemáticas.

- ▶ Comunicar: Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
- ▶ Modelar: Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
- ▶ Plantear y Resolver problemas: Capacidad de plantear, formular y definir distintos tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.
- ▶ Representar: Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
- ▶ Uso de Herramientas y Recursos Tecnológicos: Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TIC) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Hasta ahora he expuesto lo que entiendo por ser competente en matemáticas y las competencias específicas que considero que los alumnos deben desarrollar para llegar a serlo. Estas competencias matemáticas son independientes del bloque de contenidos que se trabaje en cada momento en el aula, dado que es evidente que al estudiar cualquier contenido matemático las competencias se van desarrollando de manera paulatina. Para este estudio se han seleccionado contenidos geométricos para ser trabajados con Geogebra. Por ello, más adelante, caracterizo en qué medida y de qué forma el trabajo en geometría contribuye al desarrollo de las siete competencias matemáticas objeto de estudio.

Al diseñar tareas o problemas para evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes, resulta factible clasificar éstas por el contenido que tratan y por el contexto al que se refieren, pudiendo considerar ambos como variables de tarea. Sin embargo, las competencias matemáticas son variables de sujeto y no es posible establecer a priori a cuál de los procesos

elegidos corresponde asignar una tarea determinada. Por lo general, es posible vincular una tarea con diversos procesos, puesto que los estudiantes pueden resolverla de distintos modos. En este sentido, PISA describe tres grupos de competencias (competency clusters) a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos, que son independientes del área de contenido estudiado (cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones e incertidumbre). Rico y Lupiáñez (2008) aluden a estos grupos de competencia como niveles o tipo de complejidad en las tareas propuestas respecto de las competencias generales requeridas, siendo ésta la terminología que se adopta en este trabajo por considerarla más clarificadora. Los niveles de complejidad considerados para las tareas son:

<p style="text-align: center;"><u>Primer Nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios</u></p> <p>Los estudiantes pueden resolver cuestiones que impliquen contextos simples o familiares donde toda la información relevante está claramente definida. Pueden hacer una interpretación bastante limitada de la situación y hacer uso de un único modo de representación. Son capaces de hacer aplicaciones directas de conocimientos matemáticos ya estudiados así como interpretaciones literales de los resultados.</p>
<p style="text-align: center;"><u>Segundo Nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar</u></p> <p>Los estudiantes pueden trabajar con efectividad situaciones relativamente desconocidas. Pueden interpretar y seleccionar e integrar diferentes representaciones, uniéndolas directamente a situaciones de la vida real; aplicar estrategias simples para la resolución de problemas; usar cadenas de razonamientos o secuencias de cálculos así como expresar brevemente sus interpretaciones, resultados y razonamientos.</p>
<p style="text-align: center;"><u>Tercer Nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales</u></p> <p>Los estudiantes pueden trabajar con situaciones desconocidas que requieren reflexión y creatividad. Pueden seleccionar, comparar, evaluar estrategias apropiadas para la resolución del problema así como diseñar nuevas y útiles estrategias; poseen alto nivel de interpretación; son capaces de unir diferentes clases de informaciones y representaciones y moverse flexiblemente entre ellas. Además, comunican sus acciones y reflexiones según sus propios hallazgos, interpretaciones y argumentaciones.</p>

Figura 4-1. Niveles de Complejidad de las Tareas

De este modo, se incluye una nueva variable, útil para caracterizar las tareas mediante las cuales se evalúan las competencias, que ha mostrado su adecuación para analizar el modo en que cada una de las competencias son requeridas como respuesta a los distintos tipos y niveles de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos. Cada nivel de complejidad se caracteriza por los procesos empleados y por el grado de complejidad con que los estudiantes los ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente. Así, es posible entender cada nivel de competencia matemática en relación con la maestría con que el alumno lleva a cabo las tareas matemáticas propuestas, es decir, muestra su competencia matemática (OCDE, 2004).

4.3.1. Caracterización de las Competencias Matemáticas desde el Punto de Vista Geométrico

Atendiendo a los tres niveles de complejidad anteriormente expuestos en la figura 4-1, se pueden concretar los indicadores de aprendizaje para cada una de las competencias matemáticas. Expongo a continuación los indicadores que he considerado para cada competencia, coincidentes en gran medida con los utilizados por PISA (OCDE, 2004, pp. 42-47), centrados en el campo geométrico³⁸:

Pensar y Razonar

Los currículos tradicionales de educación primaria y secundaria se centran en que los estudiantes aprendan una lista de definiciones y propiedades de las figuras. En lugar de memorizar propiedades y definiciones, los estudiantes deberían desarrollar personalmente conceptos geométricos significativos y formas de razonar que les permitan analizar cuidadosamente problemas y situaciones espaciales (Battista, 2001). Comparto esta opinión y creo que el estudio de la geometría debería enfocarse desde esa perspectiva. Además, Olkunn, Sinoplu y Deryakulu (2005) sugieren que el uso de programas de geometría dinámica apoya y alienta a los estudiantes a desarrollar y comprender los sistemas de conceptos basados en propiedades usados en geometría para analizar formas y a alcanzar más altos niveles de pensamiento geométrico, en lugar de memorizar una lista de propiedades de las figuras. Por ello, considero pertinente el uso de software de Geometría dinámica (SGD) para fomentar el desarrollo de esta competencia.

³⁸ Al adaptar o caracterizar los indicadores de las competencias matemáticas al ámbito geométrico, se observa que algunas de ellas están más detalladas que otras. Ello es debido a que la Geometría las enfatiza especialmente y contribuye en mayor medida a su desarrollo.

Los indicadores de la Competencia Pensar y Razonar que se han empleado son los siguientes:

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Reconocer figuras y cuerpos geométricos, sus características y propiedades esenciales. Formular las preguntas más simples («¿cuántos...?», «¿cuánto es...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Describir objetos geométricos y clasificarlos según sus propiedades. Formular preguntas («¿cómo hallamos...?», «¿qué tratamiento matemático damos...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Describir objetos geométricos, clasificarlos según sus propiedades y establecer relaciones entre ellos. Comprender los sistemas de conceptos basados en propiedades que se usan en geometría para analizar formas. Formular preguntas («¿cómo hallamos...?», «¿qué tratamiento matemático damos...?», «¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.

Argumentar-Demostrar

En las últimas décadas ha ido cobrando relevancia el debate sobre la diferencia entre argumentación y demostración matemática, así Duval (1989,1999) sostiene una clara distinción entre ambos términos. Argumentación puede ser considerada como un proceso en el cual el discurso es desarrollado con el objetivo específico de hacer cambiar al interlocutor el epistémico valor dado a una particular afirmación. En resumen, la argumentación consiste

en qué medios retóricos son empleados para convencer a alguien de la verdad o falsedad de una particular afirmación. Por el contrario, demostración consiste en una secuencia lógica de implicaciones que derivan en la validez teórica de una afirmación. Mariotti (2006) señala que numerosos estudios, que no deniegan esta diferencia, han intentado clarificar la relación entre ambos procesos o competencias basándose en la idea de una posible continuidad entre ambos más que en una ruptura, encontrando que “cuando la fase de producir una conjetura ha mostrado una rica producción de argumentos con objeto de apoyar o rechazar una afirmación, fue posible reconocer una continuidad esencial entre estos argumentos y la demostración final” (p. 183). Comparto esa opinión de continuidad entre argumentación inicial y demostración final, y por eso, se estudian ambos procesos o competencias, comprobando la calidad de las argumentaciones y demostraciones de los estudiantes.

Diversos investigadores han observado las formas de resolver problemas de demostración de estudiantes de diferentes niveles educativos y han llegado a elaborar algunas clasificaciones, siendo las más fructíferas y de uso más frecuente en la actualidad, las definidas en Balacheff (1988a,b) y en Harel y Sowder (1998). Posteriormente, otras investigaciones realizadas en España han analizado la aplicabilidad de dichas clasificaciones y han elaborado otras clasificaciones que profundizan las anteriores (Ibáñez, 2001; Marrades y Gutiérrez, 2000; Martínez, 1999; Martínez y Díaz, 2001). Gutiérrez (2005) define una nueva clasificación de las demostraciones que contiene y desarrolla las anteriores, y que es la que he adoptado como marco para esta investigación:

- Demostraciones empíricas:

Experimento naïf: Los estudiantes seleccionan varios ejemplos sin ningún criterio específico. En unas ocasiones, la verificación de la propiedad se hace táctil o visualmente (tipo “perceptivo”) y en otras se hace observando propiedades o elementos matemáticos del ejemplo (tipo “inductivo”).

Experimento crucial: Los estudiantes son conscientes de la necesidad de generalización y la resuelven mediante la selección cuidadosa de un ejemplo “lo menos particular posible”, convencidos de que si el resultado es válido en este ejemplo, lo es siempre si bien éste no deja de tener carácter específico. Los experimentos cruciales pueden ser “ejemplificación”, cuando la demostración consiste sólo en mostrar la existencia del ejemplo crucial, “constructivo”, cuando la demostración incide en la forma de obtención del ejemplo, “analítico”, cuando la demostración se basa en propiedades

matemáticas observadas empíricamente, e “intelectual”, cuando la demostración intenta separarse de las observaciones empíricas y se basa en propiedades matemáticas aceptadas y relaciones deductivas entre elementos del ejemplo.

Ejemplo genérico: Los estudiantes, conscientes de la necesidad de generalización, seleccionan un ejemplo al que dan el carácter de representante de su clase. La demostración está formada por razonamientos abstractos referidos a propiedades y elementos generales de la clase pero obtenidos a partir de operaciones o transformaciones hechas con el ejemplo. En los ejemplos genéricos se distinguen los mismos tipos que en los experimentos cruciales (ejemplificación, constructivo, analítico e intelectual), si bien en este caso las demostraciones no se limitan a reflejar la actividad empírica, sino que la transforman en referencias a propiedades abstractas de la clase del ejemplo y a razonamientos deductivos que las ligan.

▪ **Demostraciones deductivas:**

Experimento mental: La demostración aún siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de un ejemplo, lo cual se nota a veces en que la demostración tiene un desarrollo temporal. Se distinguen dos tipos de experimentos mentales, los “transformativos”, cuando la demostración se basa en una transformación del enunciado o conjetura inicial en otro equivalente, y los “axiomáticos”, cuando la demostración es una cadena de implicaciones lógicas basadas en definiciones, axiomas o propiedades aceptadas. El ejemplo ayuda, respectivamente a prever las transformaciones más convenientes y a organizar la cadena de implicaciones.

Demostración Formal: Es el tipo de demostración formada por cadenas de deducciones lógicas formales y sin soporte de ejemplos, usual en los matemáticos de los trabajos profesionales. También ahora es posible encontrar los dos tipos anteriores de demostración (transformativo y estructural), con la diferencia de que en las demostraciones formales no se usa ningún ejemplo como ayuda. (p. 90)

Es una opinión muy extendida que los entornos de geometría dinámica han abierto nuevas fronteras, uniendo argumentación informal con demostración formal (Hoyles y Healy, 1999; Olivero y Robutti, 2001) y que fomentan exploración y demostración porque facilitan el planteamiento y comprobación de las conjeturas (Hanna, 2000). Por todo lo anterior, creo que el uso de Geogebra para el estudio de la geometría es especialmente adecuado para fomentar la argumentación y demostración de los estudiantes.

Los indicadores de la Competencia Argumentar-Demostrar, se han extraído de los niveles considerados por PISA para la argumentación y de los niveles anteriormente expuestos de demostración de Gutiérrez (2005):

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados. Clasificar objetos geométricos por sus atributos. Realizar demostraciones empíricas, del tipo empirismo naïf, es decir, la verificación de la propiedad geométrica se hace visualmente u observando propiedades o elementos matemáticos del ejemplo.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., «¿qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?»). Clasificar objetos geométricos por sus atributos y presentar argumentos informales utilizando diferentes representaciones de los mismos. Demostrar empíricamente propiedades y relaciones geométricas mediante un ejemplo crucial o llegando un poco más lejos con un ejemplo genérico.

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; emplear la heurística (p. ej., «qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?», «¿cuáles son las propiedades esenciales?», «¿cómo están relacionados los diferentes objetos?»). A partir de varios ejemplos, extraer reglas y generalizaciones y completar argumentos deductivos. Determinar inconsistencias en argumentos dados y reconocer congruencias, diferencias y semejanzas a través del contraste de características o propiedades de los objetos geométricos. Demostrar deductivamente: tipo experimento mental, para lo que las construcciones geométricas construidas como ejemplo ayudan, respectivamente a prever las transformaciones más convenientes y a organizar la cadena de implicaciones.

Comunicar

La importancia del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas, así como la capacidad de comunicarse matemáticamente, es un tema de especial relevancia, objeto de numerosas

investigaciones (Duval, 2001; Godino, 2001; Nesher, 2000; Niss, 1999). Durante los últimos años, se ha acentuado la importancia no sólo del discurso escrito, sino la necesidad de un análisis de discurso oral para comprender cómo se produce el aprendizaje. De ella han derivado estudios que analizan la importancia y los efectos del tipo de discurso empleado por el profesor en el aprendizaje significativo de los estudiantes.

A la hora de analizar la forma de comunicarse de los estudiantes oralmente, se consideran dos acciones siguiendo a Nesher: *hablar matemáticamente* y *hablar de matemáticas*. Con el término *hablar matemáticamente* se refiere a usar el lenguaje matemático aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis. Con la expresión *hablar de matemáticas*, se hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas. Creo que esta modalidad comunicativa, favorece el desarrollo de la competencia Comunicar dado que propicia la interacción, el intercambio y la reflexión.

Los indicadores de la competencia Comunicar que se han empleado son los siguientes:

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos geométricos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera: hablar matemáticamente y hablar de matemáticas a un nivel básico, con ciertas limitaciones.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos geométricos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos. Hablar matemáticamente y hablar de matemáticas adecuadamente, aunque sin excesivo rigor.

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos geométricos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos. Hablar matemáticamente y hablar

de matemáticas con gran precisión y rigor: interpretar información geométrica presentada en diferentes formatos, denominar, definir y comunicar información geométrica en forma clara y ordenada, utilizando el lenguaje natural y el simbólico apropiado.

Modelar

Ortiz, Rico y Castro (2007) describen el proceso de modelización en dos fases. La primera de ellas, la *modelización horizontal*, consiste en traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Se seleccionan los datos relevantes del problema para después establecer qué estructuras y subestructuras matemáticas permiten dar respuesta, estudiando esos datos, a la cuestión planteada inicialmente. La segunda fase es la de la *modelación vertical* en la que el estudiante puede plantear cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticos y resuelve el problema dentro de la matemática con todas las herramientas que ésta nos brinda. El paso posterior consiste en reflexionar sobre el proceso completo de modelización y sus resultados, debiendo interpretar éstos con actitud crítica e interpretando la solución matemática en términos del problema original, validando así el proceso completo. El proceso de modelado, se asemeja bastante al descrito como matematización por la OCDE (p. 108), que a su vez está íntimamente relacionado con la Resolución de Problemas.

Una descripción general de la modelización matemática es la aportada por Pollak (1997). Este autor considera que cada aplicación de la matemática usa la matemática para evaluar o entender o predecir algo que pertenece al mundo no matemático y que la modelización se caracteriza por ir desde el problema fuera del mundo matemático a su formulación matemática, conllevando al final del proceso una reconciliación explícita entre las matemáticas y la situación del mundo real. A través del proceso de modelización se presta atención al mundo externo y al matemático y los resultados han de ser matemáticamente correctos y razonables en el contexto del mundo real.

Los indicadores de esta competencia, extraídos de PISA, son los siguientes:

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados relacionados con determinados conceptos geométricos y ser capaces de efectuar una reproducción a partir de modelos propuestos; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Estructurar la situación geométrica de la que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras geométricas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo.

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Estructurar la situación geométrica de la que hay que realizar el modelo, traducir la realidad a estructuras geométricas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la «realidad», incluyendo aquí aspectos de la comunicación de los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante. Efectuar reproducciones de modelos geométricos propuestos, basadas en propiedades y relaciones geométricas. Conlleva también reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.

Plantear y Resolver Problemas

La resolución de problemas constituye un eje vertebrador del currículo de matemáticas. Creo que el resto de las competencias matemáticas contribuyen a ser competente resolviendo problemas. PISA añade a esta competencia las capacidades de los estudiantes para enunciar y plantear problemas en diferentes situaciones y con diferentes criterios.

Autores como Dewey, Polya, Schoenfeld han indagado acerca de las distintas fases de resolución de problemas experimentadas por los estudiantes, y en todas sus aportaciones subyace la misma secuencia: análisis, planificación, implementación y evaluación. Creo que el uso de herramientas tecnológicas, en este caso Geogebra, puede ayudar al desarrollo de esta competencia, principalmente a las fases de implementación y evaluación, por cumplir los principios que algunos investigadores (Underwood et al., 2005; Yerushalmy, 2005) señalan como necesarios para apoyar a los estudiantes cuando afrontan la resolución de problemas matemáticos, entre otros: posibilidad de testear ideas, recibir feedback o manipular objetos.

Según Cañadas (2007), una situación se considera problema, cuando un individuo o resolutor no conoce a priori algoritmos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. Asimismo, Puig (1996) considera que la resolución del problema es todo aquello que conduce desde el planteamiento a la solución. Desde estos supuestos, he considerado los

siguientes indicadores de la competencia Plantear y Resolver Problemas, que se han empleado para evaluar a los estudiantes, extraídos de PISA:

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Utilizar la geometría, para explicar fenómenos, hechos o conceptos y resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas. Exponer y formular problemas geométricos reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Utilizar la geometría, para explicar fenómenos, hechos o conceptos y resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas. Plantear y formular problemas geométricos más allá de la reproducción de los problemas ya practicados; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Utilizar la geometría, para explicar fenómenos, hechos o conceptos y resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas. Exponer y formular problemas geométricos mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones y valorar la pertinencia de diferentes vías para resolver los problemas planteados.

Representar

Lupiáñez (2000) entiende por representaciones matemáticas, “notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos de una disciplina así como sus características y propiedades más relevantes” (p.40). Según este autor, las tradicionales representaciones analíticas se han visto ampliamente complementadas y enriquecidas con estas tecnologías, y desaparece el carácter estático que por lo general presentaban. Haciendo referencia a las representaciones que suministra la calculadora, incluye el término *representaciones ejecutables* (Lupiáñez y

Moreno, 2001), definiéndolas como portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia de quién sea el usuario. Dentro del entorno de geometría dinámica, considero que cobran especial relevancia las representaciones ejecutables, pues se convierten en manipulables, es decir, permiten actuar directamente sobre ellas haciendo posible la visualización de ciertas propiedades de objetos matemáticos, siendo ésta una clara ventaja con respecto a las representaciones estáticas.

Otro aspecto importante a considerar es la capacidad de conversión de distintas representaciones de la misma situación u objeto matemático, que Duval (2002) considera un proceso fundamental para la comprensión de la situación particular. También el NCTM subraya la importancia del uso de múltiples representaciones en el aprendizaje de las matemáticas. Investigaciones como las de Mousoulides y Gagatsis (2004) y Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis (2007) ponen de manifiesto las dificultades que los estudiantes presentan cuando resuelven problemas que requieren establecer conexiones y relaciones entre distintas representaciones de un objeto o situación. En este sentido, el trabajo con SGD resulta de gran ayuda, al proporcionar distintas representaciones de un mismo objeto y permitir representar gran cantidad de manipulaciones físicas cuya elaboración, de manera manual, consumiría mucho tiempo, contribuyendo así a agilizar la exploración, comparación, manipulación y comprobación de conjeturas durante la resolución de problemas.

Los indicadores de la competencia Representar que se han empleado son los siguientes:

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Realizar una construcción geométrica sobre una base de datos dados de manera oral, escrita o gráfica. Representar lo mental a través de formas visuales externas (objetos, figuras y construcciones geométricas). Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos geométricos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado (percibir visualmente ejemplos e identificar figuras y propiedades geométricas, interactuando con las representaciones (manipulables o ejecutables) de estos objetos, empleando las herramientas del software). El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Realizar una construcción geométrica sobre una base de datos dados de manera oral, escrita o gráfica. Representar lo mental a través de formas visuales externas (objetos, figuras y construcciones geométricas) y ser capaz de representar en la mente objetos visuales reales o no (representaciones internas).

Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos geométricos (identificar figuras, propiedades y relaciones geométricas, interactuando con las representaciones (manipulables o ejecutables) de estos objetos, empleando las herramientas del software)); seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Realizar una construcción geométrica sobre una base de datos dados de manera oral, escrita o gráfica. Representar lo mental a través de formas visuales externas (objetos, figuras y construcciones geométricas) y ser capaz de representar en la mente objetos visuales reales o no (representaciones internas). Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos geométricos (identificar figuras, propiedades y relaciones geométricas, interactuando con las representaciones (manipulables o ejecutables) de estos objetos, empleando las herramientas del software, reproducir modelos geométricos basándose en propiedades y relaciones geométricas); seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.

Uso de herramientas Tecnológicas y Recursos

Es importante desarrollar en los estudiantes la capacidad para manejar diversos recursos y herramientas tecnológicas para garantizar una adecuada alfabetización matemática y, a la vez, tecnológica. Se deben adaptar los recursos existentes a los escolares, ya que de nada sirve usar una potente herramienta para resolver problemas geométricos, si ésta no ayuda al desarrollo de su competencia matemática. Ya se justificó anteriormente la elección de Geogebra para trabajar con los alumnos en el aula; sólo quiero añadir que su facilidad de manejo fue uno de los factores determinantes para la toma de esta decisión. Mi intención no era la de emplear tiempo en adiestrar a los estudiantes en el uso del software, sino hacer una breve presentación del manejo del programa y de las distintas posibilidades que ofrece y permitir a los estudiantes indagar por sí mismos la mejor forma de sacarle partido, es decir, fomentar la exploración libre de las distintas herramientas del software.

Los indicadores de la competencia Uso de Herramientas Tecnológicas y Recursos que se han empleado son los siguientes:

Nivel 1 o Grupo de Reproducción: Conocer y ser capaz de emplear las distintas herramientas de los software de Geometría Dinámica en contextos, situaciones y procedimientos similares a los ya conocidos y practicados a lo largo del aprendizaje, demostrando ser capaz de realizar construcciones dinámicas sencillas.

Nivel 2 o Grupo de Conexión: Conocer y ser capaz de emplear las distintas herramientas de los software de Geometría Dinámica en contextos, situaciones y maneras diferentes a las introducidas y practicadas a lo largo del aprendizaje. Mostrar conocimiento de las operaciones necesarias para activar cada función o utilidad del software, y ser capaz de realizar construcciones dinámicas basadas en propiedades geométricas, que guíen o ayuden en la resolución de los problemas planteados.

Nivel 3 o Grupo de Reflexión: Conocer y ser capaz de emplear las distintas herramientas de los software de Geometría Dinámica en contextos, situaciones y formas bastante diferentes a las ya introducidas y practicadas. Demostrar conocimiento de las operaciones necesarias para activar cada función o utilidad del software, y ser capaz de realizar construcciones dinámicas basadas en propiedades geométricas. Demostrar un buen aprovechamiento de la tecnología al aplicar sus utilidades, entre ellas el “dragging” o “arrastre”, para argumentar-demostrar los hallazgos encontrados y resolver las tareas planteadas) y al mismo tiempo ser capaz de reconocer sus limitaciones.

A lo largo de este capítulo he presentado mi visión del aprendizaje matemático basado en competencias, que justifica la decisión de caracterizar la evolución del aprendizaje de los estudiantes en estos términos. He comenzado exponiendo qué entiendo por ser competente en matemáticas, así como las competencias específicas que deben adquirirse para ello. Después, he presentado la caracterización de tales competencias matemáticas, tomando como base otras caracterizaciones (fundamentalmente la propuesta por el proyecto PISA) y adaptándolas al campo de la Geometría. Finalmente, he incluido sus indicadores (en términos geométricos), según la complejidad de las tareas para cuya resolución es necesario movilizarlas. Esta caracterización ha servido de base para el diseño de las tareas propuestas a los escolares (análisis didáctico) y de algunos de los instrumentos de recogida de datos (parrillas de observación de competencias). Asimismo, caracterizar los distintos niveles de competencia que pueden alcanzarse en función de la complejidad de la tarea realizada, proporciona un marco útil para la evaluación del aprendizaje basado en competencias, en mi caso para evaluar el aprendizaje de contenidos geométricos de los estudiantes. La

caracterización aportada en este capítulo ha resultado de gran interés para este trabajo y espero que pueda resultar útil para quienes deseen utilizarla directamente con sus estudiantes para llevar a cabo dicha evaluación o para quienes, tomándola como base o referente, obtengan su propia caracterización de éstos u otros contenidos matemáticos.



BLOQUE II:

Metodología y Desarrollo de la experiencia



Knowledge is of two kinds: we know a subject ourselves, or we know where we can find information upon it. (Samuel Johnson)

En este bloque se expone y caracteriza el paradigma metodológico en el que se sitúa el presente trabajo. A continuación, se presenta el diseño, puesta en práctica y evaluación de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, basada en el uso de Geogebra, que permite dar respuesta al primer objetivo de esta investigación.

En el capítulo 5 se justifica la elección del paradigma de Investigación-Acción adoptado y se exponen sus características. En el resto del bloque, y siguiendo la naturaleza cíclica de dicho paradigma, se presenta el desarrollo del ciclo 2, correspondiente a la tercera experimentación³⁹, que constituye el objeto central de esta investigación de tesis, estructurado en las habituales cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión.

En el capítulo 6 se atiende a la fase de Planificación del estudio, mostrando cómo se diseñaron la secuencia de enseñanza-aprendizaje y los instrumentos que se utilizarían para la recogida de datos durante las fases de Acción y Observación.

En el capítulo 7 se abordan las fases de Acción y Observación. Se empieza describiendo el contexto de la presente investigación, después se expone cómo transcurrió la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, incluyendo un análisis de dicha secuencia con fines evaluativos. Este proceso permite dar respuesta al objetivo 1 de este trabajo. Por último, se atiende al modo en que se llevó a cabo la Observación de aula, a partir de la cual se desarrolló la fase de Reflexión, correspondiente al siguiente bloque de esta memoria (Bloque III).

³⁹ Se considera como ciclo 0 de la presente investigación, el trabajo realizado para la obtención de la suficiencia investigadora (García y Romero, 2007), cuya fase de reflexión condujo al ciclo 1 (Anexo A), modificando aquellos aspectos susceptibles de mejora. A su vez, la fase de reflexión del ciclo 1, sentó las bases del ciclo 2.

CAPÍTULO 5

Marco metodológico

El propósito de este capítulo es exponer el paradigma en el que se sitúa este trabajo y mostrar los métodos específicos que se han utilizado para llevarlo a cabo. En primer lugar se justifica la elección del paradigma de investigación-acción, que se ha adoptado como marco general, y se caracteriza éste convenientemente. A continuación, se presenta el modelo de *experimentos de enseñanza transformativos y guiados por una conjetura*, metodología emergente que ha servido para guiar el diseño de investigación. Por último, se hace explícito el posicionamiento metodológico de esta investigación, atendiendo a las referencias anteriores.

5.1. PARADIGMA DE INVESTIGACION: LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

5.1.1. Justificación de Elección

Desde el comienzo de mi trayectoria investigadora, he partido de la base de que la investigación realizada por los profesores tiene un papel relevante, tanto para la generación de conocimiento a partir de entornos reales, como para el propio desarrollo profesional. Autores como McNiff (1998, 2002), Mason (1998, 2002), Atweth (2004) o Leikin y Zarkis (2010), entre otros, dan razones de distinto tipo para justificar su necesidad.

Por una parte, se argumenta que el gran incremento de la investigación en educación matemática durante los últimos cincuenta años en todo el mundo no ha tenido su correspondencia en la aplicación de dicho conocimiento. La brecha entre la teoría y la práctica en educación matemática sigue abierta en términos de tiempo (primero se genera el conocimiento y después se intenta aplicar), de personal implicado (investigadores académicos versus profesores en activo) y lenguaje utilizado (teórico versus aplicado). Debido a esta brecha, la efectividad del conocimiento proveniente de la investigación, así como de los numerosos movimientos de reforma diseñados para transformar la educación matemática “desde arriba”, dista de ser la que en principio se desearía, puesto que es la mejora de la realidad educativa el objetivo último que se persigue. Como han percibido algunos

investigadores universitarios (Doerr y Tinto, 2000), la perspectiva del profesor es un factor central para generar comprensión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de matemáticas. Esta perspectiva sale a la luz cuando los profesores se convierten en una parte activa del proceso de investigación, es decir, cuando se convierten ellos mismos en investigadores. Por otra parte, los profesores ganan en este tipo de experiencias, especialmente cuando colaboran con personal investigador universitario, una comprensión del potencial del conocimiento teórico de la investigación didáctica para ser aplicado a sus problemas en la práctica.

Asimismo, estoy de acuerdo con Brown (1992) en que el entorno de clase, con toda su riqueza, complejidad y variabilidad, funciona como un todo sistémico, y que es casi tan imposible cambiar un aspecto del sistema sin crear perturbaciones en otros como estudiar cualquier aspecto aislado de los demás. De ahí la relevancia de trabajar en entornos naturales, partiendo de los problemas que se generan en una realidad compleja, ideando soluciones y evaluando su idoneidad en esa misma realidad.

Por último, pero no menos importante, la investigación-acción potencia el “empoderamiento” de los profesores, desde el momento en que nos libera de la dependencia exclusiva de las agendas de los investigadores y nos permite implicarnos en nuestros propios proyectos. La autonomía que ello proporciona redundante en el entusiasmo que ponemos en el trabajo e incluso en su efectividad (Noddings, 1992; Brandon-Miller y Maguire, 2009) y, por ende, en la calidad de nuestro propio desarrollo profesional y personal. En este sentido, Marcelo (2001) considera que los procesos de enseñanza y aprendizaje no pueden desarrollarse sin considerar como un factor elemental el contexto en donde surgen y, además, las realidades sociales son construidas y elaboradas por cada individuo que forma parte de ella y en la medida en que estos individuos se sientan partícipes de su proceso de aprendizaje, se sentirán más comprometidos a generar y trabajar en su propio cambio. Bajo esta premisa, Labra, Montenegro, Iturra y Montealba (2005) afirman que el trabajo que se desarrolla al utilizar la investigación-acción busca articular y andamiar teoría y práctica, formación inicial y desarrollo profesional docente, mediante la construcción de cada uno de los roles que se encuentran presentes en esta instancia de aprendizaje. Esta perspectiva supone una revalorización del trabajo que realizan los profesores involucrados en el proceso de práctica.

5.1.2. Definición y Características

La investigación-acción es una investigación hecha por profesores, con el objetivo de mejorar su propia práctica. Diferentes tradiciones de investigación-acción han evolucionado en Estados Unidos, Latinoamérica, Reino Unido y Australia. Kemmis (1999) señala como, aparte de las diferencias entre ellas, las distintas escuelas comparten acuerdos amplios sobre la naturaleza de la investigación-acción y la manera de llevarla a cabo. Quizás, la característica mejor conocida de esta metodología de investigación sea el modelo de ciclos sucesivos con las siguientes características (Kemmis (1992); Elliot, en Hopkins, 1995; Kemmis y Wilkinson (1998)):

- Inicialmente se adopta una actitud exploratoria, donde se desarrolla la comprensión de un problema y se hacen los planes de algún tipo de estrategia de intervención (El reconocimiento y el *Plan General*).
- Luego la intervención se lleva a cabo (La *Acción* en la Investigación-Acción).
- Durante todo el tiempo de la intervención, se recogen las observaciones pertinentes de diversas formas (Seguimiento de la puesta en práctica mediante la *Observación*).
- Se rememora la acción, tal como ha quedado registrada a través de la observación, para hallar el sentido de los procesos, los problemas y las restricciones que se han manifestado en la acción estratégica (Mediante la *Reflexión*).
- Se llevan a cabo las nuevas estrategias de intervención, y se repite el proceso cíclico, continuando hasta alcanzar un conocimiento suficiente o ser capaz de poner en práctica la solución del problema (*Revisión*).

El protocolo es de naturaleza iterativa o cíclica y tiene por objeto fomentar una comprensión más profunda de una situación dada, a partir de la conceptualización y la particularización del problema y moviéndose a través de varias intervenciones y evaluaciones. La representación del protocolo de I-A según Kemmis (1992) se presenta en la Figura 5-1.

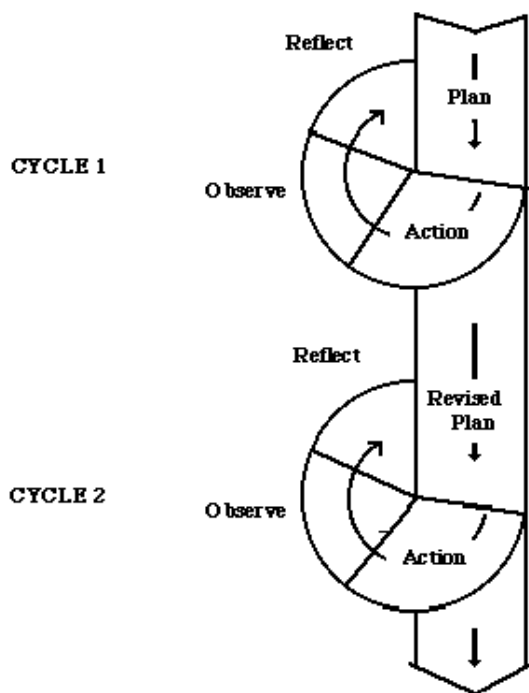


Figura 5-1. Protocolo de I-A

Además de la estructuración en ciclos sucesivos, la I-A tiene otras características importantes, que la distinguen de otros paradigmas (Latorre, 2004; Atweth, 2004). Así, la investigación-acción es *participativa*, por cuanto las personas sólo pueden hacer este tipo de investigación sobre sí mismas, individual o colectivamente; es decir, no es investigación hecha sobre “otros”.

La investigación-acción es, además, *colaborativa*. Es una investigación hecha “con otros” e implica la colaboración entre las personas implicadas y/o entre ellas y personal externo. Dentro de este último caso, existe una investigación colaborativa entre profesores de Primaria y Secundaria y profesores universitarios que puedan haber desarrollado experiencia en el proceso de investigación-acción y/o tengan un conocimiento más amplio sobre la investigación en el área problemática de interés (Rearick, 1998; Doerr y Tinto, 2000; Burnaford, Fischer y Dobson, 2001).

La investigación-acción es *emancipatoria*, puesto que proporciona a los profesores medios para trascender las limitaciones que la estructura social o el *status quo* impone sobre ellos. La búsqueda de soluciones a problemas identificados por ellos mismos da a los profesores un sentido de propiedad y autoría de estas soluciones y de los conocimientos que se generan en este tipo de investigaciones.

Otra característica de la investigación-acción es que es *crítica*, puesto que es un proceso en el que los implicados buscan deliberadamente cuestionar y reconstruir una realidad que les resulta ineficiente e insatisfactoria.

Este tipo de investigación es *dialéctica*. En efecto, ayuda a las personas a investigar su realidad para transformarla y a transformar de hecho esa realidad para volver a investigar sobre ella. Induce a teorizar sobre la práctica e implica someter a prueba las ideas y suposiciones, para volver a refinar los supuestos teóricos y volverlos a contrastar. Esta característica se refiere a la espiral de ciclos de acciones, reflexiones y nuevas acciones auto-críticas a la que se aludió en primer lugar. De este modo, la teoría y la práctica se relacionan de forma dinámica, a diferencia de otros paradigmas tradicionales en los que el conocimiento se obtiene primero y se aplica después.

Finalmente, la investigación-acción es *sistemática*. Se distingue de otras prácticas reflexivas en que hay un intento deliberado y planificado de resolver una problemática o problema particular. Para ello, pone en marcha una acción estratégica encaminada, tanto a mejorar la práctica, como a desarrollar planteamientos teóricos acerca de dicha práctica. En todo el proceso hay un compromiso con el rigor y la muestra de evidencias de lo que se postula.

Aparte de los planteamientos expuestos, la investigación-acción no da directrices en cuanto a los métodos de investigación. Si bien hay una tradición de empleo de métodos etnográficos y cualitativos, los métodos cuantitativos no están reñidos con este paradigma. Tampoco la investigación-acción proporciona directrices en cuanto al diseño específico de la experiencia. De este modo, existen diferentes variantes, atendiendo al propósito del estudio en cuestión, el papel de cada participante en dicho estudio, la recogida de información y los procesos de análisis, así como al modo de presentar los resultados (Doerr y Tinto, 2000).

Para acometer el diseño de esta investigación, atendiendo al compromiso de sistematicidad y rigor antes aludido, me he aproximado a un modelo de diseño que utiliza tanto la teoría como las condiciones de clases comunes para crear e investigar nuevas estrategias de enseñanza. Se trata de los *experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por una conjetura* (Confrey y Lachance, 2000; Molina, 2006). En el siguiente apartado paso a describirlos y a clarificar las características de dichos experimentos que he incorporado en este trabajo.

5.2. EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA DIRIGIDOS POR UNA CONJETURA

5.2.1. Caracterización

Los experimentos de enseñanza dirigidos por una conjetura se enmarcan dentro de la llamada *investigación de diseño*. La investigación de diseño o investigación basada en diseño actualmente está siendo aplicada y desarrollada activamente en el campo de la investigación educativa y se está mostrando muy útil para el campo de la Didáctica de la Matemática y de las Ciencias (Kelly, 2003).

Los estudios que pertenecen a la investigación de diseño son denominados indistintamente como investigaciones, estudios o experimentos de diseño o basados en diseño. Este tipo de metodología, de naturaleza principalmente cualitativa, ha sido desarrollada dentro de las ciencias del aprendizaje (Learning sciences), un campo multidisciplinar que estudia el aprendizaje y la enseñanza y abarca la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia, así como las didácticas específicas, entre otros campos (Confrey, 2006; Sawyer, 2006).

Los investigadores que adoptan esta metodología en el campo educativo están interesados en generar conocimiento que contribuya a mejorar la calidad de las prácticas instructivas en diferentes niveles, contextos y áreas disciplinarias. Uno de sus rasgos distintivos es el estudio de los problemas de aprendizaje en sus contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño de instrucción específico, con el propósito explícito de producir modificaciones que lleven a mejores aprendizajes. De acuerdo con Rinaudo y Donolo (2010), la investigación basada en diseño constituye una herramienta útil, no sólo para los investigadores interesados en estudiar los ambientes de aprendizaje mediados por las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, sino también para la formación de profesores.

Según De la Orden (2007), si consideramos que la historia de la investigación educativa presenta la búsqueda disciplinada de conocimiento como el intento continuado de construir un lenguaje profesional, los experimentos de diseño aparecen como un dialecto emergente que intenta apoyar argumentos construidos alrededor de los resultados de la intervención, la innovación activa en la escuela y otros contextos educativos. La gramática operativa de este

lenguaje, sería generativa y transformacional y está dirigida principalmente a comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que el propio investigador se halla implicado.

Dentro de la investigación de diseño, se sitúan los *experimentos de enseñanza transformativos y guiados por una conjetura* (Confrey y Lachance, 2000; Molina, 2006) como una metodología actual de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de otras ciencias. Entran dentro de un tipo de investigaciones generadoras y transformadoras, que pretenden sustentar argumentos elaborados en torno a resultados de innovación e intervención activa en el aula. El presupuesto ideológico de este tipo de experimentos es el de avanzar en el tipo de investigación que conlleva intentos activos de asegurar oportunidades iguales para todos los estudiantes de participar y tener éxito en matemáticas. Así, este tipo de experimentos se desarrollan en el aula. Están enfocados al trabajo en clases “normales”, no en clases donde se suponen las “mejores prácticas”, y proporcionan información sobre la complejidad involucrada en el desarrollo de conocimiento y capacidades por parte de los alumnos, ayudando a entender el papel del docente en conjunción con los materiales de aprendizaje puestos en juego (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003; DBRC, 2003).

Una parte crucial de este tipo de experimentos es la *conjetura* que los guía. Ésta se entiende como “una inferencia basada en pruebas incompletas y no concluyentes” que es revisada y elaborada a lo largo de la investigación (Confrey y Lachance, 2000). Según explican estos autores, la conjetura no está fijada de antemano desde el principio de la investigación, sino que evoluciona constantemente conforme la investigación progresa. A medida que el investigador-docente adquiere más experiencia, va pasando de formulaciones intuitivas a formulaciones cada vez más analíticas.

No existen hipótesis que haya que probar, sino que la conjetura es la guía de la investigación. Sin embargo, debido a que gran parte del diseño de la investigación se basa en la conjetura, es importante que se profundice en la comprensión y definición de ésta de forma previa al desarrollo del experimento. Para ello es necesario un análisis teórico previo que no involucra a los alumnos. La teoría en la que se sitúa la conjetura ha de relacionarla con otros aspectos de la educación y/o de las matemáticas. Dicha teoría sirve para estructurar las actividades y la metodología en el experimento de enseñanza, ayuda a conectar la dimensión pedagógica y la dimensión del contenido matemático de la conjetura, determina qué se cuenta como evidencia

e influye en la elaboración de categorías de observación y en la interpretación de los datos. Más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño de instrucción funciona. Además de este estudio teórico, pueden llevarse a cabo estudios preliminares relacionados con ciertos aspectos de la conjetura, si se considera necesario. De este modo, la fundamentación teórica y la experiencia se dan la mano para producir conocimiento que permita refinar la conjetura en sucesivos ciclos de investigación.

El paradigma de enseñanza-aprendizaje en el que se encuadran los experimentos de enseñanza es constructivista, completado desde una perspectiva sociocultural⁴⁰ (Molina, 2006).

5.2.2. Recogida de Datos y Análisis

En los experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por una conjetura deben usarse múltiples métodos para recoger datos. Es necesario articular modos de capturar el día a día de la clase. Normalmente, la toma de registros en vídeo y/o audio, junto con la toma de notas cuidadosas sobre la observación en clase sirven bien a este propósito. También pueden recogerse datos sobre individuos y sobre grupos, con objeto de ganar profundidad en la comprensión del desarrollo del aprendizaje de los estudiantes. Las fuentes pueden ser producciones elaboradas por ellos, preguntas, entrevistas, etc. La exhaustividad de la recogida de datos puede permitir analizar de forma retrospectiva el papel de ciertas variables que inicialmente no fueron consideradas pero, posteriormente, se erijan como relevantes para el fenómeno de estudio. Los investigadores recogerán muchos más datos de los que podrán analizar y emplear, siendo necesario, a posteriori, distinguir la información relevante de la irrelevante (Hjalmarson y Lesh, 2008).

En esta metodología son necesarios dos tipos de análisis de datos, los cuales tienen lugar en momentos diferentes. El primero de ellos, denominado análisis preliminar y continuo, se refiere al análisis de los datos después de cada intervención. Este análisis conduce a la toma

⁴⁰ Molina (2006) y Confrey (2006), quienes indagan acerca de los orígenes de los estudios de diseño, en los que se insertan los experimentos de enseñanza, afirman que éstos tienen sus raíces en los trabajos de Piaget, Vygotsky y Dewey. Estos autores argumentaron que la clave para caracterizar el aprendizaje surge del estudio de la formación del pensamiento de los alumnos. Piaget desarrolló la metodología del “método clínico”, la cual influyó de forma esencial en los estudios de diseño. Por su parte, Vygotsky ejerció una influencia notable en estos estudios enfatizando el papel del individuo en ambientes socioculturales. La evolución del método clínico a los experimentos de enseñanza se vio influenciada por los enfoques socio-culturales de la educación matemática y de las ciencias. Así, los experimentos de enseñanza fueron adaptándose, bajo la perspectiva constructivista.

de decisiones con respecto a futuras intervenciones, y facilita la revisión y el desarrollo de la conjetura de investigación. El otro análisis, denominado análisis final, es el análisis de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos. Este análisis conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de la evolución del comportamiento y/o pensamiento de los alumnos a lo largo de la intervención. En este análisis final, los métodos a utilizar dependerán de los métodos usados para recoger los datos y de la conjetura en sí misma. Si se utilizan métodos de corte cuantitativo, puede ser apropiado un análisis de tipo estadístico. Para analizar los datos cualitativos, serán necesarios procesos de organización de la información para detectar categorías, elementos y procesos emergentes. En esta etapa, se utilizan los datos en un intento de construir una historia coherente del desarrollo del aprendizaje y las ideas de los alumnos, así como de conectarlos a la conjetura.

5.2.3. Evaluación de la Investigación

Para diversos autores consultados (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001; Confrey, 2006; Molina, 2006), en el tipo de investigación que se ha descrito, no se persigue obtener leyes universales e inmutables, sino crear modelos de modos probables de andamiaje que conduzcan a resultados de aprendizaje exitosos, por medio de teorías, materiales y enfoques instruccionales y resultados progresivos, que permitan guiar la enseñanza relativa a contenidos específicos. De este modo, los estudios proporcionan a los docentes información útil para dar sentido a sus experiencias en la práctica. El hecho de que el diseño de las investigaciones esté regulado por una conjetura bien elaborada y explícitamente descrita, lo hace valioso y significativo para la investigación educativa. La dificultad radica en demostrar que realmente la conjetura guía el diseño de la práctica en el aula y el análisis de los datos.

Por contra, entre las limitaciones y desafíos que se reconocen, en general, a este enfoque, Collins, Joseph y Bielaczyc (2004) destacan las dificultades que emergen desde la complejidad de situaciones del mundo real y el manejo de la gran cantidad de datos que resultan de combinar análisis cuantitativos y etnográficos.

El carácter todavía emergente⁴¹ de esta metodología de investigación hace que no se puedan adoptar los estándares de calidad que se aplican en modelos de investigación más tradicionales. Los estándares de validez interna, validez externa, fiabilidad y objetividad, no parecen adecuados, según Confrey y Lachance (2000), para este tipo de diseño. Por este motivo, los autores proponen, como indicadores de calidad de la investigación, la calidad de los procesos internos y su impacto potencial en la práctica.

Asegurar la calidad de los procesos internos

Teniendo en cuenta que no es posible evaluar la calidad de todos los aspectos del proceso de investigación, Confrey y Lachance proponen como medidas para dicha evaluación el poder explicativo de la conjetura, la racionalidad de la reconstrucción de la historia del proceso de investigación y la fidelidad a la posición ideológica.

La calidad de la conjetura puede ser considerada como un asunto de validez aparente, juzgada por observadores externos. Al final del estudio, investigadores y docentes pueden evaluar la validez aparente de la conjetura elaborada, analizando su contenido, su relación con la literatura y su camino de evolución. Para ello, los investigadores responsables del estudio deberán aportar suficiente información sobre la conjetura, su contenido y evolución, así como sobre el marco teórico que la sustenta.

Por otra parte, la calidad del proceso puede ser juzgada evaluando la coherencia de la historia que describe la relación dialéctica entre la conjetura y los sucesos ocurridos en el aula. Para ello, es necesario aportar datos tanto preliminares como del análisis final.

La fidelidad del estudio a la posición ideológica puede ser juzgada a través de una audiencia externa que valore si los datos aportados de los alumnos son suficientemente auténticos y extensos para convencer al lector de las argumentaciones que se están realizando.

Asimismo, será importante asegurar que los datos son creíbles, fiables y que pueden confirmarse. Para ello, los investigadores necesitarán demostrar que se ha reconstruido de forma correcta lo que los alumnos estaban experimentando. También deben describir con detalle las decisiones metodológicas y analíticas tomadas y probar que los resultados

⁴¹ Los estudios realizados con este tipo de metodología han ido cobrando relevancia desde comienzos de la década de 2000, aunque el primer uso del término investigación de diseño en el campo educativo, se les ha adjudicado a Collins (1992) y Brown (1992).

proceden de los datos recogidos. Es esencial presentar argumentos convincentes que confirmen los resultados de la investigación.

Evaluar el impacto potencial

Un criterio destacado en la valoración de estos estudios es su utilidad para docentes e investigadores. Por ello, los resultados obtenidos deben dejar claro lo que implican para la enseñanza y para el aprendizaje. De ese modo, este tipo de investigaciones eliminan la desconexión existente entre la teoría y la práctica y, además, son de utilidad para promover el desarrollo de comunidades de profesionales de la enseñanza. El tipo de justificación aportada ofrece a los docentes la posibilidad de adaptar, comprobar y modificar las secuencias de enseñanza en sus aulas.

Así, la segunda parte del análisis de calidad de estos estudios se centra en evaluar el modo en que los resultados están conectados con un cambio alcanzable, es decir, evaluar el potencial de estos resultados de actuar como una catarsis para el cambio. Los criterios propuestos por Confrey y Lachance a este respecto son:

- Viabilidad*: Los productos de la investigación deben ser viables de poner en práctica y útiles en las aulas.
- Sostenibilidad*: Los productos de calidad deberán resistir y mantener sus impactos durante un periodo considerable de tiempo. Esto sólo podrá verificarse con el paso del tiempo, pero puede ser evaluado mediante comparación con otro tipo de productos.
- Naturaleza convincente*: Los resultados y productos de la investigación deben ser susceptibles de estimular la necesidad de cambio a los docentes o agentes educativos afectados.
- Adaptabilidad*: Los productos deben ser adaptables a multiplicidad de contextos.
- Capacidad generativa*: La conjetura debe aportar a los docentes, o agentes involucrados, un modo poderoso de volver a conceptualizar una variedad de sucesos, relaciones y prácticas.

Según Confrey y Lachance reconocen, estos criterios son demasiado ambiciosos para un sólo equipo de investigadores; no obstante, los autores exponen que, conforme la investigación y la práctica se encuentren más integradas, los investigadores desarrollarán su capacidad de evaluar estos criterios de forma previa a la puesta en práctica de los estudios.

5.3. POSICIONAMIENTO DE ESTA INVESTIGACIÓN

Como he mencionado en el apartado 5.1.1, el presente trabajo es una investigación-acción, puesto que parte de mi interés, como profesora de enseñanza secundaria, es transformar mi propia práctica. En mi caso, la realidad insatisfactoria de unas clases marcadas por falta de motivación del alumnado, sus deficiencias de rendimiento y el escaso uso de las tecnologías en un entorno destinado específicamente a este fin. Aunque la mejora de mi propia práctica se ha centrado en el mejoramiento de las actitudes y competencias de los estudiantes a través de las TIC, este proceso de investigación ha tenido repercusiones profesionales más amplias, afectando a numerosos aspectos de mi práctica docente. En el Anexo C informo de los efectos de esta investigación en mi desarrollo profesional docente.

Dentro de la componente colaborativa de la investigación-acción, se encuadran las experiencias de colaboración de profesores de primaria y secundaria con profesores universitarios, que han desarrollado experiencia en el proceso de investigación-acción (Romero, 1997; Fuentes, 2001) y tienen un conocimiento más amplio sobre la investigación en el área problemática de interés (Rearick, 1998).

Respondiendo a la naturaleza cíclica de este paradigma, el diseño de la investigación ha constado de tres ciclos: el ciclo 0, correspondiente al trabajo de Tercer Ciclo para la obtención de la suficiencia investigadora (García y Romero, 2007), el ciclo 1 o experiencia piloto que se encuentra en el Anexo A y el ciclo 2 que constituye el objeto central de esta Tesis.

Los mencionados ciclos de investigación han sido guiados por una conjetura y unos objetivos de investigación, redefinidos y revisados progresivamente, que contribuyen a la coherencia y validez del trabajo. La conjetura de investigación, que se expuso en el primer capítulo y se retoma en el siguiente, ha sido fundamentada en planteamientos teóricos (detallados en los capítulos 2, 3 y 4) y varios de sus aspectos contrastados con la práctica en aproximaciones recurrentes. Este modo de proceder incorpora elementos de la metodología de los *experimentos transformativos guiados por una conjetura* (Confrey y Lachance, 2000). Dicho tipo de experimentos antepone los objetivos de investigación a otros factores de la vida del aula (Kelly y Lesh, 2000). En esta investigación, los objetivos expuestos en el primer capítulo y que se retoman en el siguiente, han sido los focos sobre los que ha pivotado todo el trabajo en las clases.

Aún así, esta investigación no se adapta completamente a los parámetros de los “*experimentos de enseñanza*”, puesto que no se trabaja en un equipo de varios investigadores, al uso de los que realizan dichos experimentos. Se puede considerar como un equipo el formado por la directora del trabajo y por mí misma. Otros investigadores han colaborado a la hora de ajustar el marco teórico, diseñar instrumentos, validarlos, contrastar mis observaciones en el aula y contribuir a la coherencia entre la conjetura, los criterios de análisis de datos y las reflexiones realizadas. Sin embargo, ni la directora ni los investigadores que han colaborado han asumido el papel de construir conocimiento sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje acaecido en el aula, analizando las interacciones entre docente, alumnos y constructos diseñados para la transformación (papel que se postula en los experimentos de enseñanza para los investigadores del equipo que no actúan como docentes). Lo que pretende aportar esta investigación es la contribución al desarrollo de actitudes favorables y competencias matemáticas por parte de alumnos de secundaria, a través del uso de software de Geometría Dinámica en el aula, así como la construcción de conocimiento sobre este proceso por mi parte, desde mi papel como investigadora-docente. De aquí se desprende otra diferencia de matiz fundamental con respecto a los experimentos de diseño. Y es que el propósito último de esta investigación no es diseñar un constructo, ya sea teórico o de otra índole y refinarlo a partir de su aplicación práctica (Molina, Castro, Molina y Castro, en prensa), sino transformar una práctica docente insatisfactoria, a través de un constructo (diseño instruccional) creado para tal fin.

Como he señalado con anterioridad, es importante, de cara a la evaluación del trabajo, explicitar los productos potenciales del mismo. Como productos de esta investigación, señalo:

-El abordaje de un problema significativo a nivel de la práctica de la educación matemática, por cuanto parte de mis inquietudes como profesora en ejercicio, compartidas hoy día por gran cantidad de docentes en Secundaria. A saber, las dificultades a nivel actitudinal con el alumnado de este nivel, la responsabilidad de contribuir de modo significativo al desarrollo y a la evaluación de las competencias matemáticas de dicho alumnado, así como la necesidad de integrar de forma efectiva las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

-La formulación de una conjetura de investigación y unos objetivos que han ido refinándose en los sucesivos ciclos de investigación y que han guiado el proceso, sirviendo como eje vertebrador de todas sus partes.

- La creación de unos materiales fundamentados, que permiten guiar la enseñanza relativa a un contenido específico y que son susceptibles de generar resultados de aprendizaje exitosos.
- La elaboración y el refinamiento de instrumentos destinados a evaluar la puesta en práctica de la propuesta didáctica y los resultados que genera.
- Una descripción detallada de las variables del contexto en el que ha tenido lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje y la investigación.
- La toma de gran cantidad de datos procedentes de diversas fuentes, llevada a cabo a lo largo de todo el proceso.
- Una combinación de análisis cuantitativos y cualitativos que han proporcionado información en profundidad sobre la experiencia, así como la triangulación de la información obtenida, con objeto de contrastar los resultados y comprobar su consistencia.
- Una descripción detallada de cada una de las fases de análisis y una explicitación de los criterios que fundamentan las inferencias, argumentaciones y afirmaciones finales, de manera que posibilite a otros profesores e investigadores supervisar en detalle el análisis.
- Una reconstrucción de la historia de la conjetura, así como de la evolución del comportamiento y del pensamiento matemático de los alumnos a lo largo de la intervención, que espero sea útil a otros docentes y les estimule a adaptar, comprobar y modificar la secuencia de enseñanza en sus aulas.

En los capítulos siguientes, se desarrolla en detalle cada uno de los puntos anteriores.

CAPÍTULO 6

Planificación

El presente capítulo está dedicado a la fase de Planificación del ciclo 2 de esta investigación-acción. Se parte de la revisión del plan general de investigación, recordando después la conjetura que la guía y los objetivos que pretenden alcanzarse. Se exponen, a continuación, los fundamentos del Análisis Didáctico, que ha servido como herramienta para realizar dicha planificación. Finalmente, se describe en detalle el diseño de la experiencia de aula y de los instrumentos necesarios para la toma de datos durante su puesta en práctica.

6.1. REVISIÓN DEL PLAN GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Expongo resumidamente la revisión del plan general de esta investigación, es decir, las decisiones tomadas para el ciclo 2 como consecuencia de la fase de reflexión del ciclo 1 (Anexo A), algunas de las cuales ya se han justificado en capítulos anteriores:

- Decisiones metodológicas respecto al software empleado y al diseño de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de SGD:
 - Los estudiantes continuarían trabajando con SGD en el aula. Las ventajas del uso de Geogebra sobre C.a.R. para trabajar contenidos geométricos, condujeron a la decisión de usar únicamente el software Geogebra durante el ciclo 2.
 - Los alumnos comenzarían trabajando con Geogebra las Isometrías del plano (traslaciones, giros y simetrías), y después las Teselaciones del plano, ampliando así los contenidos geométricos estudiados en el ciclo 1, para adaptarlos al currículo de 3º de ESO (nivel escogido para el ciclo 2). No obstante, el análisis se centraría en las tareas de teselaciones del plano con Geogebra o tareas GG. Por tanto, sería imprescindible revisar el diseño de la secuencia de enseñanza-aprendizaje empleada en el ciclo 1 para adaptarla a los contenidos seleccionados y al software Geogebra.
 - Para el estudio de las transformaciones de actitudes, sería necesario el diseño de otra secuencia de tareas, las tareas con Lápiz y Papel o tareas LP, que los alumnos realizarían sin usar Geogebra, pero incorporando el resto de cambios metodológicos respecto a la enseñanza tradicional (tareas contextualizadas realizadas por parejas de

modo colaborativo, seleccionadas para desarrollar las mismas competencias matemáticas y atendiendo a los mismos niveles de dificultad). Tal secuencia permitiría contrastar las actitudes previas de los estudiantes con las manifestadas durante el trabajo con el software, de modo que se pudiera atribuir principalmente a éste y no a otros factores los cambios que se produjeran. El orden cronológico en que se realizarían las distintas tareas sería: tareas LP, tareas de isometrías o tareas ISO y tareas GG.

- Para el estudio de la evolución de las competencias, se llevaría a cabo un Análisis Didáctico previo de los contenidos seleccionados, que ayudaría a relacionar las competencias objeto de estudio con las capacidades específicas a desarrollar en los estudiantes y facilitaría el análisis de su posible desarrollo.
- Decisiones metodológicas respecto a la recogida de datos y los instrumentos diseñados para ello:
 - Para triangular toda la información recogida para cada estudiante se emplearía el software Atlas.ti, que facilitaría la reconstrucción de cada tarea realizada por los alumnos (integrando los archivos de Geogebra, de audio, las observaciones de las parrillas, etc.), considerando este tipo de análisis muy conveniente para informar de las actitudes y competencias que los estudiantes estaban manifestando cuando resolvían cada una de ellas. Por ello, se decidió recoger los diálogos de cada pareja de alumnos durante las sesiones en las que se pusiera en práctica la secuencia de enseñanza-aprendizaje diseñada (tareas GG) y para ello, un modo sencillo de hacerlo sin necesidad de recurrir a ayuda externa, sería utilizar un auricular con micrófono para cada estudiante y la grabadora de audio incorporada en cada ordenador. Las grabaciones de vídeo se limitarían a la puesta en común de cada tarea y al finalizar la puesta en práctica de dicha secuencia en el aula, la directora de la tesis, en calidad de investigadora externa, llevaría a cabo una entrevista semiestructurada con cada grupo de estudiantes.
 - La decisión de recoger los diálogos de cada pareja de estudiantes durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza basada en el uso de las TIC, devolvería un volumen de datos ingente, cuyo análisis desbordaría las dimensiones de este modesto estudio de tesis. Por esa razón, se decidió seleccionar una muestra intencionada de estudiantes (cubriendo los distintos perfiles actitudinales y cognitivos de mis alumnos) con los que llevar a cabo un estudio de casos. Para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos se realizaría un análisis exhaustivo, triangulando toda la información

recogida mediante el software Atlas.ti, mientras que para los restantes estudiantes se realizaría un análisis menos profundo, sin analizar sus archivos de audio (diálogos de los estudiantes durante la realización de las tareas). Es decir, para el análisis del total de estudiantes, se triangularía la información recogida mediante los cuestionarios, mis diarios grupales, buzones de sugerencias, protocolos de resolución de las tareas y entrevistas grupales.

- Se consideró pertinente rediseñar algunos de los instrumentos empleados para la recogida de información:

- Los cuestionarios de actitudes. El cuestionario “Actitud hacia las matemáticas” usado durante los ciclos 0 y 1, no incorporaba ítems referentes a actitudes matemáticas, de modo que realizaría una nueva revisión de la literatura con la esperanza de encontrar algún cuestionario ya validado que indagase sobre ambas categorías actitudinales. El cuestionario “Me interesa tu opinión” seguía siendo adecuado para los objetivos de investigación, de modo que sería empleado también durante el ciclo 2.

- Las parrillas de observación de actitudes y competencias. En primer lugar, se estimó conveniente separar actitudes y competencias en parrillas diferentes. La parrilla de actitudes sería común para todas las sesiones, y contendría indicadores relativos a actitudes matemáticas, actitudes hacia las matemáticas y hacia el trabajo con Geogebra y también referentes al trabajo colaborativo. Trataría de mejorar su diseño haciendo una nueva revisión documental. Un observador externo asistiría a algunas de las sesiones y rellenaría esta parrilla para contrastar sus observaciones con las mías y para aportarnos su opinión de la utilidad y facilidad de manejo de tal parrilla. Esta parrilla se emplearía durante todas las tareas: LP, ISO y GG. Para la observación de las competencias objeto de estudio, se diseñarían parrillas específicas para cada actividad, siguiendo el Análisis didáctico realizado, que únicamente serían rellenas para los estudiantes pertenecientes a la muestra seleccionada durante las tareas GG.

Todas estas decisiones se tuvieron presentes a la hora de planificar el ciclo 2 de investigación, que fue guiado por la conjetura que a continuación se recuerda, junto con los objetivos que permitieron hacerla operativa.

6.2. CONJETURA Y OBJETIVOS DE ESTA INVESTIGACIÓN

Como expuse en el apartado 1.2, la conjetura que guía esta investigación ha sufrido reformulaciones, fruto de experimentaciones y de profundizaciones teóricas sucesivas, hasta llegar al enunciado que sirve como punto de partida al último ciclo (ciclo 2), el cual es objeto central de esta memoria de tesis:

Se puede diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza basada en el uso de Geogebra que promueva una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas y un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes de secundaria. El uso de Geogebra potenciará en mayor grado determinadas actitudes y competencias. Ciertas características y atributos del software guardan relación directa con las transformaciones provocadas en determinadas actitudes y competencias de los estudiantes.

A partir de esta conjetura, se formularon los objetivos específicos de este trabajo de investigación, tal como se expuso en el capítulo primero:

1. Diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de software Geogebra.
2. Analizar las transformaciones que la puesta en práctica de dicha secuencia provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de Secundaria.
3. Identificar las características de Geogebra que pueden influir en la transformación de determinadas actitudes relacionadas con las matemáticas.
4. Describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de Secundaria al implementar la secuencia anteriormente descrita.
5. Identificar qué factores de Geogebra intervienen en el desarrollo de determinadas competencias matemáticas.

La conjetura y los objetivos de la investigación correspondientes a este ciclo han guiado todas las fases del mismo: planificación, acción, observación y reflexión. El resto del capítulo describe la fase de planificación, comenzando por el procedimiento que he utilizado para llevarla a cabo de un modo sistemático y fundamentado.

6.3. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Gómez (2002a, 2004, 2006, 2007) denomina Análisis Didáctico al procedimiento de planificación local del currículo de matemáticas, compuesto por los siguientes cuatro análisis:

1. el *análisis de contenido*, como el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
2. el *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
3. el *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza-aprendizaje objeto de la instrucción; y
4. el *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.” (2007, p. 29)

Se consideró necesario, para el diseño de la secuencia didáctica que había de poner en práctica en el aula, llevar a cabo un Análisis Didáctico del tema a tratar. Son varias las razones que me llevaron a optar por este procedimiento. Por una parte, la reciente reforma educativa, llegada de la mano de la LOE, aboga por una perspectiva global de la enseñanza basada en competencias y no por la consecución de unos objetivos concretos asociados a unos contenidos específicos, como hasta esta ley era habitual. Por tanto, se solicita al profesorado que realice una evaluación por competencias, y para ello se hace necesaria una vinculación entre objetivos específicos (metas a corto plazo) y competencias (metas a largo plazo), proceso para el que el procedimiento “Análisis Didáctico” resulta de gran ayuda, como más adelante se explica. Por otra parte, según Gómez y Rico (2002), “el análisis didáctico es un procedimiento que representa nuestra visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje si parte de una visión del aprendizaje de sus estudiantes basada en el constructivismo social” (p. 20), coincidiendo dicho posicionamiento sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares con el adoptado para este trabajo de investigación (capítulo 2, p. 56).

Por otra parte, algunas de las potencialidades del análisis didáctico según Lupiáñez y Rico (2008) son:

◆ Permite a los profesores establecer una relación entre el currículo global de todo un nivel educativo y el nivel local relativo a un tema específico. Partiendo de las directrices sobre objetivos, contenidos y evaluación que se expresan en el currículo general de un nivel educativo, los profesores establecen las capacidades que deben desarrollar los escolares de ese nivel en torno a un tema concreto, y describen en qué medida esas capacidades contribuyen a la formación matemática general de esos escolares en términos de competencias.

◆ Los profesores disponen de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar las tareas que habrán de resolver los escolares a lo largo de la puesta en práctica de la unidad didáctica. Por otra parte, al delimitar qué capacidades desean que desarrollen sus escolares, los profesores están sentando las bases para el diseño de actividades de evaluación. Estas actividades deben permitirles valorar el grado de desarrollo de las capacidades que desean evaluarse.

Para la fase de planificación de las secuencias didácticas se llevan a cabo los tres primeros análisis del análisis didáctico. El último de los análisis de este procedimiento, el análisis de actuación tiene también una fase de planificación, una fase que se lleva a cabo durante la puesta en práctica en el aula de las actividades diseñadas y otra que tiene lugar una vez que ésta ha finalizado. A continuación, detallo estos análisis siguiendo a Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005):

Una vez seleccionado un tema matemático en el que se centrará la unidad didáctica, mediante el *análisis de contenido* se analiza en detalle la estructura conceptual del tópico en que se engloba el tema tratado, destacando los conceptos y procedimientos involucrados y sus relaciones. También se describen las diferentes maneras de representar esos conceptos, las reglas de procesamiento que marcan los procedimientos así como las relaciones de los distintos sistemas de representación. Finalmente, se identifican familias de fenómenos en diferentes contextos y cómo son modelizados por alguna subestructura de la estructura matemática original.

En el *análisis cognitivo*, una vez concretados el nivel educativo al que se dirigirá la unidad didáctica y los conocimientos previos de los escolares, los profesores describen qué capacidades deberán desarrollar los escolares acerca del tema seleccionado. Los profesores también analizan la contribución que realizan esas capacidades al desarrollo de competencias matemáticas globales. Pero, además, también extraen criterios para determinar cómo alcanzar esas capacidades partiendo de los conocimientos previos de los

que parten los escolares, y describen qué errores y dificultades pueden surgir durante ese proceso de aprendizaje.

En el *análisis de instrucción*, haciendo uso de toda la información obtenida en los análisis previos, se analizan, seleccionan, diseñan y organizan las tareas que realizarán los escolares, así como los materiales y recursos disponibles para el aprendizaje. El trabajo con esas tareas es el que permite a esos escolares desarrollar las capacidades descritas en el análisis cognitivo previo. (pp. 2-3)

El último de los análisis correspondientes al análisis didáctico es el de actuación. Gómez (2007) lo define así:

El *análisis de actuación* está relacionado con la evaluación, pero no es equivalente a ella. El análisis de actuación no tiene que ver con la evaluación externa, sino con la evaluación interna del aula. El propósito de este análisis no es clasificar a los escolares para efectos de una nota, sino establecer el seguimiento del progreso de los escolares al comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula; establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula; caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades; y producir información relevante para la planificación en un nuevo ciclo del análisis didáctico. (p. 94)

El procedimiento del análisis didáctico permite describir el modo en el que unas capacidades específicas de los temas matemáticos seleccionados contribuyen al desarrollo de las competencias matemáticas consideradas (competencias PISA), y los posibles grados de desarrollo de esas competencias, estableciendo así la conexión entre la planificación a nivel local (actividades específicas para una unidad o tema concreto) y el diseño curricular global de la asignatura, curso y nivel educativo. Veamos más detalladamente la relación entre capacidades y competencias, siguiendo a Lupiáñez y Rico (2008):

Las capacidades aluden a cómo un escolar puede movilizar y usar su conocimiento sobre un contenido concreto, y se desarrollan y movilizan por medio de las actuaciones de los escolares cuando se enfrentan a la resolución de tareas. Pero al ir desarrollando capacidades relativas a diferentes temas matemáticos, los escolares se hacen paulatinamente más competentes en matemáticas.

El término competencia alude a los modos en los que los escolares actúan cuando hacen matemáticas y cuando se enfrentan a problemas. Pero el ser competente en matemáticas es un objetivo a largo plazo que se conseguirá a través de toda la formación escolar obligatoria. Esta caracterización de competencia como finalidad global, para distinguirla de capacidad como objetivo cercano en el campo de las matemáticas, permite relacionar estructuralmente dos niveles diferentes de la planificación curricular: el de la planificación de todo un ciclo educativo y el de la planificación de un tema matemático concreto.

Por tanto, las capacidades que desarrollan los escolares en los distintos temas de matemáticas contribuyen al desarrollo de los objetivos específicos⁴² de cada tema y en mayor o menor medida, a la evolución de sus competencias, y esas capacidades se muestran al afrontar tareas. Esta relación entre competencias, capacidades y tareas se describe en la Figura 6-1.

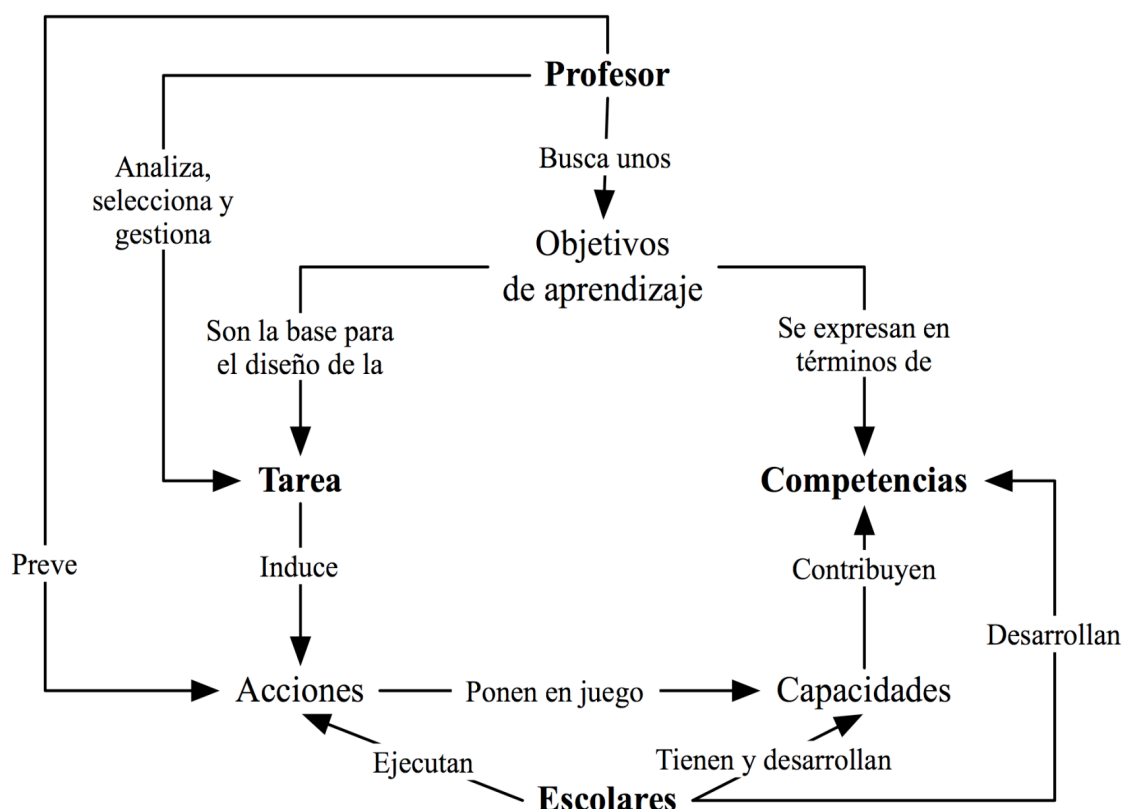


Figura 6-1. Relación entre competencias, capacidades y tareas (Lupiáñez y Rico, 2008, pp. 39-41)

⁴² Según Rico y Lupiáñez (2008) el profesor debe establecer unos objetivos específicos para el tema en cuya planificación está trabajando, tomando como referencia las directrices curriculares. Los objetivos específicos que se elijan para cada unidad son responsabilidad del departamento de matemáticas y deben expresar con el máximo rigor, amplitud y concisión las prioridades que sobre el aprendizaje de los escolares se establecen en ese momento.

6.4. DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

El objetivo 2 de esta investigación consiste en investigar las transformaciones que se producen en las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes al introducir Geogebra como herramienta de trabajo en el aula, comparando las actitudes manifestadas al trabajar con lápiz y papel con las actitudes manifestadas al trabajar con dicho software. Para ello, se diseñaron bajo las mismas consideraciones metodológicas y empleando el análisis didáctico, dos secuencias de tareas, siendo la única diferencia entre ambas el uso de Geogebra, que durante las tareas con lápiz y papel (tareas LP) no estaba permitido. Previamente a la realización de las dos secuencias de tareas, fue necesario un contrato didáctico con los estudiantes, que ayudó a clarificar las mencionadas consideraciones metodológicas, las cuales se exponen a continuación.

Tanto para las tareas de lápiz y papel como para las tareas con Geogebra, se tuvieron presentes los aspectos metodológicos expuestos en el apartado 2.4. Resumidamente, durante ambas secuencias de tareas mi función fue la de guiar el proceso favoreciendo el aprendizaje por descubrimiento guiado, las tareas respondían a problemas de la vida real y fueron trabajadas por parejas de modo colaborativo. Además, se consideró interesante seleccionarlas de modo que permitieran distintos caminos de resolución, según las decisiones tomadas por cada estudiante en cada momento. De este modo, al trabajar de la misma forma durante ambos tipos de tareas, sería más sencillo observar posibles transformaciones en las actitudes como consecuencia del trabajo con Geogebra.

Ambas secuencias de tareas permitían el desarrollo de las competencias matemáticas seleccionadas (p. 111) y atendían a los mismos niveles de desarrollo de dichas competencias. No obstante, como no pretendía comparar dichos niveles con lápiz y papel y con Geogebra, sino describir las competencias que manifestaban los estudiantes usando Geogebra y cómo el software contribuía a su desarrollo, no fue necesario elaborar instrumentos de observación de competencias durante la realización de las tareas LP, y no expondré el análisis didáctico realizado para esta secuencia. Únicamente iré mostrando resumidamente los aspectos del diseño de las tareas LP⁴³ que considere relevantes, puesto que no deseo desviar la atención del análisis de la secuencia con Geogebra.

⁴³ Se incluyen en el Anexo G

Presento a continuación el análisis didáctico realizado para los contenidos de Teselaciones del Plano realizadas con Geogebra (tareas GG). Con esta secuencia de enseñanza-aprendizaje pretendía indagar no solamente acerca de las actitudes (caso de las tareas LP) sino también acerca de las competencias matemáticas evidenciadas por mis estudiantes, para lo cual el análisis didáctico cobró una especial relevancia. En efecto, este procedimiento me ayudó a diseñar, llevar a la práctica y evaluar esta unidad didáctica, y contribuyó también al diseño de las parrillas de observación de competencias⁴⁴. Además, me permitió determinar el grado de desarrollo de cada competencia (nivel 1, 2 ó 3, mostrados en la figura 4-1), según las capacidades puestas en juego por los estudiantes para resolver las tareas planteadas, al clasificar capacidades y tareas atendiendo a esos mismos niveles de complejidad. No obstante, más que clasificar a los estudiantes atendiendo al nivel de competencias alcanzado, ya he expuesto anteriormente que mi intención es la de describir qué competencias evidenciaron al trabajar contenidos geométricos con Geogebra, en qué grado se desarrollaron y cómo el software contribuyó al desarrollo de las mismas.

6.4.1. Análisis de Contenido

En este apartado se presenta el análisis de contenido, realizado como paso previo al diseño de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra para el estudio de las teselaciones del plano.

1. Tratamiento Curricular: Contenidos de Tercer Curso de E.S.O.

Fijado el tópico y el nivel en que se iba a llevar a cabo esta tercera experimentación de tesis: 3º de Educación Secundaria Obligatoria, el primer paso consistió en la selección de los contenidos que se iban a trabajar con Geogebra, que extraje del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Expongo a continuación dicha selección de contenidos para tercer curso de ESO:

Bloque 1. Contenidos comunes.

- Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.
- Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa.

⁴⁴ Se expone una muestra de ellas en este capítulo (apartado 6.5.2), y la totalidad de las mismas en el Anexo H.

- Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.
- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 4. Geometría.

• Contenidos trabajados con las tareas LP

- Ángulos, rectas y puntos notables de un triángulo. Teorema de Pitágoras.
- Longitudes y áreas de figuras poligonales y circulares.
- Lugares geométricos: recta mediatriz, recta bisectriz, circunferencia...
- Segmentos proporcionales.
- Teorema de Tales: Enunciado. Teorema de Tales en el triángulo.
- Semejanza de triángulos. Criterios. Semejanza de polígonos. Figuras semejantes.
- Escalas y mapas.

• Contenidos trabajados con Geogebra

- Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades.
- Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.
- Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.
- Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

2. Clasificación de los Contenidos

El siguiente paso consistió en organizar el conocimiento matemático escolar con criterios cognitivos. Para ello se realizó una clasificación de los contenidos en dos grandes bloques: conceptuales y procedimentales, que a su vez se dividió en tres niveles de complejidad: hechos (términos, notaciones, convenios y resultados); conceptos y estructuras; y destrezas, razonamientos y estrategias.

BLOQUE CONCEPTUAL	
Hechos:	<p>-Términos: Nombres de formas y figuras geométricas (polígonos: triángulos equiláteros, isósceles o escalenos, acutángulos, rectángulos y obtusángulos, cuadriláteros regulares: cuadrados o irregulares, pentágonos,...; elementos de los polígonos: lados, vértices, ángulos, caras); cualidades como simetría, regularidad o congruencia; nombres y elementos de transformaciones geométricas en el plano (traslación, giro y simetría, composición de movimientos, vector, eje de simetría, mediatriz...).</p> <p>-Notación: T_u; $G(O, \alpha)$; S_c (simetría central); S_e (simetría axial de eje e); \vec{u}; $^\circ$; $M_1 \circ M_2$; A,B,C (vértices y ángulos); a,b,c (lados);...</p> <p>-Convenios:</p> <ul style="list-style-type: none"> •En la composición se empieza por el factor que se encuentra más a la derecha. •A los lados “a”, “b”, “c” le corresponden respectivamente los ángulos “A”, “B”, “C”. <p>-Resultados:</p> <ul style="list-style-type: none"> •La suma de los ángulos de un triángulo es de 180°. •El valor de los ángulos interiores de un polígono regular es $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ (no es necesario que los estudiantes memoricen la fórmula, es suficiente con que sepan hallar la suma de todos los ángulos interiores descomponiendo en polígonos más conocidos (triángulos, cuadriláteros,...) y luego dividan entre el número de lados (n)).
Conceptos:	<ul style="list-style-type: none"> •Movimientos rígidos: propiedades que se conservan con estas transformaciones. •Isometrías: Traslaciones, giros y simetrías (centrales y axiales). •Composiciones y descomposiciones de isometrías básicas. •Mosaicos. Mosaicos regulares. •Mosaicos semirregulares. Mosaicos semirregulares congruentes. Los ocho modelos. •Mosaicos de Escher.
Estructuras:	<p>(Iso_2, \circ): Grupo no abeliano de las isometrías del plano.</p> <p>(G, \circ), (T, \circ), (S_c, \circ) tienen estructura de grupos abelianos, (S_e, \circ) es un grupo no abeliano y todos ellos son subgrupos de (Iso_2, \circ).</p>
BLOQUE PROCEDIMENTAL	
Destrezas:	<ul style="list-style-type: none"> •Construcción de polígonos regulares usando movimientos. •Manejo de figuras planas para la comprobación de conjeturas. •Uso del programa Geogebra para la obtención de mosaicos a partir de figuras. •Confeción de la red triangular, cuadrada y hexagonal. •Obtención de los ocho tipos de mosaicos semirregulares congruentes. •Construcción de teselas irregulares planas a partir de una figura plana dada utilizando los movimientos rígidos. •Comprobación de propiedades que caracterizan los mosaicos utilizando movimientos.
Razonamiento:	<ul style="list-style-type: none"> •Deductivo e Inductivo: propiedades de los mosaicos regulares, semirregulares... •Figurativo: Propiedades que se observan gráficamente. •Argumentos para justificar los resultados obtenidos acerca de mosaicos regulares, semirregulares, teselas obtenidas a partir de la composición de distintos movimientos (mosaicos de Escher).
Estrategias:	<ul style="list-style-type: none"> •Realización y demostración de conjeturas. •Generalización de resultados a partir de una colección de soluciones particulares. •Métodos de tanteo y estimación de los resultados de una composición de teselas. •Resolución de problemas contextualizados interpretando previamente los enunciados y traduciéndolos a lenguaje matemático.

Figura 6-2. Clasificación de los contenidos

El tercer paso fue determinar relaciones y prioridades entre conceptos y procedimientos, destacando ciertas ideas centrales o focos conceptuales, a partir de los cuales se organizó la enseñanza del tema. En mi caso, agrupé los anteriores contenidos en los siguientes **focos conceptuales**:

Tabla 6-1. Focos conceptuales

Polígonos	Isometrías	Mosaicos
<ul style="list-style-type: none"> •Elementos de un polígono •Descomposición de polígonos •Suma de los ángulos de un polígono •Polígonos regulares •Valor del ángulo de un polígono Regular 	<ul style="list-style-type: none"> •Traslaciones •Giros o Rotaciones •Simetrías •Composición y Descomposición de Isometrías •Deslizamientos 	<ul style="list-style-type: none"> •Mosaicos •Mosaicos regulares: obtención argumentada •Mosaicos semirregulares •Mosaicos semirregulares congruentes: ocho tipos •Mosaicos de Escher

Una vez determinados los focos conceptuales, procedí a realizar el siguiente mapa conceptual del foco de mosaicos (figura 6-3), que era el que interesaba trabajar con Geogebra. Éste me permitió apreciar la complejidad de estos contenidos matemáticos, al establecer las relaciones entre la estructura conceptual y sus sistemas de representación (simbólico, verbal, gráfico y ejecutable o manejable).

El siguiente paso fue revisar los sistemas de representación y las conexiones entre ellos. Destaco cuatro sistemas de representación de las isometrías y mosaicos planos:

- Sistema de Representación Simbólico
- Sistema de Representación Verbal
- Sistema de Representación Gráfico
- Sistema de Representación Ejecutables o Manipulables

Las relaciones establecidas entre estos sistemas quedan de manifiesto en la figura 6-4.

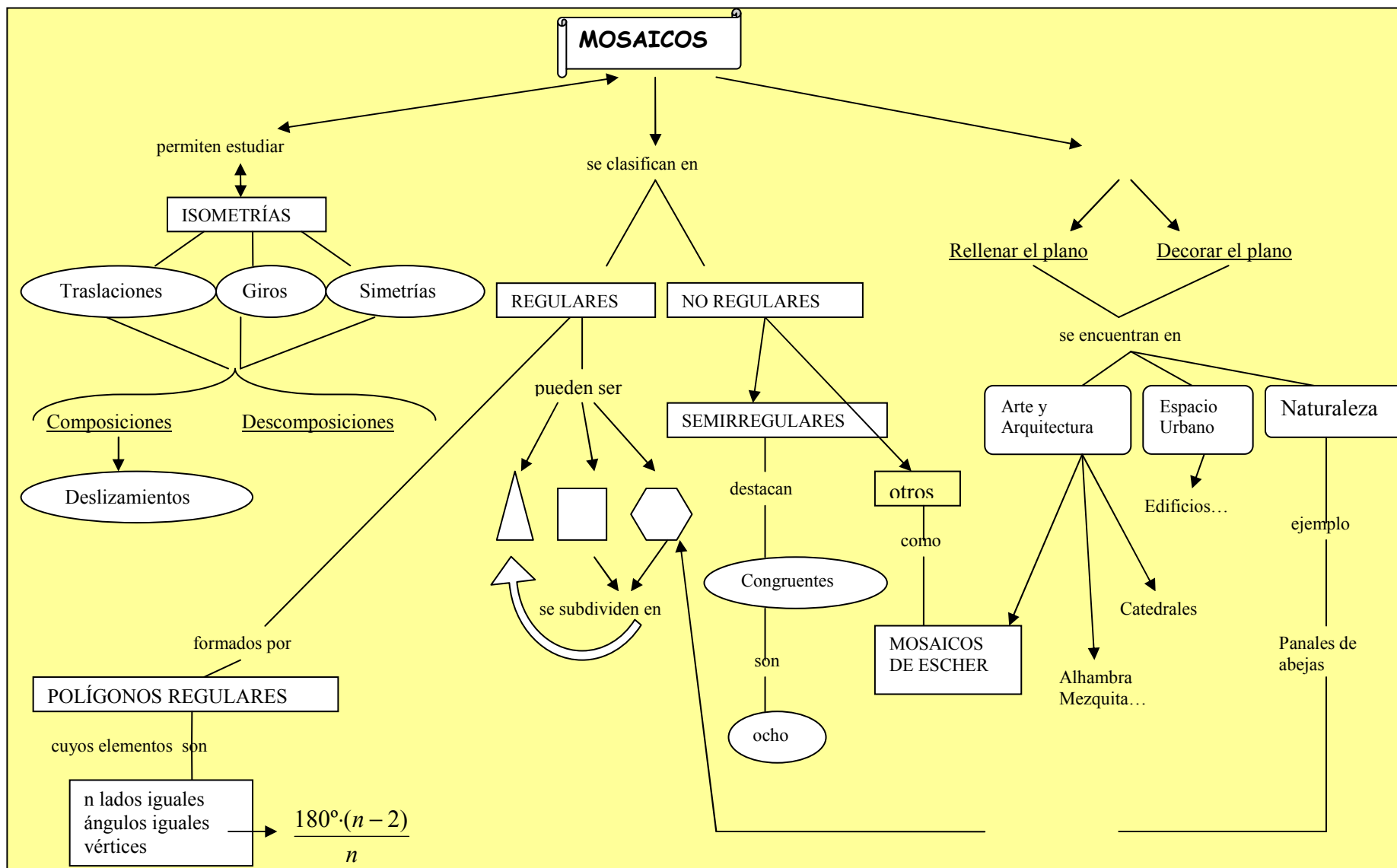


Figura 6-3.- Mapa conceptual de mosaicos

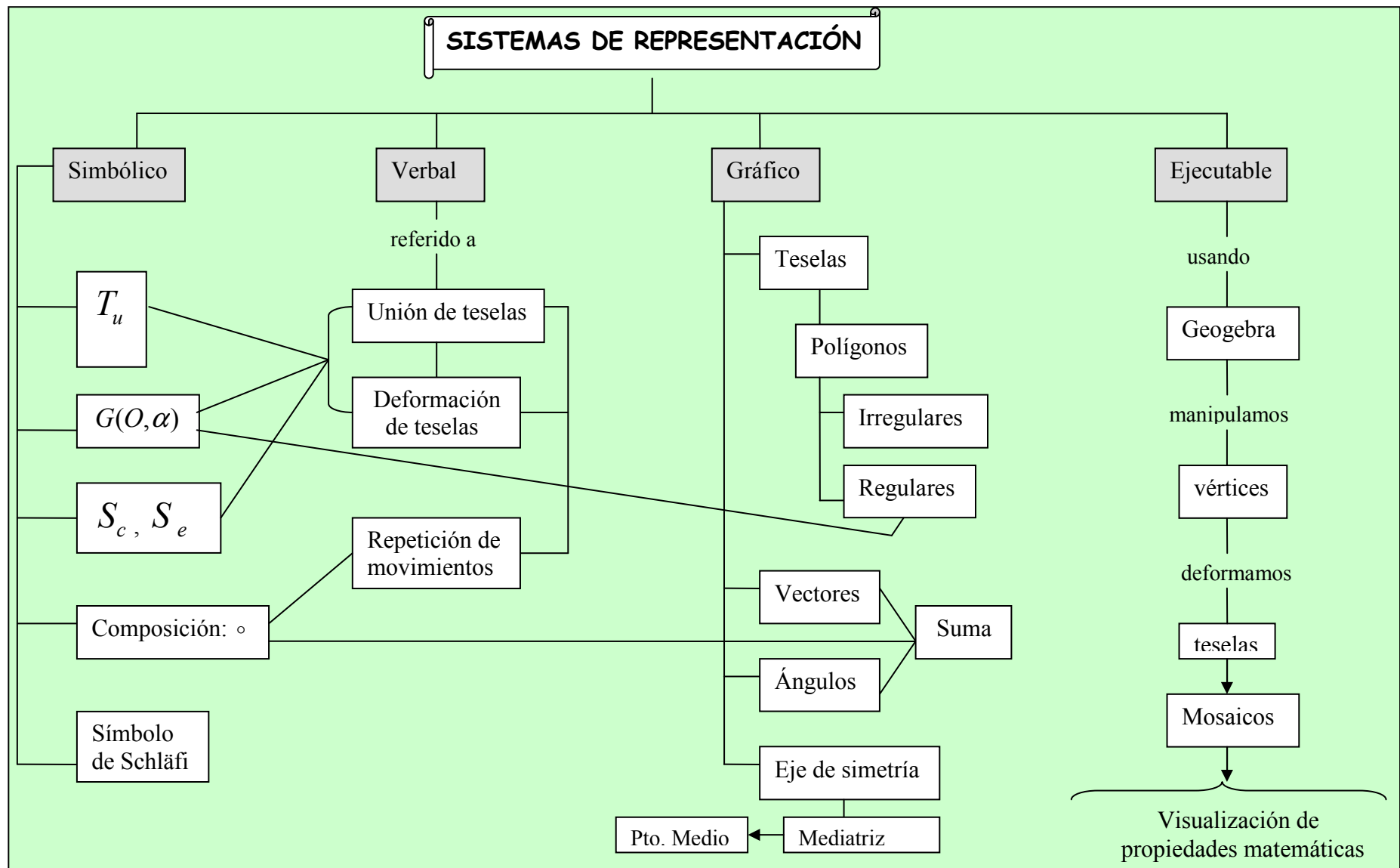


Figura 6-4. Sistemas de representación

3. Análisis Fenomenológico

Se realizó una revisión de la fenomenología de estos contenidos, que puede consultarse en su totalidad en el Anexo D, la cual permitió describirlos en relación con algunos de los fenómenos para los que fueron creados, como modo de conectar las matemáticas de la escuela con el mundo real. Establecí las conexiones de estos contenidos con el arte, industria, arquitectura, urbanismo... siguiendo a Mora y Rodrigo (1993) y la información encontrada en dos páginas webs: <http://www.gaudiallgaudi.com/EDc02Mosaic.htm> sobre historia de los mosaicos, y en la siguiente página sobre aparición de mosaicos en la naturaleza

<http://www.albajges.com/matematicas/geometria/%5Crombododecaedrooctaedrotruncado.htm>

Como paso último de este análisis de contenido, establecí la relación entre subestructuras detectadas y sus fenómenos asociados, desde la consideración de que familias de fenómenos y subestructuras se vinculan porque éstas modelizan a aquéllas y, así, expresan su sentido.

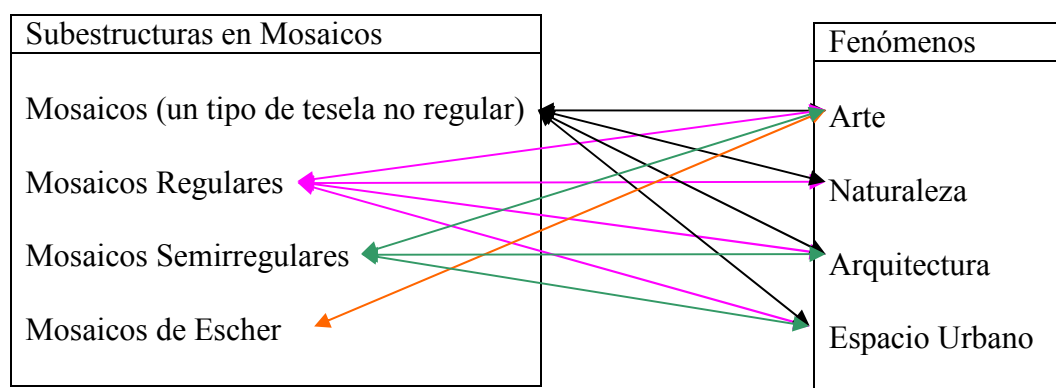


Figura 6-5. Relación entre subestructura y fenómenos

6.4.2. Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo, “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002b, p. 271). Para ello, Gómez (2007) propone dos procedimientos: el primero, desarrollado por Lupiáñez y Rico (2006), permite organizar las capacidades en términos de competencias, y describir y caracterizar el conocimiento y pensamiento matemático de los escolares antes y después de la instrucción. El segundo, el de los caminos de aprendizaje, es un procedimiento que le permite al profesor describir sus hipótesis acerca de los caminos por los que el aprendizaje se puede desarrollar.

1. Capacidades y Competencias

Comienzo estableciendo las capacidades de aprendizaje generales que pretendía que desarrollasen mis alumnos, independientemente del foco conceptual que estuviesen trabajando:

Tabla 6-2. Capacidades generales

Capacidades Generales	CG1	Interpretar el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)
	CG2	Expresar oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados
	CG3	Comprender razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros, profesora)
	CG4	Manejar correctamente el programa Geogebra

Continúo exponiendo las restantes capacidades que esperaba adquirieran los estudiantes, agrupadas según los focos de contenidos de mosaicos:

Tabla 6-3. Capacidades asociadas a los contenidos de teselaciones del plano

Focos de Contenidos	Capacidades	
1. Mosaicos	C1	Manejar distintos tipos de polígonos y distintos movimientos para crear mosaicos: representar un mismo polígono girado, trasladado, reflejado, y también probar con distintas formas poligonales de n lados: regulares. irregulares...
	C2	Distinguir representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías
	C3	Crear mosaicos sencillos dibujando cada tesela a partir de sus vértices, sin isometrías
	C4	Crear mosaicos sencillos usando un tipo de isometría
	C5	Crear un mismo mosaico sencillo por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido (con diferentes isometrías o combinaciones de ellas)
	C6	Argumentar la condición matemática para poder teselar (generalizar)
2. Mosaicos Regulares	C1	Construir polígonos regulares usando giros
	C2	Distinguir representaciones de mosaicos regulares dibujando y usando isometrías
	C3	Crear mosaicos regulares usando un tipo de isometría
	C4	Crear un mismo mosaico regular por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido (con diferentes isometrías o combinaciones de ellas)
	C5	Identificar igualdad de los ángulos que concurren en un vértice
	C6	Argumentar por qué sólo existen tres tipos de mosaicos regulares

3. Mosaicos Semirregulares	C1	Manejar distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos
	C2	Distinguir representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías
	C3	Crear mosaicos semirregulares sencillos
	C4	Obtener condición matemática para poder teselar
	C5	Crear mosaicos semirregulares complejos usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido
	C6	Obtener los 8 mosaicos semirregulares congruentes
	C7	Argumentar la obtención de los 8 tipos
4. Mosaicos de Escher	C1	Manejar distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos
	C2	Distinguir representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías
	C3	Identificar y explicar la obtención del motivo mínimo de un mosaico, dada su representación contextualizada
	C4	Crear teselas deformando los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, dibujando sobre cuadrícula, explicando el procedimiento seguido
	C5	Crear teselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, explicando el procedimiento seguido
	C6	Crear mosaicos a partir de polígonos deformados con distintas isometrías o con combinaciones de ellas, explicando el procedimiento seguido
	C7	Argumentar cómo obtienen teselas y mosaicos (vectores y ángulos de giro)

Una vez determinadas las capacidades que pretendía desarrollar en los alumnos, se pasó a relacionar estas capacidades con las competencias PISA seleccionadas para este estudio. De este modo, se obtuvo una tabla de doble entrada Capacidades-Competencias, en la que se estableció a qué competencias contribuía cada capacidad. Esta asignación fue realizada y contrastada con cinco investigadores en Didáctica de la Matemática, dos de los cuales son los creadores del instrumento Análisis Didáctico, de modo que la tabla que se presenta manifiesta la asignación capacidades-competencias fruto de la revisión y consenso⁴⁵ de las distintas asignaciones realizadas por cada uno de ellos:

⁴⁵ Se consideró para cada capacidad aquellas competencias en las que más de la mitad de las personas que realizamos las asignaciones coincidíamos.

Tabla 6-4. Capacidades-competencias asociadas a los contenidos de teselaciones del plano

CAPACIDADES GENERALES		PR	AD	C	M	RP	R	HR
CG1	Interpretar el enunciado del problema contextualizado en términos Matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)	✓			✓		✓	
CG2	Expresar oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados			✓				
CG3	Comprender razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros, profesora)			✓				
CG4	Manejar correctamente el programa Geogebra						✓	✓
1. MOSAICOS		PR	AD	C	M	RP	R	HR
C1	Manejar distintos tipos de polígonos y distintos movimientos para crear mosaicos: representar un mismo polígono girado, trasladado, reflejado, y también probar con distintas formas poligonales de n lados: regulares. irregulares...	✓					✓	✓
C2	Distinguir representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías	✓					✓	✓
C3	Crear mosaicos sencillos dibujando cada tesela a partir de sus vértices, sin isometrías	✓					✓	✓
C4	Crear mosaicos sencillos usando un tipo de isometría	✓					✓	✓
C5	Crear un mismo mosaico sencillo por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido (con diferentes isometrías o combinaciones de ellas)	✓		✓		✓	✓	✓
C6	Argumentar la condición matemática para poder teselar (generalizar)	✓	✓					
2. MOSAICOS REGULARES		PR	AD	C	M	RP	R	HR
C1	Construir polígonos regulares usando giros	✓					✓	✓
C2	Distinguir representaciones de mosaicos regulares dibujando y usando isometrías	✓					✓	✓
C3	Crear mosaicos regulares usando un tipo de isometría	✓					✓	✓
C4	Crear un mismo mosaico regular por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido (con diferentes isometrías o combinaciones de ellas)	✓		✓		✓	✓	✓
C5	Identificar igualdad de los ángulos que concurren en un vértice	✓						
C6	Argumentar por qué sólo existen tres tipos de mosaicos regulares	✓	✓	✓				

3. MOSAICOS SEMIRREGULARES		PR	AD	C	M	RP	R	HR
C1	Manejar distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos	✓					✓	✓
C2	Distinguir representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías	✓					✓	✓
C3	Crear mosaicos semirregulares sencillos						✓	✓
C4	Obtener condición matemática para poder teselar	✓	✓					
C5	Crear mosaicos semirregulares complejos usando isometrías y/o dibujando pol. Regul., explicando el procedimiento seguido			✓		✓	✓	✓
C6	Obtener los ocho mosaicos semirregulares congruentes	✓				✓		
C7	Argumentar la obtención de los ocho tipos		✓	✓				
4. MOSAICOS DE ESCHER		PR	AD	C	M	RP	R	HR
C1	Manejar distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos	✓					✓	✓
C2	Distinguir representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías	✓					✓	✓
C3	Identificar y explicar la obtención del motivo mínimo de un mosaico dada su representación contextualizada	✓		✓	✓		✓	
C4	Crear teselas deformando los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, dibujando sobre cuadrícula, explicando el procedimiento seguido	✓		✓			✓	✓
C5	Crear teselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, explicando el procedimiento seguido	✓		✓			✓	✓
C6	Crear mosaicos a partir de polígonos deformados con distintas isometrías o con combinaciones de ellas, explicando el procedimiento seguido	✓		✓		✓	✓	✓
C7	Argumentar cómo obtienen las teselas y los mosaicos (vectores y ángulos de giro)	✓	✓	✓				

2. Caminos de Aprendizaje y Dificultades

El profesor puede seleccionar tareas basadas en su hipótesis acerca de cómo dichas tareas pueden promover el aprendizaje de sus estudiantes, y además puede describirlas en términos de secuencia de capacidades. De ello surge la idea de camino de aprendizaje de una tarea como la secuencia de capacidades que los estudiantes deberían poner en práctica cuando se comprometen en su resolución (Gómez y González, 2009).

Para acometer esta labor y pronosticar los caminos de aprendizaje que creía que seguirían mis estudiantes al trabajar los focos conceptuales seleccionados, tuve en cuenta los errores y

dificultades que los alumnos posiblemente pondrían de manifiesto al abordarlas. Para ello, recurrí a mi propio conocimiento de las capacidades que tenían ya desarrolladas los estudiantes y la previsión de sus posibles dificultades, teniendo presentes las que evidencié durante la realización del ciclo 1 y además, realicé una revisión de la literatura sobre este tema que me aportó nuevas perspectivas.

Dentro de la literatura referente a isometrías del plano y mosaicos, me apoyé en los errores y dificultades detectados por Jaime y Gutiérrez (1996). Éstos coincidieron en su mayoría con los que salieron a la luz al trabajar isometrías en clase con los alumnos, previamente al estudio de los mosaicos. Como para estudiar mosaicos volveríamos a trabajar con isometrías, tuve en cuenta dichas dificultades a la hora de diseñar las actividades de mosaicos. Destaco, de modo global, las siguientes dificultades: las traslaciones son las isometrías que resultan más sencillas a los estudiantes, mientras que las simetrías en deslizamiento son las que les parecen más complejas. Con respecto a los giros y simetrías, muestran el mismo nivel de dificultad, incrementando éste, según factores como el ángulo de giro y la posición del centro de giro o eje de simetría.

Consideré que en los focos de mosaicos y mosaicos regulares, los estudiantes mostrarían mayores dificultades al emplear en sus construcciones giros, simetrías o combinaciones de estos movimientos (al intentar deslizamientos). También las tendrían para argumentar por qué cualquier triángulo y cuadrilátero tesela y la existencia de tres únicos mosaicos regulares. En el foco de mosaicos semirregulares, pensaba que inicialmente les sería difícil comprender la definición (por ello, en la primera tarea de este foco conceptual incluí dos mosaicos como ejemplos de mosaicos semirregulares congruentes y no congruentes), y posiblemente, después, podían tener problemas para encontrar los ocho tipos. En el foco de mosaicos de Escher, suponía que les costaría tiempo y esfuerzo la creación del mosaico de aviones, a partir de su motivo mínimo y también crear mosaicos a partir de teselas deformadas mediante transformaciones de sus lados. Por ello, preparé sugerencias o ayudas progresivas para ofrecer a los estudiantes, si estas dificultades se presentaban, para que los condujesen a encontrar por sí mismos estrategias que les ayudasen a salir del bloqueo.

Haciendo un doble análisis, por una parte de los conocimientos previos de mis estudiantes y de su modo de actuar ante un problema, y por otra parte, de los caminos de aprendizaje que siguieron otros estudiantes de 1º de ESO al realizar estas mismas actividades durante el curso

pasado (en el ciclo 1), pude establecer los caminos de aprendizaje para los dos primeros focos conceptuales:

Mosaicos: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C6 --- C4 --- C5 --- CG2 --- CG3

Mosaicos Regulares: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C5 --- C6 --- C4 --- CG2 --- CG3

Para el tercer foco y cuarto foco, no contaba con experiencias previas con estudiantes, así que consideré que seguirían los siguientes caminos de aprendizaje, teniendo en cuenta sus conocimientos previos y mi intuición como profesora (los pasos que yo seguiría si fuera una estudiante):

Mosaicos Semirregulares:

CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3

Mosaicos de Escher: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3

La capacidad CG4, referente al manejo del software Geogebra, estaría presente en todos los focos y se desarrollaría simultáneamente a las otras capacidades expuestas, por eso no la he ubicado en un lugar específico de los caminos de aprendizaje anteriores.

6.4.3. Análisis de Instrucción

Siguiendo a Lupiáñez y Rico (2008), en el análisis cognitivo, mediante la descripción de capacidades y competencias, cada profesor hace explícita la manera que tiene de entender las matemáticas y de cómo se aprenden y establece qué tipo de actuaciones han de promoverse en el aula para lograr el aprendizaje de sus escolares. En función de la posición adoptada respecto a la visión y estilos de aprendizaje en el aula, cada profesor seleccionará un tipo de tareas u otras.

Según Steffe y D'Ambrossio (1995) se puede pensar que existen modelos de enseñanza que son coherentes con la posición constructivista cognitivo-social del aprendizaje adoptada. El modelo de enseñanza para fomentar un aprendizaje por descubrimiento guiado es uno de ellos y es el que se ha adoptado para esta investigación, como se expuso en el capítulo 2 de esta memoria. Desde este planteamiento, en lugar de presentar el contenido como algo acabado y de explicar cómo se resuelven los problemas, el profesor debe proporcionar el material adecuado y estimular a los estudiantes para que, mediante la observación, la comparación, el análisis de semejanzas y diferencias, etc., lleguen a descubrir cómo funciona algo de un modo activo, siendo este modelo adecuado para ser empleado en entornos

tecnológicos (uso de TIC como recurso para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula).

En el capítulo 2 expuse también las ventajas atribuidas al uso del SGD en el aula (p. 54) que, junto con la información obtenida del análisis de contenido y del análisis cognitivo, tuve en consideración a la hora de seleccionar las tareas GG que en este apartado se exponen.

Siguiendo a Marín (2005), seguí los siguientes pasos para la selección de las tareas:

1. Seleccioné un foco de contenidos y sus capacidades asociadas.
2. Busqué y seleccioné un grupo de tareas que representasen a todas las capacidades.
3. Resolví las tareas considerando el nivel de conocimientos de nuestros estudiantes.
4. Hice un análisis de los contenidos más relevantes que manejaban las tareas.
5. Realicé una revisión de los tipos de contenidos y capacidades implicadas en las tareas, para asegurarme de cubrirlas todas.
6. Comparé las competencias asociadas a cada capacidad con las tareas seleccionadas para las capacidades, y en función de ello, ajusté la redacción de las mismas.

Las tareas fueron seleccionadas teniendo siempre presente mi deseo de realizarlas en el aula usando el software Geogebra, por lo que fueron adecuadas a las herramientas que ofrecía el software, garantizando así la adaptación de las tareas al entorno tecnológico. Cada tarea formaba parte de un problema contextualizado, cuyo enunciado pretendía ser motivador para los estudiantes (podría decirse que cada problema era un reto que les planteaba). Del enunciado de los problemas se desprendían diferentes tareas, de distinta complejidad, que los estudiantes debían realizar para poder obtener una solución del problema. Tras poner en práctica estos problemas en el ciclo 1, y analizar posteriormente su diseño y adecuación, rediseñé la secuencia de tareas inicial. La nueva secuencia mantenía las tareas del ciclo 1 que consideré adecuadas y también nuevas tareas que seleccioné, puesto que amplí los bloques de contenidos con respecto al ciclo 1 añadiendo los bloques de mosaicos semirregulares y de Escher. Estos dos bloques (mosaicos semirregulares y de Escher), no los puse en práctica en el ciclo 1, porque no los creía adecuados para el nivel cognitivo de los estudiantes (1º ESO) y no formaban parte del currículo de ese curso, sin embargo, su estudio sí resultaba pertinente con estudiantes de 3º de ESO en el ciclo 2. Para seleccionar las tareas de estos dos bloques o focos, al no disponer de un análisis de actuación previo, revisé la literatura referente a estos contenidos e hice un barrido exhaustivo por Internet, para conocer trabajos de otros docentes

sobre los mismos y las tareas que ellos diseñaron para estudiarlos. Una vez completada la secuencia de tareas para el ciclo 2, comprobé que este conjunto de tareas representase a todas las capacidades que pretendía que los estudiantes adquiriesen y antes de llevar la reformada secuencia de tareas a la práctica, la realicé en varias ocasiones usando Geogebra, para cerciorarme de que, efectivamente, las tareas eran adecuadas para ser trabajadas por los estudiantes y permitían desarrollar las capacidades y competencias previstas en cada una de ellas. La secuencia de tareas finalmente quedó de la siguiente manera:

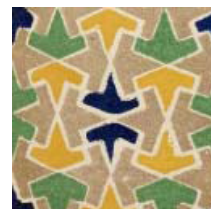
1. Secuencia de tareas

Foco 1: Mosaicos (teselas cualesquiera)

Con las tareas de este foco, pretendía introducir a los estudiantes en el trabajo con mosaicos sencillos, de modo que, mediante la creación de sus propios mosaicos, llegasen a comprender con qué polígonos es posible teselar y por qué (justificación de sus respuestas).

Tarea 1: En el año 1060 un visir del gran rey bereber Inb Habus levantó en una colina de Granada una residencia que posteriormente se reconstruyó y amplió hasta ser uno de los monumentos característicos de la presencia árabe en España: La Alhambra. En sus palacios se pueden ver las características fundamentales del arte islámico, como son las colecciones de mosaicos.

Un mosaico es una composición de losetas que reproduce un paisaje o figura, en el que las losetas no pueden solaparse ni dejar huecos entre ellas. Cuando las losetas llenan el plano basándose en simetrías, traslaciones y giros, estamos ante un mosaico geométrico.



Los árabes fueron unos excelentes creadores de mosaicos geométricos. En la cultura islámica se fue desarrollando una actitud de rechazo a la representación de seres vivos, que les llevó a buscar un sistema de representaciones nuevo que no coincidía con el cristiano (que dibujaba personas y animales), pero que les permitía mostrar una identidad propia como pueblo. Por ello, el Islam decidió rechazar cualquier representación de seres vivos, para evitar así la confusión con otras culturas, y su creatividad se decantó hacia la caligrafía y los dibujos geométricos, en los que alcanzaron cotas de belleza y complejidad difícilmente superables. Además, dados los conocimientos matemáticos de su época sobre mosaicos, resulta impactante comprobar que conocían todos y cada uno de los tipos de mosaicos existentes. (17 grupos de cristalógrafos planos).

Supongamos que eres un/a decorador/a árabe y que el gran visir te encarga embaldosar los suelos de la Alhambra con dos condiciones: debes emplear losetas iguales en cada habitación, pero los

diseños de las losetas deben ser diferentes en cada sala (puedes emplear todas las formas de losetas que se te ocurran). Debes mostrarle al visir todas aquellas formas de losetas que sirven para embaldosar sus habitaciones, para que él pueda decidir cuál le gusta más para cada suelo o pared. ¿Qué formas pueden tener las losetas? ¿Vale cualquiera de esas formas o polígonos para embaldosar un suelo o pared? Explica en qué casos has podido embaldosar y en cuales no y por qué. ¿Qué debe pasar para poder embaldosar una superficie con un tipo de losetas? Haz todas las pruebas que necesites para poder complacer al visir, ya que de ello depende tu sueldo y tu reputación como decorador/a.

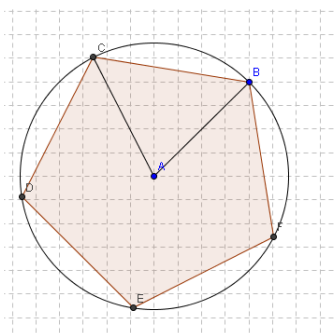
Tarea 2: ¿Qué técnicas has empleado para construir cada mosaico: dibujar sobre vértices de la grilla con el ratón, usar traslaciones, giros, simetrías...? ¿Eres capaz de repetir algunos de los mosaicos que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes? (Elige un tipo de loseta e intenta construir el mismo mosaico usando al menos de tres técnicas diferentes, repite este ejercicio con tres tipos de losetas).

Tarea 3: Supongo que a estas alturas, después de probar con distintas losetas, ya sabrás que cualquier triángulo y cuadrilátero sirve para enlosar una superficie, pero ¿eres capaz de explicar por qué? (Te sugiero que primero pruebes con distintos tipos de triángulos, empezando por aquellos con los que te resulte más sencillo construir mosaicos, y cuando obtengas una respuesta, lo intentes con diferentes cuadriláteros, comenzando también con los que te resulte más sencillo embaldosar).

Foco 2: Mosaicos regulares

Con las tareas de este foco buscaba que los estudiantes construyeran (empleando diferentes movimientos del plano o combinaciones de ellos) los tres mosaicos regulares, e investigasen y justificasen su unicidad.

Tarea 4: Ahora nos vamos a centrar en aquellas losetas que tienen todos los lados iguales, es decir, en losetas que son polígonos regulares, ¿eres capaz de construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7... lados? ¿Cómo lo haces?.



Tarea 5: El visir te sugiere que para embaldosar el suelo de la “Sala de los Abencerrajes” (esta sala es alcoba del sultán.) emplees losetas con todos los lados y ángulos iguales, para ahorrar dinero (estas losetas son más baratas que las que tienen formas irregulares). ¿Qué formas pueden tener estas losetas?

(Sugerencia: estudia con cuáles de los polígonos regulares que has dibujado en la tarea anterior es posible construir un mosaico y analiza qué tienen en común los ángulos de los polígonos con los que has podido embaldosar)

¿Puedes obtener más mosaicos usando losetas regulares de mayor número de lados? Justifica tus respuestas.

Tarea 6: ¿Qué técnicas has empleado para construir cada mosaico: dibujar sobre vértices de la cuadrícula con el ratón, usar traslaciones, giros, simetrías...? ¿Eres capaz de repetir los 3 mosaicos regulares que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes?

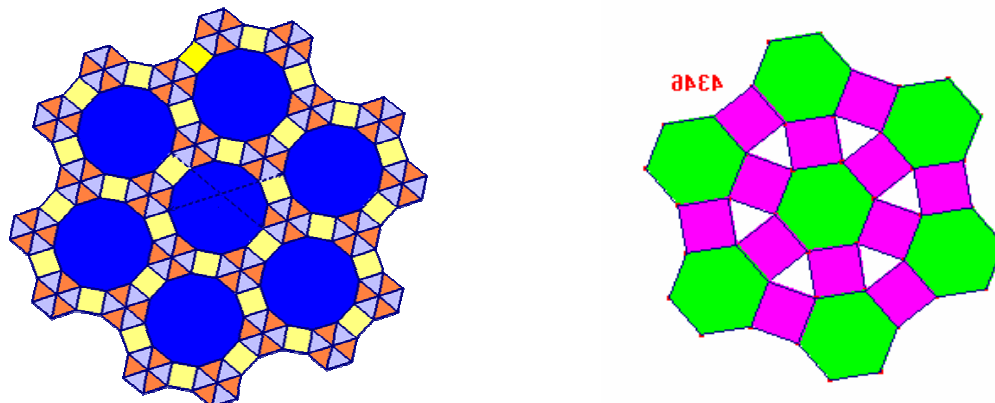
Foco 3: Mosaicos Semirregulares

Las tareas referentes a este foco sufrieron modificaciones desde su versión inicial, hasta llegar a la versión que ahora expongo, que fue la que mejor se ajustaba a las capacidades y competencias que con ellas quería desarrollar. Para su diseño tuve en cuenta las tareas propuestas por Mora y Rodrigo (1993) y O’Daffer y Clemens (1992) y mi experiencia previa con estos estudiantes, que me permitió tener una idea de cuales serían las posibles dificultades que manifestarían.

Con estas tareas quería introducir a los estudiantes en la construcción de mosaicos semirregulares, mostrándoles la diferencia entre mosaicos congruentes y no congruentes. No pretendía que llegasen a comprender por qué no hay más casos, pero sí a que hiciesen una investigación sobre los posibles valores que deben tener los ángulos interiores de los polígonos regulares para construir este tipo de mosaicos y llegasen a encontrar cuáles son los ocho mosaicos semirregulares congruentes. Para ello, debían tener presentes los cálculos y resultados obtenidos en tareas anteriores. (A aquellos estudiantes que mostrasen dificultades les proporcionaría algunas indicaciones: hay 6 mosaicos que se obtienen por composición de dos tipos de polígonos y 2 mosaicos para los que deben usar tres tipos; es necesario emplear polígonos de más de ocho lados para obtener todas las combinaciones).

Tarea 7: “El gran visir no ha quedado muy satisfecho con los mosaicos que le has presentado para embaldosar los suelos, porque cree que no son estéticamente atractivos y por ello, te sugiere que con tus conocimientos sobre mosaicos y empleando como teselas polígonos con los lados iguales para ahorrar dinero (prueba con cualquier polígono regular, no solamente con los 3 que teselan el

plano) realices otros diseños más interesantes. Puedes mezclar distintos tipos de polígonos y usar distintos colores.



Los dos mosaicos anteriores son ejemplos de “Mosaicos Semirregulares”, pues se obtienen empleando varias clases de polígonos, con la condición de que los distintos polígonos tengan los lados de la misma longitud.

Tarea 8: Entre los dos mosaicos de la tarea anterior, hay una pequeña diferencia y es que en el mosaico de la derecha se cumple que en todos los vértices del mosaico se encuentran los mismos polígonos y en el mismo orden (colocados de la misma manera). A los polígonos que cumplen esta condición se les llama “Mosaicos Semirregulares Congruentes”.

“El gran visir, siempre con su afán de facilitar el trabajo a los obreros, te sugiere que le presentes diseños de mosaicos semirregulares congruentes para que pueda elegir uno para enlosar las paredes del Salón de Comares o Salón de los Embajadores (es la sala más amplia y elevada de todo el palacio. En ella se celebran las audiencias privadas del sultán con otras personas que se sientan en los huecos que hay en las paredes. Además aquí encontramos el trono del sultán). ¡Ánimo sólo hay 8 posibles diseños! Intenta encontrarlos”.

Foco 4: Mosaicos de Escher

Para las tareas del foco de Mosaicos de Escher me inspiré en la página web: <http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/index.htm#javascript>. En esta página la autora presentaba de un modo interactivo y lúdico algunas de las reglas de las posibles transformaciones de polígonos regulares, propuestas por Escher, para obtener teselas originales y crear mosaicos. Mi deseo era que los estudiantes aplicasen estas transformaciones a polígonos regulares y construyesen mosaicos originales usando el programa Geogebra⁴⁶. Para que los alumnos comprendiesen las deformaciones que podían hacer a los polígonos y para que conociesen parte de la obra de Escher, visitarían además de

⁴⁶ La versión disponible en el instituto durante la experiencia tenía algunas limitaciones, por lo que sólo permitía crear teselas poligonales, aunque éstas podían ser muy bellas si se derrochaba creatividad

la página web mencionada, alguna de las siguientes páginas web que también me parecieron interesantes:

<http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/geoweb/mosa5.htm>

<http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/geoweb/mosa8.htm>

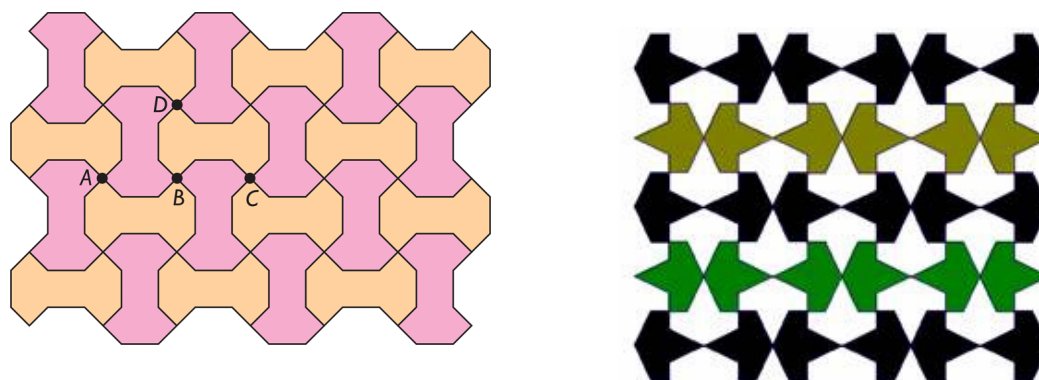
Con las tareas de este último foco de contenidos pretendía poner de manifiesto, no solo la utilidad de los mosaicos, sino su belleza y cómo las matemáticas nos ayudan a conseguir esas teselas con las que decorar.

Tarea 9: Vamos a estudiar algunas transformaciones que podemos hacerles a los polígonos que teselan el plano, para conseguir losetas más originales que siguen valiendo para embaldosar cualquier superficie.

Una forma muy sencilla de conseguir mosaicos es deformar un polígono regular, eliminando una parte del mismo y añadirla mediante una traslación o un giro a otro lado. Para ello, usando Geogebra debemos dibujar un polígono sobre uno o varios lados (deformar uno o varios lados) y después podemos:

- 1.- Trasladar esta deformación a otro lado del polígono.
- 2.- Girar esta deformación sobre otro lado usando algún vértice del polígono

Te propongo ahora el trabajo inverso al que has estado haciendo hasta ahora: en lugar de pedirte que busques diseños de losetas que sirvan para hacer mosaicos, te doy dos diseños de mosaicos muy famosos que se encuentran en la Alhambra, para que partiendo de un cuadrado, consigas dibujarlos usando Geogebra. (Deberás usar traslaciones, giros o simetrías). El mosaico de la izquierda se llama Mosaico del Hueso y el de la derecha Mosaico del Avión.



Tarea 10: Dejamos a un lado nuestra faceta como decorador/a de la Alhambra, para regresar a nuestros tiempos. Vamos a transformarnos ahora en uno de los más famosos pintores holandeses del siglo pasado Maurits Cornelius Escher, quien utilizó para sus pinturas sus conocimientos matemáticos sobre traslaciones, giros y simetrías. Una vez que has podido conocer parte de su obra, me gustaría que hicieses algunos mosaicos usando como tesela base un triángulo equilátero

y un hexágono regular y que deformes sus lados mediante traslaciones y giros. Después de obtener el mosaico puedes embellecerlo usando diferentes colores o añadiendo dibujos en el interior de las teselas. ¡Ánimo, se lo más creativo posible y usa tu imaginación junto con tus conocimientos de matemáticas! (Una vez que todos hayáis obtenido vuestros mosaicos elegiremos por votación el mejor de cada tipo y lo añadiremos a nuestras páginas de Helvia, Moodle, para que todo el mundo pueda verlo)

Expongo, para cada tarea, el camino de aprendizaje que creía que los alumnos seguirían cuando las realizaran en el aula, teniendo en cuenta que la capacidad CG4 (Manejar correctamente el programa Geogebra) se desarrollaría en cada tarea simultáneamente con las demás capacidades:

- Tarea 1: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C6 --- C4 --- CG2 --- CG3
- Tarea 2: CG2 --- C1 --- C2 --- C5 --- CG2 --- CG3
- Tarea 3: CG2 --- C1 --- C3 --- C4 --- C6 --- CG2 --- CG3
- Tarea 4: CG2 --- C1 --- CG2 --- CG3
- Tarea 5: CG1 --- CG2 --- C2 --- C3 --- C5 --- C6 --- CG2 --- CG3
- Tarea 6: CG2 --- C2 --- C5 --- C4 --- CG3
- Tarea 7: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- CG2 --- CG3
- Tarea 8: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3
- Tarea 9: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3
- Tarea 10: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C4 --- C5 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3

2. Fenomenología y Complejidad de las tareas

Después de la selección de tareas y de establecer sus caminos de aprendizaje, pasé a analizarlas atendiendo a la perspectiva fenomenológica y a su complejidad, siguiendo la clasificación proporcionada por PISA (OCDE, 2005b) que atiende a:

- a) Tipo de contenido, en mi caso, Geometría.
- b) Situación y contexto: Personal, Educativa/Ocupacional, Pública y Científica.
- c) Complejidad de las actividades cognitivas o competencias del sujeto: reproducción, conexión y reflexión (niveles 1, 2 y 3 de complejidad PISA (figura 4-1)).

De este modo, se estableció a qué capacidades y competencias contribuía cada tarea, y en qué nivel de complejidad⁴⁷, al mismo tiempo que se relacionaba cada una de ellas con los sistemas de representación que requerían que los estudiantes desarrollasen para su resolución:

Tabla 6-5. Foco 1: Mosaicos (teselas cualesquiera)

TAREAS	CAPACIDADES	COMPETENCIAS	SISTEMAS REPRESENT.	SITUACIÓN-CONTEXTOS	COMPLEJIDAD
Tarea 1	CG1, CG2, CG3, CG4, C1, C2, C3, C4, C6	PR, AD, C, M, R, HR	Verbal/ Gráfico	Personal	Reflexión
Tarea 2	CG2, CG3, CG4, C1, C2, C5	PR, C, RP, R, HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico	Científica	Reflexión
Tarea 3	CG2, CG3, CG4, C1, C3, C4, C6	PR, AD, C, RP, R, HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Científica	Reflexión

Tabla 6-6. Foco 2: Mosaicos Regulares

TAREAS	CAPACIDADES	COMPETENCIAS	SISTEMAS REPRESENT.	SITUACIÓN-CONTEXTOS	COMPLEJIDAD
Tarea 4	CG2, CG3, CG4, C1	PR, C, R, HR	Simbólico/ Gráfico/ Ejecutable	Científica	Reflexión
Tarea 5	CG1, CG2, CG3, CG4, C2, C3, C5, C6	PR, AD, C, M, R, HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Personal	Reflexión
Tarea 6	CG2, CG3, CG4, C2, C4, C5	PR, C, RP, R, HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Científica	Reflexión

Tabla 6-7. Foco 3: Mosaicos Semirregulares

TAREAS	CAPACIDADES	COMPETENCIAS	SISTEMAS REPRESENT.	SITUACIÓN-CONTEXTOS	COMPLEJIDAD
Tarea 7	CG1, CG2, CG3, CG4, C1, C2, C3, C4, C5	PR, AD, C, M, RP, R, HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Personal	Reflexión
Tarea 8	CG1, CG2, CG3, CG4, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7	PR, AD, C, M, RP, R, HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Personal- Científica	Reflexión

⁴⁷ Las tareas se han clasificado atendiendo al nivel máximo exigido por las capacidades que es necesario poner en juego para su resolución. Es decir, una tarea se sitúa en el nivel de reflexión si hay capacidades asociadas a la misma que responden a ese nivel. Por lo general, la resolución de cada una de las diez tareas diseñadas requiere del desarrollo de capacidades de los tres niveles de complejidad.

Tabla 6-8. Foco 4: Mosaicos de Escher

TAREAS	CAPACIDADES	COMPETENCIAS	SISTEMAS REPRESENT.	SITUACIÓN-CONTEXTOS	COMPLEJIDAD
Tarea 9	CG1,CG2,CG3,CG4,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7	PR,AD,C,M,RP,R,HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Personal	Reflexión
Tarea 10	CG1,CG2,CG3,CG4,C1,C2,C4,C5,C6,C7	PR,AD,C,M,RP,R,HR	Simbólico/ Verbal/ Gráfico/ Ejecutable	Personal-Científica	Reflexión

Esta clasificación de capacidades-competencias para cada tarea, me ayudó en la elaboración de las parrillas de observación de competencias, que diseñé para ser empleadas durante la realización de dichas tareas con Geogebra. Construí diez parrillas de observación (una para cada tarea), cuyos indicadores son las capacidades asociadas a cada tarea. Las capacidades de mayor complejidad se dividen en subcapacidades de nivel de complejidad creciente (reproducción, conexión y reflexión), para informar del grado con que cada estudiante las manifiesta. Informo más detalladamente del diseño y formato de estas parrillas en el apartado 6.5.2.

3. Recursos empleados para el diseño y realización de tareas

El recurso que los estudiantes emplearon para la realización de las tareas expuestas (tareas GG), cuya elección justifiqué en el capítulo 2 (apartado 2.3), fue el software de Geometría dinámica Geogebra.

Recurrí a la red Internet, para sacar provecho de las páginas antes mencionadas, elaboradas por otros docentes, muy interesantes para trabajar los contenidos geométricos que había seleccionado. La exploración de tales páginas en unas ocasiones fue guiada por mí, mediante el uso del cañón virtual, y en otras, realizada por los estudiantes libremente desde sus ordenadores, para que pudiesen interactuar con los applets y construcciones visuales que estas páginas ofrecían.

El resto de los recursos que empleé sirvieron fundamentalmente como plataforma para ubicar las tareas y almacenarlas, una vez que los estudiantes las realizaron. Por ello, siguiendo la misma línea de ciclos anteriores, creé un nuevo curso en Moodle para los grupos de 3º de ESO, siendo las secciones que componían este curso las mismas del Ciclo 1. Además de la plataforma Moodle, la plataforma Helvia me sirvió para poner a disposición de los estudiantes las tareas a realizar con Geogebra y también para almacenar los archivos que

contenían cada una de estas tareas resueltas por cada pareja de estudiantes (archivos de Geogebra), así como las grabaciones de audio de cada sesión con Geogebra (archivos de audio).

6.4.4. Planificación del Análisis de Actuación

La primera parte del análisis de actuación corresponde al diseño de los instrumentos con los que recoger información acerca de lo acaecido en el aula durante la puesta en práctica de la secuencia didáctica. Tiene como principal finalidad proporcionar herramientas para que los profesores puedan recoger, interpretar y utilizar evidencias que les permitan:

- ◆ Identificar los caminos de aprendizaje que ejecutaron y en qué medida las capacidades correspondientes contribuyeron al desarrollo de las competencias propuestas.
- ◆ Revisar si las tareas indujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que podían manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades.
- ◆ Identificar aquellos caminos de aprendizaje (y capacidades) que se pusieron en juego y aquellos que no.
- ◆ Reconocer las capacidades, caminos de aprendizaje, dificultades y estrategias no previstos y que se manifestaron en la práctica.
- ◆ Decidir, en función de lo anterior, cuáles son los siguientes pasos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto de manera local, como para la planificación del ciclo siguiente.

Dado que en este trabajo el análisis de actuación no atiende sólo a fines docentes, sino también a los objetivos de la investigación, los instrumentos diseñados responden a ambos propósitos. Algunos de ellos se utilizan en el análisis continuo, a lo largo de la experiencia, con el propósito de reajustar el diseño cuando se considera necesario y de realizar la evaluación de los estudiantes. Ello corresponde a la segunda parte del análisis de actuación y es coherente con la metodología de experimentos de enseñanza (p. 141). Este análisis se expone en el capítulo siguiente, correspondiente a la fase de acción y observación. Los mismos instrumentos y otros se usan, posteriormente, en el análisis final, correspondiendo a la tercera parte del análisis de actuación, que informa el ciclo siguiente. En nuestro caso, este análisis final es mucho más exhaustivo de lo que se requeriría a nivel docente, puesto que tiene como finalidad responder a los objetivos de investigación y contrastar la conjetura. Será objeto del último bloque de esta memoria de tesis.

En el apartado que sigue se exponen los instrumentos diseñados para la recogida de datos.

6.5. INSTRUMENTOS PARA LA RECOGIDA DE DATOS

Teniendo presentes los objetivos de la investigación, se emplearon instrumentos para la recogida de datos que permitiesen informar acerca de las posibles transformaciones de actitudes y desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza basada en el uso de Geogebra.

En el ámbito actitudinal, el planteamiento consistió en indagar primeramente sobre el estado inicial de las actitudes relacionadas con las matemáticas de cada alumno antes de comenzar la intervención con Geogebra. Posteriormente, recoger información durante la práctica que ayudase a conocer en cada momento si las actitudes iniciales se transformaban en algún sentido, debido al uso de este software en el aula (objetivos 2 y 3 de investigación). Finalmente, recabar información de los estudiantes acerca de su experiencia con Geogebra, es decir, recoger sus opiniones acerca de las implicaciones o repercusiones de su uso en su visión (del aprendizaje) de las matemáticas, de las nuevas tecnologías, así como en el desarrollo de las mencionadas actitudes. Para obtener la información referente a las actitudes, se emplearon dos cuestionarios de valoración de actitudes, uno de ellos procedente de la literatura revisada (empleado antes y después de las tareas con Geogebra) y otro de diseño propio (empleado al finalizar la experiencia con el software). También se usaron parrillas de observación (de diseño propio (p. 186)) y diarios, que fui escribiendo al término de cada sesión con los alumnos, durante la realización de ambas secuencias de tareas (tareas con Lápiz y Papel y tareas con Geogebra). Además, se creyó oportuno recoger información de entrevistas, grabaciones de audio y vídeo, protocolos escritos de resolución de cada tarea realizada por los estudiantes y buzones de sugerencias, que más tarde se exponen.

Respecto a la evaluación de competencias, pretendía explorar el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes durante la intervención con Geogebra, con el fin de describir la contribución del software a la adquisición de estas competencias (objetivos 4 y 5 de investigación). Para ello, durante las tareas con Geogebra, se utilizaron parrillas de observación de competencias, diseñadas con anterioridad partiendo del análisis didáctico previo (p. 190).

Para sintetizar lo anterior, incluyo la siguiente tabla en la que se muestran todos los instrumentos empleados, clasificándolos en: instrumentos empleados para el análisis de las actitudes y/o competencias, instrumentos basados/no basados en la observación, instrumentos de diseño propio/adoptados de otros autores y momento en que se emplearon (durante las tareas LP/tareas GG (con Geogebra) y/o antes/después de las tareas GG con Geogebra).

Tabla 6-9. Instrumentos empleados para la recogida de datos

	<i>Instrumentos</i>	Análisis Actitudes	Análisis Competencias	Diseño Propio	Momento
NO OBSERVACIONALES	Cuestionario “Actitud hacia las mates”	✓			Antes y después tareas GG
	Cuestionario “Me interesa tu opinión”	✓		✓	Después tareas GG
	Entrevistas	✓	✓		Después tareas GG
	Grabaciones de audio/vídeo	✓	✓		Durante tareas LP y GG
	Archivos de Geogebra	✓	✓		Durante tareas GG
	Protocolos escritos de resolución de tareas		✓		Durante tareas LP y GG
	Buzón de sugerencias	✓	✓		Después tareas GG
OBSERVACIONALES	Parrillas de observación actitudes	✓		✓	Durante tareas LP y GG
	Parrillas de observación de competencias		✓	✓	Durante tareas GG
	Diarios de la profesora grupales/individuales	✓	✓	✓	Durante tareas LP y GG

A continuación, se realiza una descripción de cada instrumento.

6.5.1. Instrumentos No Basados en la Observación

Cuestionarios de valoración de actitudes

Las herramientas de investigación educativa y psicológica, en concreto los cuestionarios de actitudes, pueden contribuir a la investigación de los sistemas de creencias humanos. El uso de estos cuestionarios ayuda al investigador a determinar la intensidad de la actitud de la persona que responde sobre diversas aseveraciones de actitudes. El objetivo es poner a las personas que contestan en la necesidad de reflexionar acerca de sus actitudes y sentimientos sobre varias cuestiones.

Me centré en el uso de cuestionarios de valoración, compuestos por un conjunto de enunciados cuyas respuestas se valoraron en cinco grados (desde *totalmente en desacuerdo* hasta *totalmente de acuerdo*, con el punto central correspondiente a la opción de *indecisión*), por considerar que me aportarían una información valiosa para mis propósitos investigadores y ser de fácil uso. A la hora de analizar dichos cuestionarios, se asignaron puntuaciones inversas a unos u otros enunciados según su sentido: positivo o negativo:

Tabla 6-10. Puntuaciones de los cuestionarios de actitudes

	<i>Totalmente de acuerdo</i>	<i>De acuerdo</i>	<i>Indecisión</i>	<i>En desacuerdo</i>	<i>Totalmente en desacuerdo</i>
<i>Enunciado positivo</i>	5 puntos	4 puntos	3 puntos	2 puntos	1 punto
<i>Enunciado negativo</i>	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos

Lo más sencillo para el investigador es buscar alguno de los cuestionarios validados ya existentes, ya que de este modo se evita tener que diseñar y validar uno propio. Por ello, se llevó a cabo una búsqueda de cuestionarios validados universalmente para el caso de las actitudes relacionadas con las matemáticas, es decir, que incluyesen información acerca de las dos categorías actitudinales contempladas: actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas. Encontré gran cantidad de material elaborado por prestigiosos investigadores acerca de las actitudes hacia las matemáticas, pero no encontré ninguno de ellos que indagara específicamente sobre actitudes matemáticas, ni tampoco ninguno que contemplara ambas categorías conjuntamente. Ello me condujo a la decisión de indagar únicamente acerca de dicha categoría actitudinal, empleando uno de estos cuestionarios de valoración ya validados: la escala de actitudes hacia la matemática EAHM-U, desarrollada por Bazán (1997) (p. 241). Los estudiantes debían cumplimentarlo antes (Pretest) y después (Postest) de realizar las tareas con Geogebra, con el fin de obtener información que permitiera comprobar si se producían transformaciones en las actitudes hacia las matemáticas. La escala se componía de 31 ítems agrupados en cuatro dimensiones: Afectividad (I), que refleja el agrado o desagrado hacia el curso de matemática, Aplicabilidad (II), que refleja la valoración al curso de matemática, Habilidad (III), que refleja la confianza en la propia habilidad matemática y Ansiedad (IV) que refleja las reacciones comportamentales de ansiedad frente al curso. Los 31 ítems se distribuían de la siguiente forma en las cuatro dimensiones expuestas:

Tabla 6-11. Ítems de la escala EAHM-U agrupados por dimensiones

DIMENSIONES	Afectividad	Aplicabilidad	Habilidad	Ansiedad
ÍTEMS	1,5,9,13,17, 21,25,29	2,6,10,14,18, 22,26,30	3,7,11,15,19, 23,27,31	4,8,12,16,20, 24,28

La elección de este cuestionario se debió a que es coherente con la caracterización de las actitudes hacia las matemáticas expuesta en el apartado 3.2.1 (pp. 75-76) y a través de sus ítems permitió recoger información principalmente de las componentes cognitiva (dimensión habilidad) y afectiva (dimensión afectividad y ansiedad) de las actitudes hacia las matemáticas. Además, aportó información de la visión que los estudiantes tenían de la importancia de las matemáticas en la vida real (dimensión aplicabilidad).

También se decidió diseñar un cuestionario que permitiese obtener información más ajustada sobre los efectos del uso de Geogebra en la transformación de las actitudes hacia las matemáticas de los alumnos: cuestionario “Me interesa tu opinión”. En la elaboración de este cuestionario se prestó especial atención a evitar la tendencia de los encuestados a estar de acuerdo con las situaciones planteadas en las cuestiones. Por ello, se formularon los ítems en sentidos positivo y negativo, para así comprobar si se respondía realmente lo que se pensaba o siguiendo esta tendencia (aquiescencia). Asimismo, se evitó que los enunciados se caracterizaran por ser reconocidos o aceptados socialmente, puesto que podía darse el caso de que el encuestado se dejara llevar por esta deseabilidad social y respondiera aquello que creía socialmente correcto y no lo que realmente pensaba. El cuestionario “*Me interesa tu opinión (MIO)*” (p. 244), fue cumplimentado por los estudiantes únicamente al término de las tareas con Geogebra. Este cuestionario fue validado, efectuando un análisis de fiabilidad y consistencia y un análisis factorial (disponía del número mínimo de cuestionarios cumplimentados por estudiantes, exigido para el proceso de validación). Se sometió el cuestionario MIO a dichos análisis, realizados con el paquete estadístico SPSS (versión 15.0), que permitieron validarlo como tal, pues confirmaron que este instrumento tenía buena fiabilidad o consistencia interna (Alfa de Cronbach > 0.86) y era adecuado para someterse a un análisis factorial (Test de Esfericidad de Barlett: $\chi^2 = 1392.257$, $p=0.000$; Índice KMO de Kaiser-Meyer-Olkin= 0.845, que indica que la matriz es adecuada para someterse a un análisis factorial) (Anexo E). El análisis factorial realizado permitió agrupar los 22 ítems en cuatro factores: factor 1 o actitud hacia el uso de las TIC en matemáticas, factor 2 o ventajas de trabajar las matemáticas con TIC, factor 3 o de rechazo de las matemáticas con TIC y factor 4 o de trabajo colaborativo con TIC (p. 247).

Este cuestionario también indagaba acerca de las tres componentes de las actitudes hacia las matemáticas consideradas de interés para este trabajo: componentes cognitiva, afectiva y comportamental. Sin embargo, a diferencia de los cuestionarios anteriores, en los que los

ítems no hacían referencia expresa al uso de las TIC y estaban formulados en un sentido más genérico, refiriéndose a las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas en general, los ítems del cuestionario MIO permitían obtener información acerca de si los estudiantes admitían transformaciones en sus actitudes hacia las matemáticas como consecuencia del trabajo con TIC en el aula, y conocer qué opinión les merecía al alumnado estas tecnologías.

Empleando los dos cuestionarios se pretendía hacer un doble filtrado de la información recogida, porque mi experiencia previa con TIC me sugería que muchos estudiantes admitirían cambios en sus actitudes hacia las matemáticas asociadas exclusivamente al uso de las tecnologías. Es decir, después del trabajo con TIC, al volver a trabajar con lápiz y papel, manifestarían sus actitudes hacia las matemáticas iniciales.

Entrevistas

Desde la posición de profesora-investigadora, extraje gran cantidad de información a través de los intercambios orales con los estudiantes, que no podía obtenerse fácilmente por muchos otros de los instrumentos expuestos y que, sin embargo, resultó de gran utilidad para esta investigación. Mediante entrevistas no formales, el estudiante expresaba sus sentimientos, emociones y opiniones, las cuales sirvieron para comprender el por qué de sus acciones, quedando éstas registradas en las grabaciones de audio y vídeo y en mis diarios.

La directora de esta investigación realizó, al finalizar las tareas con Geogebra, una entrevista semiestructurada con cada grupo de estudiantes, que se registraron en vídeo. Las entrevistas semiestructuradas, contaban con preguntas ya elaboradas, que permitían modificaciones o la inclusión de otras en el momento de llevar a cabo la sesión, otorgando a la entrevistadora mayor libertad y flexibilidad en la obtención de información, como modo de obtener mejores resultados. Se incluye un guión con las temáticas abordadas durante las entrevistas en el Anexo F.

Grabaciones de los estudiantes durante las sesiones de aula

La grabación en audio o en vídeo de la clase observada tiene una serie de ventajas respecto a la observación directa: posibilidad de repetición de lo grabado, focalización del análisis de determinados aspectos, transcripción de secuencias, etc.

Se decidió recoger las actuaciones de los estudiantes en diferentes momentos y a través de distintos medios. Los debates, asambleas, puestas en común a nivel grupal de cada una de las

actividades o tareas realizadas, se grabaron en vídeo. La realización de cada actividad con Geogebra por parejas se consideró más conveniente almacenarla en audio. Se recogieron los diálogos de cada pareja de estudiantes en todo momento, es decir, durante todas las sesiones en las que trabajaron con el software. Para ello, se les proporcionó un auricular con micrófono a cada uno de los estudiantes, aprovechando las ventajas de recogida de esta información que proporcionaban las TIC. De este modo, se les otorgaba libertad para interactuar entre ellos (llevar solamente un auricular les permitía escuchar sonidos externos: su/s compañero/s, la profesora, etc.) y, a la vez, quedaban registrados todos sus comentarios, conjeturas y en definitiva, cualquier expresión oral que pudiera ser interesante para investigar mis objetivos de investigación, gracias al micrófono incorporado. Es resumen, para cada actividad de Geogebra disponía de una grabación en vídeo de cada grupo de estudiantes durante su puesta en común o corrección y de un archivo de audio de cada pareja, para poder analizar el discurso de cada estudiante y la interacción o diálogos mantenidos con su compañero.

Archivos de Geogebra de cada tarea realizada por los estudiantes

Al finalizar cada tarea realizada con Geogebra, todas las parejas de estudiantes me enviaron el archivo de Geogebra que contenía dicha tarea. Después, aprovechando las herramientas del programa, se analizó su protocolo de construcción, es decir, los pasos seguidos por los alumnos en cada construcción.

Tareas realizadas por los estudiantes: Protocolos escritos de resolución

Siguiendo a D'Amore y Maier (2003), se entiende por TEPs⁴⁸ aquellas producciones en las cuales el estudiante, puesto en la condición de *desear* expresarse en forma comprensible y usando un lenguaje personal, acepta liberarse de condicionamientos lingüísticos y hace uso de expresiones espontáneas. Ejemplos de TEPs son por tanto: protocolos comentados de solución de problemas; resúmenes lo más detallados posible de investigaciones de tipo matemático (tentativas, pasos, medidas, resultados, etc.); descripciones detalladas y explicaciones de conceptos o de algoritmos matemáticos; textos introducidos para una situación específica que exige comunicar hechos y relaciones matemáticas en forma escrita, mejor si se enriquece con comentarios personales; textos que definen conceptos matemáticos,

⁴⁸ TEP: “textual eigenproduction”, término acuñado por el alemán Selter (1994), que D'Amore y Maier literalmente traducen por “Producciones Textuales Autónomas de los Estudiantes”

que formulan hipótesis, argumentaciones o pruebas en relación a un teorema matemático o a cualquier otra situación matemática.

La revisión de las producciones o tareas del alumnado aporta información de una manera continuada a través del cuaderno de clase, o de una forma puntual a través del análisis de monografías, textos escritos, o pequeñas investigaciones que periódicamente el profesor propone. Este tipo de técnica es valiosa para la recogida de información sobre actitudes y competencias. Por ello, durante la puesta en práctica de las dos secuencias de enseñanza-aprendizaje diseñadas (tareas con LP y tareas GG, con Geogebra), se proporcionó a los estudiantes fichas de trabajo para cada actividad, como instrumento de recogida de sus protocolos de resolución, que pueden consultarse en el Anexo G.

Opiniones expresadas por los estudiantes: Buzón de Sugerencias

Durante los ciclos de investigación previos, creé un *buzón de sugerencias* para cada grupo de estudiantes en la plataforma Moodle (que se empleó fundamentalmente como soporte donde ubicar las tareas TIC, los cuestionarios y demás instrumentos de recogida de información online). La riqueza de la información depositada por los alumnos en este espacio durante los ciclos 0 y 1, nos llevó nuevamente a emplear para el ciclo 2 esta herramienta como fuente de recogida de datos. Este instrumentó resultó de gran utilidad por dos motivos. Por un lado, brindó la oportunidad a los estudiantes de contar cómo fue su experiencia al trabajar con TIC en términos cognitivos, expresar sus opiniones sobre los aspectos que les parecieron adecuados y aquellos susceptibles de mejora. Por otra parte, me proporcionó una información valiosa, dado que la mayoría de estas aportaciones estaban cargadas de emociones y actitudes hacia las matemáticas que ellos expresaron libremente, tantas veces como quisieron y en el momento que desearon, ya que el acceso a este buzón de sugerencias fue libre e ilimitado.

6.5.2. Instrumentos Basados en la Observación

Según Stenhouse (1991) y Elliot (1990) ninguna técnica mejor que, como investigador de su propia práctica, el profesorado sea capaz de hacer apreciaciones acertadas sobre el trabajo de los alumnos, según sus capacidades y conocimientos previos, así como la implicación en las tareas desarrolladas. En mi caso, no sólo intento observar a los estudiantes desde una mirada externa que está inmersa en el grupo (observación participante), sino que también pretendo actuar como observadora incluida en la descripción (autoobservación). Para ello, siguiendo a Gómez-Chacón (2000b), es preciso emplear algunos rasgos, indicadores, pautas, guías de

observación o escalas que permitan evaluar las actitudes y su proceso de formación o desarrollo.

Bajo estas consideraciones, realicé una búsqueda de instrumentos de observación de actitudes que no resultó satisfactoria, y devolvió un escaso número de instrumentos de este tipo, que además no se ajustaban a mis intereses. Mi intención era la de emplear, junto con mis diarios de aula, parrillas de observación tanto para el registro de actitudes como para observar el grado de desarrollo de las competencias de los estudiantes durante cada sesión, pero el único referente encontrado (para la selección de los indicadores de las parrillas) fue el cuestionario “Las matemáticas y tú, tú y las matemáticas” de Hernández y Gómez-Chacón (1997, p. 54). Por este motivo, se optó por la creación de una parrilla propia adaptada a las actitudes que trataba de explorar, cuyos registros aportaran una visión más o menos clara de la transformación de actitudes de los alumnos, en los casos en los que ésta se produjese. La incorporación de este tipo de parrillas tenía como objeto “preparar la observación”, es decir, establecer unas preguntas-guía que sirvieran de base para la observación y, por lo tanto, ayudasen a dar respuesta a mis objetivos específicos.

En resumen, en este trabajo se han empleado dos instrumentos observacionales, de diseño propio, para recoger información de actitudes y competencias matemáticas: parrillas de observación (que permiten un tratamiento cuantitativo de los datos recogidos) y mis diarios (incluyen información de tipo narrativo principalmente). Las parrillas de observación las fui rellenando durante el transcurso de cada sesión de aula y los diarios los escribí al término de cada sesión con cada grupo.

La parrilla de observación elaborada permitía la recogida de información de un modo operativo, sobre todo teniendo en cuenta que mi papel era el de observadora participante. Los indicadores o ítems que conformaban la parrilla trataban de mostrar las distintas formas en las que un alumno podía actuar en relación con cada actitud, procurando que estos indicadores fuesen lo más clarificadores posible. Su formulación se basaba en la caracterización de actitudes que se presentó en el capítulo 3, la cual surgió de la conjunción de la revisión documental realizada y la propia experiencia docente, forjada en los ciclos anteriores de investigación, mediante la observación del modo en que los estudiantes manifestaban estas actitudes en el aula. La elaboración y elección de los enunciados o indicadores fue revisada por expertos, como modo de garantizar la coherencia y adecuación de los mismos. Asimismo, la parrilla fue rellenada por un observador externo, durante tres de las sesiones en las que los

estudiantes trabajaron con Geogebra, contrastándose después sus registros con los míos. En todas las sesiones, se encontró un elevado grado de coincidencia entre sus parrillas y las mías (en torno al 85%). Además, tras dialogar sobre aquellos estudiantes en los que no se habían obtenido los mismos registros para alguna/s actitud/es, se llegó a un consenso total, lo que permite validar la información recogida a través de dicho instrumento.

El número de indicadores asociados a cada actitud fue variable, pudiendo distinguir dos grupos de actitudes: aquellas que se consideraron dicotómicas y que por ello contaron con dos indicadores (uno positivo y otro negativo, según si el alumno manifestaba o no cada una de estas actitudes) y aquellas que podían evidenciarse con distinta intensidad, es decir, en mayor o menor grado (fue el caso de Flexibilidad de Pensamiento y Sistematización), que contaron con varios indicadores positivos, según la caracterización de estas actitudes antes mencionada.

La parrilla que aquí se presenta es la versión resultante de una serie de cambios y adaptaciones de la parrilla inicial, como consecuencia de su uso durante los ciclos 0 y 1 de este estudio. La parrilla definitiva, constaba de 24 indicadores: 19 referentes a actitudes matemáticas, 5 referentes a actitudes hacia las matemáticas, y se expone a continuación:

Tabla 6-12. Parrilla de observación de actitudes

ACTITUDES MATEMÁTICAS	FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO	FP1 Resuelve los problemas de más de una forma.
		FP2 Se interesa por la/s forma/s en q otros compañeros resuelven problemas diferentes a la suya
		FP3 Cambia de opinión en base a argumentos convincentes.
	ESPÍRITU CRÍTICO	EC4 Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad.
		EC5 Aunque no es capaz de hallar una solución correcta, revisa los pasos para comprobar que todo es correcto o encontrar errores.
		EC6 Se da cuenta de que no llega a la solución o de que ésta no es válida, pero no se preocupa de averiguar el por qué o de seguir intentándolo.
	PERSEVERANCIA	PE7 Ante un problema, se da por vencido fácilmente sin llegar a ninguna respuesta
		PE8 Cuando fracasa en el intento de resolver un problema, no lo intenta otra vez, se conforma con una respuesta incorrecta.
		PE9 No abandona el problema hasta que llega a una solución.
	PRECISIÓN Y RIGOR	PR10 No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado.
		PR11 Cree que un error de cálculo no es importante.
		PR12 Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso
	CREATIVIDAD	C13 Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas
		C14 No investiga distintas o nuevas estrategias
	AUTONOMÍA	AU15 Prefiere no pensar por sí mismo y pregunta al profesor o a los compañeros qué debe hacer.
AU16 Trabaja de modo autónomo.		
SISTEMATIZACIÓN	SS17 Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar	
	SS18 Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo	
	SS19 Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados	
ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS	COMPORTAMENTAL	TR20 Trabaja durante la sesión mostrando interés por el trabajo.
		TR21 Se niega a trabajar en clase o trabaja poco
	APECTIVA	GM22 Prefiere realizar ejercicios en los que no tenga que pensar.
	COGNITIVA	CO23 Confía en poder resolver el problema por sí solo.
	ACTITUD TIC	TIC24 Interés y gusto por el trabajo con ordenadores

La parrilla fue empleada durante las tareas con Lápiz y Papel (tareas LP) para todos los estudiantes y durante las tareas con Geogebra (tareas GG) para los estudiantes pertenecientes a una muestra seleccionada⁴⁹.

A la hora de codificar los indicadores de la parrilla se asignó una puntuación nula a aquellos que se consideraron negativos (es decir, el alumno no manifestó una cierta actitud) y un punto, a aquellos indicadores que hacían referencia a que el estudiante había evidenciado una determinada actitud (indicadores positivos). Para homogeneizar la codificación realizada se

⁴⁹ Aspecto que se aborda en el capítulo siguiente

obtuvieron los porcentajes asociados a cada actitud, dividiendo su puntuación entre la máxima puntuación posible para cada caso (la máxima puntuación sería la que obtendría una persona que manifestase una actitud durante todas las sesiones observadas).

El modo de evaluar cada actitud, así como los indicadores⁵⁰ correspondientes a cada una de ellas se detallan a continuación, siguiendo el orden en el que aparecían en la parrilla:

▪ **Actitudes Matemáticas:**

➤ Flexibilidad de Pensamiento (FP). Se registró mediante los siguientes indicadores:

FP1. Resuelve los problemas de más de una forma
FP2. Se interesa por la/s forma/s en que otros compañeros resuelven los problemas diferentes a la suya/s
FP3. Cambia de opinión en base a argumentos convincentes

Como los tres indicadores observados son positivos y no excluyentes, durante una sesión o tarea, un estudiante podía evidenciar ninguno, alguno/s o todos ellos. Se considera que una persona demuestra Flexibilidad de Pensamiento si actúa según las tres afirmaciones anteriores. De este modo, el alumno es totalmente flexible de pensamiento si pone de manifiesto las tres (100%), nada flexible si no evidencia ninguna de ellas y es poco o bastante flexible según si demuestra una o dos de ellas, correspondiéndole un $33.\bar{3}\%$ o un $66.\bar{6}\%$, respectivamente. Para facilitar la codificación, se asigna a cada una de las tres afirmaciones un punto, pudiéndose obtener en cada sesión como máximo tres puntos. Para la obtención del porcentaje alcanzado por un estudiante en esta actitud, se suman las puntuaciones obtenidas en cada sesión para cada tipo de tarea (tareas LP y tareas GG) y se divide el valor obtenido entre el valor máximo que puede obtenerse.

➤ Espíritu Crítico (EC). Se consideró para la observación en el aula de esta actitud los siguientes indicadores excluyentes entre sí, de modo que durante cada sesión un estudiante podía manifestar únicamente uno de ellos:

EC4. Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad
EC5. Aunque no es capaz de hallar una solución correcta, revisa los pasos para comprobar que todo es correcto o encontrar errores
EC6. Se da cuenta de que no llega a la solución o de que la solución no es válida, pero no se preocupa de averiguar el por qué o de seguir intentándolo

⁵⁰ El número que acompaña a cada indicador se corresponde con el orden con el que aparece en la parrilla.

Si un alumno evidencia una de las dos primeras afirmaciones se asigna una puntuación de 1 a cualquiera de estos dos indicadores y se considera crítico. Por el contrario, si actúa según la tercera de ellas, se entiende que no demuestra tener Espíritu Crítico, y se le asigna una puntuación de 0. Después se suman las puntuaciones obtenidas en esta actitud en cada sesión y esta cantidad se divide entre el número de sesiones, obteniendo así el porcentaje alcanzado por cada estudiante en esta actitud.

➤ Perseverancia (PE). Se decidió registrar esta actitud en el aula contemplando los siguientes tres indicadores excluyentes entre sí, con lo que durante cada sesión un estudiante podía mostrar sólo uno de ellos:

PE7. Ante un problema, se da por vencido fácilmente sin llegar a ninguna respuesta
PE8. Cuando fracasa en el intento de resolver un problema, no lo intenta otra vez, se conforma con una respuesta incorrecta
PE9. No abandona el problema hasta que llega a una solución

Si un alumno evidencia una de las dos primeras afirmaciones, se dice que no es perseverante. Por el contrario, si evidencia la tercera de ellas se considera que sí lo es. La codificación se realiza del mismo modo que para la actitud Espíritu Crítico.

➤ Precisión y Rigor (PR). En esta actitud se emplearon los siguientes tres indicadores, uno positivo y dos de ellos negativos no excluyentes entre sí. Así, durante cada sesión, un estudiante podía evidenciar el indicador positivo o uno o los dos indicadores negativos:

PR10. No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado
PR11. Cree que un error de cálculo no es importante
PR12. Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso

Si se observa en un alumno la primera afirmación, se le considera preciso y riguroso y se codifica con una puntuación de 1, pero si se muestra conforme a una de las dos últimas afirmaciones se dice que es poco preciso y riguroso y se le asignan 0 puntos. El cálculo del porcentaje se hace del mismo modo que para la actitud Espíritu Crítico.

➤ Creatividad (C). Esta actitud se asoció a los siguientes dos indicadores excluyentes, uno negativo y uno positivo:

C13. Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas
C14. No investiga distintas o nuevas estrategias

Si un alumno se comporta según la primera afirmación, se entiende que se muestra creativo, en caso contrario, no lo es. La puntuación se realiza del mismo modo que para Espíritu Crítico.

➤ Autonomía (AU). Para el registro de esta actitud se contemplaron los siguientes dos indicadores excluyentes, uno negativo y uno positivo. Por tanto, durante cada sesión un estudiante podía manifestar únicamente uno de ellos:

AU15. Prefiere no pensar por sí mismo y pregunta al profesor o a los compañeros qué debe hacer
AU16. Trabaja de modo autónomo

Si un alumno evidencia la primera afirmación, no es autónomo, y si evidencia la segunda, se considera que sí lo es. La puntuación se realiza del mismo modo que para Espíritu Crítico.

➤ Sistematización (SS). Esta actitud se observó siguiendo tres indicadores: dos de ellos positivos no excluyentes entre sí y uno negativo, con lo que durante cada sesión un estudiante evidenciaba uno o los dos indicadores positivos o el indicador negativo:

SS17. Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar
SS18. Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo
SS19. Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados

Si un alumno se comporta según SS18, no se manifiesta sistemático y se le asignan 0 puntos; si evidencia SS17 o SS19, se considera medianamente sistemático (50%) y se le asigna un punto; y si muestra ambas a la vez es calificado como totalmente sistemático (100%), y se le asignan dos puntos. Para la obtención del porcentaje alcanzado por cada estudiante en esta actitud, se suman las puntuaciones obtenidas en cada sesión y se divide el valor obtenido entre el valor máximo que puede obtenerse.

▪ **Actitudes Hacia las Matemáticas.** Se incluyeron los siguientes indicadores:

TR20. Trabaja durante la sesión mostrando interés por el trabajo
TR21. Se niega a trabajar en clase o trabaja poco
GM22. Prefiere realizar ejercicios en los que no tenga que pensar
CO23. Confía en poder resolver el problema por sí solo
TIC24. Interés y gusto por el trabajo con Geogebra

Los indicadores TR20 y TR21 están relacionados con la componente comportamental, el indicador GM22 con la componente afectiva, el CO23 con la componente cognitiva y el TIC24 con las actitudes hacia los métodos de enseñanza, en este caso, hacia el trabajo con TIC en matemáticas. Se codifican estas actitudes del mismo modo que las anteriores. Para el interés por el trabajo matemático (TR): 1 punto si presenta TR20, 0 si actúa según TR21. Para la actitud hacia las matemáticas como asignatura o gusto por las matemáticas (GM): 0 puntos si demuestra GM22 y 1 punto en caso contrario. Para evaluar su autoconfianza (CO): 1 punto si manifiesta CO23, 0 puntos en caso contrario. Y para la actitud hacia los métodos de enseñanza (TIC): 1 punto si manifiesta TIC24 y 0 puntos en caso contrario. Después, para cada una de ellas se obtiene la puntuación media del mismo modo que para las actitudes matemáticas que se codifican de forma dicotómica.

Parrillas de observación de competencias

A diferencia de la parrilla de actitudes, de formato único e independiente de las tareas realizadas, las parrillas de competencias eran específicas para cada tarea y exclusivas para la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra (pp. 168-173). Los indicadores de cada parrilla hacen referencia a las capacidades asociadas a cada tarea, algunas de las cuales podían manifestarse con diferente grado de dominio y por ello estaban desglosadas en subcapacidades. Estas capacidades y subcapacidades se clasificaron atendiendo a los niveles de complejidad descritos en la figura 4-1 (p. 113); es decir, tenían asignados los niveles 1, 2 ó 3. Estas parrillas fueron el resultado de una serie de adaptaciones y mejoras de las parrillas utilizadas durante los ciclos 0 y 1 de este estudio, que se llevaron a cabo aprovechando la información obtenida del análisis cognitivo realizado para los contenidos que se trabajarían con el software. Expongo la parrilla correspondiente a la tarea 5, expuesta en la p. 170. Las restantes 9 parrillas de observación pueden consultarse en el Anexo H.

Tabla 6-13. Parrilla de observación de competencias de tarea 5

Parrilla Tarea 5: MOSAICOS REGULARES		Nivel
CG1	Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)	3
CG2	Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados	
	CG2.1 Se expresa oralmente con sus palabras	1
	CG2.2 Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	2
	CG2.3 Se expresa por escrito con sus palabras	1
	CG2.4 Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	2
C2	Distingue representaciones de mosaicos regulares dibujando y usando isometrías	2
C3	Crea mosaicos regulares usando un tipo de isometría	3
C5	Identifica la igualdad de los ángulos que concurren en un vértice	2
C6	Argumenta por qué sólo existen 3 tipos de mosaicos regulares	
	C6.1 Sólo argumenta visualmente a través de ejemplos concretos elegidos sin criterio	1
	C6.2 Obtiene la condición para teselar con polígonos regulares (ángulo = divisor de 360°)	3
	C6.3 Argumenta la unicidad de 3 mosaicos regulares (no hay más divisores de 360° posibles)	3
	C6.4 No argumenta ni demuestra de ninguna manera	0
CG3	Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros o del profesor)	3
CG4	Maneja correctamente el programa Geogebra	
	CG4.1 Dibuja los polígonos regulares	2
	CG4.2 Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	3

A la hora de codificar los indicadores de la parrilla (capacidades asociadas a cada tarea) se asignó una puntuación nula a aquel/los que se consideraron negativos, es decir, el alumno no manifestó la/s capacidad/es a las que hacía/n referencia. Por el contrario, se asignó un punto, a aquellos indicadores que informaban de capacidades evidenciadas por el estudiante.

Diarios de clase

Para Richards y Lockhart (1998) el diario está formado por los escritos y notas tomadas por un profesor después de haber realizado la observación o auto-observación de una clase. Entienden, por tanto, estos autores el diario en un sentido amplio del término en donde caben reacciones personales, preguntas u observaciones, descripción de aspectos significativos de las clases e ideas para analizar.

Los diarios tienen un carácter personal y no están destinados a tener la consideración de trabajos literarios, pues normalmente las entradas son conversaciones muy personales con el propio yo, que registran acontecimientos significativos para el que escribe. El diario es una herramienta general que puede tener más de un propósito de investigación. Se puede usar

para lograr objetivos educativos, para fomentar la descripción, interpretación, reflexión y evaluación tanto por parte del profesorado como por parte del alumnado.

Escribir el diario regularmente, tras finalizar cada sesión con los estudiantes, me ayudó a salvar los vacíos que la falta de memoria podía provocarme. Me resultó de gran ayuda dedicar unos minutos al término de cada sesión con cada grupo para recoger toda aquella información relevante para mis propósitos investigadores.

Durante las tareas LP empleé dos diarios, uno para cada grupo de estudiantes, mientras que durante las tareas con Geogebra seguí completando los dos anteriores y además elaboré un nuevo diario para recoger información de una muestra de los estudiantes. Las entradas de los diarios las estructuré en 5 apartados, según la información que recogían: desarrollo de la sesión (actividades a las que dedicamos la sesión), actitudes hacia las matemáticas, actitudes matemáticas, competencias matemáticas y mi experiencia (valoración personal del desarrollo de la sesión, toma de decisiones para sesiones posteriores, junto con otra información importante no recogida en los apartados previos).

Una vez planificada la acción (secuencia didáctica) y perfilados los instrumentos para la observación (primera parte del análisis de actuación), en el capítulo siguiente se describe cómo éstas se llevaron a cabo.

CAPÍTULO 7

Acción y observación

El presente capítulo está dedicado a las fases de Acción y Observación de la investigación-acción. En él se describe cómo se implementó la secuencia didáctica planificada, empezando por el contexto en el que tuvo lugar y descendiendo después a la descripción de las sesiones llevadas a cabo. Al mismo tiempo, se realiza una comparación de las previsiones realizadas con lo que realmente ocurrió en el aula, la cual se utiliza para evaluar la secuencia didáctica. Todo ello, junto con el diseño de dicha secuencia presentado en el capítulo anterior, permite dar respuesta al objetivo 1 de este trabajo. Por último, se especifica el modo en que se llevó a cabo la observación en el aula a lo largo de la puesta en práctica y que dará pie al análisis de datos posterior.

7. 1. DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO

Como he señalado en páginas anteriores, el presente estudio otorga gran protagonismo al contexto real en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje, con toda su riqueza y la complejidad de variables que lo conforman. El objetivo primordial es estudiar y tratar de dar evidencias de cómo los alumnos han desarrollado sus competencias y actitudes matemáticas al trabajar con TIC, más específicamente con el software de geometría dinámica Geogebra, en la situación escolar en la que dicho proceso ha tenido lugar.

Todos los ciclos de esta investigación se desarrollaron en el centro IES Murgi, centro TIC de la localidad de El Ejido (Almería), en el que desempeñé mi labor docente desde el curso 2004-05 hasta el curso 2007-08. Este centro se encuentra en la mencionada localidad, cuyo municipio es el segundo en población de la provincia de Almería, situándose ésta en torno a los 80000 habitantes a 1 de enero de 2008, de los cuales el 18% eran extranjeros. La principal actividad económica de su población es la agricultura, y el nivel adquisitivo de sus habitantes es variable, aunque en su mayoría pueden situarse en una clase media. Ni el centro ni el alumnado destacaban por tener características o idiosincrasias especiales, encontrando en las

aulas la pluralidad de perfiles habituales en cualquier aula de otro centro de educación secundaria. Es decir, no se trataba de clases especiales donde se suponen “mejores prácticas”, ni tampoco de clases especialmente desfavorecidas.

En lo referente a las características del centro, el instituto de Educación Secundaria Murgi pertenece a la red de centros TIC de Andalucía, lo que significa que contaba en el momento de la experiencia con una dotación tecnológica mayor que los centros no pertenecientes a dicha red. Todas las aulas tenían la misma infraestructura: un equipo informático para cada par de estudiantes integrado dentro del mobiliario de aula, es decir, cada pareja de alumnos disponía de un ordenador con teclado y ratón y conexión a Internet. La disposición del mobiliario de aula era fija y fue una de las razones para que los estudiantes trabajasen por parejas.

Como expuse con anterioridad, esta investigación-acción ha constado de tres ciclos. El ciclo 0 se desarrolló durante el curso 2005-2006 a lo largo de 20 sesiones de aula de una hora de duración. El ciclo 1, se llevó a cabo en 2006-2007, durante 13 sesiones. Por último, el ciclo 2, cuyo estudio es el propósito de esta memoria, tuvo lugar en el curso 2007-08 y se implementó a lo largo de 25 sesiones.

Respecto a los cursos con los que se llevaron a cabo las experiencias de los distintos ciclos, he de decir que abarcaron casi todos los niveles de educación secundaria obligatoria: 1º, 3º y 4º de ESO y también el primer curso de bachillerato Tecnológico y de Ciencias de la Salud. Las razones para la elección de los niveles en cada ciclo estuvieron determinadas por las herramientas tecnológicas a utilizar y por mis obligaciones como docente, pues no siempre fue posible elegir todos los grupos con los que trabajar en cada curso escolar. Para el ciclo 0, en el que el uso de TIC se redujo a Internet y manejo de software estadístico (Open Office), y dado que se decidió trabajar diferentes bloques de contenidos en cada nivel, se seleccionaron alumnos de 3º, 4º de ESO y 1º de Bachillerato. De esta forma podía comprobar si la utilidad de estas herramientas dependía de los contenidos y de la edad y madurez intelectual de los estudiantes, obteniendo similares resultados en todos los grupos.

Para el ciclo 1, una vez tomada la decisión de comprobar la utilidad de ciertos software educativos de Geometría dinámica, trabajé con estudiantes de 1º de ESO, cuyos conocimientos geométricos eran casi nulos, resultando de gran utilidad el trabajo con estas tecnologías (expongo el desarrollo de este ciclo en el Anexo A). En ambos ciclos, se

comprobó que las transformaciones actitudinales de los estudiantes gracias al uso de TIC eran visibles e independientes de los recursos tecnológicos y de los contenidos trabajados en cada caso. El nivel de desarrollo de competencias alcanzado por los estudiantes de 1º de ESO (ciclo 1) estaba acorde con sus limitaciones cognitivas. Después de trabajar con SGD en el aula y comprobar su potencialidad para estudiar contenidos geométricos, consideré conveniente realizar la experiencia definitiva de tesis con estudiantes de 3º de ESO, ya que con niveles inferiores no se podía aprovechar gran parte de las posibilidades del software. Con estudiantes de 3º de ESO, cuyos conocimientos geométricos no iban más allá del estudio de los polígonos más conocidos en cursos anteriores, y la ayuda de Geogebra, pretendía lograr un mayor desarrollo de las competencias matemáticas ajustado a su madurez intelectual, que pondría de relieve las ventajas de estas tecnologías para el desarrollo de algunas de ellas.

Así pues, la fase de acción del ciclo 2 se llevó a cabo con dos grupos del mismo nivel educativo, 3º de ESO, pero que respondían a características muy diferentes:

- ▶ 3º de ESO A, cuyos 24 estudiantes formaban un grupo con rendimiento académico normal, dado que 13 de ellos lograron una evaluación positiva en matemáticas durante el primer trimestre de curso, es decir, obtuvieron una calificación igual o superior a 5. Su comportamiento y trabajo en el aula era variable y les costaba mantener la atención en cualquier tarea, pues la mayoría de los estudiantes se distraían con mucha facilidad. En otras palabras, combinaban momentos de gran concentración con episodios de desconexión.

- ▶ 3º de ESO B, con 22 estudiantes, era un grupo que se caracterizaba por tener un bajo porcentaje de estudiantes con rendimiento adecuado, presentando 15 de los alumnos de este grupo dificultades para el aprendizaje de las matemáticas, lo que les condujo a una evaluación negativa en nuestra asignatura. Además, 3º B contaba con un porcentaje de estudiantes repetidores bastante superior al de 3º A. El trabajo con este grupo en el aula reflejaba una elevada tasa de desmotivación hacia las tareas que realizábamos y hacia las matemáticas como asignatura, por lo que su ritmo de trabajo solía ser muy lento y poco constante.

7. 2. ACCIÓN

Como expuse con anterioridad, las secuencias de enseñanza-aprendizaje fueron diseñadas para ser implementadas en el aula de un modo colaborativo, en el que parejas de estudiantes

trabajasen de forma autónoma en la resolución de problemas contextualizados, en primer lugar con Lápiz y Papel y después con Geogebra. Con ambos tipos de tareas pretendía que los alumnos hiciesen pequeñas investigaciones que les llevasen a desarrollar sus actitudes y competencias matemáticas, así como a dominar en profundidad estos contenidos.

Se consideró adecuado comenzar con la realización de las tareas con Lápiz y Papel (tareas LP), en las que se estudiaron contenidos de geometría y semejanza del plano, para obtener información sistemática de las actitudes de los escolares relacionadas con las matemáticas, previas al trabajo con TIC. Tras concluir la realización de las tareas LP, se trabajaron los contenidos sobre isometrías del plano (tareas ISO) con Geogebra. Este conjunto de tareas permitió a los estudiantes, por una parte, avanzar en el aprendizaje de los contenidos necesarios para el posterior estudio de las teselaciones del plano con Geogebra (tareas GG) y, por otra parte, afianzar su manejo del software. Dado que las tareas ISO no podían clasificarse, en su mayoría, como problemas contextualizados (a diferencia de las tareas LP y las tareas GG), la actuación de los estudiantes al resolver estas tareas no fue objeto de análisis. Por último, tras finalizar las tareas ISO, los estudiantes trabajaron en las tareas GG, con las que concluyó la intervención o fase de acción en el aula. Durante estas sesiones de trabajo con tareas GG se realizó la principal recogida de datos para el análisis final, pues además de recoger información acerca de las actitudes relacionadas con las matemáticas (para contrastar con la recogida durante las tareas LP), se recabó información sistemática del desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra.

En la siguiente tabla se muestra para cada tipo de tareas el número de sesiones, de una hora de duración, que se necesitaron en total y las fechas de su realización:

<i>Periodo con Lápiz y Papel</i>	<i>Periodo con Geogebra</i>	
Tareas LP	Tareas ISO	Tareas GG
13 sesiones	28 sesiones	12 sesiones
8 – 28 enero 2008	31 enero-10 abril 2008	14 abril- 9 mayo 2008

Tabla 7-1. Gráfico temporal de la fase de acción

Por tanto, la acción requirió de un total de 25 sesiones de una hora de duración: las 13 sesiones en las que los alumnos realizaron las tareas de lápiz y papel (tareas LP) y las 12

sesiones en las que trabajaron las tareas de teselaciones del plano con Geogebra (tareas GG). Durante cada una de estas sesiones, tanto en el periodo con lápiz y papel como en el periodo con Geogebra, el modo de proceder con los estudiantes fue el mismo: dedicaba los primeros minutos de cada sesión a proporcionar a cada pareja de estudiantes la ficha de cada tarea (en la que ellos debían escribir a lo largo de la sesión o sesiones dedicadas a dicha tarea el protocolo de resolución seguido, incluyendo sus razonamientos y argumentaciones) y a leer el enunciado, por si alguno de ellos tenía alguna pregunta o duda sobre ella. Después los estudiantes comenzaban a trabajar en dicha tarea y al finalizarla me entregaban la ficha o protocolo escrito de resolución y, además, en el caso de las tareas GG, el archivo de Geogebra con la tarea resuelta.

7.2.1. Análisis de Actuación durante la Acción

Según explicité en el capítulo anterior, una vez planificado el análisis de actuación, éste se lleva a cabo en dos momentos: durante la realización de la experiencia (fase de acción en esta investigación) y a su término (fase de reflexión). El análisis que se realiza durante la acción sirve a varios propósitos: informar de su desarrollo, comparar lo que realmente sucede en el aula con lo que se planificó, realizar sobre la marcha los ajustes pertinentes y evaluar a los estudiantes.

Siguiendo a Gómez (2007), en el análisis de actuación el profesor debe:

- ♦ identificar los caminos de aprendizaje que los escolares ejecutaron, y en qué medida las capacidades correspondientes contribuyeron a las competencias que consideraba pertinentes;
- ♦ revisar si las tareas indujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que ellos pudieran mostrar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al ejecutar esos caminos de aprendizaje) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades;
- ♦ identificar aquellos caminos de aprendizaje (y capacidades) que se pusieron en juego y aquéllos que no; y
- ♦ reconocer las capacidades, caminos de aprendizaje, dificultades y estrategias no previstos y que se manifestaron en la práctica.

En síntesis, puede decirse que el análisis de actuación se centra en analizar la adecuación de la secuencia de tareas diseñada para el desarrollo de las capacidades y competencias

matemáticas seleccionadas. Por esa razón, este análisis no se llevó a cabo de un modo sistemático (siguiendo todos los pasos anteriores) para las tareas con Lápiz y Papel, ya que éstas se diseñaron básicamente para comparar las actitudes de los estudiantes relacionadas con las matemáticas antes y durante el uso de Geogebra, sin profundizar en el desarrollo de cada competencia en particular. Sin embargo, el análisis de actuación se consideró de gran importancia durante cada una de las sesiones en las que se trabajó con Geogebra y se realizó siguiendo el anterior esquema propuesto por Gómez (2007). Esta decisión conllevó que la recogida de datos y el análisis realizado durante la acción fuese diferente para actitudes y competencias en cada tipo de tareas.

A lo largo de las tareas con LP fui registrando en la parrilla de actitudes (p. 186) las actitudes detectadas en cada estudiante, observé a través de sus protocolos escritos de resolución el desarrollo de sus competencias matemáticas y anoté en mis diarios (uno para cada grupo) observaciones sobre ambas. Hice hincapié en aquellas actitudes y competencias que más y menos habían manifestado en el aula, incluyendo para cada sesión una breve reflexión sobre ellas y de mi experiencia de aula. Asimismo, fui anotando en dichos diarios si durante las sucesivas sesiones observaba cambios (positivos o negativos) en las actitudes y competencias de los estudiantes. Durante las tareas GG, seguí el mismo proceso de recogida de información que para las tareas LP, pero añadí un nuevo apartado en las entradas de mis diarios dedicado al análisis de actuación.

El análisis de actitudes durante la acción se realizó para ambas secuencias de tareas (tareas LP y GG) de un modo narrativo, sin seguir un protocolo estructurado para todas las sesiones. El análisis de competencias fue similar al de actitudes durante las tareas LP, y más sistemático durante las tareas GG, por ajustarse al análisis de actuación.

A continuación, doy cuenta de dicho análisis para cada una de las diez tareas de Mosaicos (tareas GG), tal como plasmé en el diario. Como he indicado, lo llevé a cabo mediante la reflexión sobre los puntos sugeridos por Gómez. Además, expongo algunos extractos de reflexiones incluidas en los diarios acerca de las transformaciones actitudinales de los estudiantes.

Tarea 1: El camino de aprendizaje previsto para esta tarea coincidió con el que pusieron de manifiesto todos los alumnos, con una pequeña modificación: comenzaron a probar con

isometrías antes de obtener la condición matemática para teselar (es decir, C4 apareció antes que C6) quedando así la trayectoria de aprendizaje seguida por los estudiantes:

CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C6 --- CG2 --- CG3

Estas capacidades desarrollaron, en general, las competencias seleccionadas para esta tarea, aunque comunicarse por escrito les seguía resultando difícil y argumentar en términos matemáticos correctos solamente algunos estudiantes lo lograron. Las restantes competencias se desarrollaron adecuadamente en la mayoría de los estudiantes como había previsto: usaron Geogebra con soltura, representando y colocando correctamente los polígonos para teselar, modelaron adecuadamente la situación planteada en la tarea, razonaron cómo resolver el problema y lo resolvieron.

Las dificultades manifestadas por algunos estudiantes durante la resolución de la tarea 1 resultaron ser las esperadas. En primer lugar, al construir polígonos cuyos vértices no se ajustaban a puntos marcados en la grilla⁵¹ e intentar teselar con ellos, tenían problemas para garantizar que las teselas dibujadas fuesen exactamente iguales. Esta dificultad ya estaba contemplada, pues uno de los objetivos con esta tarea era que llegasen a construir los mosaicos usando sus conocimientos previos de movimientos del plano. Algunos alumnos comenzaron a emplear isometrías por iniciativa propia, y a otros hubo que sugerirles que empleasen tales herramientas. Llegados a este punto, algunos estudiantes mostraron cierta indecisión acerca de cuál era la isometría más adecuada en cada caso, pero ellos mismos solventaron tales obstáculos. Más tarde, al buscar una argumentación o justificación de por qué con unos polígonos era posible y con otros no, también preveía ciertas dificultades ya que los alumnos no estaban acostumbrados a argumentar sus respuestas de un modo riguroso, más allá de la generación de ejemplos concretos. La mayoría de los estudiantes comenzaron construyendo mosaicos con cuadrados y rectángulos y una primera respuesta suya fue que, para poder teselar, los ángulos debían de ser iguales, pero ellos mismos comprobaron que consiguieron construir mosaicos en casos en los que no se cumplía esta condición, por lo que siguieron indagando en la búsqueda de una justificación que les sirviese para todos los ejemplos que habían construido. Como yo pensaba que ésta sería una posible respuesta de los escolares, la tarea los incitaba a probar con numerosas formas poligonales regulares o no, de modo que les surgieran interrogantes acerca de cómo justificar sus hallazgos.

⁵¹ Para facilitar la construcción de polígonos, sobre todo en las tareas iniciales, sugerí a los estudiantes que usasen la opción grilla, es decir, la interfaz gráfica aparecía cuadriculada (simulaba una hoja de papel milimetrado)

Las ayudas que fui proporcionando a lo largo de la tarea, que no fueron otras que dialogar con cada pareja sobre su modo de resolverla, contribuyeron a que la gran mayoría de los estudiantes llegase a comprender cuál era la razón por la que con unos polígonos formaban mosaicos y con otros no.

Respecto a las actitudes, observé cómo el ambiente de trabajo mejoró muchísimo respecto a cuando trabajaban con lápiz y papel, pues un gran número de estudiantes estuvieron implicados en la tarea todo el tiempo, mostrando gusto y agrado por la misma y, a pesar de las dificultades que encontraron para argumentar cuándo es posible teselar, no desistieron en su empeño ni se desmotivaron por esta razón. Es más, algunos estudiantes confiaron demasiado en las acciones realizadas con Geogebra y creyeron haber concluido la tarea antes de tiempo (argumentando empíricamente a partir de los ejemplos realizados con Geogebra, pues la confianza en su uso les llevaba a pensar que esas evidencias eran suficientes para justificar sus respuestas). En lo que concierne a las actitudes matemáticas, la mayoría de los estudiantes manifestaron, sobre todo, perseverancia y precisión y rigor al dibujar los mosaicos. Además, se mostraron más creativos y críticos que de costumbre con sus diseños y resultados y trabajaron de modo autónomo y con sistematización.

Tarea 2: El camino de aprendizaje previsto para esta tarea coincidió con el que pusieron de manifiesto los alumnos: CG2 --- C1 --- C2 --- C5 --- CG2 --- CG3

Las capacidades anteriores contribuyeron a las competencias seleccionadas, pues con la ayuda de Geogebra todos los estudiantes resolvieron el problema, razonando cómo usar los distintos movimientos del plano para obtener representaciones de mosaicos precisas, y comunicaron sus estrategias, tanto oralmente como por escrito, adecuadamente.

Al ser ésta una tarea en la que no debían hacer argumentaciones, sino que les pedía que repitiesen tres de los mosaicos construidos en la tarea 1 empleando tres técnicas diferentes (empleando por separado cada isometría), solamente esperaba que algunos estudiantes tuviesen dificultades cuando intentasen construir el mosaico de triángulos empleando únicamente traslaciones. Sin embargo, todos los alumnos coincidieron en que no era posible tal construcción, si no empleaban otra isometría conjuntamente con las traslaciones. Es decir, ellos solventaron dicha dificultad autónomamente interactuando con Geogebra.

Durante la realización de esta tarea, los estudiantes trabajaron sin descanso, muy motivados y con gran confianza en sus posibilidades de éxito, lo cual no solamente estuvo relacionado con el gusto y confianza en el trabajo con Geogebra en matemáticas, sino también con la sencillez de la tarea, para cuya resolución emplearon menos tiempo del planificado. Pude comprobar cómo trabajaron con gran perseverancia, razonaron el valor de los ángulos de giro y de los vectores de traslación con gran precisión y rigor, mostrándose autónomos al tiempo que sistemáticos.

El análisis de actuación de esta tarea me llevó a la decisión de reducir el tiempo que pensaba dedicarle a la tarea 6, similar a ésta, y aumentar el de la tarea 5, en la que les exigía que argumentasen y demostrasen sus respuestas más allá de la generación de ejemplos concretos, pues esta actividad les planteaba mayor dificultad como pude comprobar en la tarea 1.

Tarea 3: Esta tarea se centraba básicamente en la búsqueda de una respuesta argumentada a la pregunta de por qué es posible teselar con cualquier triángulo y cuadrilátero, siendo el camino previsto el siguiente:

CG2 --- C1 --- C3 --- C4 --- C6 --- CG2 --- CG3

El camino previsto sólo fue seguido por un reducido porcentaje de los estudiantes, que llegaron a la generalización pedida basándose en propiedades matemáticas. Los restantes no manifestaron C6, limitándose a argumentar visualmente a través de ejemplos concretos elegidos sin criterio, o llegaron un poco más lejos e intentaron justificar su respuesta a partir de un ejemplo seleccionado cuidadosamente (como representante de su clase).

Mis objetivos de aprendizaje con esta tarea eran que los alumnos comprendieran que con cualquier triángulo y cuadrilátero siempre es posible teselar, quedando la argumentación matemática de esta propiedad en un plano más ambicioso, pues de antemano era consciente que ello supondría grandes dificultades para la mayoría de los estudiantes. Las capacidades contribuyeron a las competencias consideradas, incluida la argumentación (subdivida en los tres niveles de desarrollo expuestos en el capítulo 4), pues les obligó a pensar y conjeturar, probar, comunicar, hacer y conectar distintas representaciones para resolver el problema (con mayor o menor maestría).

Se pusieron de relieve las dificultades esperadas y, para progresar en ellas, fui proporcionando sugerencias que les ayudaron a superarlas. La sugerencia inicial de empezar

construyendo triángulos y cuadriláteros con los que les resultara sencillo teselar, les permitió usar la herramienta dragging para deformar el motivo mínimo y obtener mosaicos irregulares, conservándose las propiedades matemáticas, que contribuyeron a que comprobasen visualmente la propiedad que trataban de demostrar. Cuando intentaron construir mosaicos más complejos, convencidos de que era posible hacerlo, les ayudé sugiriéndoles emplear giros en los puntos medios de los lados. Estas recomendaciones no lograron que todos los estudiantes argumentasen a alto nivel (obteniendo una generalización de la propiedad observada en los ejemplos concretos) pero, al menos, sí les permitió hacerlo visualmente y les abrió un nuevo abanico de posibilidades para teselar. Solamente a un pequeño porcentaje de los estudiantes se le había ocurrido emplear esta técnica o estrategia para construir mosaicos formados por triángulos o cuadriláteros irregulares, mientras que el resto manifestaba problemas para colocar las teselas en la posición deseada usando giros con centros en los vértices.

Como conclusión, considero que las exigencias de esta tarea en cuanto a nivel de razonamientos y demostraciones, quedaban por muy por encima de las posibilidades de la mayoría de los estudiantes y para una futura puesta en práctica, sería más conveniente restringirla a que los alumnos construyan mosaicos cada vez más complejos, que pongan de relieve que siempre es posible teselar con polígonos de tres y cuatro lados y explicarles el por qué de tal propiedad, sin dedicar tanto tiempo a que ellos intenten argumentarla por sí mismos. Por otro lado, el hecho de que tratasen de hacer razonamientos de mayor nivel y se esforzasen en dar una respuesta argumentada, aunque algunos solamente llegasen a hacerlo al más bajo nivel, fue un avance que a mí me pareció importante para ayudarles a mejorar en esta competencia y para hacerles comprender la necesidad de buscar tales argumentaciones matemáticas.

Respecto a las actitudes manifestadas por los estudiantes durante la realización de esta tarea, a pesar de su dificultad, he de subrayar el esfuerzo que realizaron que les llevó a implicarse activamente en su resolución, demostrando gusto y confianza por conseguirlo. Si bien, la autoconfianza de muchos de ellos fue disminuyendo, al comprobar que la argumentación que se les pedía quedaba fuera de su alcance y, con ello también su perseverancia y autonomía se vieron mermadas respecto a las tareas anteriores. No obstante, siguieron manifestando precisión y rigor y sistematización cuando probaron distintas estrategias que analizaron críticamente.

Tarea 4: El camino de aprendizaje previsto para esta tarea no coincidió con los que pusieron de manifiesto todos los alumnos, puesto que algunos estudiantes siguieron el siguiente:

CG2 --- probar por ensayo-error arrastrando los vértices (dragging) --- C1 --- CG2 --- CG3

Además, no todos los estudiantes manifestaron C1, sino que surgieron otras estrategias y capacidades no previstas que sustituyeron a C1 en el camino de aprendizaje que había previsto:

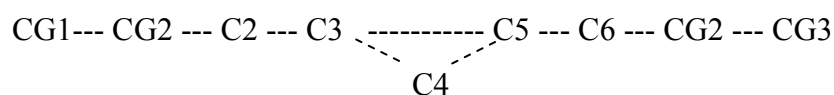
- Algunos estudiantes en lugar de hacer giros sucesivos partiendo de un vértice, iban dibujando ángulos con amplitud igual al ángulo de giro sobre la circunferencia partiendo de un vértice.

-Otros estudiantes hacían un primer giro o dibujaban un primer ángulo con la amplitud correcta para cada polígono regular, y con el vértice obtenido, el centro de la circunferencia y el vértice inicial construían un triángulo, que mediante simetrías o giros les permitía construir el polígono regular buscado.

Las capacidades previstas y las que surgieron en el aula, contribuyeron al desarrollo de las competencias seleccionadas para esta tarea, que resultó bastante sencilla a la totalidad de los estudiantes y ello les llevó a buscar distintas estrategias de resolución. Contaba con que los alumnos demostrarían inicialmente una situación de bloqueo, al no saber cómo construir estos polígonos, tras intentarlo por ensayo-error usando el dragging, por esa razón introduje en el enunciado de la tarea una representación gráfica de un pentágono regular inscrito en una circunferencia, como ayuda para que decodificando tal representación, pudiesen extraer información que les condujese a alguna estrategia de resolución, y así fue.

Como sucediese para la tarea 2, resolver esta tarea con Geogebra resultó sencillo para la totalidad de los estudiantes, lo que contribuyó a que manifestaran positivas actitudes hacia las matemáticas y evidenciaran todas las actitudes matemáticas, incluida la creatividad, pues como he indicado, los escolares emplearon para su resolución estrategias y caminos de resolución diferentes al que yo había planificado a priori.

Tarea 5: Los caminos seguidos por los estudiantes se ajustaron al previsto, con una ligera variación: algunos estudiantes, en lugar de construir los mosaicos con una única isometría (C3), emplearon para algunas construcciones combinaciones de ellas (C4), por lo que se tendría que añadir la capacidad C4 al camino de aprendizaje pronosticado:



Las anteriores capacidades contribuyeron al desarrollo, en la mayoría de los alumnos, de las competencias seleccionadas al nivel esperado, a excepción de la competencia Argumentar-Demostrar, aunque ya contaba con que los estudiantes presentarían dificultades en esta competencia. Únicamente un porcentaje muy reducido de los escolares obtuvo una demostración deductiva y abstracta de la existencia y unicidad de los 3 mosaicos regulares por sí mismos, quedándose el resto en demostraciones de convicción propia empíricas. A la hora de comunicar, seguían teniendo ciertas limitaciones y solamente los estudiantes que alcanzaron un alto nivel en sus argumentaciones, lo hicieron también en la calidad de sus comunicaciones orales y escritas. Las restantes competencias se desarrollaron como había previsto: modelaron adecuadamente la situación planteada en la tarea, usaron Geogebra con soltura para hacer representaciones precisas, razonaron cómo resolver el problema y lo resolvieron.

Consideré a priori que la primera parte de la tarea, que consistía en construir y encontrar los mosaicos regulares, no supondría dificultades para los estudiantes y así fue. Sin embargo, la segunda parte de la tarea, en la que debían argumentar la existencia y unicidad de estos mosaicos, esperaba plantease problemas a la mayoría de los estudiantes. Por ello, tras un tiempo prudencial en el que los estudiantes trabajaron por su cuenta en la búsqueda de esta justificación sin éxito, hice una sugerencia para ayudarles a salir del bloqueo. La sugerencia estaba contemplada en la ficha de la tarea y ayudó a algunos de los estudiantes a progresar desde una argumentación visual y empleando sus palabras, a una demostración basada en propiedades matemáticas expresada en términos correctos.

En cuanto a la respuesta actitudinal de los estudiantes en esta tarea, observé cómo se mantuvieron motivados, mostrando gusto y confianza en su resolución, lo cual me sorprendió pues la mayoría de los estudiantes encontraron dificultades para llegar a una demostración, más allá de la generación de ejemplos concretos. Por esta razón, dedicamos más de dos sesiones a su realización y en ellas destacó la perseverancia, la precisión y el rigor con que trabajaron, así como la flexibilidad de pensamiento (al cambiar de opinión argumentadamente) y el espíritu crítico, pues la mayoría de los escolares comprobó la bondad de sus resultados antes de responder a las exigencias de la tarea.

La decisión de reducir el tiempo de la tarea 6 (como consecuencia de la realización de la tarea 2, similar a ésta) me llevó a dedicar dos sesiones y media a la realización de esta tarea. Tal decisión que se vio apoyada por las necesidades y respuesta de los estudiantes a ambas. Además, muchos de los estudiantes fueron realizando simultáneamente las tareas 5 y 6, pues cuando construyeron los mosaicos regulares probaron a hacerlo empleando los tres movimientos estudiados, lo que redujo el tiempo que necesitaron para realizar la siguiente tarea.

Tarea 6: En esta tarea el camino de aprendizaje seguido por todos los estudiantes coincidió con el previsto durante la planificación: CG2 --- C2 --- C5 --- C4 --- CG3

La tarea cumplió mi objetivo de consolidar los contenidos ya trabajados de isometrías del plano. Las capacidades implicadas en esta tarea contribuyeron a desarrollar las competencias seleccionadas a un nivel bajo-medio, que era el exigido por la tarea. Solamente algunos estudiantes presentaron las dificultades pronosticadas a la hora de emplear rotaciones (no sabían cuál debía ser el ángulo de giro) y en algún caso puntual, con las traslaciones (dudas sobre el vector adecuado), pero ellos mismos solventaron sus problemas empleando distintas estrategias. En su mayoría, primero probaron por ensayo-error con Geogebra y la retroalimentación ofrecida por el software de estas acciones o pruebas, les llevó a razonar los elementos correctos en cada movimiento empleado para teselar.

Al igual que sucediese para la tarea 2, parecida a ésta, los estudiantes la resolvieron rápidamente gracias al uso de Geogebra, manifestando la totalidad de los estudiantes adecuadas actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas, en parte debido al manejo del software y en parte debido a la sencillez de la tarea.

Tareas 7 y 8: He agrupado estas tareas porque se puede decir que fueron trabajadas simultáneamente en el aula. Los estudiantes comenzaron construyendo en la tarea 7 los mosaicos semirregulares que se les ocurrieron y después, al trabajar la tarea 8, pudieron distinguir cuáles de ellos eran congruentes y cuáles no. Tras finalizar la tarea 7 y viendo el tiempo que habían necesitado para la misma, comprendí que para que los estudiantes encontrasen los ocho mosaicos semirregulares congruentes y después los construyesen con Geogebra se necesitaría más tiempo del que había planificado a priori. Por esta razón, decidí limitar el uso de Geogebra en esta tarea, y les sugerí que obtuviesen en primer lugar

(analíticamente) los ocho modelos y después, a lo sumo, construyesen con Geogebra un par de ellos.

Los caminos de aprendizaje seguidos por los estudiantes se ajustaron a los previstos en ambas tareas, aunque no todos los alumnos llegaron a encontrar los 8 mosaicos pedidos en la tarea 8:

Tarea 7: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- CG2 --- CG3

Tarea 8: CG1 --- CG2 --- C1 --- C2 --- C3 --- C4 --- C5 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3

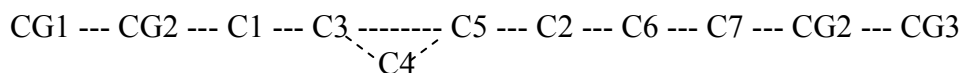
Las tareas contribuyeron al desarrollo de las capacidades esperadas y éstas, a su vez, al de las competencias seleccionadas para cada una de las dos tareas. En efecto, la mayoría de los estudiantes resolvieron ambos problemas, razonando cómo usar los distintos movimientos del plano para obtener representaciones de mosaicos precisas, extrajeron información de las representaciones proporcionadas como ayuda en la ficha, modelaron las situaciones y comunicaron adecuadamente sus estrategias, tanto oralmente como por escrito.

Para lograr el desarrollo de tales capacidades, algunos estudiantes mostraron ciertas dificultades, ya previstas, para las que mis sugerencias contribuyeron en gran medida a su superación. Durante la tarea 7 muchos de los estudiantes no sabían cómo colocar juntos distintos polígonos regulares cuyos lados tuviesen la misma longitud (por ejemplo, tenían dificultades para construir un triángulo equilátero sobre el lado de un cuadrado). Otra de las dificultades con la que contaba a priori para las tareas 7 y 8, era que los estudiantes comenzarían a construir mosaicos semirregulares por ensayo-error, sin plantearse ninguna estrategia para determinar qué combinaciones de polígonos podrían formar tales mosaicos. Muchos de los estudiantes lograron superar de modo autónomo sus dificultades, mientras que otros, que manifestaban niveles más bajos de razonamiento, necesitaron de todas las sugerencias o ayudas que para estas tareas tenía preparadas.

Como conclusión del análisis de actuación de ambas tareas, creo que la tarea 7 fue adecuada para que los estudiantes se familiarizasen con la construcción de mosaicos semirregulares, que era el objetivo principal, mientras que la tarea 8 debería modificarse, tal y como hice sobre la marcha. Es decir, para futuras implementaciones de dicha tarea sería más adecuado que, en primer lugar, los estudiantes obtuviesen los 8 mosaicos analíticamente y después representasen uno o dos de ellos con Geogebra en clase, quedando la construcción de los restantes como tarea para casa, bien con Geogebra o con Lápiz y Papel (para aquellos que no tuviesen posibilidad de hacerlos con el software).

En lo referente a las actitudes de los estudiantes durante ambas tareas, decir que seguían manifestando la mejora actitudinal que la introducción de Geogebra como herramienta de trabajo en el aula produjo en ellos, a pesar de llevar 37 sesiones trabajando con el software (28 sesiones dedicadas a las tareas de isometrías y 9 dedicadas a las tareas 1-8 de mosaicos). Ello me llevó a pensar que la transformación actitudinal no se debía a la novedad del uso de TIC en clase, sino que realmente el gusto y confianza en el uso de Geogebra les proporcionó otra perspectiva de las matemáticas. De este modo, sus actitudes hacia las matemáticas mejoraron y, al mismo tiempo, valoraron más la necesidad de ser precisos, críticos y creativos, a la vez que perseverantes, autónomos y sistemáticos en matemáticas.

Tarea 9: Antes de comenzar la tarea 9 visitamos dos páginas que contenían applets para ver las reglas de transformación de triángulos, cuadrados y hexágonos regulares que permiten obtener mosaicos nazaries, de Escher y resultaban útiles para esta tarea y la siguiente. Los caminos de aprendizaje seguidos por los estudiantes para la construcción de los mosaicos del hueso y del avión, no se ajustaron totalmente a los esperados. Así, muchos estudiantes evidenciaron C2 después de C5, y no todos manifestaron C4 (algunos estudiantes con buen dominio de las isometrías no obtuvieron los motivos mínimos dibujando sobre cuadrícula, sino que emplearon directamente isometrías para deformar el cuadrado base). Finalmente las trayectorias seguidas fueron las siguientes:



Creo que la tarea contribuyó al logro de las capacidades implicadas y también al desarrollo de las competencias de todos los estudiantes al nivel esperado. Destacó la competencia Representar, pues los alumnos decodificaron correcta y rápidamente los mosaicos representados en la ficha, y fueron capaces de obtener una representación precisa de ellos usando Geogebra. Ciertas estrategias que algunos alumnos emplearon para resolver esta tarea no las había planificado y por ello me sorprendieron gratamente. Estos estudiantes manifestaron mayor creatividad y, además, se encargaron de comunicarme las estrategias seguidas para cerciorarse de que eran correctas (construyeron los motivos mínimos y los mosaicos empleando diferentes movimientos del plano y distintos elementos para un mismo movimiento, que demostraban el buen dominio que habían alcanzado de los contenidos de isometrías del plano).

Respecto a las dificultades previstas para esta tarea, he de decir que sólo algunas de ellas se presentaron en el aula en un reducido porcentaje de alumnos y ellos mismos, sin ayuda, lograron superarlas. Por ejemplo, pensaba que iban a tener mayores dificultades para obtener el hueso y el avión y los mosaicos completos formados por esos motivos, pero no fue así.

En cuanto al ámbito actitudinal, decir que el hecho de comenzar visitando dos páginas web que contenían applets de mosaicos de Escher (lagartos, patos,...) les gustó mucho y les permitió coger ideas para la construcción de los mosaicos del hueso y del avión (cuya construcción no les mostré). De este modo, los estudiantes manifestaron gusto, implicación y confianza en poder resolver la tarea por sí mismos, que llevó a la mayoría de ellos a manifestar flexibilidad de pensamiento, autonomía y sistematización, así como perseverancia y precisión y rigor en sus construcciones. Muchos de ellos, resolvieron la tarea rápidamente y tuvieron tiempo para probar distintas formas de resolución (desarrollando así su creatividad), mientras que otros avanzaron más lentamente llegando a obtener una única solución.

La respuesta de los estudiantes en esta tarea superó mis pronósticos, dado que no experimentaron tantas dificultades como yo esperaba, ni necesitaron tanto tiempo como yo había planificado. Por ello, decidí dedicar el tiempo sobrante a la realización de la tarea 10, que por ser una tarea abierta otorgaba mayor espacio a la creatividad de los estudiantes, con lo que gozar de más minutos para su puesta en práctica fomentaría el desarrollo de dicha actitud en los estudiantes, que hasta ahora solamente algunos de ellos habían evidenciado.

Tarea 10: Los caminos de aprendizaje de los estudiantes mostraron ciertos cambios respecto de los previstos. Como ya sucediese en la tarea 9 (similar a ésta), C2 sucedió después de C5 y los estudiantes manifestaron C3 (que para esta tarea podría formularse más específicamente como: “identificar e interpretar la obtención del motivo mínimo de un mosaico de Escher a partir de su representación gráfica estática o ejecutable”), que en principio no había considerado para esta tarea, de modo que la trayectoria de aprendizaje fue la siguiente:

CG1 --- CG2 --- C1 --- C3 --- C4 --- C5 --- C2 --- C6 --- C7 --- CG2 --- CG3

La tarea fue adecuada, y puso de manifiesto las competencias seleccionadas contribuyendo a su mejora. No surgieron dificultades no previstas, ni nuevas capacidades aparte de C3, que apareció en aquellos estudiantes cuyo bloqueo inicial les llevó a visitar las páginas sugeridas que contenían applets de Escher. De estas representaciones ejecutables, los alumnos pudieron extraer información que les ayudó a comprender cómo deformar los polígonos y a definir su

propia estrategia de resolución, superando así su bloqueo inicial y llegando a resolver la tarea. Considero que la interacción con los applets de Escher fue crucial para que muchos de los estudiantes comprendieran qué les pedía la tarea y las infinitas deformaciones que podían hacer a los polígonos base (triángulos, cuadriláteros y hexágonos regulares), de modo que el resultado fuese original y creativo.

Por lo que respecta a las actitudes manifestadas por los escolares durante la realización de esta tarea, mis percepciones coincidieron con las expuestas en la tarea 9. Es decir, se manifestaron muy motivados por la resolución de la tarea, exhibiendo positivas actitudes relacionadas con las matemáticas. Entre todas ellas, al igual que en la tarea 9, destacó la creatividad manifestada por muchos de los estudiantes, dado que no era usual que mostrasen dicha actitud, y la mayoría de ellos no lo hicieron o sólo puntualmente en las tareas precedentes (tareas 1-8).

A modo de resumen del análisis que he realizado para cada tarea individualmente, se puede decir que las trayectorias o caminos de aprendizaje consideradas a priori, apenas se diferenciaron de las que sucedieron en el aula; no obstante, algunas de éstas experimentaron los cambios que ya he expuesto. También se confirmaron todas las dificultades previstas para un gran porcentaje⁵² de los estudiantes, en torno al 70%, que ellos mismos superaron con las ayudas planificadas: algunas incluidas en los enunciados de las tareas y otras proporcionadas en el aula durante el transcurso de la realización de dichas tareas. Asimismo, la secuencia de tareas diseñada contribuyó al desarrollo de las competencias seleccionadas para cada una de las tareas, con distintos niveles de dominio y su puesta en práctica en el aula con Geogebra incidió notablemente en la transformación actitudinal experimentada por los estudiantes.

Respecto a la adecuación o idoneidad de las tareas seleccionadas para ser trabajadas con Geogebra, se puede concluir que todas ellas resultaron adecuadas, a excepción de las tareas 3 y 8, que deberían revisarse antes de su nueva puesta en práctica en el aula. La tarea 3 ya he expuesto que, según el nivel cognitivo de los estudiantes, puede merecer la pena o no dedicar tiempo a que ellos intenten obtener una argumentación-demostración formal basada en propiedades matemáticas. La tarea 8 sería conveniente fraccionarla en dos partes, una primera

⁵² Este porcentaje hace referencia al porcentaje medio de estudiantes que manifestaron las dificultades previstas durante las sesiones en las que trabajaron las diez tareas. Estos datos estaban recogidos en mis diarios para cada grupo, dónde anoté quiénes necesitaron las ayudas programadas y quiénes no. Dicho valor medio se obtuvo de cuantificar en cada sesión el número de estudiantes con dificultades y después calcular su porcentaje asociado.

para ser realizada en el aula con Geogebra, y la segunda para que los alumnos la trabajen en casa.

A la vista de la puesta en práctica del diseño y del análisis de actuación, considero adecuada la planificación realizada (secuencia de tareas) y los recursos elegidos para su realización (software Geogebra y páginas web visitadas). La enseñanza por descubrimiento guiado y la decisión de que los estudiantes trabajasen colaborativamente por parejas también se vieron respaldadas en la práctica, resultando un maridaje perfecto de ambas con el uso de tecnologías en el aula.

Creo que la bondad del diseño se debe por una parte, a la experiencia piloto que llevé a cabo durante el ciclo 1, que me mostró los caminos, errores, y dificultades más frecuentes de los estudiantes cuando trabajaron estos contenidos con TIC y, por otra parte, a los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, que me ayudaron a conseguir un conocimiento más profundo acerca de los contenidos trabajados y su proceso de enseñanza-aprendizaje. También, a la hora de optimizar el trabajo con Geogebra, me ayudó la formación⁵³ recibida sobre el uso de SGD, así como que el hecho de resolver las actividades diseñadas, con anterioridad a su puesta en práctica en el aula y del mismo modo a cómo creía que las realizarían mis estudiantes teniendo en cuenta sus conocimientos previos.

Una vez concluido el análisis de la bondad del diseño y puesta en práctica de la secuencia de tareas planificada basada en el uso de Geogebra, quiero añadir información acerca del modo en que realicé la evaluación de los contenidos trabajados con el software, como parte de mi labor docente, es decir, con vistas a, además de promover el aprendizaje de los estudiantes, obtener una calificación para cada uno de ellos en la unidad didáctica de teselaciones del plano y mosaicos (tareas GG). Antes de continuar, quiero aclarar que adopté estos mismos criterios de evaluación para la unidad didáctica sobre geometría y semejanza del plano (tareas LP), siendo este modo de evaluar diferente del que seguí con estos grupos de estudiantes con anterioridad a la puesta en práctica de esta experiencia (durante el primer trimestre del curso).

Según los acuerdos del departamento de Matemáticas al que yo pertenecía, cada unidad didáctica se evaluaba teniendo en cuenta el comportamiento y participación en clase, así como el trabajo realizado por los estudiantes en casa (tareas diarias, trabajos que debían

⁵³ Curso online: “Geometría a través de software libre” ofertado por la Sociedad THALES, de formación específica sobre el uso educativo de este software

presentar los estudiantes de carácter voluntario y obligatorio) y la calificación obtenida en el examen que realizábamos tras finalizar cada unidad didáctica.

Para evaluar los contenidos de las tareas LP y GG, y dado que había cambiado mi metodología de trabajo en el aula, consideré adecuado cambiar el modo de evaluar la adquisición de estos contenidos por parte de los alumnos. Los cambios metodológicos introducidos para el estudio de estos contenidos fundamentalmente consistieron en:

- Centrar la actividad de los estudiantes en la resolución de problemas contextualizados realizados por parejas de modo colaborativo, con los que intentaba que los alumnos fuesen adquiriendo los contenidos matemáticos implicados en ellas (geometría y semejanza del plano para las tareas LP y teselaciones del plano y mosaicos para las tareas GG). En unidades didácticas anteriores, en lugar de promover el aprendizaje por descubrimiento guiado, mi metodología se ajustaba más a un aprendizaje expositivo, pues primero explicaba los contenidos en la pizarra con ayuda de ejemplos y después los estudiantes individualmente realizaban tareas (algunas incluidas en el libro de texto, otras propuestas por mí) que respondían a tareas mecánicas no contextualizadas y a problemas contextualizados sencillos, que les resultaran familiares. De este modo, tanto las tareas LP como las tareas GG supusieron un cambio respecto a mi enseñanza previa.
- Proporcionar a cada pareja de estudiantes una ficha de cada tarea, que completaron durante su proceso de resolución en el aula. La información que debían incluir en ella era el informe o protocolo seguido en la resolución: estrategias y resultados hallados en cada tarea. Los alumnos no estaban acostumbrados a realizar este tipo de informes cuando resolvían las tareas, pero durante las tareas LP y GG se habituaron a ello.
- No realizar un examen o prueba escrita de los contenidos estudiados al finalizar ambas unidades didácticas, sino que les proporcioné dos relaciones de ejercicios sobre estos contenidos, que fueron realizadas individualmente en casa y posteriormente me entregaron.

Con esta nueva metodología, la evaluación se centró en el trabajo realizado por los estudiantes durante cada sesión de clase y también en sus casas. Durante las sesiones de aula realicé una observación continua de cada pareja de estudiantes y tras finalizar cada tarea, evalué los protocolos escritos entregados por cada una de ellas (y los archivos de Geogebra para las tareas GG), en conjunción con la información recogida durante la observación de las sesiones en las que trabajaron dicha tarea. Ello me permitió valorar las actitudes y

competencias desarrolladas por cada estudiante en función de su perfil actitudinal y cognitivo previo, constituyendo esta evaluación un 70% de la nota de la unidad en cuestión. El 30% restante respondía a la calificación obtenida en las relaciones de ejercicios individuales entregadas por cada alumno.

La evaluación a nivel docente no resultó compleja, aunque me exigió dedicarle diariamente el tiempo necesario para anotar mis observaciones de aula y corregir los informes de cada tarea, concluyendo este proceso con una calificación para el trabajo realizado en cada tarea por cada pareja de estudiantes, en función de los logros obtenidos y del interés y actitud mostrados durante su desarrollo en el aula. No estimé oportuno realizar un examen al término de las unidades correspondientes a las tareas LP y GG, por considerar suficiente la información recogida mediante la observación y a través de los trabajos entregados por los estudiantes.

Observé una mejora de las calificaciones obtenidas por la mayoría de los estudiantes durante las tareas realizadas con Geogebra respecto al trabajo previo sin este software (unidades trabajadas durante el primer trimestre del curso y unidad correspondiente a las tareas LP). Esta mejora respondía no sólo a avances cognitivos, sino actitudinales, los cuales sintetizo en los siguientes datos:

- Con respecto a las actitudes, puedo aportar información relativa a las actitudes hacia las matemáticas, que quedó patente cuando obtuve la calificación de cada estudiante. Durante las tareas LP, el 30.43% de los alumnos entregó las tareas o relaciones de ejercicios que debían realizar en casa, mostrando dificultades para resolver bastantes de las tareas propuestas. Durante el trabajo con Geogebra, el 86.96% de los estudiantes entregó las relaciones o tareas para casa (homólogas a las de LP, para los contenidos trabajados con Geogebra) con todas las actividades resueltas y la mayoría de ellas de forma correcta. Con estas cifras se aprecia en primer lugar un cambio de actitud hacia la asignatura en más de la mitad de los estudiantes (56.53%), dado que hasta el trabajo con el software no realizaban las tareas de casa, sin embargo, se mostraron interesados en hacerlo y más implicados en mejorar su calificación en matemáticas durante el trabajo con Geogebra.
- Respecto al desarrollo cognitivo experimentado durante la experiencia con SGD, puedo decir que las calificaciones de los estudiantes durante el primer trimestre y durante las tareas LP fueron similares para la mayoría de ellos. Al comparar estas calificaciones con la obtenida durante el trabajo con Geogebra, sí que se observa una mejoría considerable.

El 84.78% mejoró su calificación, de los cuales, el 50% logró con esta mejora pasar de una calificación negativa (inferior a 5) a una calificación positiva en estos contenidos (nota de 5 o superior). Experimentaron una mejoría leve el 8.69%, aunque este avance no fue suficiente para que obtuviesen un cinco durante las tareas realizadas con SGD. El 2.17% no experimentó cambios al usar las tecnologías y el 4.35% empeoró la calificación obtenida con anterioridad al trabajar con el software.

Resumiendo todo lo anteriormente expuesto, y como cierre al análisis realizado, quiero comentar que como profesora la experiencia me resultó muy gratificante, porque observé cómo mis alumnos al trabajar con Geogebra se implicaron y disfrutaron más en matemáticas, mostrándose más trabajadores y con mayor autoconfianza, no solamente en clase sino también en sus casas. Este cambio provocado por el gusto y confianza en el software, junto con sus atributos y ventajas sobre métodos de lápiz y papel y los beneficios del trabajo colaborativo, condujo a muchos de ellos a mejorar en todas o algunas de sus actitudes y competencias matemáticas. De este modo, los estudiantes llegaron a comprender mejor e interiorizar los contenidos geométricos trabajados, lo cual se tradujo en una evaluación más positiva en esta unidad didáctica.

7.3. RESPUESTA AL PRIMER OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

A partir de la planificación de la secuencia didáctica basada en el uso de Geogebra, llevada a cabo mediante el procedimiento del Análisis Didáctico, de su puesta en práctica y de su valoración a través del análisis de actuación, es posible dar respuesta al objetivo 1 de esta investigación:

Diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de software de Geometría dinámica (SGD), utilizando el Análisis Didáctico.

Se ha comprobado que es posible diseñar, poner en práctica y evaluar secuencias de tareas para ser realizadas con TIC que mejoren el proceso de aprendizaje de los escolares y al mismo tiempo, el proceso de enseñanza de los profesores. Para ello, el procedimiento del Análisis Didáctico ha resultado muy valioso. Por una parte, ha sido de gran utilidad para el diseño de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, contribuyendo a que su puesta en práctica en el aula haya sido muy satisfactoria. Por otra parte, ha permitido la evaluación de dicha secuencia mediante el análisis de actuación realizado, el cual ha revelado que las tareas son adecuadas para el estudio de los contenidos matemáticos seleccionados (teselaciones del

plano) empleando como recurso el software Geogebra y propician el desarrollo de las actitudes y competencias matemáticas que se pretendían desarrollar y potenciar en los estudiantes. Además, la puesta en práctica de dicha secuencia en el aula, ha puesto de manifiesto no solamente la adecuación de las tareas diseñadas, sino que también ha informado de la adecuación del software elegido y del acierto de trabajar de modo colaborativo.

7.4. OBSERVACIÓN

El proceso de observación se desarrolló desde el momento en que comenzó la acción. Así, a la vez que ésta se desarrollaba, fui recabando datos de diversa índole a través de los distintos instrumentos diseñados para ello, siendo ésta la fase de observación propiamente dicha.

Con la intención de recoger suficiente y variada información que me permitiera, en la fase de reflexión, dar respuesta a los objetivos de investigación, no realicé una observación pasiva de las actitudes y competencias manifestadas por los alumnos, sino que traté de crear situaciones de aprendizaje (durante las tareas con lápiz y papel y con Geogebra) que permitieran, por un lado, modificarlas y, por otro lado, informar del modo en que esa evolución tuvo lugar. Para ello, utilicé distintos instrumentos en la recogida de información, presentados en el capítulo 6 (apartados 6.5.1 y 6.5.2), que expongo resumidamente en la siguiente tabla:

Tabla 7-2. Instrumentos de recogida de datos usados para dar respuesta a cada objetivo

Instrumentos	Objetivos	Objetivo 1 (Secuencia de enseñanza basada en uso de Geogebra)	Objetivos 2 y 3 (Actitudes)	Objetivos 4 y 5 (Competencias)
Cuestionario “Actitud hacia las mates”			✓	
Cuestionario MIO			✓	
Buzón de sugerencias			✓	✓
Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓		✓
Archivos de C.a.R. y Geogebra		✓	✓	✓
Diarios		✓	✓	✓
Parrillas de observación		✓	✓	✓
Grabaciones de audio y vídeo			✓	✓

Con los mencionados instrumentos recogí información que usé para evaluar a mis alumnos, tanto en términos formativos como en términos sumativos, según he expuesto en el apartado anterior. Por otro lado, el análisis de estos datos, una vez concluido el proceso didáctico, permitiría dar respuesta a los objetivos 2, 3, 4 y 5 de investigación.

Con vistas al análisis final de toda la información recogida durante la fase de acción, se tomó la decisión de seleccionar una muestra de estudiantes, para ser observados y analizados más en detalle durante la realización de las tareas GG, con Geogebra, por las razones que se expondrán en el siguiente apartado. Ello condicionó que la observación de aula fuese diferente para las tareas LP y GG.

Durante las tareas LP todos los estudiantes fueron observados por igual y a su término, realicé un análisis global de toda la información recabada, que me permitió tener una visión más ajustada del perfil actitudinal y cognitivo de cada estudiante, y seleccionar los estudiantes que formarían parte de la muestra, en la que se centraría la observación durante la realización de las tareas con Geogebra. Así, durante las tareas GG, la observación se centró en los estudiantes de la muestra para los que, además de la información recogida para los restantes estudiantes de ambos grupos, empleé parrillas de observación de actitudes y competencias y escribí diarios individuales. El análisis de los estudiantes de la muestra permitiría informar de la posible transformación de actitudes de estos alumnos con respecto a su situación de partida, así como describir cómo resolvían las tareas en términos de competencias informando de las aportaciones del software a la adquisición de las mismas. La comparación sistemática de las competencias manifestadas por los alumnos durante las tareas con lápiz y papel y con Geogebra, no se contempló entre los objetivos de investigación, mientras que sí formaba parte de éstos esa comparación para el campo actitudinal.

7.4.1. Muestra de Estudiantes

La primera decisión en cuanto al número de estudiantes con los que llevar a cabo el estudio, fue la de considerar dos grupos de estudiantes de 3º de ESO. No obstante, el número de sujetos para ser estudiados (en torno a los 50) resultaba muy elevado, por dos razones:

- La decisión de recoger las grabaciones de audio de cada tarea con Geogebra para cada pareja de estudiantes, así como la información recopilada mediante los restantes instrumentos expuestos en la tabla 7-2, devolvería un ingente volumen de datos para cada par de estudiantes.

▪ La intención de emplear el software Atlas.ti, por tratarse de un programa especialmente indicado para analizar conjuntamente toda la información recogida, exigía un trabajo minucioso y exhaustivo previo con los datos, que sobrepasaría las dimensiones de este trabajo de investigación, así como la capacidad de una sola investigadora.

Así pues, se decidió seleccionar una muestra intencional de 12 estudiantes (seis estudiantes de cada grupo) para realizar un estudio de casos más detallado. El proceso de selección de los estudiantes que debían formar parte de la muestra se realizó durante la acción. Así, una vez realizadas con los alumnos las tareas LP, se analizaron las actitudes relacionadas con las matemáticas y el rendimiento de los estudiantes en la asignatura antes del trabajo con Geogebra. Después, teniendo en cuenta los resultados de dichos análisis, conjuntamente con mi propia experiencia y sentido común, fruto del trabajo previo realizado con ambos grupos de estudiantes, se seleccionaron 12 estudiantes tratando de cubrir los posibles perfiles actitudinales y cognitivos presentes en mis aulas:

* Estudiantes con un rendimiento previo suficiente, es decir, alumnos que habían obtenido una calificación de suficiente o superior antes de la experiencia con LP y Geogebra y que no habían manifestado grandes dificultades cognitivas a la hora de resolver todas las tareas LP o al menos la mayoría de ellas. Distinguí entre:

- Alumnos que manifestaban adecuadas actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas.
- Alumnos que evidenciaban actitudes relacionadas con las matemáticas inadecuadas:
 - Actitudes matemáticas insuficientes y actitudes hacia las matemáticas positivas.
 - Actitudes matemáticas suficientes y actitudes hacia las matemáticas negativas.
 - Alumnos con ambas categorías actitudinales negativas.

* Estudiantes con un rendimiento previo insuficiente, es decir, alumnos que habían obtenido una calificación negativa antes de la experiencia con Geogebra y que evidenciaban dificultades o deficiencias cognitivas al resolver las tareas LP. Podían clasificarse a su vez en dos grupos:

- Alumnos que manifestaban adecuadas actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas.
- Alumnos que evidenciaban actitudes relacionadas con las matemáticas inadecuadas:
 - Actitudes matemáticas insuficientes y actitudes hacia las matemáticas positivas.
 - Actitudes matemáticas suficientes y actitudes hacia las matemáticas negativas.
 - Alumnos con ambas categorías actitudinales negativas.

Se consideraron merecedores de especial interés, aquellos estudiantes que mostraban inadecuadas algunas de las dos variables consideradas: rendimiento y actitudes o ambas insuficientes, dado que se trataba de informar de la posible mejora de esta situación previa debida al uso de Geogebra. No obstante, también parecía conveniente seleccionar unos pocos estudiantes con un perfil previo adecuado, para describir en qué modo afectaba o influía el uso del software en estudiantes que no solían mostrar dificultades en nuestra asignatura, por ello se seleccionaron dos estudiantes con actitudes buenas y rendimiento suficiente y bueno, respectivamente, descartando el perfil actitudes adecuadas-rendimiento bueno, por considerar suficiente el estudio de dos estudiantes con perfiles adecuados. De todos los perfiles antes descritos y que se contemplan en la tabla 7-3, no se encontró entre mis estudiantes ninguno que se ajustase a las combinaciones: actitudes inadecuadas-rendimiento bueno o actitudes buenas-rendimiento insuficiente. Sintetizo los distintos perfiles a los que respondían los estudiantes que se seleccionaron para formar parte de la muestra:

Tabla 7-3. Perfiles de los alumnos de la muestra

Actitudes	Inadecuadas	Adecuadas	Buenas
Rendimiento			
Insuficiente	✓	✓	
Suficiente	✓	✓	✓
Bueno			✓

Durante las tareas con LP observé a todos los estudiantes que participaron en la experiencia, realizando en mayor detalle la recogida de información actitudinal. Durante las tareas con Geogebra, me centré en la observación de los estudiantes de la muestra. Al tener menos sujetos que observar, la información recogida sobre ellos, especialmente sobre desarrollo de competencias, fue más precisa y rica en matices que la recogida durante las tareas LP. De este modo, pude informar detalladamente de las actitudes y competencias que los escolares de la muestra evidenciaron durante las tareas con este software y si aprecié diferencias con respecto a la situación de partida (tareas LP), aunque solamente estaba interesada en esta comparación para el campo actitudinal. Respecto al ámbito cognitivo, mi intención era la de describir cómo resolvían las tareas en términos de competencias, pero no trataba de hacer una comparación exhaustiva de sus competencias durante las tareas LP y con Geogebra. La razón para ello es que considero que sería una tarea bastante más compleja que la de estudiar las transformaciones actitudinales producidas por el manejo del software. La comparación de

actitudes entraña menor dificultad, porque éstas son más fácilmente observables que las competencias y no están ligadas a las tareas con las que trabajar los contenidos seleccionados.

Resumiendo todo lo anteriormente expuesto acerca de cómo se llevó a cabo la recogida de información durante la observación y qué instrumentos se emplearon para ello, para los estudiantes de ambos grupos y para los seleccionados para formar parte de la muestra, incluyo la siguiente tabla:

Tabla 7-4. Instrumentos empleados análisis final de actitudes y competencias

<i>Instrumentos</i>	<i>¿Para quién?</i>	<i>¿Cuándo?</i>
Cuestionario “Actitud hacia las mates”	Todos	Inicio y fin de la experiencia
Cuestionario MIO	Todos	Fin de la experiencia
Entrevistas grupales semiestructuradas	Todos	Fin de la experiencia
Grabaciones de audio de cada alumno	Muestra	Durante tareas GG
Grabaciones de vídeo de cada grupo	Todos	Algunas tareas LP y GG
Archivos de Geogebra de cada tarea	Todos	Durante tareas GG
Protocolos escritos de resolución de tareas	Todos	Durante tareas LP y GG
Buzón de sugerencias	Todos	Fin de la experiencia
Parrillas de observación actitudes	Todos	Durante tareas LP
	Muestra	Durante tareas LP y GG
Parrillas de observación de competencias	Muestra	Durante tareas GG
Diarios de la profesora grupales	Todos	Durante tareas LP y GG
Diarios de la profesora individuales	Muestra	Durante tareas GG

A lo largo de este capítulo he comenzado exponiendo el contexto en el que esta investigación ha tenido lugar. A continuación, he atendido a su fase de Acción que, junto con la fase de Planificación presentada en el capítulo 6, me ha permitido dar respuesta al primer objetivo de investigación: *Diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de software de Geometría dinámica (SGD), utilizando el Análisis Didáctico.*

Se cierra el capítulo describiendo la fase de Observación, con la que también concluye el bloque destinado a exponer la metodología de trabajo y su desarrollo, incluyendo la puesta en práctica. A continuación, en el bloque siguiente, se analizan e interpretan los datos recogidos durante la puesta en práctica de la experiencia en el aula, para dar respuesta a los objetivos 2, 3, 4 y 5 de esta investigación.



BLOQUE III:

Análisis global y Reflexión



Teachers are asked frequently to change how they teach, but they seldom have meaningful data that encourages them to do so. (Helen M. Doerr & Patricia P. Tinto)

En este bloque se aborda el análisis de los datos recogidos durante la puesta en práctica de la secuencia didáctica basada en el uso de Geogebra, el cual permitirá dar respuesta a los objetivos 2, 3, 4 y 5 de la presente investigación. Todo ello forma parte de la fase de Reflexión que, como ya he expuesto con anterioridad, se ha estructurado en dos partes: la reflexión llevada a cabo con fines didácticos y la reflexión realizada con fines de investigación, para informar los objetivos mencionados. Esta última fase es la que se presenta en este bloque, estructurando su exposición en tres capítulos.

En el capítulo 8 se exponen las consideraciones generales bajo las que se ha llevado a cabo el análisis de datos relativo a la transformación de actitudes y competencias con Geogebra, de interés para poder comprender y valorar dicho análisis. En él se incluyen las fases en las que éste se ha estructurado y se especifica el modo en que ha tenido lugar.

El capítulo 9 está dedicado al análisis de datos realizado para dar respuesta a los objetivos 2 y 3 de esta investigación. Dicho análisis permite informar de las transformaciones actitudinales y cognitivas de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra (objetivo 2), así como de las características o atributos del software responsables de tal transformación (objetivo 3).

El capítulo 10, que cierra este bloque, presenta el análisis de datos realizado para dar respuesta a los objetivos 4 y 5 de este trabajo, el cual describe el desarrollo de competencias matemáticas experimentado por los estudiantes al trabajar la secuencia de enseñanza-aprendizaje con Geogebra (objetivo 4), mostrando qué características o atributos del software pueden considerarse los causantes de tal desarrollo (objetivo 5).

CAPÍTULO 8

Procedimiento para el análisis de datos

En este capítulo se presenta el modo en el que se llevó a cabo el análisis de los datos recogidos durante la puesta en práctica de la secuencia didáctica basada en el uso de Geogebra. Se muestran, en primer lugar, las fases en las dicho análisis tuvo lugar y los distintos métodos empleados para realizarlo. A continuación, se exponen las consideraciones y criterios que se tuvieron en cuenta para la codificación y posterior análisis de los datos, así como la técnica empleada para extraer conclusiones (triangulación). Por último, se presenta un esquema del análisis realizado para informar de las transformaciones actitudinales y del desarrollo de competencias de los estudiantes, que servirá de guía para la lectura de los capítulos 9 y 10, en los que se expone detalladamente dicho análisis.

8.1. FASES DE ANÁLISIS

Antes de exponer el modo en que se desarrollaron las distintas fases de análisis, he de retomar la cuestión de los conjuntos de estudiantes objeto de análisis. En el capítulo 7 (p. 215) indiqué los dos conjuntos que a priori se había planificado estudiar: total de estudiantes (correspondientes a las dos clases de 3º de ESO) y muestra de doce estudiantes (seis de cada clase). Sin embargo, tras la puesta en práctica de la experiencia con Geogebra, la cantidad ingente de información recogida de los estudiantes de la muestra (cuestionarios, diarios, buzones de sugerencias, parrillas de observación de actitudes y competencias, archivos de Geogebra y protocolos escritos de resolución de cada tarea, así como archivos de audio de cada sesión con Geogebra), condujo a la decisión de realizar un estudio de casos, seleccionando para ello a 5 de los 12 estudiantes de la muestra, los cuales estaban distribuidos entre 3º A y 3º B.

La elección de los cinco estudiantes que formaron parte del estudio de casos: A3, A7, A8, A9 y A10, estuvo condicionada por el análisis global que se realizó previamente para los estudiantes de la muestra (análisis de sus parrillas de observación y de los diarios que escribí

para cada estudiante), así como por la información adicional de cada uno de ellos que, como profesora del grupo, había ido recogiendo desde el inicio del curso escolar.

Los resultados obtenidos por algunos estudiantes superaban los esperados, y por ello, se decidió seleccionarlos, fue el caso de A3, A8 y A9. Los estudiantes A3 y A9 podían definirse tanto actitudinal como cognitivamente semejantes, siendo su situación previa bastante negativa y fácilmente mejorable; no obstante, alcanzaron niveles de desarrollo en algunas actitudes y competencias que superaron mi pronóstico. El caso de A8 era distinto, pues este estudiante manifestaba actitudes y competencias suficientes y podía considerarse representante del perfil más habitual en mis aulas de matemáticas de 3º de ESO, por ello, merecía especial interés. Las otras dos estudiantes A7 y A10 mejoraron según mis expectativas. A7, cuyas actitudes y rendimiento eran inadecuados durante las tareas LP, experimentó una evolución en ambos campos, aunque ésta no le llevó a mejorar en todas las actitudes ni en todas las competencias, ni tampoco a alcanzar el mismo nivel de desarrollo en cada una de ellas. La estudiante A10, se incluyó porque quería mostrar los efectos que el uso del software produjo en ella que, hasta entonces, había manifestado actitudes y rendimiento adecuado en matemáticas, matizando en qué actitudes y competencias mejoró su nivel previo. Sintetizando lo anterior, de entre los doce estudiantes de la muestra, los que fueron seleccionados para formar parte del estudio de casos, son los que se destacan en azul en la siguiente tabla:

Tabla 8-1. Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada

Actitudes	Inadecuadas	Adecuadas	Buenas
Rendimiento			
Insuficiente	A2, A3, A7, A9	A5, A11	
Suficiente	A6	A1, A8, A12	A10
Bueno			A4

Observando la tabla anterior surge de manera natural la siguiente cuestión: ¿por qué no se seleccionaron los estudiantes A4, A6 y A5 ó A11, de modo que el análisis cubriese todos los perfiles encontrados en mis aulas? Las razones fueron principalmente las que ahora se exponen. Los estudiantes A4 y A11 respondían a perfiles opuestos y no frecuentes en los alumnos de este nivel y por ello, no se consideró relevante su estudio: A4 era un estudiante con especial dotación intelectual, mientras que A11 era una alumna con serias dificultades cognitivas especialmente en las materias instrumentales (fue propuesta por el equipo

educativo del curso anterior para cursar 3º de ESO mediante el programa de Diversificación Curricular que, sin embargo, ella y su familia rechazaron, por lo que intentó seguir el currículo ordinario sin éxito). La no selección de A5 y A6, cuyo análisis sí que merecía interés, responde a que la información recogida de ambos resultó incompleta, pues el análisis de sus archivos de audio reflejó una pérdida importante de información, que representaba un obstáculo para el estudio de casos que pretendía realizar.

Para los restantes estudiantes pertenecientes a la muestra de estudiantes (A1, A2, A4, A5, A6, A11 y A12), se llevó a cabo un análisis individual menos pormenorizado que para los estudiantes seleccionados para el estudio de casos que puede consultarse en el Anexo I.

Teniendo en cuenta lo anterior, las fases en las que se ha llevado a cabo el análisis de la información recogida en la experiencia, son las siguientes:

▶ **Análisis del total de estudiantes participantes en la experiencia.** Se analizaron 46 estudiantes: 24 y 22 estudiantes pertenecientes a los grupos 3º A y 3º B, respectivamente. Para el caso de las actitudes relacionadas con las matemáticas, se trianguló la información obtenida de los análisis de las respuestas a los cuestionarios, de los diarios escritos para cada grupo, de las entrevistas grupales realizadas y del buzón de sugerencias. Para el análisis de competencias a nivel grupal, se trianguló la información recogida en mis diarios para cada grupo, en los protocolos escritos de resolución y en los archivos de Geogebra de cada tarea para cada pareja de estudiantes.

▶ **Análisis global de los estudiantes de la muestra.** Se estudiaron conjuntamente los doce estudiantes presentados en la Tabla 8-1, cuya selección ya justifiqué en el capítulo 7 (p. 217), de los cuales seis pertenecían a cada grupo de estudiantes. Para el caso de las actitudes, se contrastaron los resultados de los análisis realizados a los datos recogidos en las parrillas de observación de actitudes con los obtenidos en los cuestionarios, con las entradas de mis diarios para cada estudiante y con sus aportaciones a los buzones de sugerencias. Para informar del desarrollo de competencias, se trianguló la información obtenida en las parrillas de observación de competencias con la recogida en mis diarios, en los informes escritos de las tareas de cada estudiante, así como en sus archivos de Geogebra.

▶ **Análisis individual de los siete estudiantes de la muestra no seleccionados para el estudio de casos.** Para ilustrar la evolución de estos estudiantes, se informó del perfil

actitudinal previo de cada alumno y se siguió el mismo proceso de análisis que para el estudio global de la muestra, pero esta vez se consideró la transformación de cada uno de ellos por separado atendiendo a su respectiva situación actitudinal y cognitiva inicial. Al ser estos análisis menos detallados que los realizados para los estudiantes del estudio de casos, y dada la extensión de los capítulos 9 y 10, el análisis individualizado de A1, A2, A4, A5, A6, A11 y A12 durante el trabajo con Geogebra, no se ha incluido en tales capítulos para aligerar su lectura (Anexo H).

► **Estudio de los cinco casos seleccionados de entre los estudiantes de la muestra.**

Con el objetivo de informar tanto de las transformaciones actitudinales como de competencias de estos estudiantes, se realizó un análisis por separado de la información recogida con cada instrumento (cuestionarios, mis diarios para cada uno de ellos, buzones de sugerencias, parrillas de observación de actitudes y competencias, archivos de Geogebra y protocolos escritos de resolución de cada tarea y archivos de audio de cada sesión GG), que después se trianguló con ayuda del software Atlas.ti.

Como síntesis de la información presentada respecto a las fases o niveles de análisis, incluyo la siguiente tabla:

Tabla 8-2. Fases de análisis según conjuntos de estudiantes implicados

Fase o Nivel de Análisis	Conjunto de estudiantes
Nivel 1	Total de estudiantes
Nivel 2	Muestra de estudiantes
Nivel 3	Estudio de casos

Incluyo también una tabla que recoge cuáles de los instrumentos empleados para la recogida de datos expuestos en el apartado 6.5 se emplearon para cada conjunto de estudiantes y con qué fin; es decir, sobre cuáles objetivos de la investigación informaron:

Tabla 8-3. Instrumentos empleados para análisis actitudes y competencias por conjuntos de alumnos

<i>Instrumentos</i>	Análisis Actitudes	Análisis Competencias	Conjunto de estudiantes
Cuestionario “Actitud hacia las mates”	✓		Todos
Cuestionario MIO	✓		Todos
Entrevistas grupales	✓	✓	Todos
Grabaciones de audio	✓	✓	Estudio de casos
Grabaciones de vídeo	✓	✓	Todos
Archivos de Geogebra	✓	✓	Todos
Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓	Todos
Buzón de sugerencias	✓	✓	Todos
Parrillas de observación actitudes	✓		Todos-Muestra
Parrillas de observación de competencias		✓	Muestra
Diarios de la profesora grupales/individuales	✓	✓	Todos/Muestra

En los capítulos dedicados al análisis de actitudes y competencias (capítulos 9 y 10), expongo más detalladamente los instrumentos que para cada grupo de estudiantes se analizaron y contrastaron, y el modo en que se llevó a cabo este proceso.

8.2. MÉTODOS DE ANÁLISIS

Dentro de los experimentos de enseñanza transformativos y dirigidos por una conjetura, se diferencian dos análisis: un análisis continuo, realizado durante la acción (apartado 7.2.1) y un análisis final, realizado al término de la intervención en el aula, que es el que presento en este bloque. Dicho análisis conduce a la construcción de una historia coherente del desarrollo del aprendizaje de los alumnos, y permite responder argumentadamente a los objetivos de investigación.

Los métodos empleados para este análisis final, dependen de los instrumentos utilizados para recoger los datos. En esta investigación, se usaron los instrumentos expuestos en la tabla 8-3, los cuales permitieron realizar un doble análisis: cuantitativo y cualitativo.

Para el análisis cuantitativo realizado, de tipo estadístico, se usaron los software SPSS 15.0 y Excel. Dichos análisis se realizaron para las respuestas de todos los estudiantes a los cuestionarios y para los datos recogidos en las parrillas de observación de actitudes y

competencias de los estudiantes pertenecientes a la muestra seleccionada. Para el análisis cualitativo de los datos se recurrió al software Atlas.ti 5.0, que facilitó la organización de la información para detectar categorías, elementos y procesos emergentes. Dicho software, específico para el análisis cualitativo de textos, imágenes, archivos de audio y vídeo, se empleó para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos, y permitió integrar la información obtenida de los restantes instrumentos empleados para la toma de datos. Las consideraciones relativas al modo en que ambos análisis se llevaron a cabo se especifican a continuación.

8.3. CONSIDERACIONES Y CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS

Como he comentado anteriormente, se realizó un doble análisis: cuantitativo, para el análisis de los datos recogidos mediante los cuestionarios y las parrillas de observación, y cualitativo, para el análisis de la información recogida mediante los restantes instrumentos empleados. Expongo en este apartado algunas cuestiones referentes al modo en que dichos análisis se llevaron a cabo.

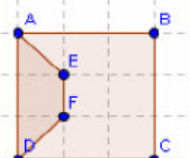
Empezando por los análisis cuantitativos, el software con el que se llevaron a cabo todos los análisis de los datos fue SPSS 15.0. Además, Excel sirvió fundamentalmente para la generación de gráficos (estéticamente más adecuados que los obtenidos con dicho software estadístico). El programa SPSS se empleó para realizar tests de comparación de muestras relacionadas en busca de posibles diferencias significativas en las respuestas de los estudiantes a los ítems del cuestionario de “Actitudes hacia las matemáticas” antes (Pretest) y después (Postest) del uso de las TIC. Para ello, se consideró que existían diferencias significativas cuando el nivel de significatividad era inferior a 0.05 o, lo que es lo mismo, la probabilidad de encontrar tales diferencias era superior al 95%. También se empleó este software para validar el cuestionario “Me interesa tu opinión” (se realizaron análisis de fiabilidad y consistencia, así como un análisis factorial a sus 22 ítems, que ya comenté en la página 184 y que se presenta en el Anexo E) y para el posterior análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems de dicho instrumento. Asimismo, se utilizó SPSS para analizar la información registrada en las parrillas de observación de actitudes y competencias, una vez codificada la información recogida en éstas, tal y como describí en las páginas 187-191.

Respecto a los análisis cualitativos realizados con el software Atlas.ti, quiero exponer la forma en la que se llevaron a cabo, así como los criterios que se tuvieron en cuenta. El

análisis realizado con Atlas.ti permitió reconstruir el desarrollo de las sesiones en las que los estudiantes realizaron las tareas con Geogebra. Para ello, el primer paso fue transcribir los archivos de audio y analizar los archivos de Geogebra y los protocolos escritos de resolución de cada tarea. Después, se introdujeron estos datos en Atlas.ti, integrándolos de modo que cada sesión con Geogebra quedase perfectamente reconstruida, siendo un ejemplo de ello el siguiente fragmento de la tarea 9 realizada por los estudiantes A8 y A15:

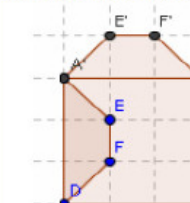
SESIÓN 11. Tarea 9 de A8 y A15

Antes de comenzar la tarea 9 hemos estado viendo dos páginas de Internet: una sobre deformaciones de polígonos y otra sobre Mosaicos de Escher. Se ponen a trabajar inmediatamente y dibujan un cuadrado y un polígono en su interior



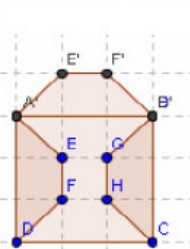
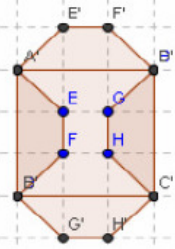
Mis comentarios (negro)

A15: ¿y ahora qué trasladamos o giramos o qué?
 A8: pues yo que sé primero vamos a trasladar
 A15: a ver, vamos a suponer que la nuestra es ésta, entonces si trasladamos tenemos que trasladar aquí
 A8: sí, sí
 A15: espera mejor creo que vamos a girar para ir... lo ponemos aquí y luego ya vamos girando éste aquí, a ver..
 A15: vamos a poner 90°
 A8: ¡sí, lo has clavado!




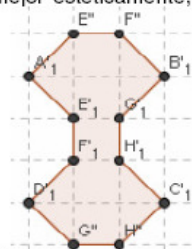
Diálogos entre los estudiantes (azul)

A15: pues ahora, ya nada más que girando
 A8: claro
 Dibujan otro polígono igual en el otro lado

Vuelven a girar 270°
 Con la herramienta polígono marcan el motivo mínimo obtenido.

Para que les quede mejor estéticamente, dibujan un vector  y lo trasladan



obteniendo este hueso

Figura 8-1. Fragmento de la tarea 9 de A8 y A15 reconstruida con Atlas.ti

Una vez reconstruida cada tarea, ésta fue codificada, usando como códigos los 24 indicadores incluidos en las parrillas de actitudes y las capacidades asociadas a cada tarea (incluidas en las parrillas de competencias). Dichas parrillas fueron completadas al finalizar cada sesión de aula, recogiendo mi valoración global de cada actitud y competencia a lo largo de dicha sesión. Al codificar con Atlas.ti y poder analizar en profundidad cada fragmento significativo de cada sesión, se podía percibir, no sólo la visión global de cada actitud en cada tarea, sino cómo ésta iba cambiando, si lo hacía, a lo largo de una sesión. Además, la reconstrucción de las tareas con Atlas.ti permitía estudiar qué factor o factores influyeron en cada momento en mayor medida para que los estudiantes manifestasen una determinada actitud o competencia, análisis que resultaba de gran interés para este trabajo. Por estas razones, en este punto, se consideró pertinente usar, además de los códigos que aparecían en dichas parrillas, los siguientes⁵⁴, que se dividieron en dos grupos:

Grupo 1: Lo formaron códigos que complementaban la información recogida a través de las parrillas de observación. Para su elección se revisaron los indicadores empleados en las parrillas tanto para actitudes como para competencias, llegando a la conclusión de que todos los indicadores de las parrillas eran adecuados para el análisis con Atlas.ti, salvo para el caso de la componente afectiva de las actitudes hacia las matemáticas. Se consideró que la información recogida en las parrillas acerca de dicha componente podía matizarse aún más con Atlas.ti, si se incluían nuevos códigos que complementasen dicha información. Por esa razón, para el análisis actitudinal, además de los 24 códigos de la parrilla de actitudes, se consideraron los tres que ahora se exponen:

CÓDIGOS NUEVOS PARA EL ATLAS.TI
▪GM25: Disfruta con la tarea que está realizando
▪GM26: La tarea no le motiva, le parece poco interesante
▪GM27: Tras varios intentos de resolver la tarea sin éxito, se siente frustrado/a

Figura 8-2. Códigos o indicadores empleados para el análisis con Atlas.ti

Grupo 2: Lo componían los siguientes códigos relativos a los factores más influyentes para el desarrollo de actitudes y/o competencias de los estudiantes, que se asignarían a

⁵⁴ Se dan evidencias de fragmentos codificados con los nuevos códigos, así como de fragmentos codificados con los códigos contenidos en las parrillas de observación al exponer los análisis de actitudes y competencias en los capítulos 9 y 10.

cada fragmento de las tareas reconstruidas con Atlas.ti en el que se considerase perceptible tal influencia, no asignando ninguno de ellos en caso de duda:

- *IGEOGEBRA: Influencia de Geogebra (ventajas respecto a LP)*. Los avances que el alumno estaba realizando, en todos o en alguno de los campos objeto de estudio (competencias y actitudes), se debían al uso de Geogebra. Si éste usara lápiz y papel, todos o algunos de estos cambios no se producirían. Este código hacía referencia a la contribución beneficiosa de la herramienta para trabajar contenidos en matemáticas, respecto a métodos de trabajo tradicionales.
- *Iinteracción AL-AL: Influencia de la interacción entre alumno-alumno*. Los avances que se estaban produciendo en todos o en alguno de los campos objeto de estudio (competencias y actitudes) se debían a la interacción entre alumnos, ya fuese con su pareja de trabajo o con otro compañero.
- *Iinteracción AL-PROF: Influencia de la interacción alumno-profesora*. En este caso los cambios que experimentaba el alumno se debían a la interacción conmigo, más que a otro factor. No quiere decir que yo les mostrase la estrategia o camino a seguir, ni que les revelase la respuesta, sino más bien que los guíe o les brindé ayuda cuando éstos manifestaron una situación de bloqueo que les ayudó a superarla.
- *ITAREA: Influencia de la tarea realizada*. En este caso los resultados o cambios experimentados por los estudiantes (mejoras actitudinales y/o de competencias) se atribuyeron a la naturaleza de la tarea, más que a otros factores, que propició que esta evolución tuviese lugar.

Después de establecer los criterios y consideraciones para la codificación de las tareas, éstas fueron codificadas por mí y después fueron revisadas en su totalidad por mí misma y por un experto en el manejo de este software, obteniendo así la codificación que se consideró definitiva. Finalmente, se trabajó con la codificación realizada aprovechando las herramientas del software Atlas.ti, con el fin de extraer conclusiones relevantes para este análisis.

Resumo el proceso antes descrito para el análisis de datos con el software Atlas.ti, empleado para los cinco casos estudiados más en profundidad, como sigue:

- 1º) Transcribir los audios de las tareas.
- 2º) Descomponer los procedimientos o pasos seguidos por los estudiantes para la resolución de cada tarea, revisando el protocolo de construcción de sus archivos de Geogebra.
- 3º) Introducir en Atlas.ti cada fragmento de audio con su correspondiente fragmento de Geogebra, encajando el audio o diálogos de los estudiantes con las acciones que estaban realizando con Geogebra en cada momento.
- 4º) Incorporar las respuestas escritas de cada tarea, extraídas de los protocolos escritos de resolución, realizadas por cada pareja de estudiantes.
- 5º) Codificar los fragmentos de los archivos de Atlas.ti en los que cada estudiante manifestó alguna de las actitudes estudiadas, usando los indicadores de las parrillas de observación de actitudes y los códigos pertenecientes al Grupo 1.
- 6º) Codificar los fragmentos de los archivos de Atlas.ti en los que cada alumno evidenció alguna de las capacidades asociadas a esa tarea y a las competencias matemáticas seleccionadas, usando los indicadores de las parrillas de observación de competencias.
- 7º) Revisar la codificación realizada, añadiendo a cada fragmento codificado como evidencia de actitudes y/o capacidades-competencias, el/los códigos del Grupo 2, que reflejaba en cada caso, el factor de entre los considerados (Geogebra, compañero, profesora, tarea) que estaba influyendo en mayor grado para el desarrollo actitudinal y/o cognitivo, siempre que esta influencia fuese perceptible⁵⁵.
- 8º) Contrastar la codificación realizada en Atlas.ti para las actitudes y capacidades de cada tarea, con la observación realizada en clase en las parrillas de observación de actitudes y competencias.

Como puede apreciarse, el análisis con este software de la información obtenida a través de los diferentes instrumentos fue un proceso bastante largo que requirió mucho tiempo y dedicación, razones que apoyaban la decisión de llevarlo a cabo solamente para un número reducido de estudiantes (estudio de casos).

8.3.1. Triangulación de la Información

Siguiendo a Cook y Reichardt (1986), Elliot (1993), Del Rincón, Arnal, Latorre y Sans (1995), considero que la recogida de información de diferentes fuentes y momentos debe ser

⁵⁵ Cada fragmento codificado se acompañaba de un comentario que explicaba el/los códigos asignados.

procesada y combinada para posibilitar un juicio acertado sobre el conjunto/s de estudiantes objeto de interés. A esta combinación se le llama ‘triangulación’, en el sentido de que se conjuntan sobre el mismo objeto tres o más ángulos de perspectivas, evidencias o metodologías, proporcionando un marco de referencia más comprensivo.

Cisterna (2005) expone en relación a la triangulación:

Entiendo por “proceso de triangulación hermenéutica” la acción de reunión y cruce dialéctico de toda la información pertinente al objeto de estudio surgida en una investigación por medio de los instrumentos correspondientes, y que en esencia constituye el corpus de resultados de la investigación. Por ello, la triangulación de la información es un acto que se realiza una vez que ha concluido el trabajo de recopilación de la información. El procedimiento práctico para efectuarla pasa por los siguientes pasos: seleccionar la información obtenida en el trabajo de campo; triangular la información por cada estamento; triangular la información entre todos los estamentos investigados; triangular la información con los datos obtenidos mediante los otros instrumentos y; triangular la información con el marco teórico. (p. 68)

En este trabajo se llevó a cabo este proceso de triangulación de la siguiente manera:

- ❶ Se analizó cada instrumento empleado para actitudes y competencias por separado, para cada conjunto de estudiantes observado.

- ❷ Se trianguló la información obtenida con los distintos instrumentos utilizados, a fin de contrastarla y sacar conclusiones, por un lado de las transformaciones actitudinales de los estudiantes y, por otro lado, del desarrollo de competencias experimentado por ellos durante el trabajo con SGD. Esta triangulación se hizo para cada conjunto de estudiantes observado, como muestro en la siguiente tabla:

Tabla 8-4. Instrumentos triangulados por conjuntos de estudiantes para los análisis de actitudes y competencias

Conjunto de estudiantes	Instrumentos triangulados	Análisis Actitudes	Análisis Competencias
Todos	Cuestionarios “Actitud hacia las mates” y “Me Interesa tu Opinión”	✓	
	Diarios de la profesora grupales	✓	✓
	Entrevistas grupales	✓	✓
	Buzón de sugerencias	✓	✓
	Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓
	Archivos de Geogebra		✓
Muestra de doce estudiantes	Cuestionarios “Actitud hacia las mates” y “Me Interesa tu Opinión”	✓	
	Diarios de la profesora individuales	✓	✓
	Buzón de sugerencias	✓	✓
	Parrillas de Observación	✓	✓
	Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓
	Archivos de Geogebra		✓
Estudio de casos	Cuestionarios “Actitud hacia las mates” y “Me Interesa tu Opinión”	✓	
	Diarios de la profesora individuales	✓	✓
	Buzón de sugerencias	✓	✓
	Parrillas de Observación	✓	✓
	Grabaciones de audio	✓	✓
	Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓
	Archivos de Geogebra		✓

③ Se contrastaron los resultados obtenidos para actitudes y competencias para cada conjunto de estudiantes. Es decir, se triangularon los resultados obtenidos para el conjunto total de estudiantes con los de la muestra de estudiantes y el estudio de casos. Esto se llevó a cabo, por un lado, para mostrar las transformaciones actitudinales y, por otro lado, para describir el desarrollo de competencias experimentado por los estudiantes durante el trabajo con Geogebra. Finalmente, la información resultante para actitudes y

competencias se confrontó con el marco teórico elegido. Este proceso se expone en los capítulos 9 y 10, dedicados al análisis de actitudes y competencias, respectivamente. Por último, se presentan en el capítulo 11, a modo de conclusiones y reflexión final, la información que de este proceso de análisis se ha extraído, dando cumplimiento así a los objetivos de la presente investigación.

Para el estudio de casos realizado, dado que el volumen de datos analizados fue bastante superior al de los restantes conjuntos de estudiantes analizados (total de estudiantes, muestra global de estudiantes y estudio individual de los estudiantes de la muestra no pertenecientes al estudio de casos), resultó de gran ayuda el software Atlas.ti a la hora de triangular dicha información.

8.4. ESQUEMA DE ANÁLISIS

A continuación expongo un esquema que sintetiza lo anteriormente expuesto acerca de los métodos, fases y técnicas de análisis empleados para los datos recogidos. Dicho esquema sirve de orientación o guía para facilitar la lectura de los capítulos siguientes, dedicados al desarrollo de dicho análisis:

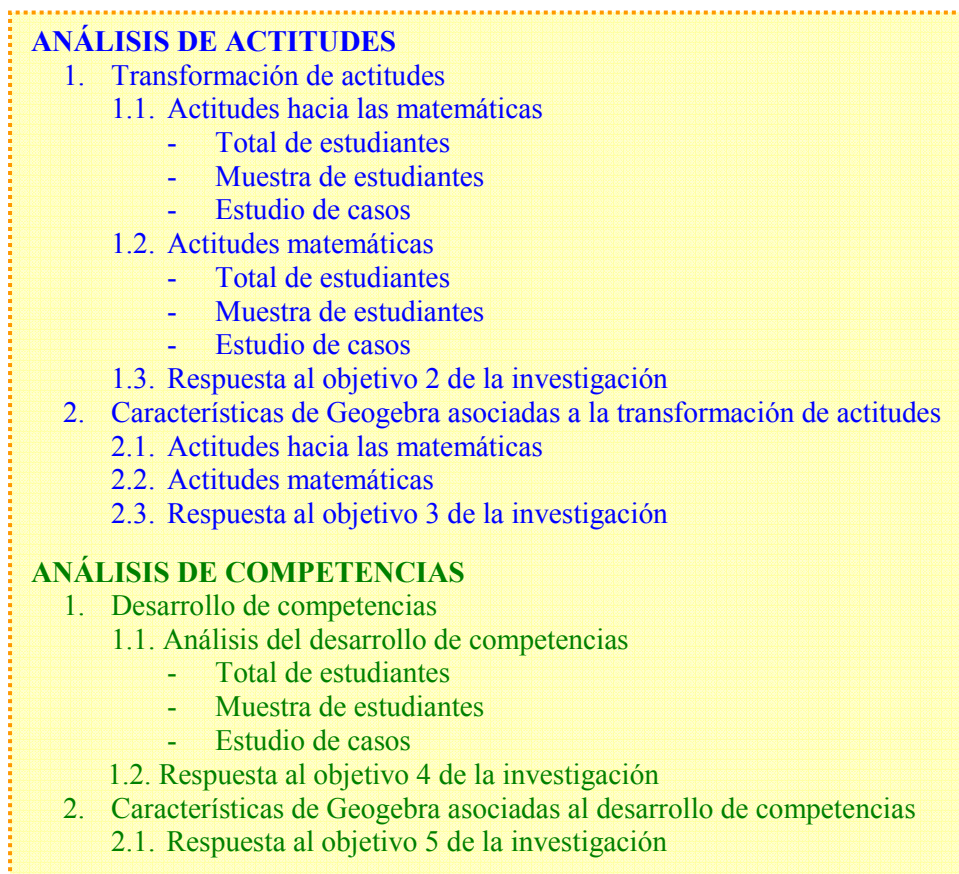


Figura 8-3. Esquema del Análisis de actitudes y competencias realizado

CAPÍTULO 9

Análisis de actitudes

En este capítulo se presenta el análisis de actitudes realizado sobre los datos recogidos durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, para dar respuesta a los objetivos de investigación 2 y 3. En primer lugar, se describen las transformaciones actitudinales experimentadas por los estudiantes a partir del trabajo que realizaron durante la puesta en práctica de dicha secuencia, con objeto de dar respuesta al objetivo 2. Para ello, se analizan por separado las dos categorías actitudinales: actitudes hacia la matemática y actitudes matemáticas, exponiendo en primer lugar el análisis de la información recogida mediante cada instrumento para cada uno de los tres conjuntos de estudiantes por separado (total de estudiantes, muestra de estudiantes y estudio de casos). Después, se triangula toda la información obtenida de cada conjunto de alumnos, permitiendo este proceso informar de las transformaciones experimentadas por cada uno de ellos en las dos categorías actitudinales, así como de la posible relación entre ambas categorías. Finalmente, se triangulan los resultados correspondientes a cada conjunto de estudiantes, respondiendo así al objetivo 2. Por último, se atiende debidamente al objetivo 3 de esta investigación, describiendo qué factores del software contribuyeron a las transformaciones actitudinales experimentadas por los estudiantes.

9.1. ANÁLISIS DE LAS TRANSFORMACIONES ACTITUDINALES

En este apartado se presentan las transformaciones observadas en las actitudes hacia las matemáticas y en las actitudes matemáticas de los estudiantes con los que se llevó a cabo la experiencia, que permitirán dar respuesta al objetivo 2 de este estudio: *analizar las transformaciones que la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de Secundaria.*

9.1.1. Perfil Actitudinal Previo de los Estudiantes

Comienzo describiendo el perfil actitudinal de los dos grupos de 3º de ESO con los que se implementó la secuencia didáctica. El primero de los grupos, 3º A, estaba formado por 28 estudiantes, de los cuales una alumna no asistió a ninguna de las sesiones durante la fase de acción y dos alumnos tenían adaptaciones curriculares significativas, debido a que eran extranjeros y tenían serias dificultades con el idioma, además de otras deficiencias académicas. Un alumno no asistió a numerosas sesiones, por lo que no consideré suficiente la información que de él pude recoger. De este modo, los alumnos que observé en esta clase fueron 24, que conformaban un grupo con rendimiento académico normal, no pudiendo decir que fuese brillante pero tampoco deficiente, logrando estos estudiantes, salvo algunas excepciones, una evaluación positiva en matemáticas. Era un grupo muy hablador, cuyos alumnos se distraían con mucha facilidad y les costaba mantener la atención en cualquier tarea. Además, muchos de ellos no solían trabajar en casa, por ello, esperaba que con la incorporación de Geogebra se sintiesen más motivados hacia la asignatura y mostrasen mayor dedicación y trabajo, que les condujese a un mayor rendimiento.

El otro grupo, 3º B, estaba formado por 30 alumnos, de los cuales dos alumnas no asistieron a ninguna sesión y otros 6 estudiantes asistieron de forma intermitente a clase, por lo que pude obtener información suficiente únicamente de 22 estudiantes, que fueron los que consideré para la observación. El porcentaje de estudiantes repetidores y con dificultades cognitivas era considerablemente superior en este grupo que en 3º A y se podría decir que el rendimiento del grupo era bastante bajo, debido en parte a un ritmo de trabajo poco constante y muy lento. Normalmente, tanto en casa como en el aula, sólo trabajaban un número muy reducido de ellos y los demás alumnos manifestaban permanente falta de interés e incluso desagrado por la asignatura. Este grupo representaba para mí un reto mayor, pues la situación de partida era bastante más negativa que la de 3º A; sin embargo, yo creía que las TIC podrían incidir en mayor medida en su falta de motivación y tal vez obtener una mejora significativa en sus actitudes.

En el siguiente apartado, paso a presentar el análisis de actitudes hacia las matemáticas de ambos grupos de estudiantes.

9.1.2. Transformación de las Actitudes Hacia las Matemáticas

En este trabajo, la caracterización adoptada para las actitudes las matemáticas contempla dos aspectos de las mismas: las actitudes hacia las matemáticas como asignatura, estructuradas en tres componentes (cognitiva, afectiva y comportamental), y las actitudes hacia el uso de las TIC y hacia el trabajo colaborativo como método de enseñanza-aprendizaje. Para mostrar la transformación experimentada por los estudiantes en dichas actitudes, comienzo abordando el análisis del total de estudiantes (46 estudiantes), después expongo el análisis de los estudiantes de la muestra y, por último, el análisis de los estudiantes pertenecientes al estudio de casos, dando respuesta al objetivo 2 para cada conjunto de estudiantes, al finalizar la presentación de cada uno de tales análisis. Por último, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en dichos análisis, he elaborado una respuesta final acerca de la transformación de las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra, que incluyo en el apartado 9.1.4, dedicado a dar una respuesta global al objetivo 2 de esta investigación.

9.1.2.1. Análisis del Total de Estudiantes

En lo que sigue, presento en primer lugar los resultados de los análisis de cada uno de los instrumentos utilizados para recoger información acerca de las transformaciones actitudinales de los 46 estudiantes: cuestionarios, diarios, entrevistas grupales y buzones de sugerencias. Después, como paso último de este análisis, se triangula la información obtenida de cada análisis por separado.

Análisis de Cuestionarios

Los cuestionarios empleados fueron el de “Actitud hacia las Mates” y “Me interesa tu opinión (MIO)”, que expongo en páginas posteriores. Ambos cuestionarios permitieron extraer información complementaria acerca de las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes antes, durante y después de la experiencia con Geogebra. El primer cuestionario aportaba una visión global de las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes antes y después del trabajo con el software, mientras que el segundo cuestionario informaba de dichas actitudes en un periodo de tiempo concreto, durante las sesiones en las que trabajaron con Geogebra.

En el apartado 3.2.1 presenté nuestra caracterización de las actitudes hacia las matemáticas, que las divide en tres componentes: cognitiva, afectiva y comportamental. Con el

cuestionario “Actitud hacia las Mates” se indagó acerca de las componentes cognitiva y afectiva y también sobre la valoración de los estudiantes acerca de la aplicabilidad de las matemáticas, mientras que con el cuestionario MIO se exploraron las tres componentes (cognitiva, afectiva y comportamental) y también las actitudes hacia el trabajo colaborativo, tal y como se expuso en el capítulo 6 (p. 180)

Cuestionario “Actitud hacia las Mates”

Los alumnos contestaron este cuestionario de 31 ítems antes y después de trabajar con Geogebra, es decir, después de realizar las tareas de lápiz y papel (Pretest) y al concluir las tareas con Geogebra (Postest).

A continuación expongo este instrumento, en el que puede comprobarse cómo los ítems no hacían referencia al trabajo con ordenadores, sino que cuestionaban a los estudiantes acerca de sus actitudes hacia las matemáticas, en general, aportando de este modo la visión global de las matemáticas que los alumnos se habían ido forjando con el paso de los años (Pretest) y si éstas se habían transformado o no, después del trabajo con Geogebra (Postest). Con el análisis de este cuestionario pretendía indagar si, los estudiantes consideraban extrapolables a la asignatura y a la materia los cambios experimentados en sus actitudes hacia las matemáticas durante el trabajo con el software, de producirse éstos.

Tabla 9-1. Cuestionario “Actitud hacia las Mates” (Pretest y Postest)

“ACTITUD HACIA LAS MATES” (Pretest y Postest)
1.Las matemáticas son amenas y estimulantes para mí
2.Las matemáticas es una asignatura valiosa y necesaria
3.Pienso que podría estudiar matemáticas más difíciles
4.Las matemáticas normalmente me hacen sentir incómodo y nervioso
5.Siempre dejo en último lugar mi tarea de matemáticas porque no me gusta
6.Las matemáticas me servirán para mis estudios futuros
7.Por alguna razón, a pesar de que estudio, las matemáticas me parecen particularmente difíciles
8.Siempre soy capaz de controlar mi nerviosismo en los exámenes de matemáticas
9.Yo disfruto con los problemas que me dejan como tarea en clase de matemáticas
10.El curso de matemáticas sirve para enseñar a pensar
11.Los términos y símbolos usados en matemáticas nunca me resultan difíciles de comprender y manejar
12.Algunas veces me siento tenso e incómodo en clase de matemáticas
13.La asignatura de matemáticas no es mi asignatura favorita
14.Sólo deberían estudiar matemáticas aquellos que las aplicarán en sus futuros trabajos
15.La asignatura de matemáticas es muy extensa, no puedo enterderla
16.Generalmente me he sentido seguro al intentar hacer matemáticas
17.No me molestaría en absoluto tomar más clases de matemáticas
18.Las matemáticas me resultarán útiles para mi futuro
19.Confío en poder hacer ejercicios más complicados de matemáticas
20.Sólo en los exámenes de matemáticas me sudan las manos o me duele el estómago
21.Prefiero estudiar cualquier otra asignatura en lugar de matemáticas
22.Guardaré mis cuadernos de matemáticas porque probablemente me servirán
23.Generalmente tengo dificultades para resolver los ejercicios de matemáticas
24.Los exámenes de matemáticas provocan en mí mayor ansiedad que cualquier otro examen
25.Sería feliz de obtener mis más altas notas en matemáticas
26.Necesitaré de las matemáticas para mi trabajo futuro
27.Puedo aprender cualquier concepto matemático si lo explican bien
28.Mi mente se pone en blanco y soy incapaz de pensar claramente cuando hago matemática
29.Ojalá nunca hubieran inventado las matemáticas
30.Sólo deberían enseñarse en matemáticas las cosas prácticas que utilizaremos cuando terminemos nuestros estudios
31.Las matemáticas no son difíciles para mí

Antes de llevar a cabo un análisis inferencial con SPSS, realicé un análisis estadístico descriptivo de las respuestas de los estudiantes (la puntuación de cada ítem oscilaba entre 1 y 5 puntos, según se expuso en la tabla 6-10). Para ello, obtuve la puntuación media de los 31 ítems respondidos por cada uno de los alumnos y se adoptó el siguiente criterio: un alumno manifestaba una actitud negativa si su puntuación media en el cuestionario era inferior a tres, una actitud neutra si era igual a tres y una actitud positiva si era superior a tres. Estos cálculos y consideraciones llevaron a diferenciar cuatro grupos: 56.52% de los estudiantes con actitudes positivas antes y después del uso de las TIC; 21.74% de estudiantes con actitudes negativas antes y después del uso de Geogebra; 10.87% de estudiantes que sufrieron una transformación positiva (manifestaron una actitud negativa en el Pretest y positiva en el Postest) y un 10.87% que sufrieron una transformación negativa de sus actitudes

(evidenciaron una actitud positiva en el Pretest y negativa en el Postest). Después, hallé las puntuaciones medias de cada una de las componentes para cada estudiante y las clasifiqué en negativas, neutras y positivas, según el criterio antes expuesto. A partir de estos cálculos obtuve:

Tabla 9-2. Porcentajes de estudiantes según la opinión reflejada en el Pretest y Postest

	Cognitiva		Afectiva		Aplicabilidad	
	PRET	POST	PRET	POST	PRET	POST
Negativa	34.8	41.3	34.8	23.9	15.2	13
Neutra	2.2	6.5	2.2	8.7	2.2	6.5
Positiva	63.0	52.2	63.0	67.4	82.6	80.5

De la tabla anterior se desprende que la componente afectiva experimentó una ligera mejoría, mientras que la cognitiva sufrió un pequeño descenso. Respecto a la dimensión de aplicabilidad, los elevados porcentajes del Pretest y del Postest hacían referencia a que los estudiantes valoraban la utilidad de las matemáticas en la vida real y como herramienta valiosa en el futuro.

Los porcentajes anteriores informan de cierta estabilidad en las actitudes hacia las matemáticas de los alumnos antes y después del uso de Geogebra, según sus respuestas al Pretest y Postest. No se observan grandes cambios, dado el reducido porcentaje de los estudiantes que manifestaron una transformación positiva o negativa de dichas actitudes debido al uso de las TIC (un 10.87% de escolares en cada caso).

Después de este primer análisis, y dado que me interesaba conocer las posibles diferencias significativas entre las respuestas de los 46 estudiantes a los ítems del Pretest y del Postest, se realizaron distintos análisis de comparación de medias. Entre ellos, una prueba *t de student* para muestras relacionadas y dos pruebas *no paramétricas* para dos muestras relacionadas tipos *Wilcoxon* y *signos*, todas ellas con SPSS (Anexo J). Dichas pruebas revelaron diferencias significativas para el total de estudiantes en las componentes cognitiva (ítem 19) y afectiva (ítem 12) y en la dimensión de aplicabilidad (ítem 14). Estructuraré el análisis de las actitudes hacia las matemáticas por componentes.

Empezando por la componente cognitiva, se encontraron diferencias significativas en el ítem 19: *Confío en poder hacer ejercicios más complicados de matemáticas*. Puede comprobarse que, tras trabajar con TIC, el porcentaje de estudiantes que estaban de acuerdo o totalmente de acuerdo con esta afirmación aumentó de un 30.4% a un 43.5%, disminuyendo a su vez el

porcentaje de estudiantes que estaban en desacuerdo o totalmente en desacuerdo, de un 30.4% a un 19.5%.

En lo referente a la componente afectiva, se encontraron diferencias en el ítem 12: *Algunas veces me siento tenso e incómodo en clase de matemáticas*. Observando las tablas de frecuencias de este ítem, se comprueba que los cambios se produjeron en los extremos; es decir, inicialmente 6 personas estaban totalmente en desacuerdo con esta afirmación, reduciéndose este número a 2 personas al concluir las actividades TIC. Por otra parte, de 3 personas que inicialmente estaban totalmente de acuerdo con este ítem, pasaron a 9. Se puede considerar el cambio experimentado por estos estudiantes como negativo, aunque se debe tener en cuenta que la redacción del ítem “*algunas veces...*” aporta información poco precisa.

Continuando con la dimensión de aplicabilidad, se hallaron diferencias en el ítem 14: *Sólo deberían estudiar matemáticas aquellos que las aplicarán en sus futuros trabajos*. En este caso se aprecia una transformación positiva, pues inicialmente 20 estudiantes, un 43.5%, estaban de acuerdo con esta afirmación y finalmente este porcentaje se redujo a la mitad; o sea, a un 21.7%. Puede interpretarse que, como consecuencia de la incorporación de Geogebra, algunos alumnos cambiaron su opinión acerca de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.

Además de las diferencias anteriores, en los análisis realizados para los estudiantes de cada grupo por separado, se hallaron diferencias significativas para 3º B en el ítem 8: *Siempre soy capaz de controlar mi nerviosismo en los exámenes de matemáticas*, perteneciente a la componente afectiva, en el que de una puntuación media inicial para el grupo de 3.41 pasaron a 2.95. Es decir, hubo un cambio negativo en algunos estudiantes, que manifestaron en el Postest indiferencia ante la afirmación anterior (la media obtenida se aproximaba a 3), mientras que en el Pretest habían manifestado acuerdo con este ítem.

El análisis inferencial realizado apoya los resultados del análisis estadístico que apuntaban a una ausencia de cambios significativos entre el Pretest y el Postest. En resumen, este instrumento no reveló grandes cambios, al manifestar los estudiantes, con sus respuestas, que sus actitudes hacia las matemáticas mantuvieron cierta estabilidad antes y después del trabajo con Geogebra.

Paso ahora a analizar el otro cuestionario empleado para recoger información de las actitudes de los escolares durante el trabajo con el software.

Cuestionario “Me Interesa tu Opinión” (MIO)

Este cuestionario de 22 ítems fue cumplimentado al finalizar las tareas con Geogebra.

Tabla 9-3. Cuestionario “Me Interesa tu Opinión” (MIO)

“ME INTERESA TU OPINIÓN”
1.He participado de forma más activa
2.Me ha gustado más la asignatura
3.Los ordenadores no me han ayudado a sentirme más seguro
4.Prefiero trabajar solo
5.He reconocido en mayor grado mis fallos
6.Las TIC no me han motivado nada
7.He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates
8.Ni trabajando en equipo, mejora mi relación con los compañeros
9.He confiado más en mis capacidades
10.Trabajar las mates con los ordenadores es más difícil
11.He comprendido con mayor rapidez
12.Sigo sin apreciar la importancia de las mates
13.Las TIC no me han ayudado a reflexionar sobre mis errores
14.Trabajar en grupo hace las mates más fáciles
15.Sigo teniendo dificultades para comprender las mates
16.Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas
17.Trabajar en grupo hace las mates más difíciles
18.Este modo de trabajo facilita la comunicación con los compañeros
19.Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo
20.Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates
21.Sigue sin gustarme el trabajo en mates
22.Prefiero trabajar en grupo

Con este cuestionario trataba de indagar las transformaciones que el trabajo con Geogebra, de forma colaborativa, provocó en las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, explorando no sólo su opinión acerca de las matemáticas como asignatura, sino también hacia los métodos de enseñanza (actitudes hacia el uso de los ordenadores y hacia el trabajo colaborativo en matemáticas). En el cuestionario MIO, a diferencia del anterior, se les

preguntaba a los escolares específicamente por sus actitudes durante el trabajo con Geogebra y los cambios que en ellas habían observado en ese periodo.

El análisis factorial⁵⁶ realizado a los ítems del cuestionario permitió agruparlos en cuatro factores que explican el 55.841% de la varianza, como muestra la siguiente tabla en la que se recogen los resultados del análisis de Componentes Principales, antes y después de aplicar el método de rotación Varimax:

Tabla 9-4. Varianza total explicada con cuatro factores antes y después de la rotación Varimax

Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	6,473	29,423	29,423	6,473	29,423	29,423	4,089	18,585	18,585
2	2,323	10,560	39,983	2,323	10,560	39,983	3,440	15,637	34,221
3	1,975	8,978	48,961	1,975	8,978	48,961	2,704	12,291	46,513
4	1,514	6,880	55,841	1,514	6,880	55,841	2,052	9,328	55,841
5	,980	4,453	60,294						
6	,930	4,228	64,522						
7	,893	4,059	68,581						
8	,801	3,640	72,221						
9	,730	3,320	75,540						
10	,663	3,011	78,552						
11	,618	2,807	81,359						
12	,581	2,642	84,001						
13	,502	2,281	86,281						
14	,467	2,124	88,405						
15	,441	2,005	90,410						
16	,380	1,728	92,139						
17	,337	1,533	93,671						
18	,317	1,443	95,114						
19	,293	1,330	96,444						
20	,276	1,254	97,698						
21	,264	1,202	98,900						
22	,242	1,100	100,000						

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

A continuación expongo las matrices de componentes antes y después de la rotación, en las que pueden observarse qué ítems definen cada factor y cuál es su peso en cada uno de ellos. Para facilitar su análisis se han eliminado aquellos pesos poco significativos (comprendidos entre -0.1 y 0.1):

⁵⁶ Los resultados del análisis factorial realizado pueden consultarse en su totalidad en el Anexo E

Tablas 9-5. Matriz de componentes

	Matriz de componentes ^a			
	Componente			
	1	2	3	4
I1	,655		-,103	,330
I2	,750			
I3	,551	,143	-,159	,299
I4	,292	,110	,508	,413
I5	,467	-,410		-,169
I6	,644	,154	-,148	,322
I7	,731	-,193		-,101
I8		,533	,362	,174
I9	,648	-,298		-,259
I10	,579	,264		,212
I11	,784	-,268	-,118	
I12	,362	,543	,114	-,443
I13	,523	,227	-,134	,371
I14	,196	-,304	,444	-,224
I15	,614	,318	-,380	-,221
I16	,536	-,401	-,100	,285
I17	,292	,504	,545	
I18	,389	-,385	,441	-,202
I19	,616	,378	-,133	-,293
I20	,695	-,393		
I21	,540	,340		-,453
I22	,235	-,170	,768	

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

a. 4 componentes extraídos

Tabla 9-6. Matriz de componentes rotados

	Matriz de componentes rotados ^a			
	Componente			
	1	2	3	4
I1	,706	,195		
I2	,587	,388	,275	
I3	,644		,137	
I4	,312		-,138	,632
I5	,198	,583		-,187
I6	,722		,167	
I7	,466	,541	,270	
I8	,102	-,289	,195	,564
I9	,245	,672	,260	
I10	,547		,254	,294
I11	,534	,598	,215	-,119
I12			,765	,224
I13	,670		,126	,118
I14	-,177	,532		,254
I15	,461		,640	-,210
I16	,540	,448	-,195	
I17			,397	,689
I18		,686		,251
I19	,347	,130	,699	
I20	,407	,684		
I21	,150	,208	,737	
I22		,460	-,128	,668

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

a. La rotación ha convergido en 21 iteraciones.

De la tabla 9-6, se obtienen cuatro factores (después de la rotación Varimax) definidos por los ítems que expongo en la tabla 9-7. Los ítems de cada factor se presentan ordenados por su mayor peso en la definición de dicho factor (un ítem define un factor si su peso es superior a 0.40 y mayor en dicho factor que en los demás factores). El siguiente paso fue el de interpretar los ítems que definen cada factor para asignar un nombre a cada factor que refleje la información que recogen:

Tabla 9-7. Ítems que definen cada factor del cuestionario MIO

FACTORES	ÍTEMS (Peso en el factor)
<p>Factor 1 <i>Actitud hacia el uso de TIC en matemáticas</i> (explica el 18.59% de la varianza)</p>	<p>6. Las TIC no me han motivado nada (0.722) 1. He participado de forma más activa (0.706) 13. Las TIC no me han ayudado a reflexionar sobre mis errores (0.670) 3. Los ordenadores no me han ayudado a sentirme más seguro (0.644) 2. Me ha gustado más la asignatura (0.587) 10. Trabajar las mates con los ordenadores es más difícil (0.547) 16. Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas (0.540) 11. He comprendido con mayor rapidez (0.534) 7. He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates (0.466) 15. Sigo teniendo dificultades para comprender las mates (0.461) 20. Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates (0.407) 19. Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo (0.347) 4. Prefiero trabajar solo (0.312) (Nota: Los ítems 11, 7, 15, 20, 19 y 4, a pesar de tener un peso superior a 0.30 en este factor, cargan con mayor peso en otros factores)</p>
<p>Factor 2 <i>Ventajas de trabajar las matemáticas con TIC</i> (explica el 15.64% de la varianza)</p>	<p>18. Este modo de trabajo facilita la comunicación con los compañeros (0.686) 20. Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates (0.684) 9. He confiado más en mis capacidades (0.672) 11. He comprendido con mayor rapidez (0.598) 5. He reconocido en mayor grado mis fallos (0.583) 7. He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates (0.541) 14. Trabajar en grupo hace las mates más fáciles (0.532) 22. Prefiero trabajar en grupo (0.460) 16. Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas (0.448) 2. Me ha gustado más la asignatura (0.388) (Nota: Los ítems 2, 16 y 22, a pesar de tener un peso superior a 0.30 en este factor, cargan con mayor peso en otros factores)</p>
<p>Factor 3 <i>Rechazo las matemáticas con TIC</i> (explica el 12.29% de la varianza)</p>	<p>12. Sigo sin apreciar la importancia de las mates (0.765) 21. Sigue sin gustarme el trabajo en mates (0.737) 19. Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo (0.699) 15. Sigo teniendo dificultades para comprender las mates (0.640) 17. Trabajar en grupo hace las mates más difíciles (0.397) (Nota: El ítem 17, a pesar de tener un peso superior a 0.30 en este factor, carga con mayor peso en el factor 4)</p>
<p>Factor 4 <i>Trabajo colaborativo con TIC</i> (explica el 9.33% de la varianza)</p>	<p>17. Trabajar en grupo hace las mates más difíciles (0.689) 22. Prefiero trabajar en grupo (0.668) 4. Prefiero trabajar solo (0.632) 8. Ni trabajando en equipo, mejora mi relación con los compañeros (0.564)</p>

En lo que sigue, analizo las respuestas de los 46 estudiantes en cada uno de los cuatro factores mencionados. Para ello, fue necesario calcular las puntuaciones factoriales de cada estudiante en cada factor. Posteriormente, se clasificaron estas puntuaciones atendiendo a las siguientes consideraciones: actitud negativa si la puntuación factorial en un factor es negativa, actitud neutra si la puntuación es de 0 y actitud positiva si la puntuación es positiva. Se obtuvieron así los porcentajes de estudiantes que manifestaron con sus respuestas una determinada actitud en cada factor:

Tabla 9-8. Porcentajes de estudiantes según la opinión reflejada en los factores de MIO

		Factor 1: Actitud hacia el uso de TIC en Matemáticas	Factor 2: Ventajas de trabajar las Matemáticas con TIC	Factor 3: Rechazo las Matemáticas con TIC	Factor 4: Trabajo colaborativo con TIC
Estadísticos descriptivos	Máximo	3.06	3.44	2.24	1.52
	Mínimo	-4.18	-3.55	-2.40	-2.90
	Media	0.00	0.00	0.00	0.00
	Desviación típica	1.00	1.00	1.00	1.00
Actitud (%)	Negativa	39.13	43.48	52.17	41.30
	Neutra	0.00	0.00	0.00	0.00
	Positiva	60.87	56.52	47.83	58.70

Con este cuestionario se pretendía indagar sobre las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes durante el trabajo con TIC, así como informar de sus actitudes hacia el uso de tales tecnologías y hacia la metodología de trabajo colaborativo. Los resultados de la tabla anterior sugieren una visión satisfactoria del trabajo realizado con Geogebra en matemáticas para un 60 % de los estudiantes, quienes mostraron una actitud positiva hacia el uso de TIC en matemáticas y opinaron favorablemente sobre las ventajas de trabajar las matemáticas con TIC y el trabajo colaborativo por parejas con Geogebra.

A continuación abordo cada aspecto por separado.

Respecto a las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, los ítems de este cuestionario permitían obtener información sobre las tres componentes consideradas para estas actitudes: cognitiva, afectiva y comportamental. En lo referente a la componente cognitiva, el 72.1% de los estudiantes afirmó haber confiado más en sus capacidades (ítem 9) y el 65.3% manifestó comprender las matemáticas por sí mismos usando las TIC (ítem 19). Estos datos sugieren que un porcentaje de los estudiantes admitió una mejora de su autoconfianza en matemáticas (componente cognitiva) debido al uso de Geogebra.

Continuando con la componente afectiva, las respuestas de los estudiantes sobre el gusto por la asignatura durante el trabajo con TIC revelaron que al 73.9% de ellos les había gustado más la asignatura trabajando con ordenadores (ítem 2) y únicamente el 10.8% (ítem 21) de los alumnos afirmó que seguía sin gustarle el trabajo en matemáticas. Es decir, el uso de Geogebra contribuyó a una mejora afectiva de los estudiantes hacia las matemáticas trabajadas en el aula. En referencia a la componente comportamental, la información recogida en el cuestionario muestra que el 78.2% consideró que había participado de forma más activa en matemáticas durante el trabajo con TIC (ítem 1). En síntesis, el trabajo con TIC incidió favorablemente en la mejora de las tres componentes de las actitudes hacia las matemáticas para un elevado porcentaje de alumnos.

En referencia a la actitud de los estudiantes hacia el uso de TIC en matemáticas, los escolares confirmaron con sus respuestas que, para el 63% de ellos, el uso de los ordenadores les había ayudado a sentirse más seguros (ítem 3), al 78.3% su uso les había motivado para trabajar en matemáticas (ítem 6), al tiempo que contribuyó a que al 60.8% de los alumnos les resultara más fácil el trabajo realizado en matemáticas gracias a la ayuda de Geogebra (ítem 10). En conjunto, los alumnos manifestaron una actitud muy positiva hacia el uso de TIC en matemáticas.

La actitud de los estudiantes hacia el trabajo colaborativo con TIC, fue muy favorable, como ellos mismos se encargaron de reflejar con sus respuestas a los ítem que definen este factor. Así, el 67.4% de los estudiantes preferían trabajar de este modo, mientras que el resto se decantaba por el trabajo individual (ítem 2) y el 82.6% de los estudiantes consideraba que esta metodología de trabajo ayudaba a mejorar la relación con los compañeros (ítem 4).

En resumen, el análisis realizado de este cuestionario sugiere una actitud positiva hacia el uso de TIC en matemáticas, hacia las matemáticas trabajadas con TIC y hacia el trabajo colaborativo por parte de un considerable porcentaje de estudiantes (tabla 9-8). Además, también ha informado de las ventajas que los estudiantes consideraron que esta metodología de trabajo tuvo sobre su forma de trabajar en matemáticas, al admitir con sus respuestas que el uso de Geogebra les ayudó a reconocer mejor sus fallos y que los ordenadores les ofrecían muchos recursos para entender mejor las matemáticas.

Una vez analizados ambos cuestionarios, es conveniente reflexionar acerca de los resultados presentados. El análisis del cuestionario “Actitud hacia las mates” ha puesto de manifiesto,

contrastando Pretest y Posttest, que muchos estudiantes no afirmaron haber experimentado mejoras en sus actitudes hacia las matemáticas. Sin embargo, cuando se les preguntó específicamente por sus estas actitudes durante el trabajo con Geogebra (mediante el cuestionario MIO), sí que admitieron cambios positivos en ellas, que atribuyeron al gusto y confianza depositado en el trabajo con el software así como a sus ventajas y a la bondad del trabajo colaborativo. El análisis realizado permite afirmar que muchos de los escolares asociaban su actitud más favorable hacia las matemáticas con el uso de Geogebra, admitiendo que el gusto por el manejo de este recurso para resolver las tareas diseñadas, les llevó a sentirse más motivados e implicados en las tareas y a disfrutar con ellas, y la confianza en la bondad del software para trabajar en matemáticas les ayudó a sentirse más confiados en sus posibilidades de éxito en matemáticas.

No obstante, siguiendo a Gómez-Chacón (2010), ha de tenerse en cuenta que, “cuando se trata de medir actitudes, no basta con la información que el estudiante da a través de un cuestionario, sino que su afirmación necesita ser confirmada mediante la observación del comportamiento cuando resuelve tareas matemáticas, en las entrevistas al estudiante y al profesor” (p. 231). Es decir, deben evaluarse dichas actitudes cuando el estudiante no está implicado en la tarea (en este caso, mediante cuestionarios) y cuando lo está (a través de la información recogida de la observación durante la acción). Para ello, a continuación se presenta el análisis de los restantes instrumentos, de corte cualitativo, cuya triangulación final permitirá contrastar con estos resultados y proporcionará una visión más completa de las transformaciones experimentadas por los estudiantes en sus actitudes hacia las matemáticas como consecuencia del trabajo con Geogebra.

Análisis de los Diarios

Los diarios, uno para 3º A y otro para 3º B, los fui escribiendo al término de cada sesión con cada grupo, dedicando un apartado a las actitudes hacia las matemáticas, como se expuso en la página 192 (apartado 6.5.2). Éste es el que ahora se analiza, si bien también se consideró de utilidad la información recogida en el último apartado dedicado a *mi experiencia* (valoración personal del modo en que se desarrolló la sesión e información considerada importante no recogida en los apartados previos). Se revisan las entradas de las 13 sesiones

con Lápiz y Papel o sesiones LP y también las 12 sesiones con Geogebra o sesiones TIC⁵⁷, que corresponden a las tareas GG.

Las entradas de los diarios sobre estas actitudes se centraron, siguiendo la caracterización adoptada, en las componentes afectiva, cognitiva y comportamental, que son las que a continuación se analizan. De estas tres componentes, la que resultó más fácil de observar a nivel grupal fue la comportamental, pues era visible si los alumnos trabajaban o no durante las sesiones mostrando interés. No se recogió, mediante los diarios, información relativa a las componentes afectiva y cognitiva durante todas las sesiones, sino solamente en aquellas en las que éstas fueron especialmente visibles. Por ello, el análisis de la información de los diarios se centra casi exclusivamente en la componente comportamental, que fue la que siempre quedó recogida en las entradas de dicho instrumento de observación. De las dos restantes componentes, únicamente puede extraerse de los diarios una visión parcial, por lo que no me extenderé en su análisis.

Empezando por las sesiones LP, se aprecia para ambos grupos que, aunque inicialmente comenzaban trabajando en las tareas, el periodo de actividad era bastante corto y con frecuencia las abandonaban sin concluir, siendo el número de alumnos con una actitud adecuada bastante reducido: el 33.33% en 3º A y el 22.73% en 3º B. Estos porcentajes se mantuvieron a lo largo de las sesiones LP, ya que siempre eran los mismos estudiantes los que trabajaban mostrando interés durante toda la sesión. La desmotivación del resto de sus compañeros por las tareas iba en aumento conforme lo hacía la dificultad de las tareas. Así, cuando se les pedía razonar o argumentar-demostrar alguna afirmación, sólo unos pocos lo intentaban, mientras que el resto desconectaba de la actividad. Algunos comentarios extraídos de los diarios corroboran las anteriores afirmaciones:

Sesión 2 para 3º A: La primera mitad de la sesión han estado trabajando más o menos interesados, pero al llegar a la pregunta en la que se les pedía que demostrasen la no existencia de algunos tipos de triángulos equiláteros considerando sus ángulos (por ejemplo, los obtusángulos) el interés ha ido decreciendo.

Sesión 4 para 3º A: Durante la puesta en común, la gran mayoría de los estudiantes han estado atentos y han participado en la corrección de las tareas, saliendo a la pizarra a descomponer figuras. Los alumnos que han llegado a obtener una generalización, les han explicado a sus compañeros cómo lo hicieron. Al

⁵⁷ Los estudiantes trabajaron con Geogebra 40 sesiones, de las cuales las 28 primeras correspondieron a aquellas en las que los estudiantes realizaron las tareas ISO. La lectura de dichas sesiones confirma los mismos resultados que se exponen para las tareas de teselaciones del plano con Geogebra (tareas GG), es decir, que los efectos del uso del software en la transformación de estas actitudes se mantuvieron estables a lo largo de las 40 sesiones (periodo aproximado de tres meses).

pasar a la segunda actividad en la que pretendía que los estudiantes obtuvieran las fórmulas de las áreas, como debían pensar y razonar para ello, muchos se han desenganchado y se han limitado a copiar de la pizarra.

Sesión 8 para 3º A: En general, han estado trabajando, aunque casi todos prefieren no pensar antes de actuar y sólo unos pocos (7 de 22 alumnos) confían en poder resolver el problema por sí solos. Además, 8 de ellos se niegan a trabajar en clase o sólo trabajan unos pocos minutos mostrando interés.

Sesión 10 para 3º A: Sesión muy negativa porque los alumnos han trabajado muy poco, hecho que puede deberse a factores como la hora de clase (13-14 h) o a la falta de motivación por la actividad. No ha aflorado ninguna actitud positiva, ni “hacia las matemáticas” ni “matemática”, en la mayoría del grupo. Sólo los mismos alumnos de siempre han estado trabajando y han obtenido resultados productivos.

Sesión 2 para 3º B: Mostraban poca confianza en sí mismos para resolver el problema. Al menos el 50% del grupo no ha trabajado durante toda la sesión, alternando ciclos de actividad e inactividad en los que charlaban con sus compañeros. Les cuesta mucho estar más de diez minutos seguidos trabajando en clase.

Sesión 5 para 3º B: Desinterés en general y ausencia de trabajo, limitándose los alumnos a copiar las fórmulas de la pizarra. Dos de los 16 estudiantes observados que han asistido a clase, son los únicos que han participado. Han faltado tres alumnas que están de viaje, dos de las cuales suelen trabajar en clase.

Sesión 8 para 3º B: Poco interés por la actividad, solo cinco estudiantes han trabajado a buen ritmo. Los demás sólo de modo intermitente. Prefieren otros ejercicios en los que no tengan que pensar.

Sesión 11 para 3º B: Estaban algo alborotados y solo unos pocos, 9 de 21, han trabajado durante toda la sesión, de los cuales, ocho confían en poder resolver el problema por sí mismos. El resto trabaja solamente a intervalos cortos de tiempo, prefieren hacer ejercicios en los que no tengan que pensar y parece no motivarles nada trabajar problemas contextualizados, a pesar de que éstos ponen de relieve la aplicación y utilidad de las matemáticas en la vida real.

Los fragmentos anteriores y, en general, todas las entradas de los diarios de las tareas LP, evidenciaban una actitud hacia las matemáticas bastante negativa para la mayoría de los estudiantes, que les llevaba a no trabajar suficientemente en matemáticas y a no mostrar confianza en sí mismos ni gusto por algunas de las tareas que debían realizar. Estas afirmaciones están en consonancia con los datos recogidos en las parrillas de observación durante las tareas LP, y ayudan a comprender mi preocupación como profesora y el por qué de esta investigación.

Esta situación cambió radicalmente en ambos grupos con la incorporación de Geogebra. Observé cómo el trabajo con dicho software contribuyó a que la mayoría de los estudiantes con escaso trabajo en clase se volvieran activos durante más tiempo, no sólo en las tareas

sencillas, sino en las más complejas. Demostraron gusto por esta forma de trabajar en matemáticas desde el primer día y no parecía importarles tener que pensar para poder resolver las tareas. Como he hecho para el caso de las sesiones LP, he seleccionado fragmentos de los diarios de las tareas con Geogebra que muestran este cambio en sus actitudes hacia las matemáticas:

Sesión 1 para 3º A: Al inicio de la sesión estaban algo revueltos, pero transcurridos unos minutos se han puesto a trabajar “todos”, no cesando algunas parejas ni un minuto. Todos han mostrado gran interés por realizar la tarea mostrándose muy motivados.

Sesión 4 para 3º A: Muy participativos en la puesta en común y muy trabajadores durante toda la sesión, a pesar de la dificultad de la tarea 3 que estaban realizando, lo cual no les ha desmotivado ni llevado a abandonar la tarea.

Sesión 10 para 3º A: En general estaban muy impresionados con los mosaicos de Escher, sobre todo con el lagarto y el pato, y lo sencillo que parecía construirlos (hemos visitado la página <http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/inicio.html>). Les ha gustado manejar y manipular los applets para deformar y construir mosaicos. La tarea 9 parecía gustarles y se han puesto manos a la obra rápidamente.

Sesión 11 para 3º A: A pesar de que la sesión ha transcurrido a penúltima hora, de 13-14 h, han trabajado a buen ritmo y bastante motivados, incluidos aquellos que no suelen trabajar normalmente. Les ha gustado la tarea y cada vez son más competentes manejando Geogebra, por ello, la mayoría confiaba en resolver por sí mismos la tarea y muy pocos alumnos han necesitado algo de ayuda, curiosamente los cinco alumnos que antes nunca trabajaban y ahora lo hacen, aunque no en todas las sesiones con la misma intensidad.

Sesión 1 para 3º B: Han trabajado durante toda la sesión en la tarea 1 mostrando interés por la actividad, confianza en resolverla por sí solos y no parecía disgustarles seguir trabajando con Geogebra después de terminar las tareas ISO. Les motiva el trabajo con TIC, que se manifiesta en un ritmo incesante de trabajo, y me comentan que esta forma de trabajar les parece menos aburrida que la habitual.

Sesión 3 para 3º B: Durante la actividad 2 han trabajado rápidamente y muy motivados. Cuando la han concluido han comenzado con la tarea 3, cuya dificultad hace que resolverla de un modo riguroso sólo esté al alcance de unos pocos, pero no por ello se han desanimado por no obtener respuestas rápidamente y han seguido intentándolo durante toda la sesión.

Sesión 7 para 3º B: Igual de motivados y trabajadores que la sesión anterior, no descansan hasta concluir ambas actividades, siendo esta actitud generalizable a todos los estudiantes de este grupo.

Sesión 10 para 3º B: Igual que en 3º A, hoy han estado trabajando todos sin excepción, lo cual, aunque ya ha ocurrido en repetidas ocasiones usando Geogebra, no deja de sorprenderme. Les han parecido muy interesantes los applets de los mosaicos que han estado manipulando antes de comenzar la sesión, y también parece motivarles la tarea 9 que han estado haciendo.

En lo referente a la componente comportamental, durante las sesiones en las que los escolares trabajaron con Geogebra, es posible un análisis más exhaustivo de las entradas de los diarios, puesto que mi percepción de esta componente fue plasmada en todas ellas. Observé algunas diferencias entre los dos grupos de alumnos, aunque en ambos la respuesta de los estudiantes fue muy buena. En el grupo 3º A, el 52.63% de las entradas del diario de las sesiones TIC hacían referencia a que “*todos los estudiantes estaban trabajando en las tareas demostrando interés*”, mientras que el 47.37% de las entradas ponen de relieve que “*la mayoría de los estudiantes trabajaban con interés*”. Fijándose en los estudiantes que habitualmente no trabajaban con LP, se observa que éstos no trabajaron o lo hicieron puntualmente, y no demostraron interés por las tareas en el 26.32% de las sesiones con Geogebra. Para el caso de 3º B, esta componente se manifestó aún más positivamente, puesto que el 84.21% de las entradas del diario, hacen referencia a que “*todos los estudiantes estaban trabajando en las tareas demostrando interés*” y el 15.79% alude a que “*la mayoría de los estudiantes trabajaron con interés y constancia*”. En 3º B, todos los estudiantes que no trabajaron durante las tareas LP, se engancharon al carro de las TIC y mantuvieron un ritmo de trabajo constante, adaptado a sus posibilidades, durante toda la experiencia.

Respecto a las componentes cognitiva y afectiva, la lectura de los diarios no aporta tanta información como respecto a su comportamiento e implicación en las tareas de aula. No obstante, mi visión general de las mismas durante el trabajo con Geogebra fue bastante buena, pues observé (y recogí en algunas entradas de los diarios grupales), que la mayoría de los estudiantes disfrutaron durante la realización de muchas de las tareas y además se mostraron más confiados en sus posibilidades de éxito.

El análisis de los diarios refleja una considerable evolución en las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, al subrayar no sólo la implicación e interés en las tareas, sino el gusto por las mismas y el aumento progresivo de autoconfianza que experimentaron muchos de los estudiantes trabajando con Geogebra. Esta mejora parece estar asociada al trabajo con Geogebra y no a otras variables metodológicas, puesto que dichas variables se mantuvieron constantes durante las tareas con lápiz y papel y, sin embargo, los diarios reflejan que durante las tareas LP no se observó esta transformación positiva de las actitudes de los estudiantes.

Análisis de las Entrevistas Grupales

La directora de esta investigación de tesis llevó a cabo una entrevista semiestructurada con cada grupo de estudiantes, de aproximadamente una hora de duración (el guión de las entrevistas puede consultarse en el Anexo F). El análisis de las entrevistas aporta los siguientes resultados referentes a sus actitudes hacia las matemáticas.

La mayoría de las intervenciones relacionadas con las actitudes hacia las matemáticas, revelan que la experiencia con Geogebra les resultó más amena y divertida, que se interesaron más y les surgieron más dudas, sobre todo al principio, hasta que se familiarizaron con la herramienta. Expongo la información más significativa que se recogió de los estudiantes sobre sus actitudes hacia las matemáticas durante el trabajo con Geogebra:

- Pregunta para 3º A y 3º B: ¿Qué es lo más importante o significativo de la experiencia de estudiar geometría con Geogebra?
 - ☛ Respuesta de A24 (3º A): Hemos aprendido que los ordenadores no solamente sirven para jugar y chatear, sino que sirven para más cosas. Hemos aprendido a trabajar más y en equipo.
 - ☛ Respuesta de A18 (3º A): Es más rápido comprender las mates con el ordenador y trabajando con el compañero.
 - ☛ Respuesta de A19 (3º A): Se valora más el trabajo y es más justo que evaluar con un examen.
 - ☛ Respuesta de A25 (3º A): Que las matemáticas no siempre son aburridas y utilizando los ordenadores podemos divertirnos y aprender más.
 - ☛ Respuesta de A21 (3º A): Hemos aprendido las aplicaciones de los mosaicos en la vida real.
 - ☛ Respuesta de A38 (3º B): Me ha ayudado a aprender cosas nuevas. La geometría se ve de otra forma. No es lo mismo cuando lo haces con LP que cuando lo haces con el ordenador. Tienes más entusiasmo con el ordenador.
 - ☛ Respuesta de A15 (3º B): Con los ordenadores estás más motivado. Por ejemplo, cuando lo hacíamos con LP, antes de la clase pensabas que tocaba matemáticas y estabas desganado, pero con los ordenadores nos gusta más. (Varios compañeros afirman opinar igual que A15)
 - ☛ Respuesta de A36 (3º B): Es más entretenido. Con el ordenador se ve mejor porque puedes hacerlo tú, sacar la conclusión tú.
 - ☛ Respuesta de A39 (3º B): Que con el ordenador te motivas más.
 - ☛ Respuesta de A42 (3º B): El trabajo se hace más rápido con el ordenador.

Otras de las intervenciones de los estudiantes ponían de relieve que les gustaría estudiar más temas con el ordenador, opinión manifestada por casi la totalidad de los estudiantes. Es decir, confirmaron de diversos modos una actitud muy favorable hacia el trabajo con TIC en matemáticas. Algunas intervenciones en esta línea fueron:

- Pregunta para 3º A y 3º B: ¿Os gustaría hacer más temas con el ordenador? (respuesta casi unánime en 3º A y unánime en 3º B)
- A39 (3º A): Sería bueno que además de programas para hacer geometría, diseñen programas para hacer otro tipo de cosas.
- A39 (3º A): Lo ideal sería alternar temas con ordenador y con LP.

Las respuestas anteriores hacen referencia a la eficiencia del software para resolver las tareas GG y para fomentar el trabajo colaborativo, metodología que ellos consideraron apropiada. Por otra parte, los estudiantes calificaron la actividad matemática realizada con Geogebra como más amena y divertida (componente afectiva) y admitieron que se implicaron e interesaron más por el trabajo realizado en la asignatura (componente comportamental). Nuevamente interaccionan las actitudes de los estudiantes hacia los métodos de enseñanza (en este caso, Geogebra) con sus actitudes hacia las matemáticas. O sea, las respuestas de algunos de los estudiantes muestran una asociación entre gusto por el trabajo con TIC y mayor gusto por la geometría que si la estudiaran con LP.

Análisis de los Buzones de Sugerencias

De los 46 estudiantes, 39 me obsequiaron con su visión de la experiencia de trabajar geometría con Geogebra, o lo que es lo mismo, únicamente siete estudiantes no hicieron ninguna aportación en los buzones al término de dicha experiencia. El análisis de la información actitudinal contenida en los buzones de sugerencias reportó los siguientes resultados:

Tabla 9-9. Opiniones de los estudiantes sobre sus actitudes durante las tareas GG

ACTITUDES		Nº de opiniones	Positivas (en %)	Negativas (en %)
Actitudes hacia las matemáticas	Afectiva	14	92.86	7.14
	Cognitiva	21	90.48	9.52
	Comportamental	13	100	0
Actitudes hacia el uso de Geogebra		38	92.11	7.89

Comentaré ahora los datos recogidos en la tabla anterior. El 90.48% de los estudiantes subrayó que el manejo de la herramienta ayudó a que les resultase más fácil el trabajo en matemáticas y, de este modo, mostraron más confianza en sus posibilidades de éxito (componente cognitiva), a lo que también contribuyó el hecho de trabajar por parejas de modo colaborativo. De los alumnos que expresaron agrado o desagrado por las tareas

realizadas en matemáticas, el 92.86% manifestó mayor aprecio y valoración de las matemáticas gracias al trabajo con el software (componente afectiva). Y de aquellos que opinaron sobre su implicación e interés por las tareas realizadas con Geogebra (componente comportamental), todos mostraron una visión positiva. En lo referente a las actitudes hacia el uso de software de Geometría dinámica (SGD) en el aula, el 92.11% expresó gusto por el trabajo con Geogebra, reduciéndose a tres el número de estudiantes que no consideraron positiva la experiencia de trabajar con Geogebra en matemáticas. Otro aspecto a destacar en las opiniones de los estudiantes, es que dejaron patente que les había gustado trabajar en parejas y subrayaron las bondades de esta metodología de trabajo.

En resumen, las opiniones de casi todos los estudiantes se correspondían con una transformación o evolución positiva de sus actitudes, como queda patente en los siguientes extractos seleccionados como ejemplo de los resultados presentados:

Opinión de A9: Me ha gustado trabajar con los ordenadores. Las clases se me pasan más rápido. Me gustan un poco más las matemáticas que antes...prefiero trabajar con los ordenadores... me ha resultado más fácil de comprender.

Opinión de A6: Me ha gustado bastante trabajar con los ordenadores, he valorado mucho más el trabajo en equipo y me he sentido muy bien compartiendo teorías con mi compañera, porque hemos aprendido la una de la otra y nos hemos ayudado en las cosas que no comprendíamos, ha estado muy bien. Me ha resultado más fácil, porque contaba con más puntos de vista. Por una parte, la maestra que lo explicaba y por otra, el de mi compañera y el mío y así sacaba mis propias conclusiones y me sentía capaz de seguir aprendiendo más sobre las mates, que antes no me gustaban mucho pero que cada día las comprendo mejor y se siento más a gusto cuando las trabajo. Me alegro mucho de haber trabajado con Geogebra.

Opinión de A21: Me han gustado los ordenadores y cómo se trabaja con ellos. El trabajo es más fácil y menos cansado. Esta es mi opinión... 😊

Opinión de A28: Me ha gustado trabajar con los ordenadores, me ha parecido muy interesante y se me ha dado mejor. La asignatura se me ha hecho más amena y me ha resultado mucho más fácil. Sí, me ha gustado mucho.

Opinión de A37: Me parece más amena la clase si trabajamos con los ordenadores, porque para algunos no es muy divertido estudiar matemáticas y de esta manera se hace más interesante. Ya no tengo nada más que decir. 😊

Los estudiantes informaron, a través de sus comentarios y aportaciones a los buzones de sugerencias, que debido al trabajo con Geogebra se habían transformado positivamente sus actitudes hacia las matemáticas. Ellos admitían haberse implicado más en las tareas, haber disfrutado más con las mismas y haber confiado más en sus posibilidades de éxito trabajando con Geogebra que si lo hubieran hecho con lápiz y papel. Es decir, consideraron la herramienta valiosa para el estudio de la geometría y, además, les gustaría seguir usando los ordenadores para trabajar los restantes contenidos de la asignatura. Muchas de las opiniones de los estudiantes conducen a la misma reflexión: asociaron la mejora de sus actitudes hacia las matemáticas con el gusto y la motivación por trabajar con Geogebra.

Triangulación de los anteriores análisis realizados para el total de estudiantes

A continuación, contrastaré los resultados obtenidos de los análisis de los cuestionarios, diarios, entrevistas y buzones de sugerencias, acerca de las transformaciones de las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes. Como todos los instrumentos analizados permitieron recoger información de las tres componentes de interés: cognitiva, afectiva y comportamental, así como de las actitudes de los estudiantes hacia los métodos de enseñanza (en este caso, actitudes hacia el uso de Geogebra), éstas se abordan individualmente a continuación.

Componente Cognitiva

Los análisis de los ítems de los dos cuestionarios referentes a esta componente revelaron que, en torno al 60% de los estudiantes manifestaba una visión positiva de sus posibilidades; es decir, un buen autoconcepto o dicho de otro modo, una buena dosis de autoconfianza. Los diarios no aportaron mucha información de esta componente, aunque su lectura deja entrever una evolución de esta componente durante las tareas con Geogebra. Las entrevistas ofrecieron una visión muy positiva de los estudiantes sobre la mejora de esta componente, gracias al uso del software. El 90.48% de las opiniones depositadas en los buzones de sugerencias acerca de la componente cognitiva apuntaban en la misma dirección, encontrando en todas ellas un denominador común: los estudiantes encontraron más sencillo el trabajo en matemáticas, gracias al uso del software, y ello les llevó a tener más confianza en sus posibilidades de éxito. La mayoría de los estudiantes confirmaron la mejora de su autoconfianza durante el trabajo con Geogebra, aunque algunos de ellos siguieron pensando que mantenían las limitaciones cognitivas que manifestaban con anterioridad al trabajo con el software. Se infiere de ello que muchos de los alumnos que observaron una mejora en su

autoconfianza en matemáticas durante el trabajo con TIC, asociaron dicha mejora al trabajo con Geogebra.

Componente Afectiva

El Pretest y Postest y también los ítems del cuestionario MIO referentes a esta componente, revelaron que el 63%, 67.4% y 78.3% de los estudiantes, respectivamente, manifestaba gusto por las tareas realizadas y por la asignatura en general. Se observó una mayor afectividad durante el trabajo con Geogebra, que puede atribuirse al manejo del software. Los diarios no aportaron mucha información de esta componente, aunque señalaban un mayor gusto de los estudiantes por la actividad en matemáticas. Las entrevistas también ofrecieron una visión muy positiva de los estudiantes acerca de la mejora de esta componente, gracias al uso de Geogebra, y el 92.86% de las opiniones depositadas en los buzones de sugerencias sobre ella fueron, igualmente, muy positivas. Recapitulando lo anterior, se puede concluir que en torno al 75% de los escolares confirmó con sus respuestas mayor afectividad por las matemáticas al trabajar con Geogebra. Asocio esta transformación al aumento de motivación que en ellos produjo el uso del software, evidenciando casi la totalidad de los estudiantes gusto por su manejo durante todas las sesiones en las que emplearon dicha herramienta.

Componente Comportamental

Los resultados de los análisis llevados a cabo con cada instrumento sobre esta componente muestran una mayor implicación e interés por la resolución de las tareas (84.8% de los estudiantes contestaron positivamente a los ítems del cuestionario MIO referentes a esta componente), y se puso de relieve en el 100% de las opiniones al respecto, depositadas en los buzones de sugerencias. En esta componente, los diarios sí que aportan información más específica y revelan que la mayoría de los estudiantes trabajaron más motivados durante las tareas con Geogebra (tareas GG), aunque se aprecian diferencias en esta componente en ambos grupos. En 3° A, se observó que todos los estudiantes trabajaron con interés el 52.63% de las sesiones GG, mientras que en 3° B este porcentaje aumentó hasta el 84.21%. Estos datos informan de un mayor efecto del uso de Geogebra en los estudiantes con actitudes hacia las matemáticas previas más negativas, estando formado el grupo de 3° B en su mayoría por estudiantes con este perfil. El cambio observado en el comportamiento e implicación de los estudiantes en las tareas se asocia con el gusto por el manejo del software que manifestaron (función motivadora).

Respecto a las actitudes de los escolares hacia el uso de las TIC, recogidas en el cuestionario MIO, en los diarios y entrevistas, todos los análisis apuntan a actitudes muy favorables en casi la totalidad de los alumnos. Este hecho lo confirma el 92.11% de las aportaciones de los estudiantes a los buzones de sugerencias, que hacen mención a la bondad del trabajo con ordenadores, en términos de mayor confianza, gusto e implicación en las tareas matemáticas.

La triangulación de toda la información analizada ha puesto de relieve una efectiva transformación de las actitudes hacia las matemáticas para la mayoría de los alumnos, que da respuesta, de modo global, al objetivo 2 de investigación para el total de estudiantes. Se ha comprobado cómo el trabajo con Geogebra, hizo que la mayoría de los estudiantes con escaso trabajo en clase se implicasen en la realización de todas las tareas, desde las más sencillas a las más complejas, demostrando gusto por esta forma de trabajar en matemáticas y mayor confianza en sus posibilidades de éxito. De hecho, al triangular la información recogida para el conjunto total de estudiantes, mediante los distintos instrumentos empleados para la evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y hacia el uso de Geogebra, se llega a la misma reflexión que con cada uno de ellos por separado: el gusto, motivación y confianza depositado por los estudiantes en el software, como herramienta eficaz para la resolución de las tareas GG, ha provocado un mayor gusto, motivación, confianza e implicación en matemáticas, es decir, una transformación positiva de las actitudes hacia las matemáticas. No obstante, esta transformación aparece ligada al uso del software y no es extrapolable a la asignatura y a la materia, tal como la conciben los estudiantes, sin el apoyo de esta herramienta.

9.1.2.2 Análisis de la Muestra de Estudiantes

El modo en que se tomó la muestra se ha expuesto en el apartado 7.4.1. Resumidamente, puede decirse que se eligieron 12 estudiantes, seis de cada grupo, cuyos perfiles actitudinales y cognitivos cubriesen los distintos perfiles presentes en ambos grupos, tal y como queda reflejado en la siguiente tabla:

Tabla 9-10. Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada

Actitudes	Inadecuadas	Adecuadas	Buenas
Rendimiento			
Insuficiente	A2, A3, A7, A9	A5, A11	
Suficiente	A6	A1, A8, A12	A10
Bueno			A4

En la tabla anterior, cada estudiante fue asignado a aquella casilla que más se ajustaba a sus características, por lo que no todos los estudiantes ubicados en una misma casilla respondían exactamente al mismo perfil. No obstante, cuando se aborde el análisis individualizado de cada uno de ellos, se expondrá con mayor detalle sus actitudes y competencias matemáticas previas al trabajo con Geogebra en el aula. Se observó a estos estudiantes durante todas las sesiones en las que se desarrolló la fase de acción, obteniendo variada información de los múltiples instrumentos empleados para la recogida de datos.

La decisión de tomar una muestra intencionada de 12 estudiantes vino acompañada de la determinación de realizar un estudio de casos, que responde a la parte última y más pormenorizada de este análisis. Debido a ello, no se creyó pertinente realizar un análisis exhaustivo de todos y cada uno de los 12 estudiantes de la muestra, sino que se consideró más pertinente un análisis global de todos ellos, que evidenciase su evolución como un reflejo de la mejora grupal de los 46 estudiantes. Por tanto, ahora se exponen los resultados del análisis global de la muestra, informando de las transformaciones actitudinales que se produjeron durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra.

En primer lugar, se analizaron los datos recogidos en las parrillas de observación de actitudes y se contrastaron estos resultados con los obtenidos en los cuestionarios, con las entradas de los diarios de cada estudiante y con sus aportaciones a los buzones de sugerencias. Dicha triangulación puso de relieve la bondad de las observaciones registradas en las parrillas de observación para estos 12 estudiantes, por lo que los resultados que a continuación se exponen están extraídos mayoritariamente de las parrillas⁵⁸, al considerar más sencilla su presentación de un modo simplificado, pero a la vez conciso. Cuando se presente el estudio de casos, se mostrará de un modo más extendido cómo se realizó tal triangulación de los resultados obtenidos con los diferentes instrumentos empleados.

Análisis de las Parrillas de Observación de Actitudes

El modo en que se codificaron las parrillas de observación de actitudes ya fue expuesto en las páginas 187-190 (apartado 6.5.2). Después de tal codificación y usando los software SPSS y

⁵⁸ Las observaciones registradas en las parrillas por otro investigador, que actuó en calidad de observador externo durante 4 de las 12 sesiones con Geogebra (tareas GG), coincidieron con las mías en todas las sesiones en las que éste realizó tal observación, salvo en alguna asignación puntual, en la que también logramos consenso después de exponer nuestras percepciones.

Excel, obtuve los porcentajes obtenidos por cada estudiante en cada una de las actitudes objeto de interés, en cada tipo de tareas: tareas lápiz y papel (tareas LP), tareas realizadas con Geogebra (tareas de teselaciones del plano: tareas GG). Los porcentajes asociados a cada actitud se corresponden con las evidencias positivas registradas en el aula durante la realización de las tareas, es decir, con el porcentaje de las sesiones en las que cada estudiante manifestó una determinada actitud.

La información que se presenta hace referencia a la caracterización adoptada para las actitudes hacia las matemáticas: componentes comportamental (acerca del trabajo e implicación de los estudiantes en las tareas (abreviadamente TR)), afectiva (sobre el gusto por las tareas realizadas en clase (GM)) y cognitiva (relativa a la autoconfianza en matemáticas (CO)). También se estudian las actitudes de los escolares hacia los métodos de enseñanza (actitudes hacia el uso de Geogebra (TIC)). Estos cuatro aspectos se registraron en las parrillas de observación de actitudes mediante los siguientes indicadores:

Tabla 9-11. Indicadores de la parrilla de observación referentes a actitudes hacia las matemáticas

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS	COMPORTA-MENTAL	TR20 Trabaja durante la sesión mostrando interés por el trabajo.
		TR21 Se niega a trabajar en clase o trabaja poco
	AFECTIVA	GM22 Prefiere realizar ejercicios en los que no tenga que pensar.
	COGNITIVA	CO23 Confía en poder resolver el problema por sí solo.
	ACTITUD TIC	TIC24 Interés y gusto por el trabajo con ordenadores

En primer lugar, abordaré las tres componentes conjuntamente y después por separado. Por último, expondré las actitudes hacia el uso de Geogebra manifestadas por los estudiantes.

Se muestra a continuación, en la figura 9-1, los porcentajes medios obtenidos por cada estudiante en las tres componentes consideradas durante las tareas LP y GG, que permiten observar la variación global experimentada por cada uno de ellos al trabajar con Geogebra. Como se aprecia en dicha figura, a excepción de la alumna 11, los restantes once estudiantes alcanzaron durante las tareas GG valores superiores al 85%. Si éstos se comparan con los valores obtenidos durante las tareas LP, se puede afirmar que, a excepción de los cuatro estudiantes cuyas actitudes iniciales ya eran positivas (A1, A4, A10 y A12), los ocho restantes evolucionaron considerablemente.

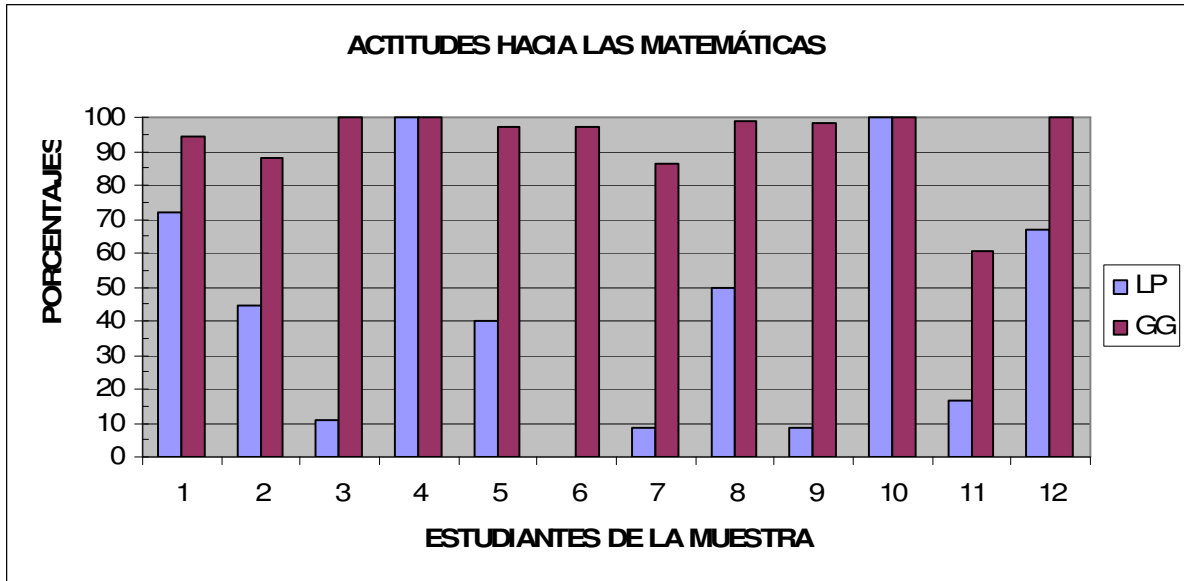


Figura 9-1 .Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante tareas LP y GG en actitudes hacia las matemáticas

Si ahora nos centramos en cada componente por separado, hallando los porcentajes medios obtenidos globalmente por los 12 estudiantes de la muestra en cada una de ellas durante las tareas LP y GG, se obtiene la siguiente figura. En ella se puede apreciar que, de las tres categorías consideradas, la que experimentó mayor cambio fue la afectiva o de gusto por las matemáticas, seguida de la cognitiva o autoconfianza. La componente comportamental, pese a alcanzar el mismo porcentaje que la cognitiva durante las tareas GG (97.03%), experimentó una transformación menos sorprendente, porque su situación de partida era menos negativa que la de las otras dos componentes.

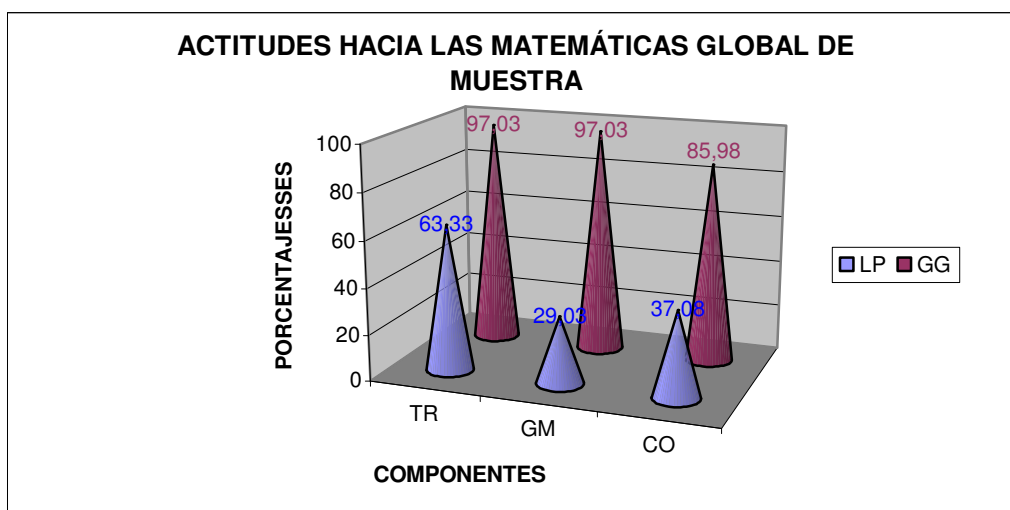


Figura 9-2 .Porcentajes medios globales de los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en actitudes hacia las matemáticas

A continuación expongo un análisis más pormenorizado de cada componente, empezando por la que experimentó una evolución más notable.

Gusto por las matemáticas como asignatura (GM)

En los grupos con los que se llevó a cabo la experiencia con Geogebra predominaba una falta de motivación y gusto por el trabajo en matemáticas, por ello me interesaba conocer si la herramienta ayudaría a mejorar este aspecto. Los estudiantes solían sentirse más cómodos con tareas rutinarias y repetitivas en las que no tenían que pensar demasiado, sino ejecutar un procedimiento ya conocido por ellos. Con frecuencia, cuando les planteaba tareas desafiantes, que requerían un mayor esfuerzo, se mostraban poco entusiasmados. Al incluir el indicador “prefiere realizar ejercicios en los que no tenga que pensar” (GM22), pretendía registrar el gusto (agrado o desagrado) de los estudiantes por el trabajo realizado en matemáticas. Al estar formulado en sentido negativo, su codificación fue inversa: 0=si mostraban dicho indicador; 1=si no lo evidenciaban. Los porcentajes mostrados en el siguiente gráfico hacen referencia al porcentaje medio de sesiones en las que los estudiantes de la muestra, globalmente, evidenciaron gusto por las tareas realizadas; o, lo que es equivalente, no manifestaron el indicador GM22:

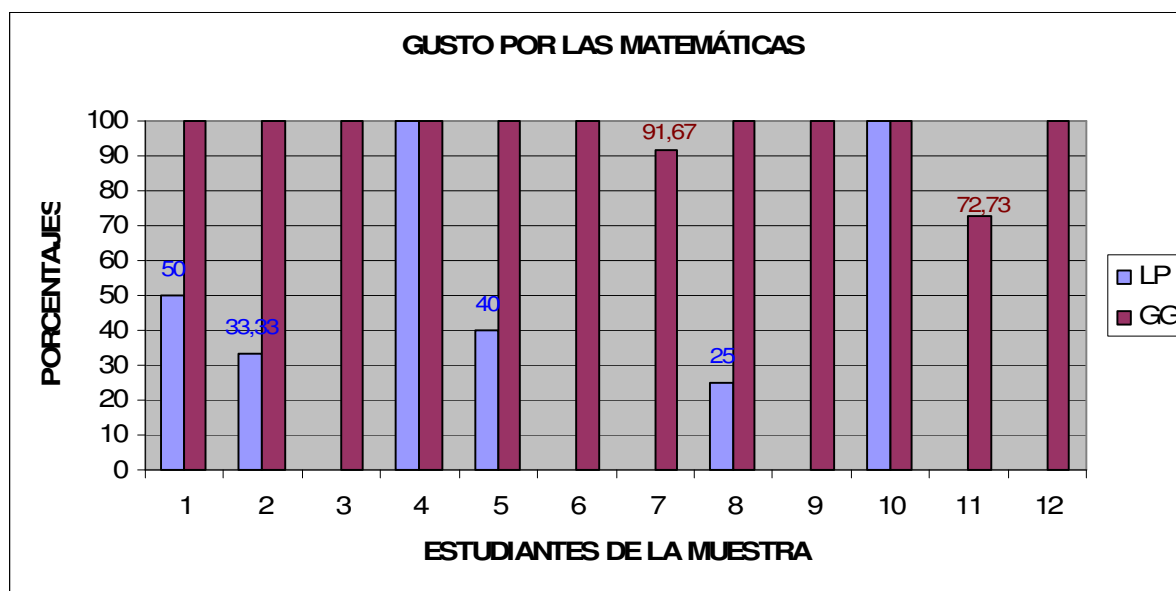


Figura 9-3. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la componente afectiva

Se observa cómo A3, A6, A7, A9, A11 y A12 (50% de los estudiantes) no demostraron gusto por ninguna de las tareas LP. A2, A5 y A8 lo hicieron ocasionalmente y sólo A4 y A10 manifestaron gusto por todas estas tareas. Sin embargo, el trabajo con Geogebra logró que la actitud previa negativa de estos diez estudiantes cambiara radicalmente. La herramienta les

mostró un modo de trabajar en matemáticas que no les pareció aburrido y ello les llevó a disfrutar más con las matemáticas, manifestando así una mejora de la dimensión afectiva de sus actitudes hacia las matemáticas.

Creencias de los estudiantes: Autoconfianza (CO)

Otro aspecto que me interesaba indagar era la concepción de los estudiantes sobre su propio aprendizaje (componente cognitiva). Por ese motivo se incluyó el indicador CO23, que permitió observar si se sentían con más confianza en sí mismos al trabajar con Geogebra. Durante cada sesión, la información recogida trataba de ajustarse lo mejor posible al comportamiento global del estudiante, dado que en algunos casos puntuales el alumno mostraba cierta variabilidad en esta actitud. Durante la realización de las tareas LP, pocos estudiantes manifestaron confianza en sus posibilidades de éxito y solían solicitar ayuda externa para resolver cada tarea. No obstante, la situación cambió radicalmente durante el trabajo con Geogebra, como se aprecia en la siguiente figura:

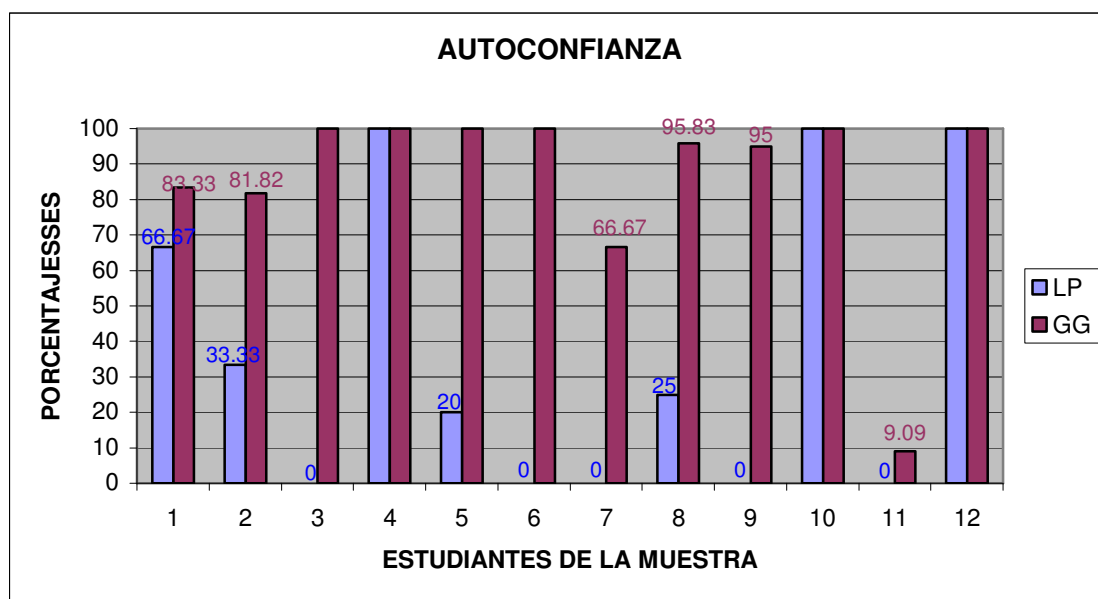


Figura 9-4. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la componente cognitiva

A excepción de la alumna 11, que mostraba deficiencias cognitivas serias, los demás estudiantes manifestaron mayor confianza en sus posibilidades cuando trabajaron con Geogebra. Ello supuso una mejora notable para A2, A3, A5, A6, A7, A8 y A9 respecto de su situación previa, especialmente para aquellos que durante las tareas LP no manifestaron esta actitud en ninguna de las sesiones.

Trabajo e implicación en matemáticas (TR)

Otro de los aspectos que me preocupaba, en ambos grupos de estudiantes, era la escasa implicación de bastantes de estos estudiantes en el trabajo realizado en matemáticas, sobre todo cuando las tareas exigían un mayor esfuerzo del que estaban acostumbrados a realizar. Por ello, se observó si durante las tareas LP y GG los estudiantes mostraban interés por las tareas y se implicaban o no en su resolución, así como el grado en que lo hacían (trabajando durante toda la sesión, durante una parte de ella o nunca). Los resultados quedan reflejados en la siguiente figura:

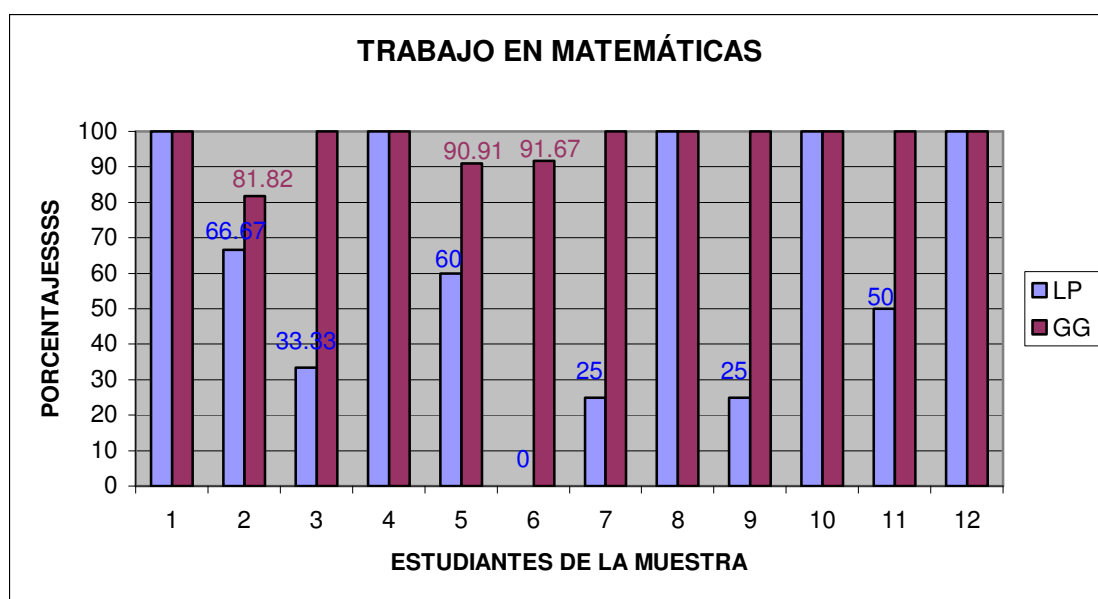


Figura 9-5. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la componente comportamental

Durante las tareas LP, el trabajo realizado por cinco de los estudiantes (A3, A6, A7, A9 y A11) fue insuficiente y poco constante. Sin embargo, el gráfico anterior confirma que el uso de Geogebra ayudó a que estos estudiantes se implicaran e interesaran más por los contenidos trabajados en el aula durante las sesiones GG. Además, ningún estudiante de la muestra obtuvo un porcentaje inferior al 80% durante el trabajo con Geogebra, demostrando estar más motivados por la incorporación de la herramienta. En resumen, los estudiantes que se negaban a trabajar o no lo hacían de forma habitual durante las tareas LP, cambiaron su forma de comportarse y se mantuvieron motivados y trabajando con gran interés durante las sesiones en las que usamos este software.

Actitudes hacia las TIC

Durante las sesiones en las que los escolares trabajaron con Geogebra, deseaba observar si éstos mostraban interés y gusto por el uso de la herramienta para trabajar las tareas diseñadas.

Los datos pusieron de relieve que así fue, pues, a excepción de la alumna 11 que alcanzó un 91.66%, el resto de los estudiantes observados obtuvo un porcentaje del 100%, que reflejaba motivación por trabajar con este software durante todas las sesiones.

Haciendo un resumen de la transformación actitudinal experimentada por los estudiantes de la muestra en sus actitudes hacia las matemáticas y como respuesta al objetivo 2 de investigación, puede afirmarse que, a excepción de la estudiante 11, el resto de los alumnos evidenciaron actitudes positivas durante el trabajo con Geogebra. Para algunos casos, el cambio resultó sorprendente, dado el perfil actitudinal previo al trabajo con esta herramienta. En efecto, observando la figura 9-1, que expone la transformación de las actitudes hacia las matemáticas, y más específicamente las figuras 9-3, 9-4 y 9-5, que atienden a cada componente individualmente, puede comprobarse cómo la transformación experimentada por A2, A3, A5, A6, A7, A8 y A9 en dichas actitudes fue notable. Estos estudiantes se mostraron más motivados e implicados en matemáticas durante las tareas GG, demostraron gusto e interés por los contenidos trabajados y por las tareas propuestas y, además, manifestaron una mejora de su autoconfianza en la resolución de las tareas con Geogebra. Esta transformación positiva de las tres componentes analizadas fue el efecto del gusto y motivación que los estudiantes manifestaron por el uso del software como herramienta de trabajo en matemáticas. El análisis de las parrillas de observación ha corroborado esta afirmación, pues se ha comprobado que durante todas las sesiones GG, siempre que un estudiante de la muestra evidenciaba una correcta actitud hacia las TIC, también mostraba una positiva actitud hacia las mates. El análisis de los restantes instrumentos (cuestionarios, diarios, entrevistas, buzones de sugerencias), que ya comenté al inicio de este apartado que no incluiría (no aportaría información adicional a la expuesta pero alargaría en exceso esta presentación), confirma esta relación unidireccional: una actitud positiva hacia el uso de Geogebra conlleva a una mejora de actitudes hacia las matemáticas durante el trabajo con el software.

9.1.2.3. Estudio de Casos

Como expuse en el capítulo 8 (p. 223), se escogieron cinco alumnos (A3, A7, A8, A9 y A10) con los que se llevó a cabo el estudio de casos que en este apartado se presenta. Para su estudio individualizado se recogió una gran cantidad de información mediante cuestionarios, diarios, buzones de sugerencias, parrillas de observación de actitudes y competencias, archivos de Geogebra y protocolos escritos de resolución de cada tarea y archivos de audio de

cada sesión GG. La exhaustividad con que se analizaron los datos puede verse en el caso particular que expongo en el apartado siguiente (Historia de A8). Por motivos de extensión de este trabajo, se ha limitado la exposición de los restantes casos a un resumen de tal análisis. De este modo, incluyo el análisis completo de A8 (análisis de las 10 tareas GG) y, a continuación, un análisis más resumido (análisis de dos tareas GG⁵⁹: tareas 1 y 5) para A3, A7, A9 y A10. Considero pertinente exponer en primer lugar la historia de A8, a pesar de invertir el orden de detalle en que se viene haciendo el análisis, porque permitirá comprender mejor cómo se ha llevado a cabo dicho análisis con el software Atlas.ti para las 10 tareas GG. Aporto en este caso más evidencias que en los cuatro restantes, para los que se expone una versión resumida del análisis para las tareas 1 y 5. El análisis pormenorizado de A8 expondrá argumentadamente en qué medida las transformaciones experimentadas por dicho estudiante eran atribuibles al trabajo con Geogebra, a la interacción con su compañero y/o con la profesora o a la tarea, durante la puesta en práctica de la secuencia completa de tareas GG. La lectura de la historia de A8 permitirá comprender cómo se han extraído las conclusiones acerca de su transformación actitudinal y tener en mente una visión global de dicho análisis, que facilitará la lectura del estudio de los restantes cuatro casos, el cual se presenta en formato más reducido.

9.1.2.3.1. Historia de A8

Para presentar el análisis detallado de todas las tareas GG, A8 fue elegido por dos razones. En primer lugar, por considerar que fue uno de los estudiantes que experimentó un avance más notable, tanto en actitudes como en competencias, y también porque respondía al perfil actitudinal más común en las aulas de secundaria, considerándolo por ello de interés para otros docentes. En segundo lugar, por la calidad y bondad de sus archivos de audio, pues disponía de todas sus grabaciones (que eran perfectamente audibles) y además, éstas se ajustaban a mis necesidades porque contenían diálogos de gran riqueza de este estudiante y su pareja, y recogían las sesiones completas (la mayoría de los archivos estaban en torno a los 45-50 minutos de grabación). Los registros de audio de la mayoría de sus compañeros no cumplían estas características, bien porque los estudiantes trabajaron en silencio y solamente

⁵⁹ Se seleccionaron las tareas 1 y 5 por llevarse a cabo en dos momentos distintos de la experiencia: la tarea 1 fue la primera tarea de la secuencia diseñada para ser trabajada con Geogebra (tareas GG) y la tarea 5 ocupaba un lugar central en la misma. Además, la tarea 5 fue a la que dedicaron mayor número de sesiones y ambas resultaron ser dos de las más útiles para comprobar y dar evidencias de las distintas actitudes y competencias.

dialogaron con sus compañeros puntualmente, bien por problemas técnicos que provocaron pérdidas de información⁶⁰, resultando poco fructíferos para ser analizados.

Antes de contar cómo resultó la experiencia de trabajar con Geogebra a este estudiante, expongo brevemente, como en los casos anteriores, cuál era su situación actitudinal de partida. A8 estaba totalmente motivado para trabajar en la asignatura y se mostraba siempre muy interesado en realizar las tareas propuestas en matemáticas; sin embargo, esta motivación respondía a querer superar la asignatura, no al gusto por la materia. Su bajo autoconcepto le hacía mostrar poca confianza en sí mismo y le llevaba a una visión de las matemáticas como asignatura difícil y poco atractiva, aunque necesaria.

A continuación, presento los análisis de los cuestionarios, del diario que escribí sobre A8 tras cada sesión de aula con Geogebra, y de las parrillas actitudinales de este estudiante, que permiten extraer las primeras conclusiones. Después, expongo el trabajo realizado con Atlas.ti; es decir, el análisis de la restante información recogida (archivos de Geogebra y de audio, junto con los protocolos escritos de resolución de cada tarea GG), así como la triangulación de todos los análisis mencionados.

Análisis de Cuestionarios

Se analizaron las respuestas de A8 a los dos cuestionarios de actitudes.

Empezando por el cuestionario “Actitud hacia las Mates”, he de decir que no se encontraron diferencias significativas entre las repuestas de este alumno a dicho cuestionario antes del uso de Geogebra (Pretest) y después de trabajar con este software (Postest). Sus respuestas se puntuaron según la tabla 6-10 (p. 179) y fueron las siguientes:

⁶⁰ Los ordenadores, en ocasiones, se reiniciaban sin previo aviso y sin posibilidad de guardar los archivos de audio. En esos casos, los estudiantes iniciaban una nueva grabación en la que en unos pocos minutos explicaban oralmente cómo habían resuelto la tarea y a qué conclusión habían llegado.

Tabla 9-12. Respuestas de A8 al cuestionario “Actitud hacia las mates”

CUESTIONARIO “ACTITUD HACIA LAS MATES” DE A8	PRE	POST
1. Las matemáticas son amenas y estimulantes para mí.	3	2
2. Las matemáticas es una asignatura valiosa y necesaria.	4	3
3. Pienso que podría estudiar matemáticas más difíciles.	2	2
4. Las matemáticas normalmente me hacen sentir incómodo y nervioso.	3	3
5. Siempre dejo en último lugar mi tarea de matemáticas porque no me gusta.	4	3
6. Las matemáticas me servirán para mis estudios futuros.	3	3
7. Por alguna razón, a pesar de que estudio, las matemáticas me parecen particularmente difíciles.	2	2
8. Siempre soy capaz de controlar mi nerviosismo en los exámenes de matemáticas.	4	4
9. Yo disfruto con los problemas que me dejan como tarea en clase de matemáticas.	2	2
10. El curso de matemáticas sirve para enseñar a pensar.	2	3
11. Los términos y símbolos usados en matemáticas nunca me resultan difíciles de comprender y manejar.	3	4
12. Algunas veces me siento tenso e incómodo en clase de matemáticas.	3	3
13. La asignatura de matemáticas no es mi asignatura favorita.	1	1
14. Sólo deberían estudiar matemáticas aquellos que las aplicarán en sus futuros trabajos.	4	2
15. La asignatura de matemáticas es muy extensa, no puedo enterderla.	3	4
16. Generalmente me he sentido seguro al intentar hacer matemáticas.	4	4
17. No me molestaría en absoluto tomar más clases de matemáticas.	2	3
18. Las matemáticas me resultarán útiles para mi futuro.	3	3
19. Confío en poder hacer ejercicios más complicados de matemáticas.	3	4
20. Sólo en los exámenes de matemáticas me sudan las manos o me duele el estómago.	4	4
21. Prefiero estudiar cualquier otra asignatura en lugar de matemáticas.	3	1
22. Guardaré mis cuadernos de matemáticas porque probablemente me servirán.	4	3
23. Generalmente tengo dificultades para resolver los ejercicios de matemáticas.	2	2
24. Los exámenes de matemáticas provocan en mí mayor ansiedad que cualquier otro examen.	2	3
25. Sería feliz de obtener mis más altas notas en matemáticas.	5	4
26. Necesitaré de las matemáticas para mi trabajo futuro.	4	3
27. Puedo aprender cualquier concepto matemático si lo explican bien.	5	5
28. Mi mente se pone en blanco y soy incapaz de pensar claramente cuando hago matemáticas.	4	4
29. Ojalá nunca hubieran inventado las matemáticas.	4	4
30. Sólo deberían enseñarse en matemáticas las cosas prácticas que utilizaremos cuando terminemos nuestros estudios.	3	1
31. Las matemáticas no son difíciles para mí.	2	3

Como puede apreciarse en la figura anterior, tanto en el Pretest como en el Postest, la mayoría de las respuestas de A8 obtuvieron una calificación de 2, 3 ó 4 y no se aprecia variación en ellas. Analizando los 31 ítems, se hallaron 15 ítems con la misma respuesta en ambos casos, 9 ítems en los que sus respuestas fueron ligeramente más negativas en el Postest y 7 ítems en los que éstas fueron ligeramente más positivas tras el uso de Geogebra (Postest). A8 obtuvo una puntuación media de 2.75 y de 3.25 en la componente cognitiva en el Pretest y Postest, respectivamente; datos que reflejan una evolución en dicha componente. Respecto a la componente afectiva, las puntuaciones medias fueron de 3.2 y 3, advirtiendo una ligera transformación negativa en sus respuestas. Resumiendo, no se observan cambios significativos en estas dos componentes según las respuestas a este cuestionario.

Respecto al otro cuestionario “Me interesa tu opinión”, sus respuestas (también se puntuaron según la tabla 6-10 (p. 179)) evidenciaron una actitud bastante buena hacia el trabajo realizado con Geogebra, como puede apreciarse en la siguiente tabla (únicamente en 3 de los 22 ítems sus respuestas no fueron positivas):

Tabla 9-13. Respuestas de A8 al cuestionario “MIO”

CUESTIONARIO “Me interesa tu opinión” DE A8	Respuesta
1.He participado de forma más activa	4
2.Me ha gustado más la asignatura	4
3.Los ordenadores no me han ayudado a sentirme más seguro	4
4. Prefiero trabajar solo	4
5. He reconocido en mayor grado mis fallos	4
6. Las TIC no me han motivado nada	4
7. He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates	3
8. Ni trabajando en equipo, mejora mi relación con los compañeros	4
9. He confiado más en mis capacidades	4
10. Trabajar las mates con los ordenadores es más difícil	4
11. He comprendido con mayor rapidez	5
12. Sigo sin apreciar la importancia de las mates	4
13. Las TIC no me han ayudado a reflexionar sobre mis errores	5
14. Trabajar en grupo hace las mates más fáciles	1
15. Sigo teniendo dificultades para comprender las mates	4
16. Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas	5
17. Trabajar en grupo hace las mates más difíciles	5
18. Este modo de trabajo facilita la comunicación con los compañeros	5
19. Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo	2
20. Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates	4
21. Sigue sin gustarme el trabajo en mates	4
22. Prefiero trabajar en grupo	5

Al preguntarle explícitamente a este estudiante sobre la experiencia de trabajar con Geogebra, A8 admitió mejoras en las componentes cognitiva, afectiva y comportamental de las actitudes hacia las matemáticas (mayor confianza, gusto e implicación en las tareas matemáticas), una actitud positiva hacia el uso de Geogebra como herramienta de trabajo en matemáticas, así como una opinión favorable sobre el trabajo colaborativo. En resumen, A8 manifestó con sus respuestas que la herramienta le había ayudado a mejorar sus actitudes y que el trabajo en

grupo con este software le había resultado muy beneficioso y satisfactorio. Esta afirmación se ve apoyada por la opinión que este estudiante escribió en el buzón de sugerencias:

La idea de trabajar las matemáticas con los ordenadores me parece bastante buena puesto que aprendemos informática (al usar los ordenadores) y aprendemos matemáticas ya que usamos giros, traslaciones y simetrías. 😊

Lo mejor, en mi opinión, es seguir usando los ordenadores en matemáticas. 😊

Confrontando ambos cuestionarios, en relación con las actitudes hacia las matemáticas, puede decirse que A8 experimentó una mejora de las tres componentes (cognitiva, afectiva y comportamental) durante el trabajo con Geogebra, estando esta transformación positiva asociada al gusto y confianza que depositó en el trabajo con el software.

Análisis del Diario

Leyendo las entradas del diario de este estudiante durante las tareas GG, se aprecia un denominador común: todas ellas hacían referencia a una mejora actitudinal de A8. Se incluyen pequeños fragmentos de su diario, que aluden al desarrollo actitudinal que percibí en este alumno durante cada sesión con Geogebra:

Sesión 4: A8 y su compañero A15 argumentan por escrito la respuesta de la tarea 3. Después se ponen a trabajar en la tarea 4 (que les parece bastante sencilla) y en pocos minutos ya habían dibujado un triángulo equilátero con giros de 120° . Se preocupan de ayudar a sus compañeros, cuando éstos les piden ayuda, y trabajan sin descanso durante toda la sesión. Se muestran tan motivados como durante las primeras sesiones con Geogebra.

Sesión 7: Hoy ha trabajado sin su compañero A15, porque éste no ha asistido a clase. Durante toda la sesión ha estado trabajando en la tarea 5, mostrándose totalmente implicado y comprometido en su resolución. Además, su gusto por el trabajo con Geogebra le lleva a buscar distintas herramientas con las que realizar las construcciones de mosaicos y tiene confianza en que el software le ayudará a encontrar la solución de una manera más rigurosa. Durante esta sesión y las anteriores ha demostrado y gusto por las tareas, incluso por las más complejas, actitud que hasta el trabajo con Geogebra era poco habitual en él.

Las restantes entradas del diario aluden, al igual que las anteriores, a que A8 manifestó gusto y motivación por el trabajo con Geogebra y por las tareas GG, implicación total en su resolución y un aumento de confianza en sus posibilidades de éxito en matemáticas, lo que supuso una evolución respecto de su situación previa. Estas mejoras las manifestó tanto cuando trabajó con su compañero como cuando lo hizo en solitario, porque éste no había asistido a clase.

Análisis de las Parrillas de Observación de Actitudes

Observando el siguiente gráfico, se puede comprobar su evolución en las tres componentes: TR (Trabajo e Implicación en matemáticas), GM (gusto por las tareas) y CO (autoconfianza):

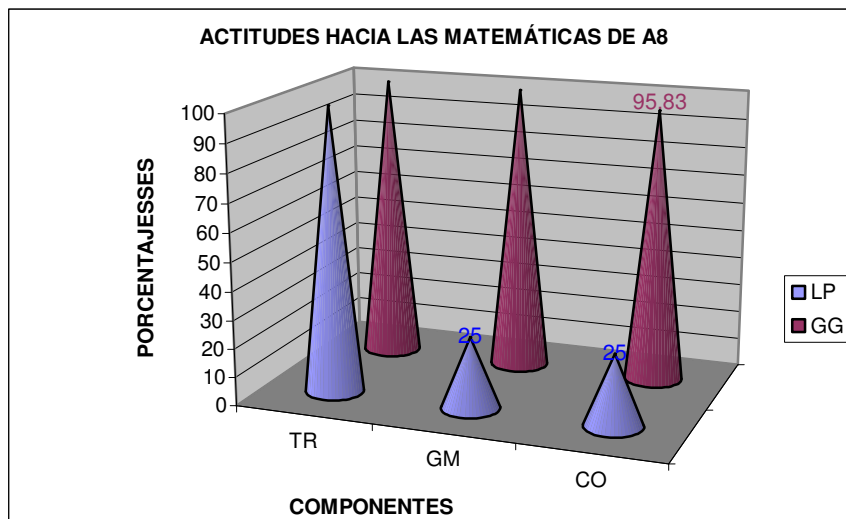


Figura 9-6. Porcentajes obtenidos por A8 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

A8 era un alumno muy trabajador, pues estaba interesado en superar la asignatura. A pesar de ello, no manifestaba aprecio por la misma ni por los contenidos que en ella se trabajaban, quejándose cuando debía realizar tareas que le exigían dedicar más tiempo y esfuerzo del que le gustaría emplear. Mostraba escasa confianza en sus posibilidades de éxito cuando debía resolver tareas no rutinarias. Se describía a sí mismo como un estudiante con bastantes limitaciones en lo concerniente a la resolución de problemas matemáticos, mientras que se sentía capaz de memorizar y aplicar correctamente cualquier algoritmo o procedimiento matemático.

Durante las tareas GG, continuó demostrando gran interés por las tareas y participando activamente en clase, no experimentando esta componente ninguna evolución pues su situación inicial ya era todo lo positiva que cabía esperar. Las otras dos componentes, gusto por las matemáticas y autoconfianza, sí que mejoraron notoriamente con la incorporación del software. A8 manifestó gusto por las tareas realizadas y por las matemáticas y se mostró más motivado en clase durante las tareas GG (100% de las sesiones) que durante las tareas LP (25% de las sesiones). Esta mejora está relacionada con su buena actitud hacia el uso de TIC (manifestada durante el 100% de las sesiones), pues el gusto por el trabajo con Geogebra le llevó a disfrutar más de las matemáticas. Además, su total confianza en que Geogebra le

ayudaría a resolver todas las tareas, contribuyó a ir mejorando poco a poco su autoconcepto, sobre todo en referencia a su capacidad para resolver problemas.

Análisis realizado con Atlas.ti: Triangulación

Antes de comenzar con este análisis, se realizó un doble contraste de la información recogida en las parrillas de observación, como método para aumentar la fiabilidad de este instrumento y garantizar la bondad de la observación realizada en clase. De este modo, además de contrastar mis asignaciones de las parrillas con las de un observador externo, se confrontaron mis parrillas para cada sesión y tarea con la codificación realizada sobre la reconstrucción de cada tarea con Atlas.ti, como se explicó en la página 232 (apartado 8.3). De esta comparación, se obtuvo un 97.92% de concordancia, encontrando una ligera discrepancia en la componente cognitiva de las actitudes hacia las matemáticas, que más tarde se comenta.

Procederé a continuación, una vez expuestos los resultados del análisis de los cuestionarios, del diario y de las parrillas de observación para A8, a analizar sus archivos de audio, de Geogebra y sus protocolos escritos de resolución de cada tarea, con ayuda del software Atlas.ti. Asimismo, este software ha permitido triangular los distintos análisis realizados para evaluar la transformación de las actitudes hacia las matemáticas de A8 y ayudará a exponer los resultados del mismo, ejemplificándolos adecuadamente⁶¹.

Siguiendo el mismo esquema empleado para los análisis anteriormente expuestos, presento el análisis de las actitudes hacia las matemáticas desglosándolas en cuatro apartados: las tres componentes de las actitudes hacia las matemáticas consideradas en las parrillas (comportamental, afectiva y cognitiva) y la actitud de los alumnos hacia el uso de las TIC en el aula de matemáticas.

Componente Comportamental: Implicación e interés por el trabajo en matemáticas (TR)

Tanto durante las tareas con lápiz y papel como durante las tareas con Geogebra, este alumno demostró total implicación e interés por el trabajo realizado en matemáticas, pues estaba muy motivado por superar la asignatura con la mejor calificación que le fuese posible obtener. Dado que la situación de partida era la mejor que se podía esperar en esta actitud, no se puede hablar de evolución o mejora al usar las TIC; únicamente añadir que esta actitud tan positiva

⁶¹ Se exponen los ejemplos más significativos para el ámbito actitudinal. De este modo, se intenta reducir la extensión del análisis presentado. La codificación realizada con Atlas.ti para las 10 tareas de A8, está a disposición de cualquier persona que quiera consultarla, solicitándonosla a mí o a la directora de este trabajo.

se mantuvo constante durante el trabajo con Geogebra. Es decir, toda la información recogida hacía referencia al código TR20, que ahora paso a analizar.

TR20. Trabaja durante la sesión mostrando interés por el trabajo

Este código apareció en todas las tareas unas seis veces de media, excepto en las tareas 5, 7 y 10, en las que se usó para la codificación de fragmentos 10 u 11 veces. La mayor frecuencia registrada en las tareas 5 y 10 puede justificarse porque fueron las dos tareas en las que A8 invirtió algo más de dos sesiones, mientras que dedicó a las demás tareas una única sesión. Respecto a la tarea 7, el interés que manifestó podía ser el reflejo del entusiasmo mostrado por la actividad, pues disfrutó creando distintos mosaicos semirregulares y embelleciendo los diseños.

Analizando los factores⁶² que influyeron de en la implicación de A8 en las tareas GG:

Tabla 9-14. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase TR20

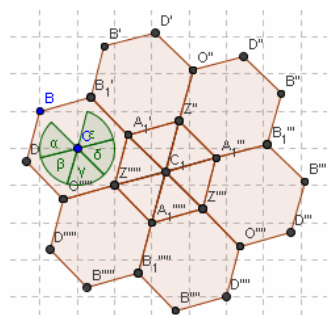
<i>Factor que influyó mayormente en TR20</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	40
Interacción alumno-alumno	7
Interacción alumno-profesora	1
Tarea	4
Geogebra e interacción alumno-alumno	1
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	17

De las 72 ocasiones en las que se empleó este código para la codificación, en 17 de ellas no se encontró un factor predominante, lo cual parecía lógico pues A8 siempre se había interesado por las tareas trabajadas en clase por voluntad propia, sin necesidad de apoyo externo. Las restantes ocasiones en las que se encontró una influencia predominante clara de alguno de los factores estudiados, el 72.73% correspondía a Geogebra, el 12.73% a la interacción con su compañero y el 7.27% a la tarea, pudiendo considerar la interacción conmigo casi nula, un 1.82%. En este caso, la herramienta le ayudó a implicarse aún más en las tareas, no sólo en la búsqueda de una solución que le permitiera resolver las tareas para

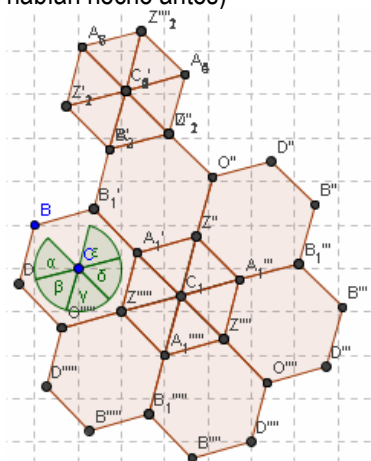
⁶² No hay que confundir el significado de factor como “grupo de variables o ítems con un significado común” empleado en el análisis factorial del cuestionario MIO antes presentado, con el significado de factor como “causa, agente, elemento o aspecto” empleado en el resto de esta memoria y en concreto, en el análisis de datos realizado.

lograr una evaluación positiva en la asignatura. El trabajo con Geogebra le incitó a buscar distintos modos de hacerlo y le hizo disfrutar de los problemas trabajados, aún cuando a priori tenía dificultades para resolverlos. En otras palabras, se puso de relieve la función motivadora atribuida al software.

Ejemplo 9-1. Influencia de Geogebra en la componente comportamental de A8



A15: bueno pues entonces a ver... ahora esto si hacemos nada más que simetrías...
 (Uno de sus compañeros les hace un comentario sobre el mosaico de hexágonos y ellos le contestan algo molestos)
 A8: y qué, lo que cuenta es...
 A15: ¿qué?
 A8: lo que cuenta es el resultado final, ¿no?
 A15: pues sí, vamos a ver cómo queda al final del todo
 A8: ¿por qué lo haces desde ese eje?, ¿desde esa raya?, ¿por qué no lo haces desde aquella?
 A15: ¿desde qué raya lo hago?
 A8: desde ésta
 A15: para que así sea una simetría
 A8: ¡ah, vale!
 (Desde los dos segmentos propuestos por ambos era factible realizar una simetría, pero se decantan por la propuesta de A15 y hacen 6 simetrías de los triángulos centrales con eje en uno de los lados de los hexágonos laterales que están a mitad de la distancia. Es curioso que lo hicieran así, porque era mucho más sencillo hacer simetrías de hexágonos y luego dividir uno de ellos con segmentos en triángulos, como habían hecho antes)



Este fragmento pertenece al segundo mosaico semirregular que crearon en la tarea 7 y que después continuaron ampliando y extendiendo hasta quedar satisfechos con el resultado.

Refleja cómo ambos alumnos estaban interesados en la tarea y la herramienta les permitió avanzar rápidamente en la construcción de cada mosaico, lo que posibilitó la creación de varios modelos. De este modo, Geogebra hizo más atractiva para los estudiantes la tarea, que con LP les hubiese resultado menos motivadora, al necesitar invertir mucho más tiempo y esfuerzo para construir gráficamente con precisión y rigor los mosaicos.

Componente Afectiva: Gusto por las Matemáticas (GM)

En esta actitud, la evolución de A8 con respecto a su situación de partida resultó bastante beneficiosa, pues en numerosas ocasiones (durante las tareas con Geogebra) demostró gusto por las tareas que estaba realizando y pareció encontrar la asignatura más atractiva y útil que durante las tareas LP. La información de esta actitud se obtuvo a través de los siguientes indicadores:

GM22. Prefiere realizar ejercicios en los que no tenga que pensar

Este fue el único indicador de los considerados para las actitudes hacia las matemáticas en el que no hubo coincidencia absoluta entre las observaciones de las parrillas y el análisis de los datos realizado con Atlas.ti, alcanzado un 96.6%. Este código no fue utilizado en ninguna ocasión durante las observaciones de clase, aunque se consideró adecuado para uno de los fragmentos de la tarea 3, de ahí que la concordancia entre ambos análisis no fuese completa. A lo largo de todas las tareas, sólo en este fragmento A8 no mostró gusto por la tarea:

Ejemplo 9-2. Componente afectiva de A8 (indicador GM22)

A8: pero maestra, quedan 4 minutos, no nos da tiempo... (A15 ha dibujado un cuadrilátero)

A8: podías buscar uno más fácil, un rectángulo, un rombo...

A15: ha dicho que tiene que ser uno más difícil que éstos

A15: ¿pruebo con giros?

A8: pues sí con giros, cómo tú quieras y apagas. Tío, estoy harto ya, me aburro ya...

A15: vamos a explicarlo

A8: espérate, dice: (lee la segunda pregunta de la tarea 2) ¿eres capaz de repetir algunos de los mosaicos que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes? (A8 está algo cansado pues llevan bastante rato intentando argumentar la respuesta de la tarea 3 y han tenido bastantes dificultades. Como la clase ya va a terminar le dice a A15 que acabe él, parece que se siente algo frustrado por la dificultad de la tarea 3, aunque su compañero lo anima a seguir y se ponen a ello, ya que ante todo quieren terminar bien el trabajo)

GM25: Disfruta con la tarea que está realizando

Este código se empleó en todas las tareas, destacando las tareas 1 y 10, por tenerlo asignado con mayor frecuencia. El criterio seguido para la codificación fue que el estudiante manifestara entusiasmo y gusto por la tarea. Al analizar las 25 veces que se empleó este

indicador, se puede comprobar que éste iba asociado a otros factores, destacando como más influyentes los siguientes:

Tabla 9-15. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase GM25

<i>Factor que influyó mayormente en GM25</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	14
Interacción alumno-alumno	0
Interacción alumno-profesora	0
Tarea	3
Geogebra e interacción alumno-alumno	0
Geogebra e interacción alumno-profesor	0
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	8

De las 17 ocasiones en las que parecía evidente cuál era el factor que en mayor medida contribuía a ese gusto por la tarea demostrado por A8, en 14 de ellas ese factor fue Geogebra y en las 3 restantes el motivo fue la tarea que estaba realizando (el código ITAREA se usó en tareas 4 y 8). A modo de ejemplo de la influencia de Geogebra, incluyo el siguiente fragmento de la tarea 2:

Ejemplo 9-3. Influencia de Geogebra en la componente afectiva de A8 (indicador GM25)

A8: es que ésto son cosas, que empiezas a hacer unos cuántos y ya sigues... dices mira aquí una figura, aquí otra parte, aquí otra parte y sigues siempre, te enganchas...

A8: ¡es un vicio, je je je !

La herramienta le motivaba para trabajar sin descanso durante todas las tareas, intentando mejorar y embellecer sus diseños hasta sentirse orgulloso de ellos, como en el siguiente extracto de la tarea 7:

Ejemplo 9-4. Influencia de Geogebra en la componente afectiva de A8 (indicador GM25)

A15: pero claro ahora ya es sencillo, ahora haciendo nada más que simetrías...¿o no? sí

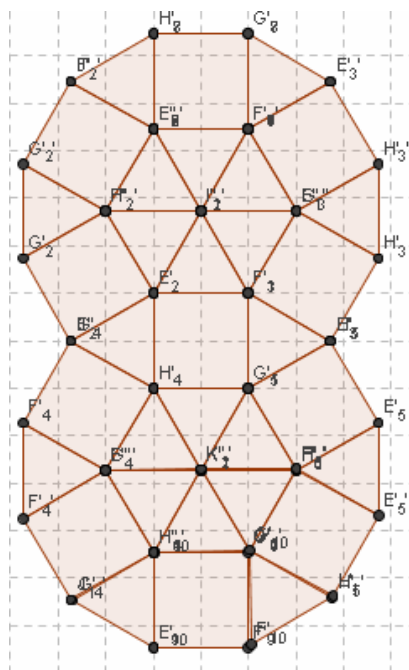
A8: ¡ostras! ¿te has fijado en éste?

A15: ¿qué?

A8: éste se ha quedado guapísimo

A15: ves

A8: un cuadrado, un triángulo, un cuadrado, un triángulo, se han quedado así como dos aros, nos ha faltado terminarlo por aquí (lo terminan con una simetría de un cuadrado y dos de triángulos)



A15: ¡ya está!

A8: se ha quedado guapo, ¿eh?

A15: ya

GM27: Tras varios intentos de resolver la tarea sin éxito, se siente frustrado/a

Se registró este código en cuatro ocasiones: una vez en las tareas 3 y 8 y dos veces en la tarea 10. Estas cuatro situaciones coincidieron con los momentos en los que A8 tenía dificultades para obtener una respuesta a las tareas, a pesar de haberlo intentado de diversas formas y con gran perseverancia. Se sentía frustrado y parecía que iba a abandonar, aunque no lo hizo y siguió trabajando en ellas hasta concluir las de un modo satisfactorio para él. En el caso de la tarea 3, A8 y A15 trataban de argumentar de un modo más formal al que estaban habituados en matemáticas, por lo que tuvieron ciertas dificultades. En las tareas 8 y 10, que trabajó en solitario, observé cómo se desanimó tras dedicar bastante tiempo y esfuerzo a buscar las 8 combinaciones de polígonos posibles para formar polígonos semirregulares en la tarea 8, así como a teselar con varias piezas construidas por deformación de polígonos regulares en la tarea 10. Aún así, tras descansar unos minutos, continuó con ambas tareas hasta concluir las, recuperando su entusiasmo habitual. Un ejemplo de tales fragmentos, además del ejemplo 9-2, es el siguiente:

Ejemplo 9-5. Componente afectiva de A8 (indicador GM27)

A8: 360 menos 280... de 80 no hay ninguno

A8: ¡qué rollo, no se me ocurre ninguno!

(Se bloquea de nuevo porque no se le ocurre ninguna más y se distrae con uno de sus compañeros durante 40 segundos, después vuelve a la carga)

A8: ¡a ver!

A8: 270 más...

(No habla pero hace ruidos que denotan enfado y después alegría)

A8: ¡bien! 270

Resumiendo todo lo expuesto sobre esta actitud, se puede decir que el uso de Geogebra le ayudó a disfrutar más de las matemáticas, demostrando no sólo interés por superar la asignatura, sino gusto por las tareas realizadas y por el modo de trabajar en el aula. Sus respuestas a los ítems 2, 12 y 21 del cuestionario “Me interesa tu opinión” (p. 271) apoyan estas conclusiones.

Componente Cognitiva: Creencias de los estudiantes: autoconfianza

En esta actitud, A8 experimentó una mejoría bastante considerable respecto a su situación anterior. No solía confiar en sí mismo cuando se trataba de tareas no rutinarias o situadas en contextos no familiares. Sin embargo, durante las tareas GG demostró autoconfianza para realizar todas ellas. Toda la información obtenida de esta actitud se obtuvo del siguiente indicador:

CO23. Confía en poder resolver el problema por sí solo

Este código se empleó para todas las tareas, destacando las tareas 5 y 10, por tener asociadas las mayores frecuencias. En ambos casos, el estudiante dedicó dos sesiones a su resolución y se mostró confiado en poder hacerlo por sí solo. Cuando tuvo algunas dificultades, sobre todo en la tarea 10, en lugar de rendirse o abandonar lo intentó con más ganas, convencido de que sería capaz de resolverlas si persistía en ello y así fue. Al analizar este código, destacan los siguientes factores, como más influyentes:

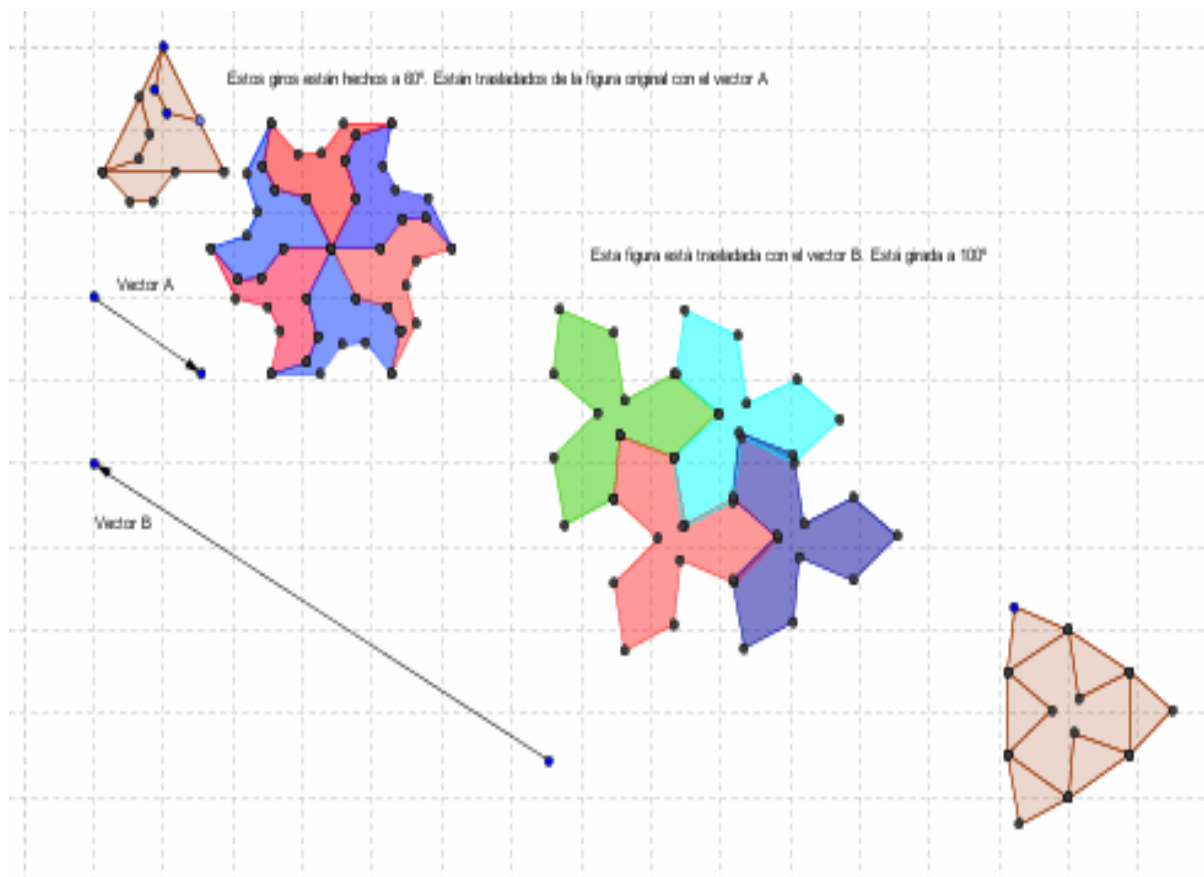
Tabla 9-16. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase CO23

<i>Factor que influyó mayormente en CO23</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	42
Interacción alumno-alumno	14
Interacción alumno-profesora	2
Tarea	3
Geogebra e interacción alumno-alumno	2
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	10

De las 65 ocasiones en las que parecía claro cuál era el factor que en mayor grado ayudó a que A8 mejorase en esta actitud, en el 64.62% resultó ser Geogebra el factor más decisivo.

No obstante, su compañero ejerció también una influencia positiva en un 21.54% de las situaciones de aula en las A8 registró este indicador. Una señal de que aumentó su confianza en sí mismo usando Geogebra, y que me sorprendió gratamente, fue el hecho de que, después de las dificultades que tuvo en la tarea 10 para construir el mosaico con su motivo mínimo (por un ligero error en la construcción de éste), a A8 aún le quedaron ganas para instalar en su casa el software Geogebra y repetir la actividad 10 en solitario y por decisión propia, enviándomela después por correo electrónico. Una muestra de los mosaicos construidos en tal actividad es la siguiente:

Ejemplo 9-6. Influencia de A8 en la componente cognitiva de A8



En la imagen anterior se observa cómo A8, partiendo de un triángulo y un hexágono regular y mediante transformaciones isométricas en sus lados, obtuvo los motivos mínimos, los trasladó para que yo pudiese observar cuál era el proceso de construcción y después construyó los mosaicos mediante giros (incluyó explicaciones de los pasos seguidos en la construcción). El hecho de que decidiera invertir un tiempo adicional en casa sin que yo se lo solicitase, puso de relieve, además del gusto e interés por la asignatura, confianza en sí mismo. Los ítems 3 y 9 del cuestionario “Me interesa tu opinión” hacían referencia a esta actitud y sus respuestas (p. 271) confirman lo anteriormente expuesto.

Para finalizar el análisis de las tres componentes de las actitudes hacia las matemáticas de A8, se expone la relación que el análisis con Atlas.ti ha confirmado entre dichas componentes. La implicación en el trabajo realizado en matemáticas, el gusto por la asignatura y la autoconfianza estaban fuertemente relacionadas entre ellas. Se puede destacar la fuerte correlación entre GM25 y TR20, pues aparecen simultáneamente en el 92% de los casos en los que se codificaron estas actitudes hacia las matemáticas. Estos resultados parecen indicar que el gusto por el trabajo con Geogebra hizo que A8 disfrutara y se interesara más por las tareas realizadas en matemáticas, conduciéndole su mayor implicación en ellas a un mayor éxito en su resolución, lo que le ayudó a ir ganando progresivamente más confianza en sí mismo.

Actitudes hacia el uso de TIC en matemáticas (TIC)

A8, en todo momento demostró motivación y gusto por el uso de Geogebra, tanto en el aula como en casa. De este modo, me centraré en analizar esta actitud positiva.

TIC24. Interés y gusto por el trabajo con ordenadores

A lo largo de las 10 tareas, se empleó este código en 59 ocasiones, manteniendo cierta constancia en las tareas, a excepción de la tarea 5, que registró una frecuencia superior a la de las demás. La ausencia de A15 en las dos sesiones dedicadas a dicha tarea, hicieron que A8 se centrara en el manejo del software, optimizando su uso con gran maestría y soltura. Así, mientras la mayoría de sus compañeros hallaron los valores de los ángulos interiores de cada polígono regular descomponiendo los polígonos regulares en triángulos usando LP, a él le pareció más sencillo, y sobre todo más preciso, hacerlo con Geogebra. La eficiencia demostrada en su manejo le permitió lograrlo en el mismo tiempo que sus compañeros.

Muchos de los fragmentos de tareas expuestos anteriormente a modo de ejemplo son igualmente válidos para dar evidencias de cuándo A8 manifestaba gusto e interés por el trabajo con ordenadores. Además, cuando se le preguntó acerca de ello en el cuestionario “Me interesa tu opinión” sobre actitudes hacia las TIC (ítems 1, 6, 10, 16 y 21), sus respuestas confirmaron tales afirmaciones.

Desde el inicio de la experiencia con Geogebra, y a lo largo de todas las sesiones en las que trabajó con este software, A8 demostró interés y gusto por su uso, manteniendo esta motivación constante desde el comienzo hasta el final. Con ello dejó claro que ésta no obedecía únicamente a la novedad de trabajar con el software, sino que realmente le pareció

satisfactorio emplear Geogebra como recurso facilitador para la resolución de problemas. He de resaltar también el hecho de que decidiese descargar en su casa el programa para seguir trabajando con él, a pesar de que yo no le exigí tal esfuerzo adicional, pues confirma mi observación de aula y posterior análisis con Atlas.ti.

Por otra parte, el análisis realizado ha puesto de manifiesto que, de entre los factores considerados como causantes de la transformación positiva experimentada por A8 en estas actitudes, Geogebra y su interacción con el compañero, pueden considerarse los artífices de dicho avance. En efecto, el software destacó como único factor influyente para la mejora del gusto por las tareas matemáticas (componente afectiva). En lo que respecta a la mayor implicación en el trabajo (componente comportamental), Geogebra también ejerció un efecto notorio, al incidir la herramienta en su desarrollo en torno al 73% de las ocasiones en las que A8 las evidenció, mientras que la interacción con A15 destacó en un 13% de tales situaciones. La componente en la que A15 ejerció un mayor efecto fue en la cognitiva, siendo esta influencia visible en un 21.54% de las tareas GG, mientras que Geogebra contribuyó al desarrollo de esta componente en el 64.64% de las sesiones en las que A8 realizó dichas tareas.

Este estudio en detalle de A8 pone de manifiesto que existe concordancia entre la información extraída de los audios y de los archivos de Geogebra, y la de los diferentes instrumentos antes analizados (cuestionarios, diarios, entrevistas, buzones de sugerencias, parrillas de observación) para el conjunto total y para la muestra de estudiantes. Este hecho aporta fiabilidad a las conclusiones que de ellos se han obtenido, al tiempo que garantiza la bondad de las observaciones realizadas en el aula.

Como resumen del análisis de las actitudes hacia las matemáticas de A8 y en respuesta al objetivo 2 de investigación, concluyo diciendo que durante las tareas GG evidenció una mejora que le llevó a mostrar durante todas las sesiones: interés por el trabajo realizado en matemáticas, gusto por las tareas y por la asignatura, confianza en sus posibilidades de éxito, y gusto por el trabajo con Geogebra. La triangulación de todos los análisis realizados para A8 ponen de relieve una relación de causa-efecto entre su buena actitud hacia el trabajo con Geogebra y la mejora de sus actitudes matemáticas, pues él asociaba los cambios que había experimentado en las componentes afectiva y cognitiva al uso de Geogebra en matemáticas.

9.1.2.3.2. Estudio de A3, A7, A9, y A10

Mostraré justificadamente la evolución de estos cuatro estudiantes, triangulando la información contenida en los cuestionarios, diarios, parrillas de observación, archivos de audio de las tareas 1 y 5, y los archivos de Geogebra de cada uno de ellos, junto con los protocolos de resolución o respuestas escritas de todas las tareas GG.

El proceso de análisis llevado a cabo con Atlas.ti para las tareas 1 y 5 de estos estudiantes coincide con el realizado para el estudio de A8. Se transcribieron las tareas, se codificaron y después se contrastó esta codificación con la realizada en las parrillas de observación de actitudes correspondientes a estas dos tareas. Se halló total concordancia⁶³ entre ambas codificaciones, hecho que otorga fiabilidad a los resultados obtenidos mediante el análisis de las parrillas correspondientes a las 10 tareas GG, que constituirán la parte fundamental de este análisis.

En lo que sigue, muestro la experiencia de estos cuatro estudiantes con Geogebra de una manera que resulte adecuada, pero sin entrar en tanto detalle como con el estudiante A8. Es decir, expongo un breve análisis de resultados de cada instrumento por separado: cuestionarios, diarios y parrillas. Después, incluyo la triangulación con Atlas.ti de dichos resultados con los obtenidos del análisis de los archivos de audio de las tareas 1 y 5, de sus archivos de Geogebra y de los protocolos escritos de resolución de las tareas, realizados también con dicho software.

9.1.2.3.2.1. Alumno A3.

A3 fue elegido para formar parte de la muestra porque respondía al perfil de estudiantes con actitud negativa hacia las matemáticas. Es decir, estaba desmotivado y carecía de interés por superar la asignatura. Esperaba que este estudiante mejorase durante el trabajo con Geogebra. No obstante, pensaba que posiblemente se mostraría más motivado y resolvería las tareas más sencillas, pero tendría dificultades con las tareas más complejas, lo que quizás le llevara a su comportamiento habitual de no trabajar en el aula. Sin embargo, fue uno de los estudiantes que más gratamente me sorprendió con su evolución, pues descubrí que la muy deficiente competencia matemática manifestada durante las tareas LP y con anterioridad se debía

⁶³ Para el estudiante A8, al analizar la totalidad de las tareas, se obtuvo un 97.92% de concordancia, debido a que en fragmentos puntuales se asignaron códigos que en las parrillas de observación de aula no fueron considerados. Dado que el volumen de archivos de audio que se ha analizado para estos cuatro estudiantes corresponde a la quinta parte del analizado para A8, es comprensible no encontrar ninguna discrepancia.

principalmente a una actitud hacia las matemáticas muy negativa. Además, A3 tenía un handicap añadido a su perfil previo y era que su pareja de trabajo, A16, respondía al mismo perfil que él y sólo colaboró en la realización de las tareas en momentos puntuales. A3 se acostumbró a realizar las tareas sin la ayuda de A16, aunque no por ello desistió de convencerlo de que trabajase en las tareas con él y hasta lo logró en varias ocasiones. La diferencia entre A3 y su pareja residía en que las deficiencias cognitivas manifestadas por A16 no eran debidas principalmente a la falta de motivación por el trabajo en matemáticas, sino que ésta venía acompañada de un limitado e insuficiente bagaje en matemáticas, que le llevaba a manifestar carencias cognitivas difícilmente salvables aunque se implicase más en las tareas.

A3 hubiese sido digno de estudiar en profundidad, como se ha hecho con A8, porque fue uno de los estudiantes que experimentó una evolución más espectacular tanto a nivel actitudinal como cognitivo, superando con creces mis expectativas previas. Así habría sido, de no ser por un problema técnico en la recogida de los archivos de audio de sus actividades, que impidió que tuviese acceso a esos archivos. A pesar de que A3 prestó especial atención en grabar todas y cada una de sus tareas, e ir contando cómo las iba resolviendo, toda esta información se perdió, debido en ocasiones a fallo de su ordenador (se quedaba bloqueado y era necesario reiniciarlo con la consecuente pérdida de la información de audio) y, otras veces, debido a su compañero, que cuando guardaba estos archivos lo hacía incorrectamente. Por esta razón, el único audio de A3 adecuado para el análisis era el de la tarea 1, quedando los audios de las restantes tareas reducidos a un minuto en el que A3, muy motivado por resolver las tareas adecuadamente y por demostrar que estaba mejorando, resumía su modo de resolver cada tarea. Se reconstruyó la tarea 1 con Atlas.ti y se analizaron los audios-resumen de las restantes tareas, encontrando concordancia entre las parrillas y la codificación con el software. Con esta información y la de los demás instrumentos, se tratará de contar cómo A3 fue mejorando actitudinalmente durante las tareas GG, pues la influencia de Geogebra se considera crucial para la evolución de este estudiante.

Análisis de los Cuestionarios

En primer lugar, analizo las respuestas de A3 al cuestionario “Actitud hacia las Mates” antes (Pretest) y después (Postest) de la experiencia de trabajar matemáticas con Geogebra, que muestran una leve mejoría en sus actitudes, cuando se considera la variación de todas las respuestas en conjunto:

Tabla 9-17. Respuestas de A3 al cuestionario “Actitud hacia las mates”

CUESTIONARIO “ACTITUD HACIA LAS MATES” DE A3	PRE-TEST	POS-TEST
1. Las matemáticas son amenas y estimulantes para mí.	3	3
2. Las matemáticas es una asignatura valiosa y necesaria.	5	5
3. Pienso que podría estudiar matemáticas más difíciles.	1	2
4. Las matemáticas normalmente me hacen sentir incómodo y nervioso.	2	4
5. Siempre dejo en último lugar mi tarea de matemáticas porque no me gusta.	3	5
6. Las matemáticas me servirán para mis estudios futuros.	5	5
7. Por alguna razón, a pesar de que estudio, las matemáticas me parecen particularmente difíciles.	2	3
8. Siempre soy capaz de controlar mi nerviosismo en los exámenes de matemáticas.	3	5
9. Yo disfruto con los problemas que me dejan como tarea en clase de matemáticas.	2	3
10. El curso de matemáticas sirve para enseñar a pensar.	5	4
11. Los términos y símbolos usados en matemáticas nunca me resultan difíciles de comprender y manejar.	3	3
12. Algunas veces me siento tenso e incómodo en clase de matemáticas.	2	5
13. La asignatura de matemáticas no es mi asignatura favorita.	1	1
14. Sólo deberían estudiar matemáticas aquellos que las aplicarán en sus futuros trabajos.	5	5
15. La asignatura de matemáticas es muy extensa, no puedo enterderla.	3	3
16. Generalmente me he sentido seguro al intentar hacer matemáticas.	3	4
17. No me molestaría en absoluto tomar más clases de matemáticas.	2	1
18. Las matemáticas me resultarán útiles para mi futuro.	5	5
19. Confío en poder hacer ejercicios más complicados de matemáticas.	3	3
20. Sólo en los exámenes de matemáticas me sudan las manos o me duele el estómago.	5	4
21. Prefiero estudiar cualquier otra asignatura en lugar de matemáticas.	3	3
22. Guardaré mis cuadernos de matemáticas porque probablemente me servirán.	4	4
23. Generalmente tengo dificultades para resolver los ejercicios de matemáticas.	2	2
24. Los exámenes de matemáticas provocan en mí mayor ansiedad que cualquier otro examen.	3	3
25. Sería feliz de obtener mis más altas notas en matemáticas.	5	5
26. Necesitaré de las matemáticas para mi trabajo futuro.	5	5
27. Puedo aprender cualquier concepto matemático si lo explican bien.	4	4
28. Mi mente se pone en blanco y soy incapaz de pensar claramente cuando hago matemática	2	2
29. Ojalá nunca hubieran inventado las matemáticas.	5	3
30. Sólo deberían enseñarse en matemáticas las cosas prácticas que utilizaremos cuando terminemos nuestros estudios.	4	3
31. Las matemáticas no son difíciles para mí.	3	2

El análisis por componentes de estas actitudes informa de que A3 obtuvo una puntuación media en la componente cognitiva de 2.63 y 2.75 en el Pretest y Postest, respectivamente, lo que revela una inapreciable variación. En la componente afectiva, los valores medios fueron de 2.93 (Pretest) y 3.4 (Postest), que sí puede considerarse una transformación positiva.

También se analizaron las respuestas de este estudiante al cuestionario “Me interesa tu opinión” (MIO), las cuales evidenciaron una actitud favorable hacia el trabajo realizado con Geogebra, como puede apreciarse en la siguiente tabla (ninguna respuesta negativa, únicamente en 5 de los 22 ítems manifestó indecisión):

Tabla 9-18. Respuestas de A3 al cuestionario “Me interesa tu opinión”

CUESTIONARIO “Me interesa tu opinión” DE A3	Respuesta
1. He participado de forma más activa	4
2. Me ha gustado más la asignatura	4
3. Los ordenadores no me han ayudado a sentirme más seguro	4
4. Prefiero trabajar solo	5
5. He reconocido en mayor grado mis fallos	4
6. Las TIC no me han motivado nada	5
7. He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates	3
8. Ni trabajando en equipo, mejora mi relación con los compañeros	5
9. He confiado más en mis capacidades	4
10. Trabajar las mates con los ordenadores es más difícil	5
11. He comprendido con mayor rapidez	3
12. Sigo sin apreciar la importancia de las mates	4
13. Las TIC no me han ayudado a reflexionar sobre mis errores	3
14. Trabajar en grupo hace las mates más fáciles	5
15. Sigo teniendo dificultades para comprender las mates	3
16. Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas	4
17. Trabajar en grupo hace las mates más difíciles	5
18. Este modo de trabajo facilita la comunicación con los compañeros	3
19. Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo	4
20. Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates	4
21. Sigue sin gustarme el trabajo en mates	4
22. Prefiero trabajar en grupo	5

Al preguntarle explícitamente a este estudiante sobre la experiencia de trabajar con Geogebra, A8 admitió mejoras en las componentes cognitiva, afectiva y comportamental de las actitudes hacia las matemáticas (mayor confianza, gusto e implicación en las tareas matemáticas), una actitud positiva hacia el uso de Geogebra como herramienta de trabajo en matemáticas, así como una opinión favorable sobre el trabajo colaborativo.

Confrontando los análisis de ambos cuestionarios puede decirse que A3 manifestó una transformación beneficiosa de las componentes cognitiva, afectiva y comportamental durante el trabajo con Geogebra, según sus respuestas al cuestionario MIO. No obstante, los resultados del otro cuestionario informaron de una evolución de la componente afectiva, pero no mostraron cambios en la componente cognitiva. Por tanto, se llega a la conclusión de que el uso de Geogebra provocó cambios en su afectividad por la materia, que siguió

manifestando después del trabajo con Geogebra. Sin embargo, la evolución observada en la componente cognitiva durante el trabajo con el software, estuvo asociada a su uso. Respecto a la componente comportamental, explorada únicamente a través del cuestionario MIO, los análisis de los demás instrumentos de observación ponen de manifiesto que, ciertamente, este estudiante sufrió una transformación satisfactoria de dicha componente, que le llevó a implicarse más en las tareas realizadas con esta herramienta.

Análisis del Diario

Todas las entradas del diario que para este estudiante escribí al término de las sesiones con Geogebra hacían referencia a lo sorprendida que estaba por la transformación que A3 había sufrido, como consecuencia del trabajo con el software. Me comunicó su gusto por el trabajo con el software y por las tareas realizadas con él, no solo con palabras sino con hechos, al implicarse activamente en su resolución y demostrar un aumento de la confianza en sí mismo, actitud que hasta entonces nunca había exhibido. Se incluyen algunos extractos del diario como ejemplo:

Sesión 3: A3 estaba preocupado porque cuando ha ido a grabar el audio de la tarea 2, su compañero lo ha borrado accidentalmente. Entonces ha grabado un nuevo archivo resumiendo cómo había resuelto la tarea (...) A este alumno no le ha influido el cansancio acusado por otros compañeros al transcurrir la sesión a quinta hora (13-14 h.) porque sigue motivadísimo y está encantado con esta forma de trabajar.

Sesión 6: (...) Ha sido uno de los más rápidos y sistemáticos y sigue trabajando de modo autónomo. Únicamente solicita mi presencia buscando confirmación de la bondad de sus argumentos y resultados. Se muestra muy contento de ver cómo está mejorando en matemáticas.

Análisis Global de las Parrillas de Observación

Se sintetizan en la siguiente figura⁶⁴ los análisis realizados a las parrillas de observación de A3 de las tareas LP y GG, relativos a sus actitudes hacia las matemáticas:

⁶⁴ TR (Trabajo e Implicación en matemáticas), GM (gusto por las tareas) y CO (autoconfianza)

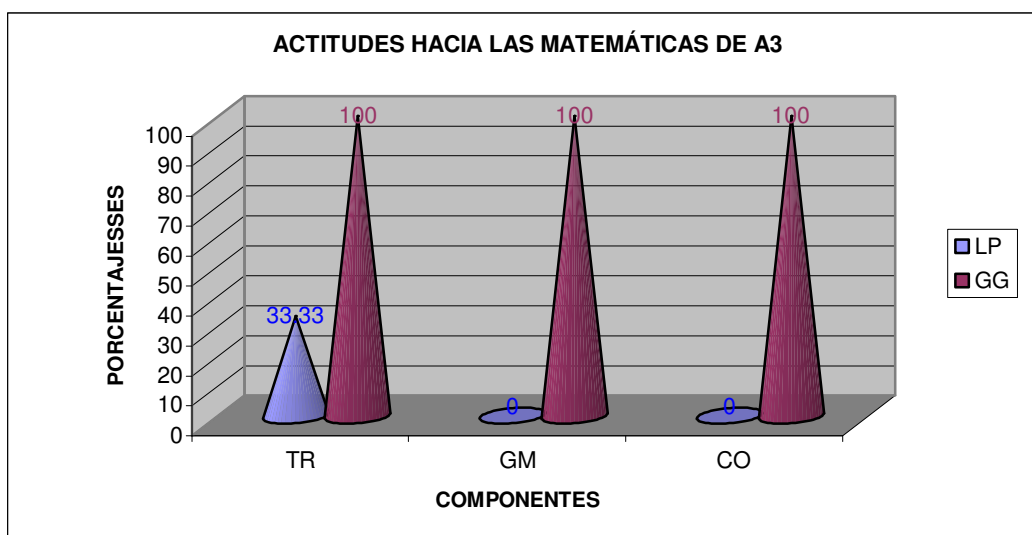


Figura 9-7. Porcentajes obtenidos por A3 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

El uso de Geogebra contribuyó a que trabajase en clase demostrando gusto e interés por las tareas y confianza en poder resolverlas por sí mismo, actitudes que durante las tareas LP no manifestó nunca o en contadas ocasiones (TR).

Triangulación de los Análisis Realizados

Mediante los análisis individuales de la información recogida con cada uno de los instrumentos ya expuestos, junto con el realizado con Atlas.ti para las tareas 1 y 5, se exploraron las componentes comportamental, cognitiva y afectiva de las actitudes hacia las matemáticas, así como las actitudes hacia el uso de Geogebra en matemáticas, cuya triangulación expongo a continuación. Para ello, muestro un análisis detallado de las parrillas de observación, que se completará con la información de los restantes instrumentos (cuestionarios, diarios, protocolos escritos de resolución de las tareas y análisis de los archivos de audio y Geogebra con Atlas.ti para las tareas 1 y 5).

El análisis de las parrillas de las tareas con lápiz y papel (tareas LP) y con Geogebra (tareas GG) evidenció que este estudiante experimentó grandes cambios en las tres componentes. Durante la realización de las tareas LP, A3 únicamente había manifestado interés por dichas tareas y se había implicado en su resolución en un tercio de las sesiones en las que las trabajaron. Además, no manifestó agrado por ninguna de las tareas LP, ni por las realizadas con anterioridad durante el primer trimestre del curso, ni tampoco confianza en sus posibilidades de éxito en matemáticas. En otras palabras, sus actitudes hacia las matemáticas eran bastante negativas antes del trabajo con Geogebra. Sin embargo, la incorporación de esta herramienta y el gusto que manifestó por trabajar con ella (función motivadora) produjo un

giro de 180° en estas actitudes para este alumno. Durante el periodo en el que trabajó con Geogebra, A3 se implicó en todas las tareas, demostrando interés y gusto por las mismas y además, se mostró capaz de resolverlas por sí mismo. Una muestra de ello, es el siguiente fragmento extraído de la reconstrucción con Atlas.ti de la tarea 1, en la que a pesar de encontrar ciertas dificultades para teselar con pentágonos, A3 no desiste en el intento, sino que sigue trabajando con interés mostrando confianza en lograrlo, y al final lo consigue:

Ejemplo 9-7. Influencia de Geogebra en las actitudes hacia las matemáticas de A3

A3: con un pentágono no se puede, eso está claro

(Después de hacer muchas pruebas con pentágonos y no obtener éxito, llega a la conclusión de que no se puede teselar con pentágonos, pero no está seguro de ello y quiere confirmar que está en lo cierto antes de seguir probando a teselar con hexágonos)

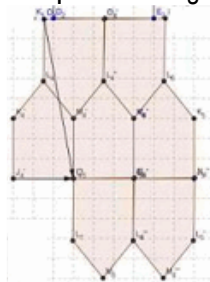
A3: ¡Maestra, con un pentágono no se puede!

Profesora: ¿estás seguro?

(Yo no le confirmo nada sino que siembro la duda, así que decide seguir intentándolo y trata de encontrar otras representaciones de pentágonos, porque, de momento, está poco creativo con estas figuras, sin embargo no se da por vencido)

A3: ¡venga invéntate otro pentágono!

A3: ¡vamos a seguir!, vamos a ver, ¿y si lo dibujáramos así?



Los dos cuestionarios de actitudes confirmaron el análisis anterior de las parrillas. A3, según su propia percepción, experimentó cambios usando Geogebra que quedaron reflejados en sus respuestas a los ítems 1, 2, 3, 9 y 21 del cuestionario MIO (p. 287). El ítem 1 hace referencia a la componente comportamental o de *trabajo o implicación en matemáticas (TR)*, y puso de relieve que A3 consideraba que había participado de forma más activa durante las tareas GG. Los ítems 2 y 21 hacen referencia a la componente afectiva o de *gusto por las matemáticas (GM)* y en ellos, este estudiante afirmaba que le había gustado más el trabajo realizado en matemáticas. Los ítems 3 y 9 se refieren a la componente cognitiva o de *autoconfianza (AU)* y confirman que se sintió más confiado para resolver las tareas planteadas trabajando con los ordenadores.

Del cuestionario de “actitudes hacia las mates” mereció especial atención la diferencia encontrada entre sus respuestas a los ítems 4, 5, 8 y 12, antes y después de la experiencia con Geogebra (p. 286). De estas respuestas, puede extraerse una conclusión referente a la componente actitudinal afectiva: durante la experiencia con Geogebra A3 no experimentó la

ansiedad que normalmente le producían las matemáticas, no sintiéndose incómodo ni nervioso en clase de matemáticas.

Respecto a las actitudes hacia el uso de las TIC en matemáticas, se recogió mediante las parrillas información acerca del interés y gusto por el trabajo con Geogebra en matemáticas, cuyo análisis informó de que A3 manifestó estas actitudes durante todas las sesiones en las que trabajó con el software. Además, este estudiante me transmitió esta actitud verbalmente en numerosas ocasiones, así como a través de sus respuestas a los ítems 6, 10, 16 y 20 del cuestionario MIO (p. 287).

El cambio de metodología que supuso el trabajo con los ordenadores fue el desencadenante de su cambio actitudinal. Es decir, A3 manifestó una actitud hacia el uso de las TIC muy positiva, que le llevó a estar más motivado e implicarse más en las tareas. El factor más influyente para la transformación positiva de las actitudes hacia las matemáticas de este estudiante fue el software, pudiendo descartarse la influencia del compañero, de la profesora o de la tarea, por resultar no significativas.

Se puede afirmar que existe coincidencia total entre los análisis de estas actitudes realizados con las parrillas de observación, con las respuestas de los cuestionarios, con la información del diario de A3 y con los archivos de audio que se pudieron aprovechar para trabajar con Atlas.ti. Todos ellos pusieron de relieve que A3 estaba muy motivado para resolver las tareas con Geogebra, cuya facilidad de uso y rapidez de respuesta le llevó a implicarse más en las tareas matemáticas y a disfrutar con ellas, cambiando así su visión inicial negativa de la asignatura por una imagen más positiva. Además, para este estudiante pueden descartarse otros factores como causantes de dicha transformación, dado que la interacción con su compañero fue prácticamente nula y su interacción conmigo o la influencia de la tarea realizada tampoco resultaron significativas para su mejora en estas actitudes. Dicho de un modo simplificado, A3 sufrió una transformación muy positiva de sus inicialmente negativas actitudes hacia las matemáticas durante el trabajo con Geogebra, que me lleva a afirmar que también para A3 se cumplió el objetivo 2 de investigación (transformaciones actitudinales positivas debidas al trabajo con el software).

Como síntesis del análisis actitudinal presentado, simplemente quiero añadir que este estudiante superó mis expectativas previas acerca de su posible desarrollo actitudinal. A3 fue uno de los estudiantes que se mostró más beneficiado por el cambio de metodología, pues la

introducción de Geogebra le hizo abandonar su comportamiento habitual de no trabajar en clase para implicarse activamente y disfrutar con las tareas realizadas, y al sentirse más capaz en matemáticas, también demostró confianza en sus posibilidades de éxito. Esperaba este cambio comportamental, pero me sorprendió la transformación experimentada en las componentes cognitiva y afectiva.

9.1.2.3.2.2. Alumna A7.

Esta alumna respondía al perfil de estudiantes cuyo rendimiento era insuficiente, aunque podría mejorar si tuviese más interés por la asignatura; es decir, no tenía una actitud hacia las matemáticas positiva y ello dificultaba su buen aprovechamiento. Se diferenciaba de A3 en que en ocasiones trabajaba en clase, aunque no siempre, y estaba interesada en superar la asignatura. Ahora bien, mostraba interés solamente antes de cada prueba escrita, cuando repasábamos los contenidos que serían objeto de evaluación. Con frecuencia se quejaba de las tareas que debía realizar y le costaba mucho esfuerzo mantener la atención en una actividad por lo que, cuando no conseguía resolverla rápidamente, la abandonaba y dedicaba su tiempo a charlar con su pareja de trabajo. Ella reconocía tener ciertas deficiencias cognitivas en matemáticas, y era consciente de que debía forzarse para superarlas pero, generalmente, no mostraba confianza en sí misma y era usual en A7 pedir ayuda externa sobre todo para la resolución de problemas. Esperaba que el trabajo con Geogebra le ayudase a mejorar su autoconcepto y a ser más autónoma, al mismo tiempo que transformase positivamente sus negativas actitudes hacia las matemáticas. También, como en el caso de A3, su compañera A17 representaba un handicap añadido, pues su falta de motivación e interés por las matemáticas venía acompañado de un rendimiento nulo en matemáticas, mostrando grandes lagunas cognitivas arrastradas de años anteriores, que parecían difícilmente salvables, debido a su falta de interés por lograrlo. En el caso de esta pareja de estudiantes, no hubo pérdidas de archivos importantes y se pudieron reconstruir las tareas 1 y 5 con ayuda del software Atlas.ti, encontrado concordancia entre la codificación realizada con este software y la información recogida de las parrillas de observación correspondientes a estas tareas.

Análisis de los Cuestionarios

El análisis de las respuestas del cuestionario de “Actitud hacia las Mates” no apuntaba a grandes cambios, dado que éstas se mantuvieron estables en su mayoría y las que cambiaron, lo hicieron ligeramente. Por ejemplo, respuestas en las que antes tenía una actitud positiva (4) y ahora neutra (3); o antes manifestaba desacuerdo (2) y ahora indecisión (3); pero no hay

ningún ítem en el que el cambio fuese significativo; o sea, que pasase de una actitud negativa a positiva o viceversa:

Tabla 9-19. Respuestas de A7 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”

CUESTIONARIO “ACTITUD HACIA LAS MATES” DE A7	PRE-TEST	POS-TEST
1. Las matemáticas son amenas y estimulantes para mí.	4	3
2. Las matemáticas es una asignatura valiosa y necesaria.	5	4
3. Pienso que podría estudiar matemáticas más difíciles.	2	2
4. Las matemáticas normalmente me hacen sentir incómodo y nervioso.	2	3
5. Siempre dejo en último lugar mi tarea de matemáticas porque no me gusta.	5	3
6. Las matemáticas me servirán para mis estudios futuros.	5	5
7. Por alguna razón, a pesar de que estudio, las matemáticas me parecen particularmente difíciles.	2	2
8. Siempre soy capaz de controlar mi nerviosismo en los exámenes de matemáticas.	2	1
9. Yo disfruto con los problemas que me dejan como tarea en clase de matemáticas.	1	3
10. El curso de matemáticas sirve para enseñar a pensar.	3	4
11. Los términos y símbolos usados en matemáticas nunca me resultan difíciles de comprender y manejar.	3	2
12. Algunas veces me siento tenso e incómodo en clase de matemáticas.	4	3
13. La asignatura de matemáticas no es mi asignatura favorita.	2	1
14. Sólo deberían estudiar matemáticas aquellos que las aplicarán en sus futuros trabajos.	4	5
15. La asignatura de matemáticas es muy extensa, no puedo enterarla.	5	3
16. Generalmente me he sentido seguro al intentar hacer matemáticas.	4	3
17. No me molestaría en absoluto tomar más clases de matemáticas.	4	4
18. Las matemáticas me resultarán útiles para mi futuro.	5	5
19. Confío en poder hacer ejercicios más complicados de matemáticas.	3	3
20. Sólo en los exámenes de matemáticas me sudan las manos o me duele el estómago.	5	5
21. Prefiero estudiar cualquier otra asignatura en lugar de matemáticas.	3	2
22. Guardaré mis cuadernos de matemáticas porque probablemente me servirán.	5	4
23. Generalmente tengo dificultades para resolver los ejercicios de matemáticas.	2	2
24. Los exámenes de matemáticas provocan en mí mayor ansiedad que cualquier otro examen.	4	4
25. Sería feliz de obtener mis más altas notas en matemáticas.	5	5
26. Necesitaré de las matemáticas para mi trabajo futuro.	4	4
27. Puedo aprender cualquier concepto matemático si lo explican bien.	4	3
28. Mi mente se pone en blanco y soy incapaz de pensar claramente cuando hago matemática	4	3
29. Ojalá nunca hubieran inventado las matemáticas.	5	4
30. Sólo deberían enseñarse en matemáticas las cosas prácticas que utilizaremos cuando terminemos nuestros estudios.	3	2
31. Las matemáticas no son difíciles para mí.	3	2

Analizando cada componente actitudinal por separado se obtienen los siguientes valores medios en el Pretest y Postest, respectivamente: 3 y 2.38 para la componente cognitiva y 3.6 y 3.13 para la componente afectiva. Estas cifras apuntan a una transformación negativa de ambas, siendo ésta más notable en el caso de la componente cognitiva.

Al analizar el cuestionario “Me interesa tu opinión” (MIO), también se advierte que su actitud hacia las TIC no estaba muy definida, a juzgar por el número de respuestas mostrando actitud neutra o indecisión (8 ítems):

Tabla 9-20. Respuestas de A7 al cuestionario “Me interesa tu opinión”

CUESTIONARIO “Me interesa tu opinión” DE A7	Respuesta
1. He participado de forma más activa	4
2. Me ha gustado más la asignatura	3
3. Los ordenadores no me han ayudado a sentirme más seguro	3
4. Prefiero trabajar solo	2
5. He reconocido en mayor grado mis fallos	4
6. Las TIC no me han motivado nada	3
7. He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates	3
8. Ni trabajando en equipo, mejora mi relación con los compañeros	4
9. He confiado más en mis capacidades	3
10. Trabajar las mates con los ordenadores es más difícil	2
11. He comprendido con mayor rapidez	3
12. Sigo sin apreciar la importancia de las mates	4
13. Las TIC no me han ayudado a reflexionar sobre mis errores	2
14. Trabajar en grupo hace las mates más fáciles	2
15. Sigo teniendo dificultades para comprender las mates	2
16. Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas	2
17. Trabajar en grupo hace las mates más difíciles	4
18. Este modo de trabajo facilita la comunicación con los compañeros	4
19. Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo	3
20. Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates	3
21. Sigue sin gustarme el trabajo en mates	2
22. Prefiero trabajar en grupo	2

A7 admitió haber participado de forma más activa (componente comportamental), haber reconocido en mayor grado sus fallos, y apreciar más la importancia de las matemáticas debido al trabajo con Geogebra, sin embargo, sus respuestas referentes a las componentes afectiva y cognitiva denotaron en su mayoría indecisión o desacuerdo.

Contrastando ambos análisis, se observa concordancia en sus respuestas, pues ambos cuestionarios informan de una actitud hacia las matemáticas poco definida en lo que respecta a la componente afectiva, baja autoconfianza en matemáticas tanto con LP como con TIC (componente cognitiva) y una mejora de la componente comportamental al trabajar con Geogebra.

Análisis del Diario

A diferencia de los dos estudiantes ya analizados, A8 y A3, esta alumna no experimentó una transformación actitudinal tan remarcable. En las entradas de su diario hice mención a su mayor motivación, implicación y gusto por las tareas durante el trabajo con Geogebra y a que el software únicamente contribuyó a que mejorase su autoconfianza en algunas sesiones. Se expone una muestra de ello:

Sesión 2: (...) Comienza a realizar la tarea 2 con su compañera, sin solicitar mi ayuda ni la de sus compañeros, y logra teselar con cuadrados usando traslaciones y simetrías (actúan por ensayo-error, probando distintos vectores y ejes de simetría, hasta que obtienen los que satisfacen la representación buscada). A7 está trabajando bien con su compañera y se sigue mostrando muy motivada e interesada en clase desde que comenzamos a trabajar con Geogebra.

Sesión 10: A7 y su compañera tienen algunas dificultades para obtener el motivo mínimo del mosaico del hueso, por lo que deciden solicitar mi ayuda. Yo les doy alguna indicación y después, A7 consigue obtener dicho motivo mediante giros de 90° del trapecio que habían construido. Se quedan intentando construir el mosaico a partir de giros del motivo mínimo. Demuestran interés y trabajan bien pero lentamente, aunque en muchas ocasiones requieren de un empujoncito inicial.

Análisis Global de las Parrillas de Observación

En lo referente a las actitudes hacia las matemáticas, el análisis de las parrillas de observación permitió comprobar cómo el trabajo con TIC le ayudó a implicarse e interesarse por el trabajo en matemáticas, a tener una visión más positiva de las tareas realizadas y a sentirse más capaz de resolver las tareas por sí misma, quedando esta transformación patente en la siguiente figura, en la que TR corresponde a trabajo e implicación en matemáticas), GM a gusto por las tareas y CO a autoconfianza:

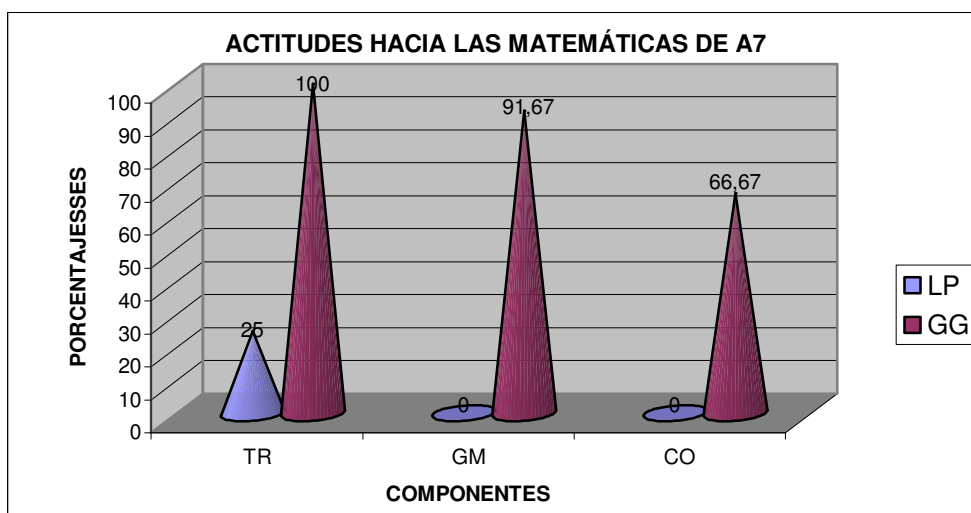


Figura 9-8. Porcentajes obtenidos por A7 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Triangulación de los Análisis Realizados

Del mismo modo que para A3, muestro la evolución de A7 en cada actitud, mediante un análisis detallado de las parrillas de observación, que complemento con la información extraída de los cuestionarios, diarios y análisis de tareas 1 y 5 con Atlas.ti.

El análisis de las parrillas de las tareas LP y GG evidenció que esta estudiante experimentó cambios destacables en las tres componentes consideradas para estas actitudes (comportamental, cognitiva y afectiva). Durante la realización de las tareas LP, A7 únicamente había manifestado interés y se había implicado en las mismas en un 25% de las sesiones en las que trabajamos dichas tareas. Además, al igual que A3, no manifestó agrado por las tareas LP, ni por las realizadas con anterioridad durante el primer trimestre del curso, ni tampoco confianza en sus posibilidades de éxito en matemáticas. Por otra parte, el hecho de obtener resultados satisfactorios en muchas de las tareas sin solicitar ayuda externa, reforzó su autoconcepto en matemáticas.

Respecto a su actitud hacia el uso de Geogebra en matemáticas, las parrillas revelan que A7 la manifestó en todas las sesiones en las que trabajó con el software. El gusto por trabajar con Geogebra le hacía aceptar cada tarea como un reto, motivándola para implicarse y trabajar durante todas las sesiones. No sólo se implicó en las tareas más sencillas, sino que se esforzó aún más en las tareas complejas, solicitando ayuda cuando tras muchos intentos no salía por sí misma del atasco. El siguiente fragmento extraído de la reconstrucción con Atlas.ti de la tarea 1 puede tomarse como ejemplo:

Ejemplo 9-8. Influencia de Geogebra en las actitudes hacia las matemáticas de A7

A7: déjalos para que la maestra vea que hemos probado todos esos diseños

A7: yo quiero hacer aquí una figura, pero no sé

A7: voy a probar figuras ahí a mogollón

A7: espérate (se dice a sí misma), vamos a concentrarnos

A7: ¿y qué era un pentágono? (se ríe)

(Sigue hablando consigo misma y se para a pensar cómo continuar. Se muestra muy animada para encontrar más mosaicos y parece que la tarea no le disgusta)

A7: yo no sé que estoy haciendo aquí, pero conseguiré hacer una figura, vamos que si la hago

(Se muestra bastante confiada en que logrará su objetivo)

A7: ¡vamos a ver lo que sale aquí!

Las respuestas a los cuestionarios apoyan el análisis de las parrillas y refuerzan la idea de que, a pesar de que Geogebra le hizo trabajar más en clase, con cierta confianza en sí misma, y disfrutó con las tareas que realizó, ello no le hizo cambiar su autoconcepto en matemáticas. Tampoco cambió permanentemente su actitud hacia la asignatura, que ella no consideraba

negativa, ni antes ni después del trabajo con Geogebra, a pesar de que antes de la experiencia TIC su comportamiento no estaba acorde con sus respuestas. Es decir, su transformación estuvo asociada al uso del software, dado que para esta estudiante, como sucediese para A3, su interacción con la compañera, conmigo o la variable tarea no ejercieron una influencia significativa en el desarrollo de estas actitudes.

Como síntesis del análisis actitudinal presentado, puede decirse que esta estudiante evolucionó tal y como había previsto, dadas las deficiencias que con anterioridad había manifestado en matemáticas. Los análisis de los cuestionarios de A7 no evidenciaron cambios significativos en tales actitudes, según su propia opinión. Si bien, ya he comentado que sus respuestas a los tres cuestionarios no se ajustaban a su comportamiento en clase. El análisis de la observación realizada (análisis de los diarios y de las parrillas de observación) destacó la influencia de Geogebra en las componentes comportamental y afectiva de A7, siendo su incidencia menor en la componente cognitiva, que le llevó a mostrarse más confiada en sus posibilidades de éxito en algunas de las tareas pero no en todas ellas, ajustándose estos cambios a mis pronósticos. Mostró interés y gusto por realizar todas las tareas GG, aunque éste iba disminuyendo conforme aumentaba su dificultad, del mismo modo que sucedía con su confianza por resolverlas por sí sola. Así, en las tareas sencillas es donde demostró mayor confianza en sus posibilidades y mayor entusiasmo por las tareas, mientras que en las tareas que le resultaron más complejas, su ánimo y autoconfianza disminuyó.

9.1.2.3.2.3. Alumnas A9 y A10.

A9 y A10 trabajaron juntas durante las tareas LP y GG. Se consideró pertinente observarlas conjuntamente, dado que compartían ordenador y además respondían a perfiles cognitivos y actitudinales muy distintos. Iré describiendo la experiencia con Geogebra de ambas simultáneamente, puesto que parte de la información recabada pertenecía a las dos: archivos de Geogebra y de audio y los protocolos escritos de resolución de cada tarea. Por este motivo, los ejemplos extraídos de la reconstrucción de las tareas 1 y 5 con Atlas.ti son válidos tanto para A9 como para A10. Se encontró total concordancia entre las parrillas de observación y la codificación con Atlas.ti. Con esa información y la de los demás instrumentos, contaré cómo esta pareja de estudiantes fue mejorando actitudinalmente durante las tareas GG. Como hasta ahora, expondré en primer lugar sus perfiles actitudinales previos a la experiencia con Geogebra.

A9 respondía al perfil de estudiantes que tenían un rendimiento insuficiente y además estaba totalmente desmotivada en nuestra asignatura, no realizando trabajo alguno durante las sesiones de clase ni tampoco en casa. Intenté motivarla sin éxito para trabajar en clase a lo largo del primer trimestre del curso, exponiéndole mis expectativas acerca del rendimiento que de ella esperaba, que no se ajustaba al que estaba manifestando. Traté de animarla a superar sus deficiencias, como a muchos otros compañeros, transmitiéndole que éstas me parecían fácilmente salvables, pero no obtuve la respuesta esperada y continuó con su actitud negativa en matemáticas.

A10 respondía a un perfil actitudinal y cognitivo bastante distinto del de su compañera A9, dado que desde el inicio del curso había manifestado una actitud hacia las matemáticas bastante positiva. A diferencia de A9, A10 estaba muy motivada para trabajar en clase y en casa, empujada por un fuerte deseo de superar nuestra asignatura y las restantes, para poder promocionar al siguiente nivel (4º ESO).

La pareja formada por A9 y A10 podía incluirse entre las que mejor se compenetraron, pues a lo largo de las sesiones interaccionaron perfectamente a la hora de resolver las tareas. A10 tomó el mando cuando A9 no sabía muy bien como seguir, pero en lugar de resolver la tarea por sí sola, buscaba la confirmación de A9 en cada paso, evitando así que ésta abandonase la actividad. A pesar de que también ésa fue la postura adoptada por A10 durante las tareas de lápiz y papel, la reacción de A9 no fue tan positiva en dichas tareas.

Esperaba que el trabajo con el software contribuyera a que A9 mejorase sus actitudes hacia las matemáticas, haciéndola trabajar más y con mayor agrado. Y, en cuanto a A10, para quien la situación de partida ya era bastante satisfactoria, pretendía que valorase más las matemáticas y sus aplicaciones en la vida cotidiana y disfrutase con ellas, pues hasta entonces, su esfuerzo en matemáticas estaba influido por su deseo de obtener una calificación positiva en la asignatura, más que por aprecio o gusto por los contenidos que en ella se trabajaban.

Análisis de Cuestionarios

Analizo las respuestas de A9 y A10 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”, antes (Pretest) y después (Postest) de la experiencia de trabajar matemáticas con este software. En A9 se observa una evolución poco significativa, que pone de relieve una actitud menos negativa

después del trabajo con Geogebra. En A10 tampoco se observan cambios significativos, siendo su actitud muy buena en todo momento:

Tabla 9-21. Respuestas de A9 y A10 al cuestionario “Actitud hacia las Mates”

CUESTIONARIO “ACTITUD HACIA LAS MATES”	A9		A10	
	PRE	POS	PRE	POS
1. Las matemáticas son amenas y estimulantes para mí.	2	2	5	2
2. Las matemáticas es una asignatura valiosa y necesaria.	5	5	4	5
3. Pienso que podría estudiar matemáticas más difíciles.	3	1	3	4
4. Las matemáticas normalmente me hacen sentir incómodo y nervioso.	1	1	5	4
5. Siempre dejo en último lugar mi tarea de matemáticas porque no me gusta.	5	3	5	5
6. Las matemáticas me servirán para mis estudios futuros.	5	5	5	5
7. Por alguna razón, a pesar de que estudio, las matemáticas me parecen particularmente difíciles.	1	1	5	4
8. Siempre soy capaz de controlar mi nerviosismo en los exámenes de matemáticas.	1	3	4	3
9. Yo disfruto con los problemas que me dejan como tarea en clase de matemáticas.	1	1	4	3
10. El curso de matemáticas sirve para enseñar a pensar.	5	5	4	4
11. Los términos y símbolos usados en matemáticas nunca me resultan difíciles de comprender y manejar.	5	2	4	4
12. Algunas veces me siento tenso e incómodo en clase de matemáticas.	1	2	5	4
13. La asignatura de matemáticas no es mi asignatura favorita.	1	1	5	4
14. Sólo deberían estudiar matemáticas aquellos que las aplicarán en sus futuros trabajos.	1	1	5	5
15. La asignatura de matemáticas es muy extensa, no puedo enterarla.	1	2	4	4
16. Generalmente me he sentido seguro al intentar hacer matemáticas.	1	3	4	4
17. No me molestaría en absoluto tomar más clases de matemáticas.	1	1	3	4
18. Las matemáticas me resultarán útiles para mi futuro.	5	4	5	5
19. Confío en poder hacer ejercicios más complicados de matemáticas.	1	3	4	4
20. Sólo en los exámenes de matemáticas me sudan las manos o me duele el estómago.	1	1	5	4
21. Prefiero estudiar cualquier otra asignatura en lugar de matemáticas.	1	1	5	5
22. Guardaré mis cuadernos de matemáticas porque probablemente me servirán.	1	5	4	4
23. Generalmente tengo dificultades para resolver los ejercicios de matemáticas.	1	1	4	4
24. Los exámenes de matemáticas provocan en mí mayor ansiedad que cualquier otro examen.	1	1	4	4
25. Sería feliz de obtener mis más altas notas en matemáticas.	5	5	4	5
26. Necesitaré de las matemáticas para mi trabajo futuro.	5	4	5	5
27. Puedo aprender cualquier concepto matemático si lo explican bien.	5	4	5	5
28. Mi mente se pone en blanco y soy incapaz de pensar claramente cuando hago matemática	1	1	5	5
29. Ojalá nunca hubieran inventado las matemáticas.	1	1	5	5
30. Sólo deberían enseñarse en matemáticas las cosas prácticas que utilizaremos cuando terminemos nuestros estudios.	1	1	5	5
31. Las matemáticas no son difíciles para mí.	1	2	4	4

Este cuestionario subraya para estas estudiantes que sus actitudes hacia las matemáticas permanecieron estables antes y después del trabajo con Geogebra. Si se observa cada componente actitudinal por separado, se comprueba que A9 obtuvo puntuaciones medias de 2.25 y 2 para la componente cognitiva y de 1.6 y 1.8 para la componente afectiva en el

Pretest y Postest, respectivamente, que ponen de relieve una actitud bastante negativa. A10 obtuvo 4.13 y 4.13 en la componente cognitiva y 4.53 y 4.07 en la componente afectiva en el Pretest y Postest, respectivamente, que muestran una actitud positiva en todo momento, con una ligera variación negativa en cuanto a afectividad por la asignatura después del trabajo con el software.

Respecto al otro cuestionario “Me interesa tu opinión”, sus respuestas evidenciaron una actitud bastante favorable hacia el trabajo realizado con Geogebra, como puede apreciarse en la siguiente tabla:

Tabla 9-22. Respuestas de A9 y A10 al cuestionario “Me interesa tu opinión”

CUESTIONARIO “Me interesa tu opinión”	Respuesta A9	Respuesta A10
1. He participado de forma más activa	4	4
2. Me ha gustado más la asignatura	4	4
3. Los ordenadores no me han ayudado a sentirme más seguro	4	3
4. Prefiero trabajar solo	3	3
5. He reconocido en mayor grado mis fallos	4	4
6. Las TIC no me han motivado nada	5	3
7. He reconocido y valorado más las aplicaciones de las mates	4	4
8. Ni trabajando en equipo, mejora mi relación con los compañeros	3	5
9. He confiado más en mis capacidades	4	4
10. Trabajar las mates con los ordenadores es más difícil	1	2
11. He comprendido con mayor rapidez	5	4
12. Sigo sin apreciar la importancia de las mates	4	5
13. Las TIC no me han ayudado a reflexionar sobre mis errores	4	4
14. Trabajar en grupo hace las mates más fáciles	3	1
15. Sigo teniendo dificultades para comprender las mates	4	4
16. Usando las TIC es más fácil estudiar matemáticas	4	4
17. Trabajar en grupo hace las mates más difíciles	3	5
18. Este modo de trabajo facilita la comunicación con los compañeros	4	5
19. Ni usando las TIC, logro comprender las mates por mí mismo	4	5
20. Los ordenadores ofrecen muchos recursos para entender mejor las mates	4	4
21. Sigue sin gustarme el trabajo en mates	4	5
22. Prefiero trabajar en grupo	3	5

Ambas estudiantes valoraron los recursos tecnológicos como una herramienta valiosa para trabajar en matemáticas y con sus respuestas afirmaron haber participado de forma más activa, haber disfrutado más en matemáticas con las tareas realizadas y haber confiado más en sus capacidades, es decir, una mejora de las componentes cognitiva, afectiva y comportamental durante el trabajo con el software.

Analizando conjuntamente los resultados obtenidos con ambos cuestionarios, se observan diferencias entre las dos estudiantes. Aunque ambas manifestaron una transformación beneficiosa de las componentes cognitiva, afectiva y comportamental durante el trabajo con Geogebra, según sus respuestas al cuestionario MIO, para A9 esta transformación estuvo asociada al uso del software, a juzgar por sus respuestas al Postest. Por el contrario, A10 mostró en todo momento actitudes adecuadas: antes, durante y después del trabajo con el software, por lo que éstas podían considerarse permanentes e independientes de la metodología de trabajo seguida (uso o no de TIC).

Análisis de los Diarios

La lectura del diario que escribí conjuntamente para esta pareja de estudiantes, permitió revivir las impresiones que fui recogiendo de las actitudes hacia las matemáticas de cada una de ellas durante las tareas GG. Se resumen diciendo que A10 siguió manteniéndolas muy favorables (como de costumbre), mientras que en A9 se observó una evolución espectacular, pues de manifestar ausencia de ellas en casi todas las tareas LP, pasó a demostrarlas positivamente durante las tareas GG. Se incluyen algunos fragmentos como muestra de ello:

Sesión 2: Aunque trabajan muy bien juntas y ambas han progresado muchísimo, podemos hacer una diferencia en la evolución experimentada por cada una de ellas. A9 ha sufrido un importante cambio en sus comportamiento en matemáticas (antes no trabajaba y ahora sí) y además parece disfrutar con tal actividad. A10 se ha mantenido con sus buenas actitudes hacia las matemáticas, que ya había demostrado previamente.

Sesión 10: Obtienen rápidamente y sin ayuda el motivo mínimo del hueso y el mosaico completo a partir de giros. (...) Están totalmente implicadas en las tareas y demuestran un buen autoconcepto ya que nunca solicitan ayuda externa. Además, les gusta ser eficientes y acabar pronto las actividades, sobre todo a A10 que no descansa hasta que esto ocurre.

Análisis Global de las Parrillas de Observación

Presento los gráficos de ambas estudiantes que muestran globalmente la transformación experimentada en las actitudes hacia las matemáticas por cada una de ellas durante el trabajo con Geogebra. Se recuerda que TR (Trabajo e Implicación en matemáticas), GM (gusto por las tareas) y CO (autoconfianza):

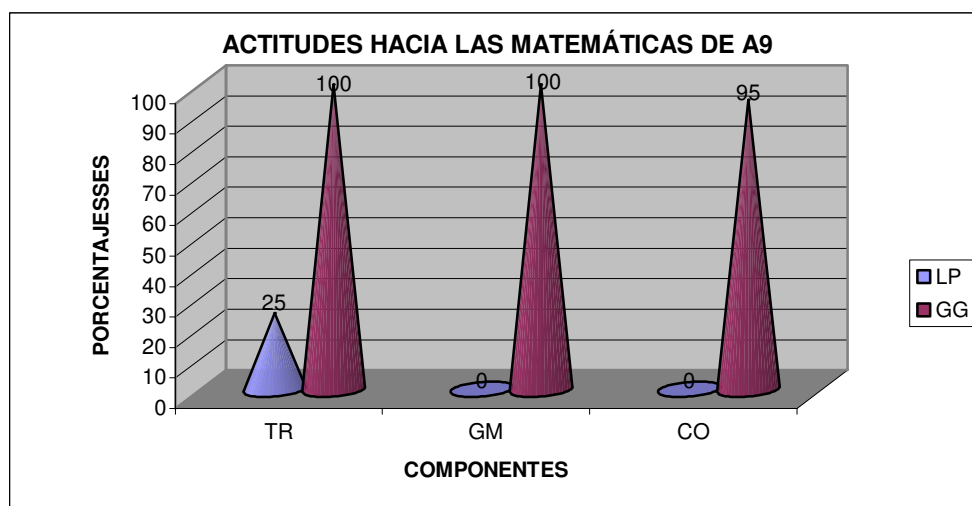


Figura 9-9. Porcentajes obtenidos por A9 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

La situación previa de A9 era fácilmente mejorable y así sucedió, experimentado un cambio tan notable que superó las expectativas iniciales.

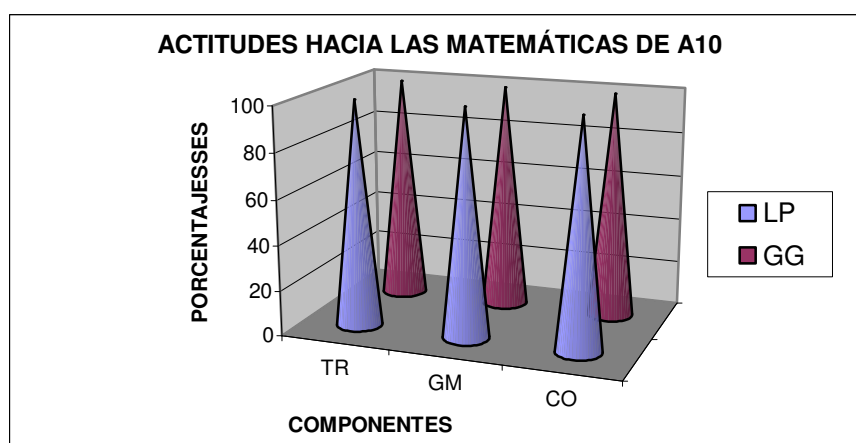


Figura 9-10. Porcentajes obtenidos por A10 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

En el caso de esta estudiante, la situación previa era inmejorable y se mantuvo así durante el trabajo con el software, como a priori se esperaba.

Triangulación de los Análisis Realizados

Como para A3 y A7, muestro la evolución de esta pareja partiendo del análisis de las parrillas de observación, que se triangula con la información extraída de los cuestionarios, diarios y análisis de tareas 1 y 5 con Atlas.ti.

En el caso de A9, el uso de Geogebra contribuyó a que mejorase considerablemente en las tres componentes observadas (cognitiva, afectiva y comportamental). Durante las tareas LP, A9 únicamente demostró interés por las tareas realizadas y se implicó en ellas en el 25% de

las sesiones, manifestando siempre poco agrado por las mismas y un bajo autoconcepto. En las tareas realizadas con Geogebra, se observó un cambio radical. A9 no sólo trabajó con interés en todas ellas, sino que lo hizo demostrando siempre gusto e interés por dichas tareas y confianza en poder resolverlas por sí misma (95%). El cambio de metodología que supuso el trabajo con los ordenadores fue el desencadenante de su cambio actitudinal, como ella misma reflejó con su aportación al buzón de sugerencias:

Ejemplo 9-9. Aportación al buzón de sugerencias de A9

Opinión de A9: Me ha gustado trabajar con los ordenadores. Las clases se me pasan más rápido. Me gustan un poco más las matemáticas que antes...prefiero trabajar con los ordenadores... me ha resultado más fácil de comprender.

En el caso de A10, poco se puede comentar, pues sus actitudes “hacia” siempre se habían mantenido al máximo nivel y durante el trabajo con Geogebra continuaron de este modo.

Las aportaciones de estas estudiantes al buzón de sugerencias, así como sus respuestas a los ítems 1, 2, 3, 7, 9, 12 y 21 del cuestionario MIO (p. 300) referentes a implicación, gusto y confianza durante el trabajo con Geogebra, corroboran las afirmaciones anteriores. Respecto al interés y gusto por el trabajo con Geogebra, puede afirmarse que ambas estudiantes lo pusieron de manifiesto en todo momento y también quedó recogido en sus respuestas a los ítems 6 y 20 del mencionado cuestionario.

Todos los análisis realizados para estas estudiantes pusieron de relieve que ambas estaban muy motivadas para resolver las tareas con Geogebra, lo que en el caso de A9 le llevó a implicarse más en las tareas matemáticas y a disfrutar con ellas, cambiando así su visión inicial negativa de nuestra asignatura por una imagen más positiva. Para A10 la experiencia también resultó satisfactoria. No obstante, dada sus actitudes hacia las matemáticas iniciales tan positivas, las posibilidades de mejora eran mínimas; es decir, mantuvo unas actitudes inmejorables durante las tareas LP y GG, percibiendo como única diferencia entre ambas tareas un mayor aprecio y gusto por la actividad matemática.

A modo de conclusión, puede decirse que en A9, como en A3, se observó una transformación muy positiva de sus inicialmente negativas actitudes hacia las matemáticas durante el trabajo con Geogebra, que permite afirmar que para esta estudiante se cumplió el objetivo 2 de investigación. A9, con su forma de actuar durante las tareas GG, me dejó gratamente impresionada, dado que su situación inicial dio un giro y se mostró con ganas e ilusión por trabajar en la asignatura. Ésta era una actitud a la que no me tenía acostumbrada, pues

siempre se mostraba desmotivada y apática en matemáticas y manifestaba desagrado por las tareas realizadas. Esperaba una respuesta comportamental positiva al trabajo con el software; lo que no creía posible es que en las demás componentes pasase de un extremo a otro, como sucedió. Para esta estudiante, puede considerarse el trabajo con Geogebra como el factor más influyente para la transformación que experimentó en estas actitudes, dado que aunque su interacción con A10 fue otro factor que en determinadas ocasiones cobró relevancia, no puede olvidarse que durante las tareas LP también se produjo esta interacción entre ambas y, sin embargo, las actitudes de A9 no mejoraron.

Respecto a A10, cuya situación previa era la mejor que podía esperarse, no puede hablarse de una transformación como tal, aunque sí que puede matizarse que el uso del software produjo ciertas mejoras en cuanto su opinión y disfrute de la asignatura, con lo que también se da por cumplido el objetivo 2, que para esta estudiante era menos ambicioso.

Como cierre al análisis de actitudes hacia las matemáticas realizado para los cinco casos con los que se ha llevado a cabo un estudio más exhaustivo, quiero exponer las similitudes y diferencias encontradas entre la evolución experimentada por unos y otros, que da respuesta globalmente al objetivo 2 de esta investigación para este subconjunto de estudiantes.

De los cinco estudiantes, A3, A7 y A9 manifestaron perfiles actitudinales previos bastante similares, evidenciando actitudes hacia las matemáticas nulas o casi nulas. A10 se encontraba en el extremo opuesto a ellos y A8 se situaba en una posición intermedia entre el grupo formado por A3, A7 y A9 y el formado por A10, mostrando actitudes adecuadas pero no todo lo positivas que sería deseable. Durante las tareas GG, la situación cambió radicalmente para algunos estudiantes y podía diferenciarse entre el grupo formado por A3, A8, A9 y A10, quienes manifestaron actitudes muy positivas, y el formado por A7, quien evidenció actitudes adecuadas pero mejorables en algunos casos. Debido a la transformación experimentada por estos estudiantes, y como he ido exponiendo al abordar cada uno de ellos por separado, mis expectativas se vieron superadas en A3 y A9, ajustándose la evolución de A7, A8 y A10 a mis pronósticos.

Centrándome en las diferencias encontradas en los niveles demostrados para cada actitud durante las tareas GG por los alumnos y la evolución que ello supuso respecto de su situación previa particular, quiero incluir algunos resultados que aportarán una visión global de tales resultados.

En la componente cognitiva de las actitudes hacia las matemáticas no todos evolucionaron hasta el mismo nivel. Sin embargo, a excepción de A10 que siempre mantuvo niveles máximos, para A3, A7, A8 y A9 la mejora experimentada suponía un cambio espectacular y me asombró gratamente. En lo referente a la componente afectiva, cambiaron su opinión acerca de la asignatura y manifestaron mayor gusto por todas las tareas realizadas con Geogebra, actitud que hasta entonces solamente A10 había demostrado. Respecto a la componente comportamental, todos los estudiantes se mostraron motivados e implicados en las tareas GG, suponiendo esta evolución un cambio sorprendente para A3, A7 y A9. En todos los casos, estas transformaciones podían considerarse el efecto de manifestar una positiva actitud hacia el uso de Geogebra, dado que durante las tareas LP en las que estos estudiantes también trabajaron con sus respectivas parejas la resolución de problemas geométricos pero sin TIC, no evidenciaron actitudes hacia las matemáticas tan positivas como cuando trabajaron con el software.

9.1.3. Transformación de las Actitudes Matemáticas

En este estudio, la caracterización adoptada para las actitudes matemáticas las define como actitudes con carácter marcadamente cognitivo y considera las siguientes como deseables para una correcta matematización por parte de los estudiantes: Flexibilidad de Pensamiento, Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor, Creatividad, Autonomía y Sistematización. Del mismo modo que para las actitudes hacia las matemáticas, para mostrar la transformación experimentada por los estudiantes en dichas actitudes, comienzo abordando el análisis global del total de estudiantes, después expongo el análisis de los estudiantes de la muestra y, por último, el análisis de los estudiantes pertenecientes al estudio de casos. Al finalizar la presentación de cada uno de tales análisis, doy respuesta al objetivo 2 para cada conjunto de estudiantes. Por último, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en dichos análisis, he elaborado una respuesta final acerca de la transformación de las actitudes matemáticas de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra, que incluyo en el apartado 9.1.4.

9.1.3.1. Análisis del Total de Estudiantes

En lo que sigue, expongo en primer lugar los resultados de los análisis de cada uno de los instrumentos utilizados para recoger información acerca de las transformaciones actitudinales de los 46 estudiantes: diarios, entrevistas grupales y buzones de sugerencias. Después, como

paso último de este análisis, se triangula la información obtenida de cada análisis por separado.

Análisis de los Diarios

Al término de cada una de las sesiones en las que los estudiantes trabajaron las tareas LP y GG, recogí en las entradas de los diarios mis impresiones acerca de sus actitudes matemáticas. Es decir, teniendo en mente la caracterización de tales actitudes expuesta en las páginas 187-189 (indicadores considerados para cada actitud), fui recogiendo información de cada una de ellas⁶⁵, que plasmé en los diarios. La lectura de las entradas correspondientes permite hacerse una idea bastante acertada de cuándo y cuántos estudiantes, si la mayoría o solo un número reducido de ellos⁶⁶, pusieron de manifiesto una determinada actitud matemática durante cada sesión.

Se observó durante las tareas LP cómo solamente unos pocos estudiantes daban evidencias de estas actitudes, mientras que el resto, los que habitualmente no trabajaban en clase, no mostraban indicadores de ellas. Los siguientes extractos de los diarios de ambos grupos durante las sesiones LP corroboran esa afirmación:

Sesión 2 para 3º A: Únicamente dos estudiantes han demostrado ser creativos, aproximadamente el 50% de los alumnos han sido rigurosos y precisos en los cálculos y en la forma de expresar sus resultados y han perseverado en la resolución de las actividades y sólo 8 de ellos revisan su solución críticamente. En cuanto a flexibilidad de pensamiento solamente un estudiante, A4, da evidencias de esta actitud.

Sesión 8 para 3º A: Siguen en la línea de sesiones anteriores: solamente 6 de los 22 asistentes a clase cambian de opinión en base a argumentos convincentes; 7 demuestran espíritu crítico; 11 perseveran; 5 son rigurosos y precisos siendo además 4 de ellos creativos; 6 trabajan de modo autónomo (de ellos 4 alumnos se incluyen entre los que han manifestado flexibilidad de pensamiento y espíritu crítico); y 7 son sistemáticos, demostrando capacidad de análisis y síntesis.

Sesión 12 para 3º A: Se observa una mejora en la flexibilidad de pensamiento con respecto a sesiones anteriores, pues cambian de opinión razonadamente, aunque siguen mostrándose poco rigurosos y precisos, poco creativos y únicamente siete de ellos trabajan con autonomía. Más del 50% no se preocupa de analizar la bondad de sus cálculos, estrategias y resultados, a pesar de obtener soluciones extrañas.

⁶⁵ Cuando se hace referencia a la actitud flexibilidad de pensamiento en los diarios, estaba considerando únicamente el indicador FP3: *Cambia de opinión en base a argumentos convincentes*. No obstante, cuando se habla de sistematización, consideraba que los alumnos se comportaban de modo totalmente sistemático y evidenciaban tanto SS17: *Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar* como SS19: *Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados*.

⁶⁶ En cada entrada del diario intenté recoger información lo más detallada posible acerca del número de estudiantes que durante la sesión manifestaron cada actitud, en la medida de lo posible, dada mi condición de profesora-investigadora.

También más del 50% actúa de modo autómatas, es decir, opera sin saber para qué lo hace y claro, después no saben sintetizar esos cálculos y resultados.

Sesión 2 para 3° B: En este grupo se ha puesto de manifiesto que los estudiantes demuestran pocas actitudes. Ningún estudiante denota creatividad y solamente dos de ellos muestran flexibilidad de pensamiento. En cuanto al rigor, el 50% pone interés a la hora de tomar medidas con exactitud, mientras que el resto no toma medidas o lo hace de modo aproximado. Tres estudiantes perseveran hasta obtener una solución adecuada, y son 16 los que se conforman con llegar a una respuesta aunque ésta no se ajuste a lo que les pide la tarea. Tampoco el espíritu crítico destaca, pues únicamente seis alumnos se plantean la posibilidad de que no todas las soluciones sean válidas.

Sesión 8 para 3° B: Actitud general muy negativa, dado que las siguientes actitudes se manifiestan en un grupo muy reducido de seis estudiantes: 5 denotan flexibilidad de pensamiento, 4 perseverancia, 5 se muestran precisos, todos ellos denotan espíritu crítico, autonomía y parecen tener una estrategia clara, aunque sólo 3 de ellos sintetizan sus resultados. Ningún estudiante exhibe creatividad.

Sesión 11 para 3° B: Como hasta ahora, las grandes ausentes son flexibilidad de pensamiento y creatividad. En general, siguen siendo muy poco precisos y rigurosos, tanto en los cálculos como en las representaciones (no leen con atención porque casi todos habían usado en la actividad 2 “30 m” en lugar de “0.30 m” sin fijarse en que esa medida estaba en centímetros), no demuestran espíritu crítico (al usar 30 en lugar de 0.30 les salen resultados desorbitados que no se cuestionan), no tienen mucha capacidad de síntesis, pues se ponen a hacer cálculos sin pensar para qué y después no saben extraer conclusiones de ellos para responder a las preguntas de las tareas. Algunos estudiantes perseveran hasta obtener una solución, pero les da igual si la que obtienen se ajusta o no al problema, solamente quieren realizar algún cálculo para afirmar que han realizado la actividad pero sin tener que pensar mucho. La mayoría de ellos ni siquiera lee el problema, sino que directamente me preguntan a mí que deben hacer o se copian de otros compañeros.

Los fragmentos anteriores y, en general, todas las entradas de los diarios de las tareas LP evidenciaron actitudes matemáticas bastante pobres en la mayoría de los estudiantes, que estaban en consonancia con los datos recogidos en las parrillas de observación durante estas tareas. Esta situación mejoró en ambos grupos con la incorporación de Geogebra, quedando esta evolución registrada en los diarios. En las páginas de éstos, se aprecia que las actitudes observadas respondían a la gran mayoría de los estudiantes y no a un número reducido de ellos, como sucedía con LP; de ahí que no se cuantifique el número de estudiantes ni se incluyan porcentajes. Tal situación se ejemplifica en los siguientes fragmentos de los diarios:

Sesión 3 para 3° A: En estas sesiones está brillando la creatividad, la flexibilidad de pensamiento, la autonomía y la sistematización de la mayoría de los estudiantes. Les gusta probar con polígonos distintos a los que yo sugiero, hacer composiciones de isometrías con una misma figura (por ejemplo, A4 con un

cuadrilátero irregular, otras parejas con un rectángulo, con un pentágono, teselando con ellos de distintas formas). Inventan estrategias que luego son capaces de argumentar o desechar (por ejemplo, una de las parejas intenta teselar con un triángulo solamente con simetrías y no puede, pero está convencido de que es posible y lo intenta otros caminos hasta que lo consigue). Son bastante precisos (rectifican la representaciones gráficas que no son perfectas) y perseverantes, manteniéndose concentrados en las tareas hasta que la solución obtenida les convence. En general, y salvo alguna excepción puntual, las actitudes de todo el grupo han mejorado.

Sesión 6 para 3º A: Este grupo es bastante más creativo que 3º B, también son más autónomos, sistemáticos y críticos, aunque igual de perseverantes y precisos. Emplean menos tiempo en realizar las actividades y manifiestan menos dificultades de aprendizaje que los estudiantes del otro grupo (3º B).

Sesión 12 para 3º A: En primer lugar y como más destacadas: perseverancia, precisión y rigor y autonomía, pues todos han estado probando distintos diseños, partiendo de diferentes deformaciones, y los que no sabían como empezar han visitado la página de Mosaicos de Escher, cuyo enlace ubiqué en Helvia, para coger ideas sobre posibles transformaciones. Algunas parejas, además, han derrochado creatividad, espíritu crítico, flexibilidad de pensamiento y sistematización (10 de los 22 asistentes a esta sesión).

Sesión 1 para 3º B: Hoy se ha puesto de manifiesto una actitud que hasta ahora muy pocos habían demostrado: creatividad, puesto que han intentado construir teselas originales, antes de ir probando con los distintos polígonos más conocidos. También se ha puesto de relieve su espíritu crítico, al comprobar con varias piezas si era posible o no teselar, e intentarlo con distintas colocaciones de las piezas cuando el primer intento fallaba. Son bastante precisos y perseverantes, es decir, modifican las figuras hasta que las teselas sean iguales (ajustándolas a puntos de la grilla para garantizar la igualdad de lados) y no abandonan la actividad, sino que siguen probando con otras teselas diferentes. Han trabajado de modo autónomo y sistemático, sabiendo qué debían hacer y distinguiendo representaciones de mosaicos de otras que no lo eran.

Sesión 5 para 3º B: Hoy han destacado sobre las demás, perseverancia, flexibilidad de pensamiento (para comprender la estrategia y hallar los ángulos de giro) y precisión y rigor (al tratar de hallar el ángulo de giro para construir el heptágono regular, me comentaban que obtenían un número con infinitos decimales y que como habían usado una o dos cifras decimales únicamente, pues no les salía exacta la construcción y me preguntaban cómo podían hacerlo de modo totalmente preciso. Les he sugerido que escribiesen en geogebra $\frac{360}{7}$ como valor del ángulo de giro y así solventarían su problema). También han manifestado creatividad (usando herramientas distintas a las sugeridas y diferentes estrategias de resolución), sistematización y espíritu crítico (a la hora de construir e identificar mosaicos válidos).

Sesión 10 para 3º B: Esperaba más dificultades para este grupo en esta tarea (tarea 9), sin embargo, debo decir que han demostrado flexibilidad de pensamiento, autonomía, sistematización, precisión y perseverancia, pues todos los estudiantes de un modo u otro (empleando diferentes estrategias y

herramientas) han llegado a obtener el motivo mínimo del hueso y a construir el mosaico, si bien solo a unos pocos estudiantes les ha dado tiempo a comenzar con el mosaico del avión.

Los extractos anteriores ponen de relieve la mejora experimentada por la gran mayoría de los estudiantes, en todas o algunas de las actitudes matemáticas consideradas. Retomando todos los datos que incluyen las entradas de los diarios, y centrándonos en si observé una determinada actitud en ninguno, algunos o en la mayoría de los estudiantes en cada sesión, presento la siguiente tabla, que resume lo expuesto en párrafos anteriores acerca de la evolución de estas actitudes en los estudiantes. En la tabla muestro el porcentaje de sesiones de cada tipo (LP y GG) en las que observé cada actitud y para qué número de estudiantes (ninguno, algunos o mayoría):

Tabla 9-23. Porcentajes de alumnos y sesiones asociados a cada actitud matemática

Actitudes	Nº Alumnos	3º A		3º B	
		% LP	% GG	% LP	% GG
Flexibilidad Pensamiento	Ninguno	36.36	25	66.67	16.67
	Algunos	45.45	8.33	22.22	16.67
	Mayoría	18.18	66.67	11.11	66.67
Perseverancia	Ninguno	54.55	0	55.56	0
	Algunos	36.36	0	44.44	8.33
	Mayoría	9.09	100	0	91.67
Espíritu Crítico	Ninguno	27.27	8.33	66.67	16.67
	Algunos	63.64	8.33	33.33	16.67
	Mayoría	9.09	83.33	0	66.67
Precisión y Rigor	Ninguno	54.55	8.33	44.44	8.33
	Algunos	45.45	0	44.44	0
	Mayoría	0	91.67	11.11	91.67
Creatividad	Ninguno	36.36	16.67	100	33.33
	Algunos	54.55	33.33	0	50
	Mayoría	9.09	50	0	25
Autonomía	Ninguno	54.55	0	88.89	8.33
	Algunos	45.45	0	11.11	0
	Mayoría	0	100	0	91.67
Sistematización	Ninguno	72.73	0	88.89	16.67
	Algunos	27.27	8.33	11.11	8.33
	Mayoría	0	91.67	0	75

Se observa en la tabla anterior como la situación inicial de 3º B era bastante más negativa que la de 3º A. Durante las tareas LP, los alumnos mostraban escasas actitudes matemáticas, siendo las grandes ausentes a juzgar por el número de sesiones en las que ningún estudiante las manifestó: Perseverancia, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización para 3º A y para 3º B, todas, a excepción de Perseverancia y Precisión y Rigor. La evolución fue bastante considerable en ambos grupos, pero más notoria en 3º B, dado su déficit inicial. Cinco de las siete actitudes mejoraron positivamente gracias al uso de Geogebra, alcanzando niveles considerables para la mayoría de los estudiantes, que pueden ordenarse de mayor a menor evolución: Perseverancia y Autonomía, Precisión y Rigor, Sistematización y Espíritu Crítico. Destacaron dos actitudes por ser las que menos evolucionaron: Flexibilidad de Pensamiento⁶⁷ y Creatividad.

Análisis de las Entrevistas Grupales

Las intervenciones de los estudiantes referentes a las actitudes matemáticas no fueron muy numerosas, ni tampoco aportaron información de todas ellas. Se centraron, fundamentalmente, en Perseverancia, Espíritu Crítico, Precisión y Rigor y Creatividad:

Perseverancia

- Pregunta para 3º A y B: ¿Algunos habéis hecho más cosas con Geogebra de las que solíais hacer con Lápiz y Papel? ¿Habíais probado más cuando no sabíais hacer una cosa?
 - ☛ Respuesta de A4 (3º A): Con el ordenador si te sale algo mal lo intentas otra vez, porque tardas poco tiempo, si lo estuvieras haciendo con LP a la tercera vez que te sale mal, ya lo dejas.
- Pregunta para 3º B: ¿Sois más perseverantes en una tarea con el ordenador que con LP?
 - ☛ Respuesta unánime de los estudiantes de 3º B: Sí
 - ☛ Respuesta de A43 (3º B): Con LP te cansas antes, lo haces una vez y como lo tienes que hacer a mano, si lo has hecho mal y ahora tienes que volver a hacerlo... Con el ordenador le das a borrar y ya está, es más fácil con el ordenador repetirlo.

Espíritu Crítico y Precisión y Rigor

- Pregunta para 3º B: ¿Te das más cuenta de los fallos al usar el ordenador que con LP?
 - ☛ Respuesta de A37: Sí, porque como en el ordenador sale todo tan perfecto, pues se notan más los fallos que si lo haces con LP; a lo mejor lo haces con LP y no se nota tanto que está mal.

⁶⁷ Los estudiantes mejoraron con respecto al indicador FP3 durante las sesiones TIC. Sin embargo, no manifestaron los indicadores FP1 y FP2, al no aparecer éstos explícitamente en los diarios, lo cual sugiere que no eran visibles durante las sesiones para la mayoría de los estudiantes, aunque sí lo fuesen para algún caso puntual. El valor obtenido entonces, para la actitud FP, sería la media de estos 3 indicadores, lo que justifica los bajos porcentaje obtenidos para ambos grupos, y el hecho de que sea considerada una de las dos actitudes que globalmente menos evolucionó.

- ☛ Respuesta de A32 (3° B): En el ordenador es más difícil equivocarse porque ya tienes calculado dónde tiene que ir cada punto. Además, se ven mejor los polígonos y lo demás en el ordenador. Por ejemplo, a mano te puedes equivocar y en el ordenador lo dibujas y ves si da exacto.

Creatividad

- Pregunta para 3° A: ¿A quién le gustó la parte de mosaicos de Escher? (casi el grupo completo levantó la mano en señal de afirmación), ¿por qué?
 - ☛ Respuesta de A23 (3° A): Porque era creativo
 - ☛ Respuesta de A25 (3° A): Porque te puedes expresar artísticamente cuando haces un mosaico

Análisis de los Buzones de Sugerencias

La información recogida respecto a las actitudes matemáticas en los buzones de sugerencias fue casi nula, únicamente la siguiente contribución hacía referencia expresa a que Geogebra le ayudó a ser consciente de sus errores y actuar en consecuencia, provocando una mejora de su Espíritu crítico:

Trabajar con los ordenadores está muy bien, porque si te equivocas te corrige y te das cuenta de tus errores. Y las clases son mucho más fluidas. He aprendido más en esta asignatura con los ordenadores que con las demás.

Triangulación de los anteriores análisis realizados para el total de estudiantes

Para esta categoría actitudinal, no todos los instrumentos analizados resultaron igualmente útiles, puesto que algunos permitieron recoger información de las siete actitudes matemáticas, mientras otros informaron únicamente de algunas de ellas. A modo de resumen, expongo la contribución de cada instrumento para el análisis de las actitudes matemáticas:

Tabla 9-24. Actitudes matemáticas analizadas con cada instrumento

	Flexibil. Pensam.	Perseverancia	Espíritu Crítico	Precisión y Rigor	Creatividad	Autonomía	Sistematización
Diarios	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Entrevistas		✓	✓	✓	✓		
Buzones de sugerencias			✓				

Voy a tratar individualmente cada actitud, siguiendo el orden en el que aparecen en la tabla:

Flexibilidad de Pensamiento

Esta actitud quedó únicamente registrada en los diarios, obteniendo valores positivos para el 66.67% de los estudiantes durante las tareas con Geogebra. Estos datos, como ya he

comentado, hacían referencia mayoritariamente al indicador *FP3.Cambia de opinión en base a argumentos convincentes*.

Perseverancia

Se obtuvo información de ella mediante los diarios y entrevistas grupales. Las observaciones de aula recogidas en los diarios acerca de esta actitud aluden a que, incluso en las tareas más complejas, la mayoría de los estudiantes se mantuvieron implicados en ellas hasta obtener una respuesta, no manifestando esta actitud con anterioridad durante las tareas LP de dificultad similar. Las intervenciones de los estudiantes durante las entrevistas confirmaron mi percepción de la evolución de esta actitud durante las tareas GG, pues los alumnos afirmaron haber perseverado en la actividad matemática realizada, impulsados fundamentalmente por el gusto y confianza en el trabajo con el software.

Espíritu Crítico

Esta actitud fue analizada mediante los tres instrumentos. Quedó recogida positivamente en los diarios para un 75% de los alumnos y en todas las intervenciones, tanto de las entrevistas como del buzón de sugerencias, que hacían referencia a tal actitud. Estos resultados evidencian un alto porcentaje de los estudiantes manifestando Espíritu Crítico durante el trabajo con Geogebra, lo cual supuso una evolución bastante notable respecto de su pensamiento crítico previo.

Precisión y Rigor

Los diarios y las entrevistas grupales informaron de esta actitud, cuyo análisis devolvió resultados muy satisfactorios. En estos instrumentos quedó patente que el gusto por el trabajo con el software les hizo deshacer aquellas representaciones que no eran del todo precisas y les llevó a plantearse si la estrategia considerada era adecuada o no. La mayoría de los estudiantes demostró que su falta de precisión y rigor durante las tareas LP se debía fundamentalmente a una cuestión de motivación e interés.

Creatividad

A través de los diarios y de las entrevistas, se indagó sobre esta actitud. Los diarios aludían a un 37% de los estudiantes manifestándola durante las tareas GG. En las entrevistas se les preguntó a los escolares por su opinión sobre las tareas realizadas en el bloque de mosaicos de Escher que, en resumen, resultaron atractivas a los discentes porque les permitían ser más creativos y apreciar la utilidad y belleza de tales teselaciones. Los resultados informan de que

la herramienta no contribuyó, como en las restantes actitudes, al desarrollo de la Creatividad en la mayoría de los alumnos y parece que la variable tarea ayudó a que esta actitud fuese más visible en el aula para algunos de ellos.

Autonomía

Fue registrada únicamente en los diarios casi en todas las sesiones GG y para casi todos los alumnos (en torno al 95%). Durante el trabajo con el software, los alumnos se mostraron más autónomos, incluso en las tareas más complejas, en las que probaban alguna estrategia antes de solicitar ayuda externa. Este cambio se debió al aumento de motivación y al fomento de la autonomía provocado por el uso de Geogebra, que permitió a los escolares tener actividad, en ocasiones probando por ensayo-error. De este modo, se evitó el bloqueo inicial que solían experimentar cuando trabajaban en la resolución de problemas no rutinarios.

Sistematización

Igual que la actitud anterior, ésta fue recogida únicamente en los diarios. Se apreció durante las tareas GG que, el 83.33% de los estudiantes se comportaron de este modo, evidenciando simultáneamente SS17 y SS19. Es decir, manifestaron al trabajar con Geogebra que actuaban sabiendo a dónde querían llegar y, además, eran capaces de sintetizar sus cálculos y resultados.

A modo de resumen del análisis presentado para cada actitud por separado, y en respuesta al objetivo 2 de investigación, concluiré diciendo que el uso de Geogebra produjo una mejora considerable en actitudes tales como Autonomía, Sistematización, Precisión y Rigor, Perseverancia, Espíritu Crítico y también, aunque en menor grado, en su Flexibilidad de Pensamiento (referida a FP3). La actitud que no evolucionó hasta niveles aceptables y en la que el software pareció no ejercer una influencia considerable fue Creatividad, que fue manifestada por el 30% de los estudiantes pero no por los restantes. En la transformación de estas actitudes, la influencia del software parece estar asociada a los atributos y ventajas del mismo respecto a métodos tradicionales de lápiz y papel, más que al gusto, motivación y confianza de los estudiantes por el trabajo con Geogebra, aunque su adecuada actitud hacia el uso de TIC incidió en algunas de ellas como Perseverancia y Precisión y Rigor. Cuando, más adelante en este capítulo, se de respuesta al objetivo 3 de esta investigación se atenderán debidamente cuáles fueron los atributos más influyentes para el desarrollo de cada actitud. Además, en los estudiantes que no trabajaban en la asignatura antes de introducir las TIC como herramienta de trabajo en el aula, se observó una relación entre la mejora

experimentada en sus actitudes hacia las matemáticas y el desarrollo de sus actitudes matemáticas. Para estos estudiantes, su mayor implicación e interés por la resolución de las tareas GG, el mayor aprecio demostrado por las mismas y un autoconcepto más positivo (fruto del interés, gusto y confianza en el trabajo con Geogebra) les llevó a esforzarse por resolver adecuadamente las tareas, exhibiendo las actitudes matemáticas señaladas (Autonomía, Sistematización, Precisión y Rigor, Perseverancia, Espíritu Crítico y Flexibilidad de Pensamiento (FP3)) como no lo habían hecho antes de trabajar con el software.

9.1.3.2. Análisis de la Muestra de Estudiantes

Del mismo modo que para el análisis de las actitudes hacia las matemáticas, para el análisis de las actitudes matemáticas, se analizaron en primer lugar los datos recogidos en las parrillas de observación de actitudes para los estudiantes de la muestra. Posteriormente, se triangularon éstos con las entradas de los diarios de cada estudiante, con sus intervenciones en las entrevistas y con sus aportaciones a los buzones de sugerencias, si las hubo. Dicha triangulación confirmó la bondad de las observaciones registradas en dichas parrillas para estos 12 estudiantes y, por ello, los resultados que a continuación se exponen proceden mayoritariamente de dicho instrumento. Al igual que para la categoría de actitudes hacia las matemáticas, ya analizada, cuando se presente el estudio de casos, se mostrará de un modo más extendido el análisis y la triangulación de los resultados obtenidos con los diferentes instrumentos empleados.

Análisis de las Parrillas de Observación

Como para las actitudes hacia las matemáticas, los porcentajes asociados a cada actitud matemática hacen referencia a las evidencias positivas registradas en el aula para cada estudiante durante la realización de las tareas con lápiz y papel (tareas LP) y con Geogebra (tareas GG). Es decir, al porcentaje de las sesiones en las que cada estudiante manifestó una determinada actitud.

Además de las abreviaturas ya conocidas (*LP* y *GG*), para presentar el análisis de las actitudes matemáticas emplearé, en ocasiones, las siguientes abreviaturas que hacen referencia a dichas actitudes: *FP* (flexibilidad de pensamiento), *EC* (espíritu crítico), *PE* (perseverancia), *PR* (precisión y rigor), *C* (creatividad); *AU* (autonomía) y *SS* (sistematización). Asimismo, para facilitar la lectura del análisis, incluyo la parte de las

parrillas correspondiente a las actitudes matemáticas, que contiene los indicadores mediante los cuales se recogió información acerca de cada una de ellas:

Tabla 9-25.- Indicadores de la parrilla de observación referentes a actitudes matemáticas

ACTITUDES MATEMÁTICAS	FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO	FP1 Resuelve los problemas de más de una forma.
		FP2 Se interesa por la/s forma/s en q otros compañeros resuelven problemas diferentes a la suya
		FP3 Cambia de opinión en base a argumentos convincentes.
	ESPÍRITU CRÍTICO	EC4 Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad.
		EC5 Aunque no es capaz de hallar una solución correcta, revisa los pasos para comprobar que todo es correcto o encontrar errores.
		EC6 Se da cuenta de que no llega a la solución o de que ésta no es válida, pero no se preocupa de averiguar el por qué o de seguir intentándolo.
	PERSEVERANCIA	PE7 Ante un problema, se da por vencido fácilmente sin llegar a ninguna respuesta
		PE8 Cuando fracasa en el intento de resolver un problema, no lo intenta otra vez, se conforma con una respuesta incorrecta.
		PE9 No abandona el problema hasta que llega a una solución.
	PRECISIÓN Y RIGOR	PR10 No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado.
		PR11 Cree que un error de cálculo no es importante.
		PR12 Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso
	CREATIVIDAD	C13 Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas
		C14 No investiga distintas o nuevas estrategias
	AUTONOMÍA	AU15 Prefiere no pensar por sí mismo y pregunta al profesor o a los compañeros qué debe hacer.
		AU16 Trabaja de modo autónomo.
	SISTEMATIZACIÓN	SS17 Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar
		SS18 Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo
		SS19 Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados

Procederé a contrastar la información de las parrillas de observación obtenida de las tareas LP con la recogida para las tareas GG. Para ello, primeramente se obtuvieron los porcentajes obtenidos por cada estudiante en cada actitud durante cada tipo de tareas. Después se obtuvo, para cada actitud, la media aritmética de dichos porcentajes para los 12 estudiantes de la muestra, que quedan recogidos en la siguiente figura:

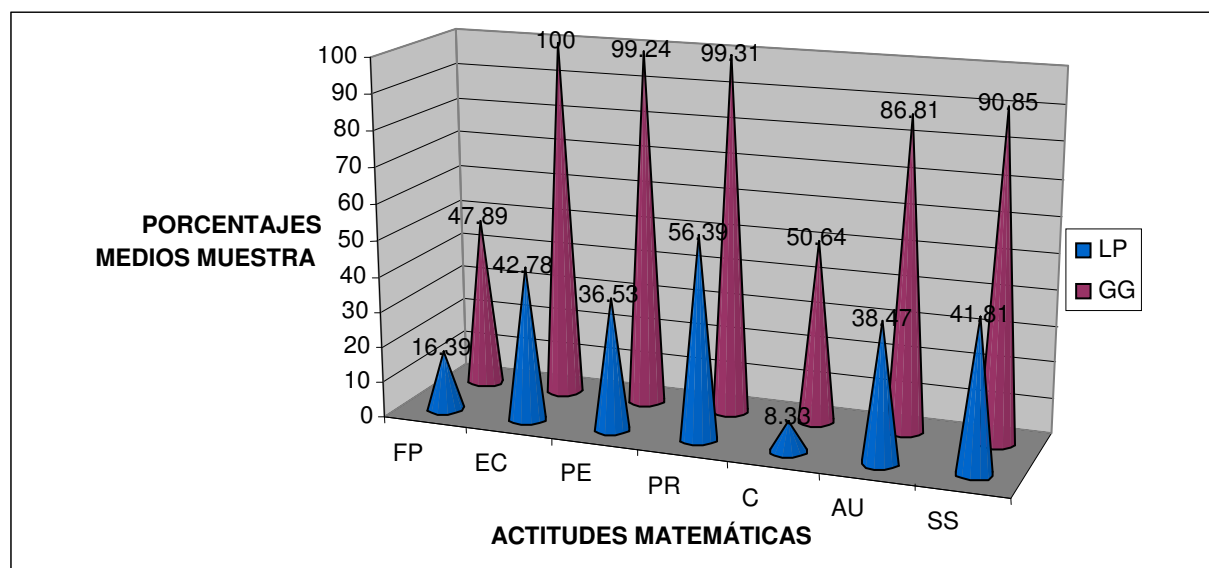


Figura 9-11. Porcentajes medios de sesiones en las que la muestra manifestó globalmente cada actitud

A continuación, se comprobó la dispersión de los datos recogidos para cada tipo de tareas y cada actitud, respecto a dichos porcentajes (calculando la desviación típica y el coeficiente de variación). Por último, se obtuvieron las transformaciones observadas en cada actitud, hallando la diferencia entre los porcentajes medios obtenidos durante el trabajo con Geogebra (tareas GG) y durante las tareas con lápiz y papel (tareas LP). La tabla 9-26 sintetiza esta información:

Tabla 9-26. Valores estadísticos para actitudes evidenciadas globalmente por estudiantes de la muestra

Actitudes	Porcentaje medio global (μ)	Desviación Típica (σ)	Coficiente de variación ($CV = \frac{\mu}{\sigma}$)	Diferencia entre porcentajes medios globales de tareas GG y de tareas LP
FP tareas LP	16.39%	24.47%	1.49	Incremento del 31.50%
FP tareas GG	47.89%	17.05%	0.36	
EC tareas LP	42.78%	29.24%	0.68	Incremento del 57.22%
EC tareas GG	100.00%	0.00%	0.00	
PE tareas LP	36.53%	33.15%	0.91	Incremento del 62.71%
PE tareas GG	99.24%	2.62%	0.03	
PR tareas LP	56.39%	33.46%	0.59	Incremento del 42.92%
PR tareas GG	99.31%	2.41%	0.02	
C tareas LP	8.33%	28.87%	3.46	Incremento del 42.31%
C tareas GG	50.64%	45.88%	0.91	
AU tareas LP	38.47%	41.06%	1.07	Incremento del 48.34%
AU tareas GG	86.81%	28.33%	0.33	
SS tareas LP	41.81%	33.52%	0.80	Incremento del 49.04%
SS tareas GG	90.85%	24.76%	0.27	

El análisis de las transformaciones experimentadas globalmente por los estudiantes de la muestra en cada actitud, lo he estructurado por orden decreciente de mejora observada. Así,

empezaré por la actitud que presentó una mayor evolución durante las tareas con Geogebra respecto de las tareas LP.

Perseverancia (PE)

La actitud que mejoró globalmente en mayor medida con la introducción de las TIC fue la Perseverancia, pues experimentó un aumento del 62.71%.

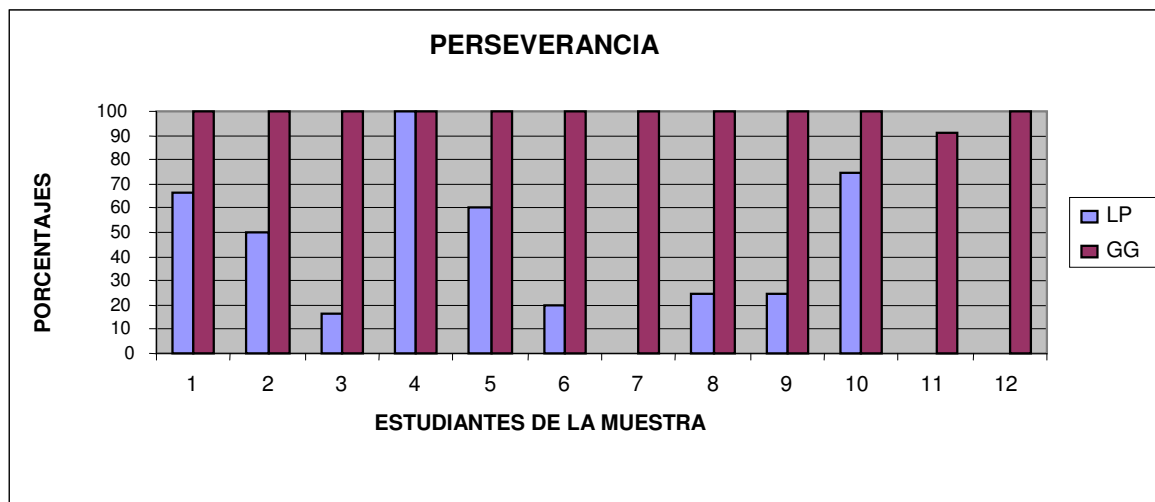


Figura 9-12. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Perseverancia

Durante las tareas LP, esta actitud alcanzó entre los estudiantes de la muestra una media del 36.53%. Las medias de cada estudiante fueron bastante dispares, como pone de manifiesto el valor del coeficiente de variación que está próximo a 1. Esto quiere decir que algunos estudiantes tenían medias elevadas, mientras que otros, la mayoría, tenían valores medios muy bajos. Con el trabajo con Geogebra, la media alcanzada globalmente por la muestra de estudiantes en las tareas GG fue de 99.24%, denotando que todos ellos obtuvieron valores medios muy elevados y no existiendo variación entre los valores alcanzados por unos estudiantes y otros (coeficiente de variación=0.03). Este pronunciado cambio hace pensar que la herramienta contribuyó a que los estudiantes trabajasen durante más tiempo en las tareas, no abandonándolas cuando la primera estrategia no les proporcionaba el resultado esperado. Durante las tareas LP, cuando intentaban resolver una tarea sin éxito, la mayoría de ellos se desentendían de la tarea. Sin embargo, en este caso, al presentarse la misma situación, el comportamiento fue bastante distinto. El hecho de que el software les permitiera probar sus conjeturas ofreciéndoles la posibilidad de deshacer y rehacer, en muchas ocasiones les llevó a aventurarse en testar una idea aunque no estuviesen convencidos de su adecuación, conscientes de que en caso de no serlo no habrían invertido demasiado tiempo y esfuerzo en ello. Esto les llevó a mantenerse perseverantes y trabajando en la tarea. También el gusto por

trabajar con los ordenadores y el sentirse competentes en el manejo de la herramienta les dio confianza para investigar posibles caminos de resolución y les hizo estar concentrados durante más tiempo en la tarea. Estas observaciones están recogidas, además de en las parrillas de observación de los estudiantes que experimentaron esta transformación positiva, en los diarios que escribí para ellos.

Espíritu crítico (EC)

Esta actitud también experimentó una notable mejoría al trabajar con Geogebra. Durante las tareas LP, el valor medio obtenido para la muestra fue de 42.78%, siendo las puntuaciones de los estudiantes más homogéneas que en la actitud anterior y destacando tres estudiantes del resto: 2 de ellos con un 0% (A7 y A11) y 1 de ellos con un 100% (A4).

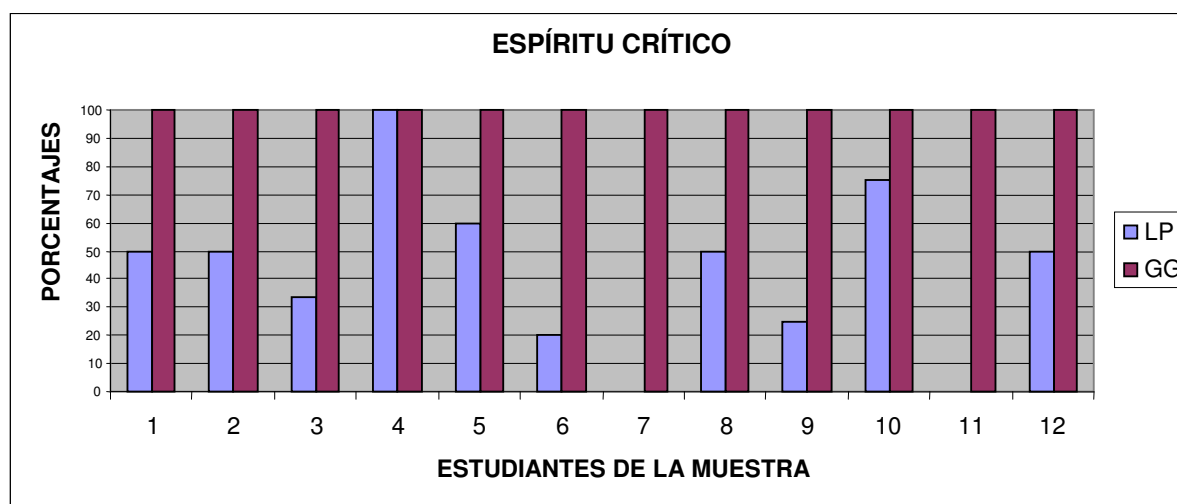


Figura 9-13. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Espíritu Crítico

Como también se aprecia en la figura anterior, la media obtenida en las tareas GG, 100%, responde a que todos los estudiantes la obtuvieron. Aunque pueda parecer sorprendente que todos ellos obtuvieran esta puntuación, se puede explicar esta variación teniendo en cuenta cómo el software contribuyó a ello. Cuando los alumnos trabajaban con LP y elegían una estrategia que les llevaba a una respuesta, en torno al 50% de las ocasiones se cuestionaban su validez y adecuación al contexto del problema; en el resto de ellas, simplemente querían responder a la tarea sin preocuparse de si la respuesta era válida o no. Esta situación obedecía a las bajas actitudes matemáticas demostradas: no se sentían capaces de encontrar otra estrategia y, en consecuencia, una vez obtenida una respuesta, abandonaban la tarea. En otras palabras, era falta de autonomía, perseverancia y sistematización lo que les llevaba a no ser críticos tampoco. Durante las tareas GG, la herramienta les ayudó a ser conscientes en cada momento de la bondad de las estrategias seguidas y de las respuestas obtenidas. Esto, unido a

una mayor perseverancia en las tareas, ayudó a que las analizaran en busca de errores. Muchas veces no se trataba de que los estudiantes no fueran críticos, sino de que no eran capaces de comprender que la respuesta no se ajustaba a lo que buscaban, dadas sus limitaciones cognitivas. En estos estudiantes el cambio fue más sorprendente, pues pasaron de no ser nada críticos a ser bastante críticos con su modo de actuar. Esto no quiere decir que, por el hecho de manejar el software, resolvieran perfectamente todas las tareas y mejoraran sorprendentemente sus competencias (tema que se analiza en el siguiente capítulo). Sin embargo, al menos se cuestionaron si todas las respuestas y modos de resolver un problema eran válidos.

Sistematización (SS)

Esta actitud, a diferencia de las dos anteriores, de naturaleza binaria: ser perseverante o no, crítico o no, puede evidenciarse de manera más gradual. Se puede ser sistemático a la hora de actuar y decidir qué camino elegir, pero no lograr sintetizar los resultados obtenidos. Desde esta doble consideración de la actitud, se realizó la observación y se obtuvieron los valores medios para cada estudiante, que durante cada sesión podía obtener un nivel nulo, intermedio o alto de sistematización. La mejora en este caso también fue considerable, pasando del 44.81% en las tareas LP a un 90.85% en las tareas GG.

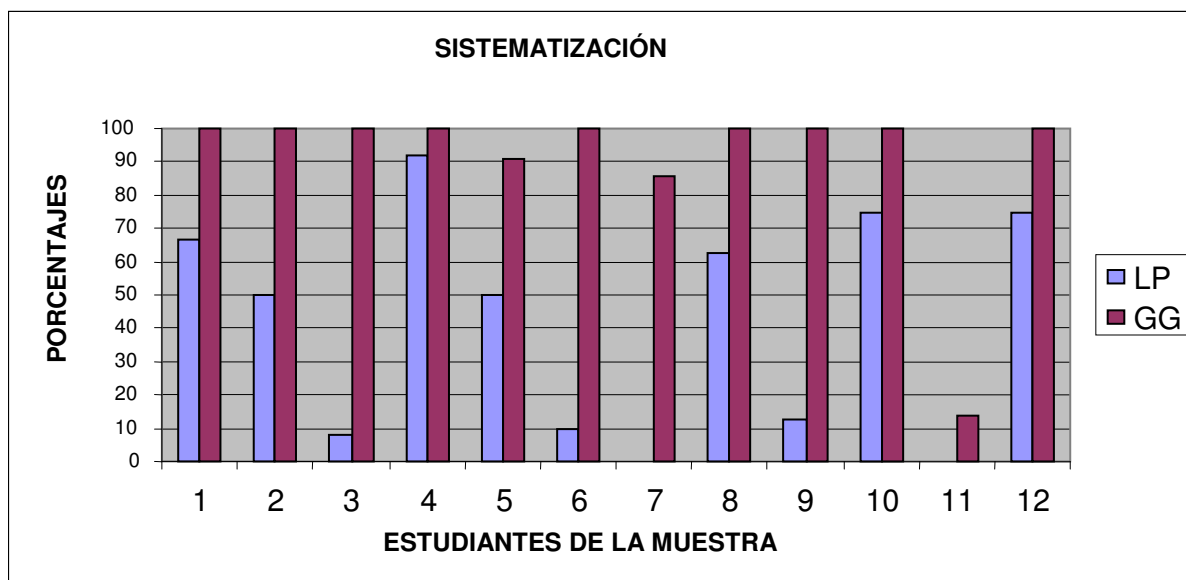


Figura 9-14. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Sistematización

Mientras que la media de las tareas LP venía acompañada de una dispersión de los datos considerable, es decir, provenía de valores muy dispares (o medios-altos o muy bajos), en el caso de las tareas GG, la dispersión se redujo bastante y todos los estudiantes, a excepción de A11, se situaron muy próximos al valor medio obtenido del 90.85%. Observando los datos de

las tareas LP, se comprueba que los estudiantes solían tener un comportamiento más o menos estable; es decir, los que tenían muy bajas puntuaciones era porque no se mostraban nada sistemáticos y sólo en alguna ocasión actuaban sabiendo dónde querían llegar. Los alumnos con puntuaciones medias, las obtenían al mostrarse totalmente sistemáticos en la mayoría de las sesiones y nada sistemáticos en otras; o sea, o se mostraban muy sistemáticos o nada sistemáticos. Durante las tareas GG, casi la totalidad de los estudiantes se manifestaron totalmente sistemáticos en todas las sesiones y sólo algunos de ellos, en alguna de las tareas no fue nada sistemático. La alumna A11 constituye la excepción, ya que apenas experimentó mejoría en esta actitud durante las tareas con Geogebra, respecto de las tareas LP.

A pesar de obtener valores muy elevados durante las tareas GG, la mejora global en esta actitud no fue tan sorprendente como en las actitudes anteriormente comentadas, porque la situación de partida no era tan negativa como en éstas. No obstante, he de resaltar que el uso de Geogebra contribuyó a que todos, a excepción de A11, con serios problemas de aprendizaje, fueran más sistemáticos al trabajar las tareas de mosaicos. Al trabajar con TIC, los estudiantes tenían que decidir y planificar sus acciones para conseguir que la máquina respondiese como ellos querían. Incluso los estudiantes con mayores dificultades, que tenían problemas para definir una estrategia de acción y optaron por comenzar por ensayo-error, se comportaron de un modo más sistemático. Ello se debió a que la interactividad y el feedback con esta herramienta les ayudó a ver por dónde podían continuar, qué caminos podían explorar y los resultados que obtendrían en cada caso.

Autonomía (AU)

La evolución experimentada en esta actitud, un 48.34%, fue similar en porcentaje a la de Sistematización antes comentada, así de un 38.47% con LP pasó a un 86.81% con Geogebra. Se observó que, a excepción de A7 y A11, el resto de la muestra alcanzó elevados niveles de autonomía.

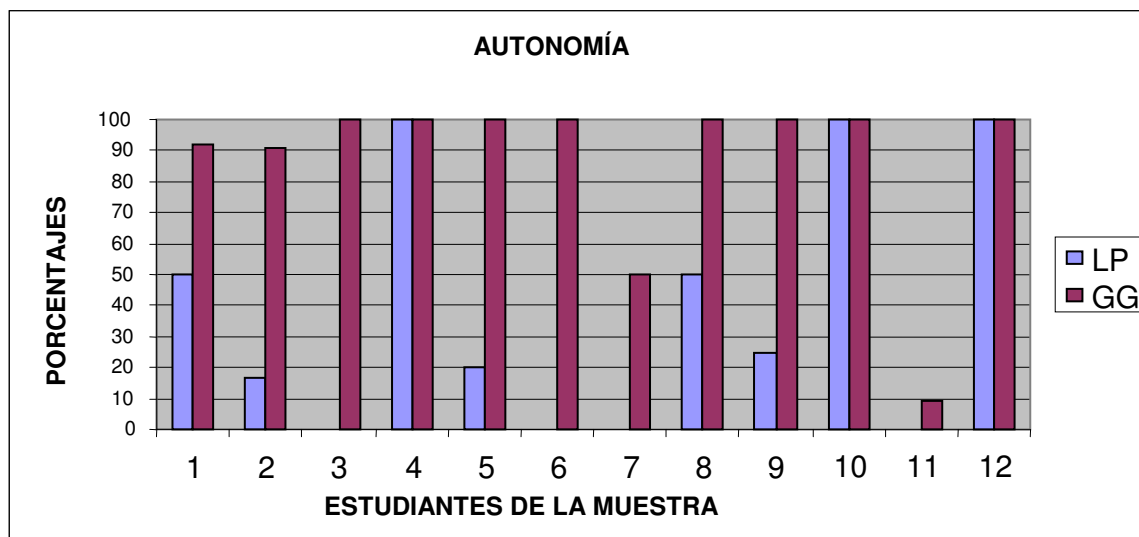


Figura 9-15. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Autonomía

La baja actitud inicial de los estudiantes respondía a distintos patrones: algunos escolares se mostraron poco autónomos, no por tener deficiencias cognitivas que les impidiesen trabajar por sí mismos, sino por una falta de motivación hacia el trabajo en matemáticas. Ello les llevaba a no trabajar en las tareas o, si lo hacían, esperaban a que sus compañeros les indicasen qué estrategia seguir. Otros estudiantes, por el contrario, a pesar de estar interesados en las tareas, manifestaron ciertas dificultades para definir su propia estrategia de resolución (hemos visto que también se mostraron poco sistemáticos) y ello les llevó a solicitar ayuda externa continuamente. Durante el trabajo con Geogebra en el aula, la motivación, gusto y confianza en el software contribuyeron a aumentar la autonomía de los estudiantes que se ajustaban al primer patrón de comportamiento antes descrito (falta de motivación hacia el trabajo en matemáticas). Los alumnos que obedecían a la segunda tipología (deficiencias cognitivas), a excepción de la alumna nº 11, que ya se comentó presentaba serias limitaciones, también experimentaron considerables mejoras, debido a otros atributos del software, que en el apartado correspondiente se exponen. Se ha encontrado una relación entre autonomía y rendimiento en matemáticas, pero no siempre esta relación es bidireccional. Generalmente, si un estudiante mejora cognitivamente se mostrará más autónomo; sin embargo, puede que un estudiante trabaje de modo más autónomo, pero ello no siempre le lleve a una mejora cognitiva. En efecto, se observaron estudiantes que trabajaron más autónomamente con Geogebra, pero no siempre lograron resolver las tareas, aspecto que se retoma cuando se analizan las competencias desarrolladas por los estudiantes durante las tareas GG.

Precisión y rigor (PR)

Esta actitud es la que alcanzó el segundo porcentaje más elevado con Geogebra, después de Espíritu Crítico, llegando al 100%. Aún así, ocupa la quinta posición en cuanto a mejora global porque la situación de partida no era tan negativa como en los otros casos. Durante las tareas LP, los alumnos obtuvieron un 56.39%, mientras que durante las tareas GG llegaron al 99.31%. La dispersión de los valores de los estudiantes puede observarse en la siguiente tabla:

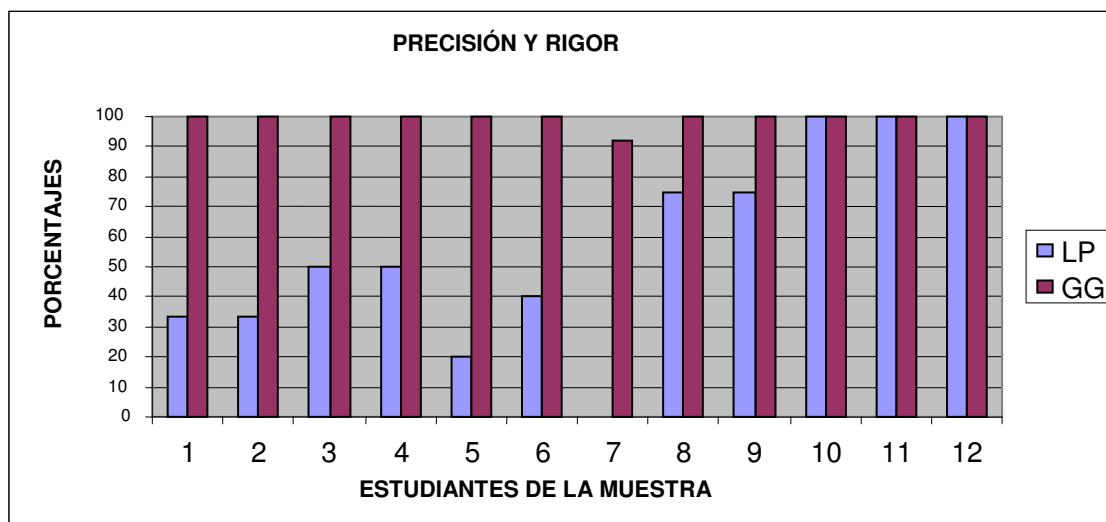


Figura 9-16. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Precisión y Rigor

No resultó sencillo recoger información sobre esta actitud, y puede que ésta no fuese del todo exacta, porque los comportamientos de los alumnos no respondían siempre al mismo patrón. Durante una misma tarea podían ser rigurosos y precisos con algunos de los aspectos considerados y con otros no, con lo que se intentó recoger una idea global de lo observado en cada sesión. De todos modos, la comparación es posible dado que se recogieron los datos bajo el mismo criterio durante las tareas LP y GG.

La herramienta Geogebra permitió realizar con precisión gran cantidad de representaciones gráficas, cuya elaboración de manera manual consumiría mucho más tiempo y esfuerzo. Por otro lado, las representaciones obtenidas eran consecuencia de las decisiones y estrategias seguidas para su construcción y podían manipularse conservando las propiedades geométricas bajo las que se construyeron. Además, Geogebra les animó a probar y realizar variadas construcciones y la visualización de éstas en pantalla les permitió obtener información acerca de la precisión y rigor del camino seguido y de los cálculos implicados en ello. Cuando eran conscientes de falta de rigor y precisión, deshacían las construcciones o realizaban otras

nuevas hasta lograr la precisión y rigor buscado, dado que esto no les exigía mucho más esfuerzo y dedicación. A esta actitud también contribuyó el gusto y confianza depositados en el uso de Geogebra, que les llevó a repetir el mismo proceso en numerosas ocasiones alterando algunas condiciones iniciales hasta llegar a la solución buscada. Esta situación era poco habitual con LP, pues cuando se trataba de hacer nuevos cálculos y representaciones solían mostrarse bastante desmotivados y se conformaban con una solución menos rigurosa y precisa.

En algunas ocasiones, se observó cómo algunos estudiantes eran rigurosos y precisos trabajando con Geogebra, pero no lo eran tanto al comunicar por escrito sus cálculos y estrategias. Se encontró en muchos de estos casos una explicación lógica a esta falta de rigor en la respuesta escrita: la concepción del alumno de que la tarea que iba a analizar exhaustivamente la profesora era el archivo de Geogebra. Por ello, los estudiantes que habitualmente no eran nada rigurosos y precisos decidían cumplimentar rápidamente el protocolo escrito de resolución de la tarea, sin invertir mucho tiempo en ello, incluyendo representaciones de polígonos o mosaicos poco precisas a modo de ejemplo. A esto hay que añadir que mantener los niveles de precisión y rigor deseables en matemáticas suponía un mayor trabajo por parte de los estudiantes, que no siempre todos ellos estaban dispuestos a asumir.

Creatividad (C)

Esta actitud fue una de las dos que alcanzaron un porcentaje más bajo, tanto con LP como con GG; sin embargo, su evolución en porcentaje, un 42.31%, fue similar a la de otras actitudes ya comentadas. La diferencia en este caso radica en que con LP el porcentaje era casi nulo, un 8.33%, llegando a alcanzar con GG un 50.64%.

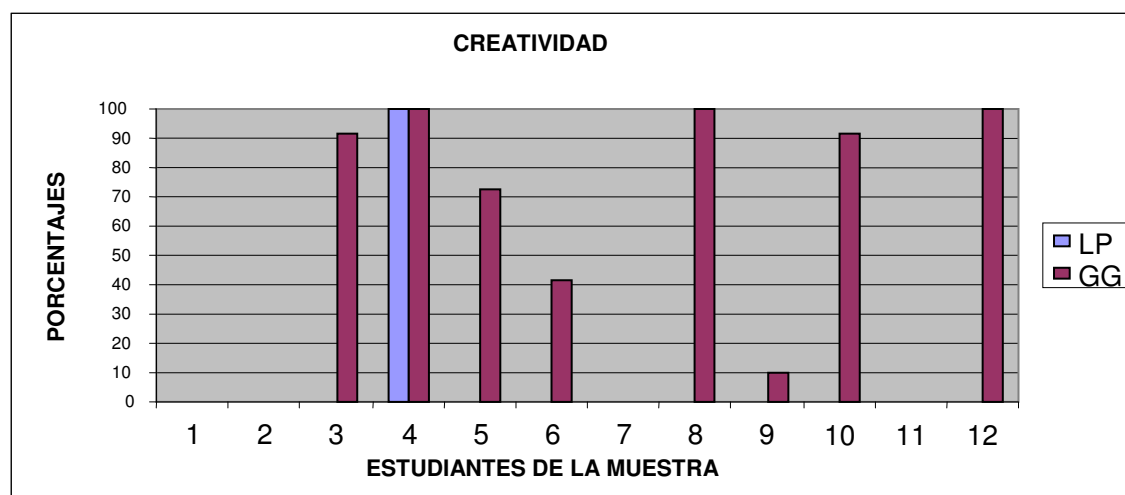


Figura 9-17. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Creatividad

Observando la figura, se comprueba que hubo cuatro estudiantes (los dos habituales A7 y A11, más A1 y A2) a los que el trabajo con TIC no les ayudó a ser creativos, manteniéndose el 0% inicial con LP. Hubo dos estudiantes (A6 y A9) que en determinadas tareas se mostraron creativos y los 6 restantes alcanzaron altos porcentajes de creatividad, partiendo en su mayoría de una situación inicial nula. Para desarrollar la Creatividad es pertinente que la tarea ayude a ello y he de matizar que no todas las tareas contribuyeron al desarrollo de esta actitud. En consecuencia, se ha buscado una posible relación entre los alumnos que se mostraron creativos sólo en algunas ocasiones y las tareas que estaban realizando en esas sesiones para ver si se encontraba una relación creatividad-tarea. El resultado, no obstante, ha sido negativo, no hallando coincidencia en las tareas que estaban realizando los estudiantes cuando se mostraron creativos.

Iglesias (2000) analizó en profundidad cómo mejorar las habilidades creativas de los estudiantes y afirma que determinados factores psicológicos estimulan la creatividad: la tolerancia, la libertad, la flexibilidad, la búsqueda de lo novedoso, el pensamiento divergente, la capacidad lúdica y la capacidad de riesgo, siendo el factor crucial en la creatividad la motivación para hacer algo creativo. Además, una de las condiciones que afecta a la creatividad radica en los sentimientos que el individuo abriga frente a sí mismo, es decir, la confianza en uno mismo y sus posibilidades de éxito. Desde estas consideraciones, puede decirse que la mayor creatividad experimentada por algunos de los estudiantes se debió a que Geogebra ayudó a mejorar estas otras actitudes que la condicionan, y ello contribuyó a fomentar su espíritu creativo. Para validar esta conjetura, se comprobó si los seis estudiantes que mejoraron en creatividad también lo hicieron en flexibilidad, autonomía, motivación y

autoconfianza (componente cognitiva de las actitudes hacia las matemáticas), y la respuesta fue afirmativa. Entre los estudiantes que durante las tareas GG continuaron mostrándose nada o en raras ocasiones creativos, se pueden distinguir dos grupos: A11, que no experimentó mejoras en ninguna de las actitudes relacionadas con la creatividad, lo cual explica también la no evolución en esta actitud, y los restantes cinco estudiantes de la muestra que, habiendo mejorado en todas o algunas de las actitudes relacionadas con la creatividad, no lo hicieron en ésta. Para ellos deben de existir otros factores, no encontrados, que se asocien a la ausencia de cambio. En resumen, no se considera que la herramienta por sí misma provocase un desarrollo de la creatividad de los estudiantes, sino que, al contribuir a mejorar las otras actitudes matemáticas, actuó como trampolín para su desarrollo en algunos alumnos.

Flexibilidad de pensamiento (FP)

Esta actitud fue la que experimentó menor variación y un porcentaje más bajo, tanto con LP como con GG. Su evolución en porcentaje, un 31.50%, fue inferior a la de las otras actitudes ya comentadas, partiendo de un 16.39% durante las tareas LP y llegando a alcanzar con GG un 47.89%.

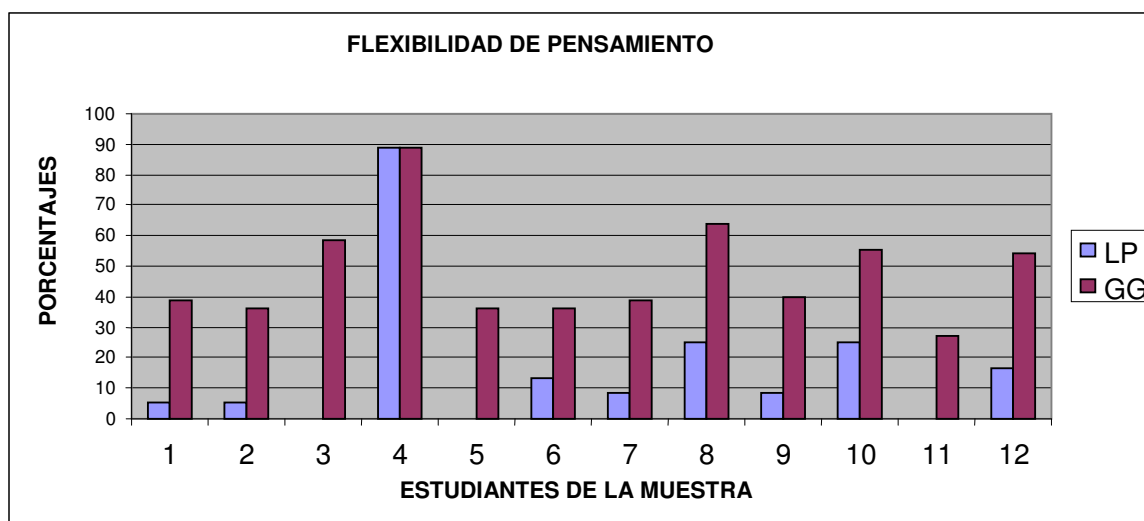


Figura 9-18. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en Flexibilidad de Pensamiento

Esta actitud, a diferencia de las anteriores, no presentó porcentajes elevados en casi la totalidad de los estudiantes, ni en las tareas LP ni en las GG. Se observó esta actitud en el aula atendiendo a tres indicadores, de modo que en cada sesión para obtener una puntuación del 100% era necesario evidenciar todos ellos.

Durante las sesiones con LP, fueron pocos los estudiantes que mostraron alguno de ellos, a excepción de A4, que se mantuvo constante y con niveles elevados durante toda la

experiencia. El resto de los estudiantes que no obtuvieron un porcentaje nulo, manifestaron en alguna o algunas de las sesiones FP3. *Cambios de opinión fundamentados en base a argumentos convincentes*, pero en ningún caso FP1. *Interés por realizar las tareas de más de una forma*, ni tampoco FP2. *Interés por las formas diferentes a la suya en que sus compañeros las resolvieron*.

Durante las 12 sesiones en las que trabajaron con Geogebra las actividades de mosaicos, todos los estudiantes evidenciaron FP3 en la mayoría de las sesiones, de los cuales 5 también mostraron repetidamente FP1 y sólo el alumno 4 se manifestó interesado, además, en la forma en la que sus compañeros resolvían las tareas en un número considerable de sesiones.

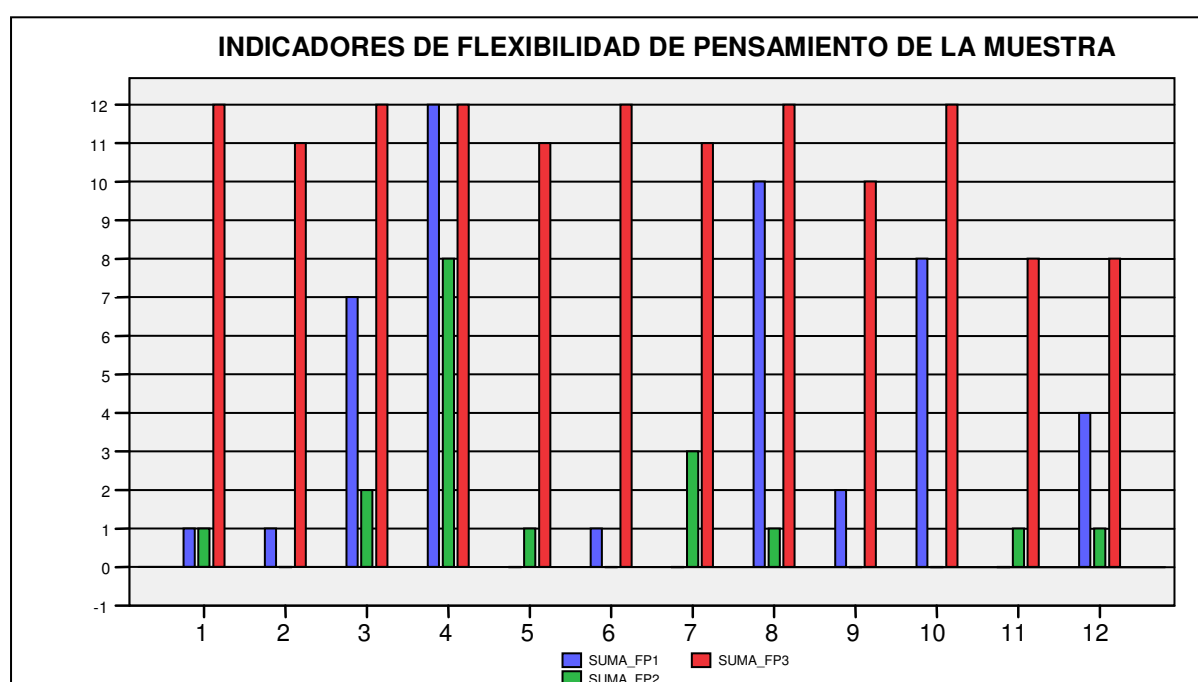


Figura 9-19. Puntuaciones medias obtenidas por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en la actitud Flexibilidad de Pensamiento

Si se analizan por separado los 3 indicadores observados en esta actitud, se observa que sí que se produjeron cambios, aunque no en todos ellos en la misma proporción. Empiezo por analizar la componente que más se desarrolló con el uso de los ordenadores: cambios de opinión fundamentados en base a argumentos convincentes (FP3). Hallando el porcentaje de las sesiones en las que los estudiantes evidenciaron FP3 con LP y con GG, y también el porcentaje medio obtenido por los estudiantes de la muestra en ambos tipos de tareas, sí que se encontraron diferencias significativas. Así, de un valor medio del 33.20% con LP, pasaron a un 96.34% con GG, lo que muestra una variación de un 63.14%. Los porcentajes obtenidos por cada estudiante pueden observarse en la siguiente figura:

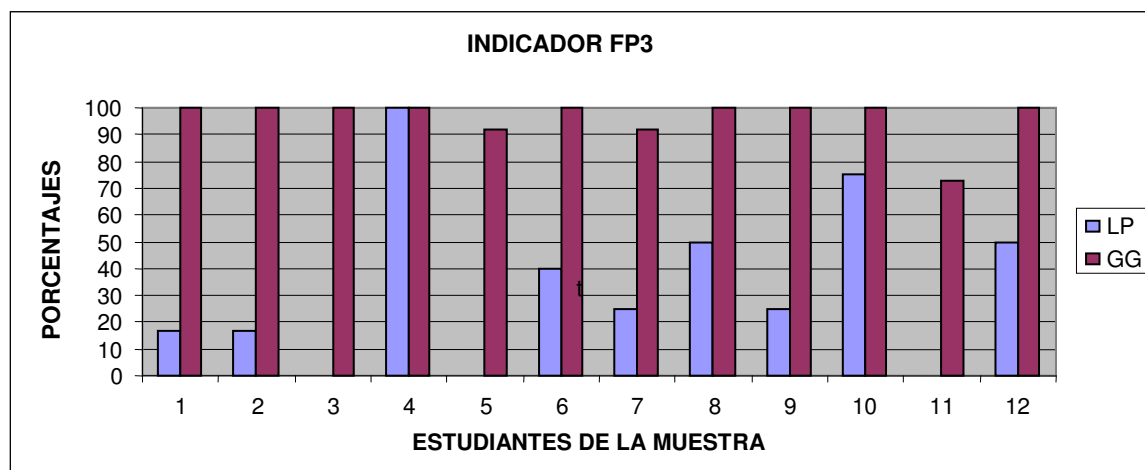


Figura 9-20. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en el indicador FP3

A excepción de los estudiantes A4 y A10, que se situaron por encima del 50% con LP, el resto mejoró sorprendentemente gracias al trabajo con Geogebra. La razón de esta evolución puede asociarse a la interactividad entre alumnos y software. De esta interacción, el alumno extraía información acerca de la bondad de sus argumentaciones o estrategias, cambiando de vía si lo creía necesario. La precisión y rigor con la que el programa realizaba los cálculos y las representaciones permitían al alumno comprender que, de existir errores, éstos respondían a una estrategia o actuación inadecuada. La visualización de tales representaciones a menudo les indicaba de dónde provenían los errores, con lo que podían actuar en consecuencia.

Analizando si los estudiantes tenían interés en resolver los problemas de más de una forma (FP1), se llega a la conclusión de que no tiene sentido comparar valores medios para LP y GG, ya que la dispersión es bastante grande y los porcentajes medios serían poco representativos. Fijándonos en los alumnos 3, 8, 10 y 12 en la siguiente figura 9-21, que sí mejoraron en esta componente, y teniendo en cuenta análisis anteriores, llama la atención que estos cuatro estudiantes también presentaron una evolución positiva en su Creatividad durante el trabajo con Geogebra; hecho que puede explicarse por la relación encontrada entre ambas actitudes por Iglesias (2000). Según la autora, uno de los factores que influyen en la Creatividad es la Flexibilidad, con lo que es comprensible que los estudiantes evolucionaran en ambas a la vez o no lo hicieran en ninguna de ellas.

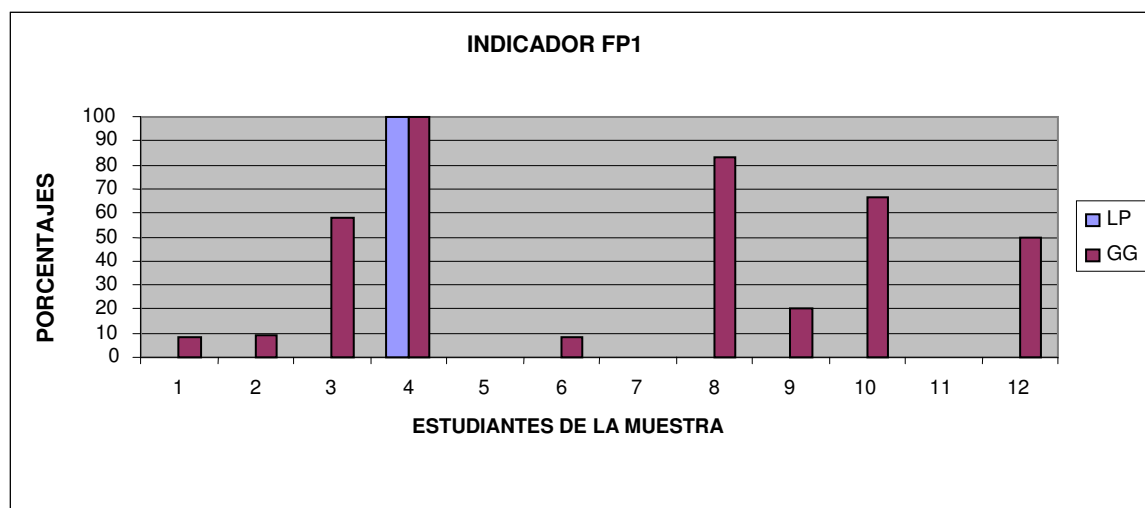


Figura 9-21. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en el indicador FP1

Los demás estudiantes no experimentaron una evolución que merezca la pena destacar. En el caso de A11, sus deficiencias cognitivas le impidieron llegar a una solución adecuada. Para los alumnos A5 y A7 la situación fue diferente, pues sí que hallaron un modo de resolver las tareas, pero para ello consumieron todo el tiempo de trabajo en el aula, con lo que no les fue posible buscar otra estrategia distinta de resolución. En otros casos, como A1, A2, A6 y A9, la ausencia de mejora respondía a una actitud conformista, pues tras realizar correctamente la tarea, no sentían necesidad de seguir buscando caminos alternativos de resolución.

La componente FP2 (interés por las formas diferentes a la suya en que sus compañeros resolvieron los problemas) fue la que experimentó menor evolución en general, no pudiendo destacar mejoras considerables en ninguno de los estudiantes:

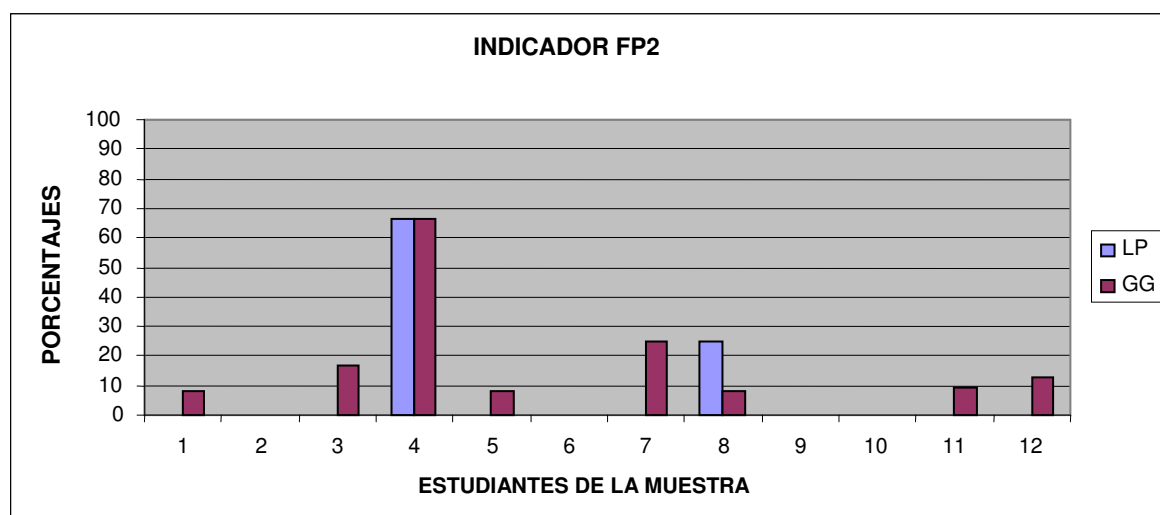


Figura 9-22. Porcentajes medios obtenidos por los estudiantes de la muestra durante las tareas LP y GG en el indicador FP2

Aunque la inclusión de este indicador en la parrilla de observación respondía a la definición considerada en este trabajo para Flexibilidad de Pensamiento, he de matizar que no resultó de utilidad en esta experiencia. No porque no se hayan obtenido resultados positivos, sino porque la situación que pone de manifiesto fue inusual en el aula. Es decir, pretendía comprobar si los estudiantes, durante la realización de cada tarea o tras concluir cada una de ellas, se interesaban por otras formas de resolución diferentes a la/s suya/s empleadas por sus compañeros. Sin embargo, la metodología seguida no fomentaba este comportamiento, ni tampoco se les exigía explícitamente a los estudiantes como parte de las tareas.

Los porcentajes del gráfico reflejan que esta situación raramente fue observada, fundamentalmente porque la mayoría de los estudiantes siguieron la misma estrategia. Como ya he comentado, sólo cuatro estudiantes se mostraron creativos e interesados en resolver las tareas de más de una forma.

A lo largo de las páginas anteriores he expuesto los cambios observados en las actitudes matemáticas de los estudiantes de la muestra durante el trabajo con Geogebra, que permiten dar una respuesta al objetivo 2 de esta investigación para este conjunto de estudiantes. En síntesis, el análisis realizado ha puesto de relieve que no todas las actitudes experimentaron la misma evolución durante las tareas GG, dependiendo ésta de los niveles iniciales registrados con LP, permitiendo realizar las siguientes afirmaciones:

✓ Ninguna actitud empeoró con el uso de Geogebra, lo cual es un hecho bastante significativo, pues aunque algunos estudiantes no experimentasen avances notables, tampoco pareció tener ningún efecto negativo en ellos.

✓ Se obtuvieron porcentajes elevados en Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización durante el trabajo con Geogebra.

✓ Las actitudes Creatividad y Flexibilidad de Pensamiento, a diferencia de las anteriores, no alcanzaron valores elevados ni con LP ni con GG. Los porcentajes en torno al 50% obtenidos en ambas, se debieron a que la evolución no fue uniforme para la totalidad de la muestra, sino que únicamente la mitad de los estudiantes alcanzó valores elevados en Creatividad y valores medios-altos en Flexibilidad de Pensamiento. El uso de la herramienta no fomentó por sí misma su Creatividad, y solamente contribuyó al desarrollo de *FP3* (cambios de opinión fundamentados en base a argumentos convincentes, principalmente visuales), pero no a que los alumnos resolviesen de distintas formas una misma tarea (*FPI*),

ni a que se interesasen por otros modos de resolver las mismas diferentes al empleado por ellos (FP2).

✓ Los atributos de Geogebra y el gusto de los estudiantes por trabajar este software, produjeron una mejora muy significativa de su Perseverancia, Espíritu Crítico, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización, obteniéndose valores próximos al 100%, mientras que no ejercieron tanta influencia en el desarrollo de su Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad. Se analizarán cuáles factores del software incidieron en cada actitud en el apartado 9.2.2.

9.1.3.3. Estudio de Casos

De la misma forma que para las actitudes hacia las matemáticas, en este apartado comienzo exponiendo el análisis completo de la evolución de las actitudes matemáticas de A8, durante la realización de todas las tareas GG, cuya lectura pone de relieve el modo en que se ha llevado a cabo el análisis con Atlas.ti. En dicho análisis también se expone argumentadamente en qué medida las transformaciones experimentadas por A8 en sus actitudes matemáticas durante las tareas GG eran atribuibles al trabajo con Geogebra, a la interacción con su compañero y/o con la profesora o a la tarea. La lectura previa de la historia de A8, facilita la comprensión de los análisis que se presentan en formato más reducido para A3, A7, A9 y A10 (tareas 1 y 5).

9.1.3.3.1. Historia de A8

Presento la transformación de las actitudes matemáticas de A8 durante el trabajo con Geogebra del mismo modo que para las actitudes hacia las matemáticas. Es decir, expongo el análisis del diario que escribí sobre su actuación y de sus parrillas de observación, que permiten extraer los primeros resultados. Después, desarrollo el análisis realizado con Atlas.ti de sus archivos de Geogebra y de audio y de sus protocolos escritos de resolución de cada tarea GG, así como la triangulación de todos los análisis mencionados.

Análisis del Diario

Leyendo las entradas del diario para este estudiante durante las tareas GG, se aprecia un avance de A8 en todas sus actitudes matemáticas, sorprendiéndome su Creatividad, que hasta entonces no había evidenciado, y que le llevaron a convertirse en uno de los pocos

estudiantes que la derrochó a diario durante las tareas GG. Se incluyen algunos extractos del diario de A8, que permiten corroborar las afirmaciones anteriores:

Sesión 6: (A15 no ha venido) A8 ha trabajado en la tarea 5 obteniendo los tres mosaicos regulares y argumentando que son los únicos que suman 360° y se ha quedado hallando el valor de los ángulos interiores. Ha trabajado muy lento, porque se ha empeñado en construir los mosaicos utilizando los tres movimientos en cada uno de ellos, y eso le ha ralentizado (ha estado probando con distintos vectores y ángulos de giro), también ha coloreado la figura original para diferenciarla del resto. Es muy sistemático, preciso (se le había movido un poco un vector y entonces el mosaico no era perfecto y lo ha deshecho y rehecho hasta obtenerlo perfecto) y perseverante (no se cansa ni abandona ninguna actividad), además se muestra bastante creativo. Por todo ello, considero que está mejorando bastante.

Sesión 7: Hoy ha trabajado sin su compañero A15 porque éste no ha asistido a clase. Es tan riguroso que a veces necesita más tiempo sólo por esta razón (para hallar el ángulo interior de los polígonos, los ha dibujado en Geogebra usando la herramienta “Ángulo de amplitud dada”, los ha descompuesto en triángulos empleando segmentos rectilíneos y luego ha hallado el valor del ángulo interior en cada caso). Además, a diferencia de sus compañeros que han hallado el valor de dichos ángulos con lápiz y papel, tal y como les sugerí para ahorrar tiempo, él ha preferido hallarlos con Geogebra, siguiendo así una estrategia distinta a la de los demás y mostrándose, como en sesiones anteriores, bastante creativo. No obstante, su eficiencia en el manejo del software le ha permitido obtener los valores de estos ángulos sin ocasionarle una pérdida de tiempo considerable. Después de observar los valores que ha obtenido para los ángulos interiores en cada polígono y pensando un poco, ha llegado a la conclusión de que éstos deben ser divisores de 360° para poder formar un mosaico y el triángulo, cuadrado y hexágono son los únicos que cumplen esta condición, entre los valores obtenidos. Después se ha puesto a realizar la tarea 6, empleando los tres movimientos del plano en cada caso: simetrías, traslaciones y giros (usando como ángulo el valor del ángulo interior en cada caso). Es autónomo, sistemático y sobre todo perseverante y preciso y le gusta mucho trabajar con Geogebra.

Las restantes entradas del diario aluden, al igual que las anteriores, a que A8 manifestó adecuadas actitudes relacionadas con las matemáticas a lo largo de las tareas GG, lo que supuso una evolución respecto de su situación previa. Estas mejoras las manifestó tanto cuando trabajó con su compañero como cuando lo hizo en solitario, porque éste no había asistido a clase. Es decir, puede considerarse el software Geogebra como agente protagonista del cambio experimentado por A8 en sus actitudes matemáticas.

Análisis de las Parrillas de Observación de Actitudes

El perfil actitudinal de este alumno, obtenido durante la observación de las tareas con lápiz y papel (tareas LP) y con Geogebra (tareas GG), se muestra en el siguiente gráfico, en el que

FP es la abreviatura para Flexibilidad de Pensamiento, EC para Espíritu Crítico, PE para Perseverancia, PR para Precisión y Rigor, C para Creatividad, AU para Autonomía y SS para Sistematización:

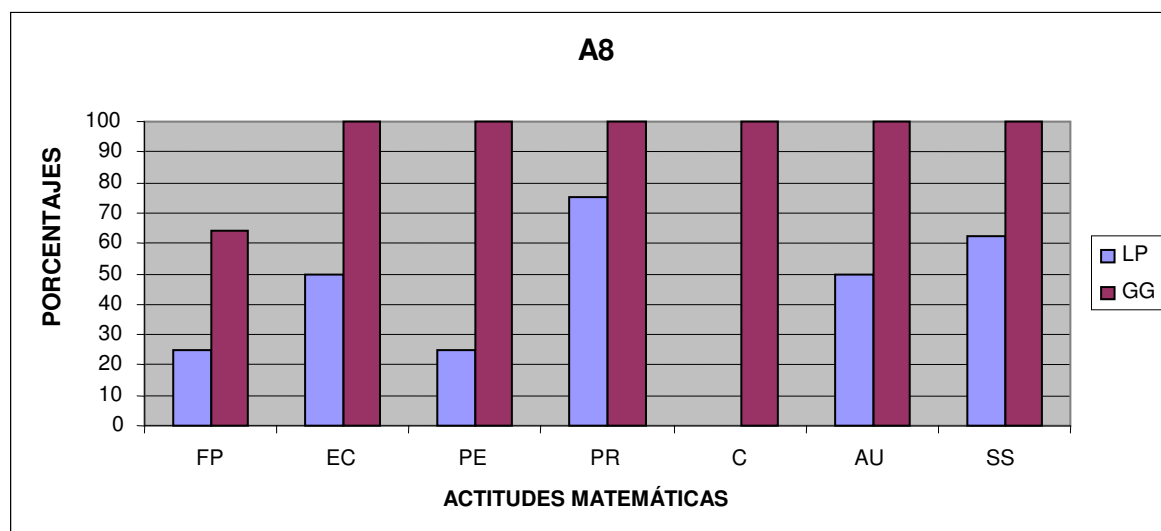


Figura 9-23. Porcentajes obtenidos por A8 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

En el gráfico se observa que, durante las tareas LP, salvando la Creatividad, en las demás actitudes obtuvo puntuaciones no nulas, pudiendo considerar adecuadas las obtenidas en Espíritu Crítico, Precisión y Rigor, Autonomía o Sistematización.

Durante las tareas GG, A8 fue uno de los estudiantes que demostró mayor flexibilidad de pensamiento, alcanzando un porcentaje bastante aceptable del 63.89%, que mejoraba considerablemente el 25% alcanzado en esta actitud durante las tareas LP. En Espíritu Crítico tuvo una evolución considerable, pasando de cuestionarse la bondad de las estrategias y solución obtenidas para el 50% de las tareas LP, a volverse totalmente crítico al trabajar con Geogebra. A8 se mostró perseverante en un 25% de las tareas LP, mientras que con Geogebra se mostró perseverante siempre, independientemente de la dificultad de las tareas, pues el software le motivaba a trabajar, aún sin estrategia clara. Si durante las tareas LP, ya se mostraba riguroso y preciso en un 75% de las ocasiones, durante el trabajo con Geogebra lo hizo en todas las tareas GG. Por otra parte, el desarrollo de la Creatividad de A8 durante las tareas GG puede calificarse de sorprendente, pues con anterioridad no se había comportado de este modo. Una de las razones de este avance fue que con Geogebra necesitó mucho menos tiempo para realizar cálculos y representaciones que con LP, lo que le animó a intentar resolver las tareas de distintas formas por iniciativa propia, y a disfrutar con ello, sintiéndose orgulloso de su trabajo y compartiendo este entusiasmo con sus compañeros. Durante las tareas LP, la mitad de las ocasiones se manifestó autónomo, acostumbrando a solicitar ayuda

cuando no sabía cómo seguir o no estaba seguro de ir por el camino correcto. Por el contrario, durante las tareas GG, prefería explorar por sí mismo distintos caminos y requería mi presencia para mostrarme los resultados obtenidos, buscando conformidad. Sólo en alguna situación en la que no supo cómo salir del bloqueo, después de muchos intentos, requirió ayuda externa. A8 solía ser sistemático, excepto cuando consideraba que la tarea era demasiado compleja y no se sentía capaz de resolverla; entonces parecía bloquearse y no saber cómo actuar. El uso de Geogebra, le animó a intentar resolver cualquier tarea por difícil que le pareciese. Además, en los casos en los que no tenía clara la estrategia a seguir, sí que sabía dónde quería llegar, con lo que probando por ensayo-error llegaba a definir una estrategia y después era capaz de explicar todo el proceso y las decisiones que había tomado.

Como síntesis de lo anterior, puede decirse que el trabajo con Geogebra provocó un desarrollo de todas las actitudes matemáticas de este estudiante, que se vio potenciado por los atributos y ventajas del software para la resolución de problemas sobre técnicas más tradicionales de lápiz y papel. Sobre dichos factores me extenderé en el apartado 9.2.2.

Análisis realizado con Atlas.ti: Triangulación

Al igual que para las actitudes hacia las matemáticas, antes de comenzar con este análisis, se realizó un doble contraste de la información recogida en las parrillas de observación para garantizar la bondad de la información en ellas recogida. En primer lugar, recurriendo a observador externo, y más tarde con ayuda del software Atlas.ti. Se obtuvo un 97.92% de concordancia que, para las actitudes matemáticas, se correspondía con una ligera discrepancia en flexibilidad de pensamiento, precisión y rigor y sistematización, que más tarde comentaré.

Procedo a continuación, una vez expuestos los resultados del análisis del diario y de las parrillas de observación para A8, a analizar sus archivos de audio, de Geogebra y sus protocolos escritos de resolución de cada tarea, con ayuda del software Atlas.ti. Asimismo, este software ha posibilitado triangular los distintos análisis realizados para evaluar la transformación de las actitudes matemáticas de A8 y permite extraer ejemplos significativos para ilustrar los resultados del mismo.

Para exponer este análisis mantengo el orden en el que se caracterizaron en el capítulo 3, que coincide con el orden en el que aparecían en la parrilla de actitudes y en los gráficos presentados para el análisis de las mismas.

Flexibilidad de Pensamiento (FP)

Durante la experiencia con Geogebra, y teniendo en cuenta la situación inicial de A8, se observó una evolución de esta actitud que merece la pena reseñar, destacando los cambios en FP3 y FP2, que a continuación se presentan. Se exponen considerando la frecuencia con la que aparece cada uno de los 3 códigos en orden decreciente y, posteriormente, se analiza esta actitud globalmente.

FP3. Cambia de opinión en base a argumentos convincentes

El criterio para asignar este código, como ya expusiera con anterioridad, fue que el estudiante demostrase la capacidad de cambiar la dirección de sus procesos mentales, siempre que este cambio estuviese debidamente justificado y argumentado. No se trataba de cambiar de opinión sin estar convencido de ello, sólo porque otra persona lo sugiriera, sino que el cambio debía producirse porque el alumno sintiese la necesidad de hacerlo y comprendiese que era el camino correcto.

Este código se asignó 29 veces para el análisis de las tareas GG realizado con Atlas.ti, distribuido de manera homogénea entre las tareas, a excepción de las tareas 4, 6 y 8 en las que FP3 apareció sólo una vez en cada una de ellas. La razón por la que apareció en menor número de ocasiones en las mencionadas tareas fue que éstas eran las más sencillas y A8 las resolvió sin mucho esfuerzo.

Procederé a analizar en profundidad estas situaciones en las que A8 cambió de opinión razonadamente, para buscar a qué factor podía atribuirse este cambio. En ocasiones, resultó complejo determinar cuál fue el factor considerado como más influyente, por eso cuando surgieron dudas se asignó más de un factor o ninguno de ellos:

Tabla 9-27. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase FP3

<i>Factor que influyó mayormente en FP3</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	8
Interacción alumno-alumno	6
Interacción alumno-profesora	7
Tarea	0
Geogebra e interacción alumno-alumno	2
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	3

Se observa que, a excepción del factor Tarea, que no pareció influir en esta actitud, los otros factores aparecieron un número similar de veces. Es decir, a la mejora en esta actitud contribuyeron a partes iguales la herramienta, la interacción con A15 y conmigo. Voy a intentar dar ejemplos concretos de cuándo se asignó FP3 junto con cada uno de los factores.

Empezaré con aquellas situaciones en las que se consideró que FP3 se produjo debido a la herramienta. La influencia de Geogebra se asignó, en total, 12 de las 29 veces que se codificó FP3; si bien, de éstas, sólo 8 veces el software fue considerado el factor más influyente y estas situaciones son las que voy a ejemplificar:

Ejemplo 9-10. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase FP3

A15: ahí no estaba, ¿pero cómo se puede mover ésto?

A8: claro, tienes que mover éste

A15: ¡a ver!, pero no se deforma bien, se hace más pequeño o más grande, pero no se deforma

A8: ¡espérate!, ¿por qué no intentamos hacer la simetría por lado?

El ejemplo es un fragmento de la tarea 10, en la que ambos estaban tratando de obtener una tesela por deformación de sus lados, para después construir con ella un mosaico. No sabían cómo deformar el triángulo, así que se les ocurrió probar arrastrando los vértices (dragging). Entonces se dieron cuenta de que seguía siendo un triángulo regular más grande o más pequeño, pero que no se deformaba como ellos querían, lo que les llevó a cambiar de estrategia y a seguir pensando. En este caso, Geogebra les permitió interactuar directamente con el triángulo, en ausencia de una estrategia clara de resolución, y ello les llevó posteriormente a ir razonando cómo debían ser las deformaciones que debían hacer sobre los lados.

Ejemplos de situaciones en las que fue la interacción con otras personas las que influyeron en mayor medida en A8, ayudándole a cambiar de opinión de un modo razonado son:

- Influencia de la interacción entre A8 y su compañero A15:

Ejemplo 9-11. Influencia de la interacción de A15 para que A8 manifestase FP3

A8: con rombos.

A15: ¡vale!... pero los rombos no son regulares, no tienen los ángulos iguales todos

A8: ¡ah, es verdad!

- Influencia de la interacción entre A8 y la profesora (P):

Ejemplo 9-12. Influencia de la interacción con la profesora para que A8 manifestase FP3

A8: aquí sería...

A8: 1, 2, 3, 4 y 5

Profesora: 5, tienes 5 lados y has girado 5 veces, ¿no?, entonces ¿cuánto será el ángulo de cada uno?

A8: en total

A8: una vuelta entera..., son 360° entre 5

Profesora: eso para este caso que es un pentágono, pero...

A8: pues igual, 360 entre 3, 4, 5, 6, 7... (señala el enunciado de la tarea 4)

En el primero de los ejemplos los estudiantes estaban pensando en polígonos regulares con los que construir otro polígono semirregular (ya habían construido uno anteriormente) y fue su compañero A15 el que ayudó a A8 a cambiar de opinión, mostrándole que estaba equivocado. En el segundo ejemplo, A8 trataba de construir polígonos regulares a partir de giros de un vértice, pero sólo se le ocurría hallar el ángulo de giro midiéndolo sobre el ejemplo representado. En esta ocasión, fue el diálogo conmigo el que le ayudó a ver cómo hallar su valor sin medirlo; es decir, le ayudó a razonar cuál debía ser este ángulo en cada caso, según el número de lados que tuviese el polígono.

FP1. Resuelve el problema de más de una forma

Se trataba de ver si el alumno se interesaba por resolver el problema de más de una forma. A lo largo del análisis de las 10 tareas con el Atlas.ti, se asignó este código 28 veces, con una distribución más o menos homogénea entre las tareas; a excepción de las tareas 5, 6 y 8, que no se ajustaban a lo anterior.

La tarea 5 alcanzó la frecuencia más alta: FP1 apareció 8 veces pero, como ya comenté, A8 dedicó más tiempo a su resolución, algo más de dos sesiones, con lo que tuvo más tiempo para probar distintos caminos para resolverla. Las tareas 6 y 8, destacaron por no tener asignado este código en la codificación del Atlas.ti pero sí en las parrillas de observación. Ello puede justificarse aludiendo al hecho de que durante la observación de aula, rellenaba la parrilla una vez finalizada cada sesión y asignaba el/los códigos en cada actitud, que a mi juicio se ajustaban al comportamiento de cada estudiante en dicha sesión. Sin embargo, al realizar un análisis más minucioso con Atlas.ti, se asignaron los códigos de cada actitud, no a sesiones completas, sino a cada fragmento de las mismas que aportase información acerca de dicha actitud. Este análisis minucioso reveló que, a pesar de que A8 había probado diferentes vías de resolución en las tareas 6 y 8, finalmente solo llegó a hacerlo de un único modo, por lo que no se asignó FP1 para el análisis con Atlas.ti en dichas tareas.

Ahora se muestran los factores que en cada momento le llevaron a intentar resolver una tarea de más de una forma:

Tabla 9-28. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase FP1

Factor que influyó mayormente en FP1	Frecuencia
Geogebra	19
Interacción alumno-alumno	4
Interacción alumno-profesora	0
Tarea	0
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
No es claro el/los factor/es	3

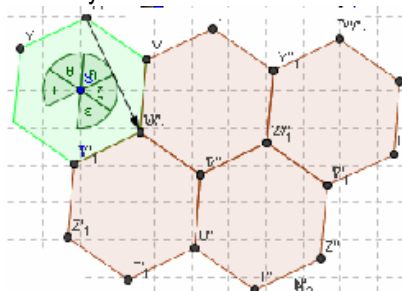
En este caso, sí que se puede decir que fue la herramienta la causante de que A8 demostrase FP1, pues de las 28 veces que se asignó este código, en 21 de ellas estaba implicada Geogebra. De los dos casos en los que apareció conjuntamente con el factor Interacción alumno-profesor, se atribuyó a Geogebra el hecho de que A8 se interesara por buscar distintas formas de resolver las tareas y a la Interacción de éste conmigo el hecho de que realmente lo consiguiera, ayudándole puntualmente en alguna dificultad encontrada durante ese proceso. En este caso, la interacción de A8 conmigo no influyó en FP1 por sí sola, ya que durante la intervención en el aula no incité a los estudiantes a buscar más de un modo de resolver una tarea, sólo actué como guía durante el proceso, proporcionándoles ayuda cuando la solicitaban. Tampoco la interacción con su compañero pareció tener mucho peso en esta actitud; de modo que me centro en los casos en los que fue la herramienta la que le llevó a probar distintas maneras, destacando a modo de ejemplo el siguiente fragmento de la tarea 5:

Ejemplo 9-13. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase FP1 (Perseverancia, Espíritu Crítico y Autonomía)

A8: pues yo quería hacerlos ya todos juntos, ya con las simetrías, traslaciones y giros

Profesora: ¿primero habías hecho el de simetrías⁶⁸?

A8: sí y ahora traslaciones....

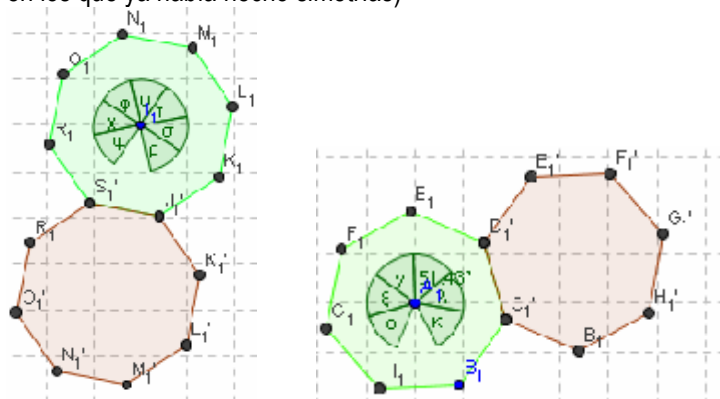


(ha dibujado el vector sobre la pieza y ha usado la herramienta traslada objeto por vector⁶⁹)

⁶⁸ Para realizar simetrías con Geogebra, los alumnos debían seleccionar alguna de las dos herramientas “Refleja objeto por punto” o “Refleja objeto por recta”, después la pieza a reflejar y por último el punto o eje de la simetría. El eje de simetría puede ser uno de los lados de las teselas o cualquier otro segmento o recta que los alumnos construyan como eje.

⁶⁹ Para realizar traslaciones con Geogebra, los estudiantes primero debían pensar en el vector de la traslación y dibujarlo, después seleccionar la herramienta “Traslada objeto por vector”, la pieza que deseaban trasladar y el vector de la traslación previamente construido.

Profesora: y ahora ¿qué quieres hacer con éstas? (me estaba refiriendo a los polígonos de 7 y 8 lados en los que ya había hecho simetrías)



A8: ahora pues yo que sé, giro

Profesora: no hace falta que te compliques tanto, pero ya que quieres hacerlo con giros, ¿cómo lo vas a girar?

A8: pues con la herramienta giro⁷⁰

Profesora: prefiero que no te compliques tanto para esta tarea, primero prueba de la forma más sencilla y cuando hayas averiguado si se puede o no teselar, entonces sigues probando porque como con todos los polígonos no se puede....

A8: ¡vale!

Profesora: es para que no pierdas mucho tiempo intentando teselar con un diseño con el que a lo mejor no lo vas a conseguir sencillamente porque no es posible teselar con él

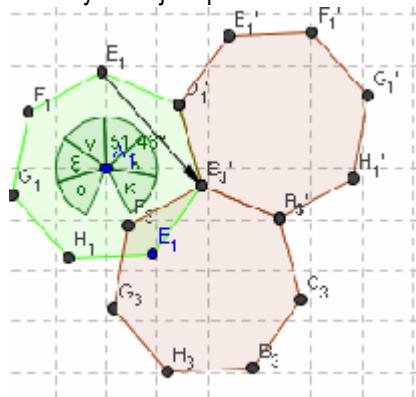
A8: ¡vale, vale!

Profesora: haz las más sencillas y luego en la siguiente actividad pruebas con las otras (hago hincapié en ésto porque está invirtiendo mucho tiempo en ello y se está desviando de lo que pide la tarea 5 que es averiguar los polígonos regulares con los que se puede teselar y por qué sólo con esos. De todas formas, está bien que intente hacerlo de distintas formas por iniciativa propia)

A8: ¡bien! (vuelve al trabajo con los heptágonos y prueba con traslaciones)

A8: vale, vale, vale

A8: si yo dibujo aquí un vector...



(ha dibujado el vector correctamente dentro de la pieza, pero se solapan las teselas, como era de esperar)

Profesora: ¿has podido teselar?

A8: no, le he hecho el vector por lo fácil, pero no sale, ahora le tengo que hacer el giro, que el giro se lo voy a hacer para que quede aquí, lo malo es que yo lo hago con amplitud dada, le...

Profesora: sino, no te compliques tanto, ¡prueba con una simetría a ver!

A8: la simetría ya la he hecho, ésta

⁷⁰ Para realizar giros con Geogebra, los alumnos debían seleccionar la herramienta “Rota objeto alrededor de un punto por un ángulo”, después la pieza que deseaban girar, el centro de giro y debían introducir la amplitud del ángulo de giro y el sentido de éste.

Profesora: hazle otra simetría a esa pieza también

A8: ¡ah, vale!

El ejemplo anterior corresponde a la tarea 5, en la que inicialmente sólo tenían que comprobar con qué polígonos regulares era posible teselar, para después argumentar la existencia y unicidad de los tres mosaicos regulares. Sin embargo, A8 quería probar con cada polígono las 3 isometrías, a pesar de que en repetidas ocasiones le confirmé que en eso consistía precisamente la siguiente tarea y le sugerí que utilizase una única isometría para agilizar el proceso. Como puede apreciarse, no siguió mis consejos y probó con las tres isometrías para cada uno de los diseños, aunque he de decir, que la rapidez con que Geogebra ejecutó sus acciones le dejó tiempo para terminar la tarea.

FP2. Se interesa por la/s forma/s en la que sus compañeros resuelven los problemas diferentes a la suya

Este código resultó poco útil, tanto para la observación de clase como para la codificación de Atlas.ti, pues sólo se empleó en las parrillas en una de las sesiones de la tarea 5 y, al no aportar información adicional, se considera prescindible para esta investigación. No se encontró en sus transcripciones de los audios ningún indicio que indicase que A8 se interesó por otros modos de resolución diferentes a los suyos, aunque se ha de añadir que la pareja más creativa y que demostró más veces FP1 en este grupo fueron precisamente A8 y A15, con lo que difícilmente sus compañeros resolvieron alguna de las tareas de forma diferente a ellos.

Haciendo un análisis conjunto de los 3 indicadores (en realidad, de dos de ellos: FP3 y FP1, puesto que FP2 casi no apareció y nunca lo hizo simultáneamente con ninguno de los anteriores) se observa que en ocho de las tareas, a excepción de las tareas 6 y 8, A8 evidenció FP1 y FP3, tanto en las observaciones del Atlas.ti como en las de las parrillas. Ambos indicadores se mantuvieron estables a lo largo de las diferentes tareas, con las excepciones ya señaladas en cada uno de ellos, y no se observó ninguna tendencia creciente ni decreciente durante la experiencia. En el caso de FP3, Geogebra contribuyó a que A8 demostrase cambios argumentados de opinión en 12 de las 29 situaciones en las que reflejó esta actitud; es decir, en un 41.38% de ellas, atribuyéndose Geogebra el protagonismo en solitario en un 27.59%. Con respecto a FP1, la herramienta contribuyó a que A8 buscara más de una forma de resolver una tarea en 21 de las 28 ocasiones, un 75%, siendo Geogebra el factor más influyente en un 67.86%. Los resultados pusieron de relieve que el software contribuyó a la

mejora de esta actitud, aunque no se pueden obviar las interacciones de A8 con su compañero y conmigo (profesora), además de otros posibles factores que no se hayan indagado.

Espíritu Crítico (EC)

Aunque A8 se mostró crítico cuando trabajaba con LP en la mitad de las ocasiones, durante la experiencia con Geogebra demostró una mejora de esta actitud, revisando todas y cada una de sus respuestas hasta estar convencido de su bondad. Además, si durante este proceso encontraba algún error, invertía el tiempo necesario hasta lograr solventarlo. Toda la información recogida acerca del espíritu crítico de A8 apuntaba a una manifestación positiva de tal actitud durante todas las tareas; es decir, en todas ellas se empleó el indicador EC4, que ahora paso a analizar más detalladamente.

EC4. Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad

A lo largo de las tareas, este código apareció 54 veces, no observando una tendencia o evolución creciente ni decreciente. Destacaron las tareas 5 y 10 por tener una frecuencia superior al resto, apareciendo EC4 11 veces en cada una de ellas. El hecho de que dispusieran de más tiempo para estas tareas que para las restantes, les permitió testar numerosas estrategias y diseños, antes de llegar a una respuesta, y justifica tal diferencia. Se analizaron los factores que en cada caso influyeron en que se A8 mostrase crítico:

Tabla 9-29. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase EC4

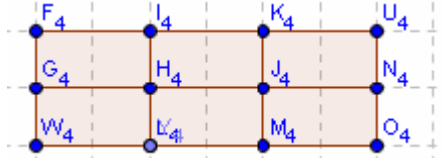
<i>Factor que influyó mayormente en EC4</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	36
Interacción alumno-alumno	4
Interacción alumno-profesora	1
Tarea	1
Geogebra e interacción alumno-alumno	2
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	7

Observando la tabla anterior, se puede decir que el factor más influyente fue la herramienta, pues apareció en 36 de esos 47 fragmentos, lo que supone un 76.6%. Su compañero A15, influyó puntualmente para que A8 actuase de un modo crítico y ni la profesora ni la tarea parecieron ejercer ninguna influencia en esta actitud.

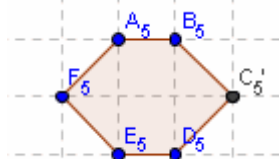
Por mostrar algún ejemplo de cómo la herramienta le ayudó a ser crítico con sus estrategias y respuestas, veamos el siguiente extraído de la tarea 1, en la que trabajó sin su compañero:

Ejemplo 9-14. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase Espíritu Crítico (Perseverancia, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización)

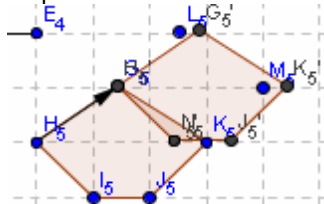
A8 continúa haciendo diseños hasta el final de la sesión, en el caso de los rectángulos dibujando los vértices sobre la grilla o cuadrícula.



A éste hexágono le hace una simetría pero como no le queda muy claro la borra

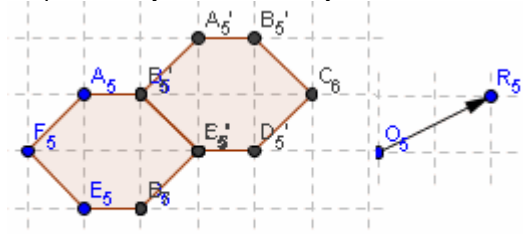


Al pentágono le hace una traslación, tomando como vector uno de sus lados y, cómo ve que se le superpone, pues lo deja así y, cuando escribe su respuesta por escrito en la ficha, dice que con ese diseño no puede teselar.

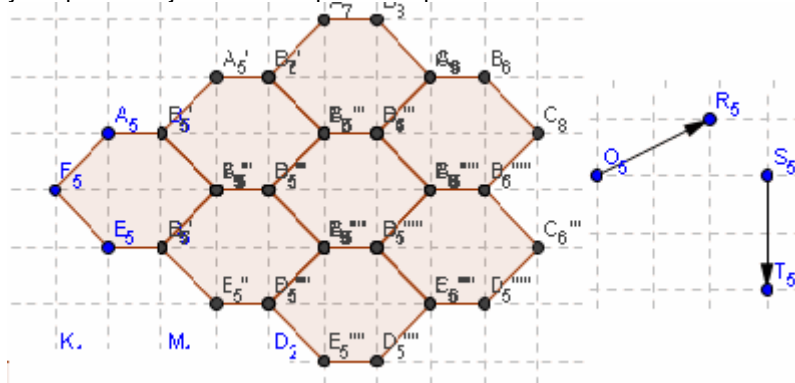


Vuelve a la carga con el hexágono con el que intentó un giro y no le salió. Ahora prueba con distintas traslaciones hasta que consigue teselar.

Empieza dibujando un vector y trasladando con él



y después dibuja otro vector para ir ampliando el mosaico en varias direcciones



El fragmento corresponde a los últimos minutos de la primera sesión en la que trabajamos mosaicos; A8 estaba tratando de ver qué formas podían tener las teselas. La herramienta le ayudó ejecutando sus acciones y mostrándole el resultado de un modo preciso. Por consiguiente, una vez obtenidas las representaciones gráficas de sus mosaicos, que él (a diferencia de la mayoría de sus compañeros) realizó usando isometrías y no solamente dibujando sobre la grilla, podía examinar la respuesta obtenida analizando su bondad. En ocasiones, le llevó a comprender que con el diseño elegido no era posible teselar y en otras le hizo cuestionarse su estrategia, haciéndole pensar hasta poner en práctica otra que le llevase al resultado esperado.

La evolución de A8 en esta actitud estuvo marcada por la influencia del software, cuya precisión al ejecutar sus acciones y la visualización de éstas en pantalla (interfaz), le ayudó a ser consciente de sus errores y a distinguir cuándo éstos provenían de una falta de precisión o de una estrategia de resolución inadecuada, actuando en consecuencia.

Perseverancia (PE)

En esta actitud su evolución fue notable. A8 solía darse por vencido fácilmente cuando el problema le parecía difícil y tras varios intentos no lo resolvía; sin embargo, durante las tareas GG, no abandonó ninguna de ellas hasta que estuvo convencido de la respuesta obtenida. Toda la información recogida de A8 acerca de su perseverancia se basó en las observaciones del indicador PE9, que ahora se trata en profundidad.

PE9. No abandona el problema hasta que llega a una solución

A8 se caracterizó por evidenciar este indicador durante todas las tareas, encontrando bastantes diferencias en las frecuencias de este código asignadas a unas tareas y otras; sin embargo, no se observó una tendencia ascendente ni descendente. Las tareas en las que PE9 apareció un mayor número de veces fueron las tareas 5 y 10, con frecuencias respectivas 9 y 15. Éstas fueron precisamente las tareas para las que tuvo más dificultades y a las que necesitó dedicar más tiempo y esfuerzo. Las que presentaron una menor frecuencia coincidieron con las tareas que le resultaron más sencillas de resolver.

Realizando el mismo análisis que para las anteriores actitudes, y centrándome en los factores que en cada momento lo empujaron a seguir intentando resolver la tarea:

Tabla 9-30. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase PE9

Factor que influyó mayormente en PE9	Frecuencia
Geogebra	29
Interacción alumno-alumno	7
Interacción alumno-profesora	1
Tarea	3
Geogebra e interacción alumno-alumno	1
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	10

De las 54 veces en las que se asignó este código, hubo 10 ocasiones en las que no resultaba claro cuál era el factor que más estaba influyendo de entre los considerados. En estas situaciones, se justificó que A8 siguiera perseverando debido a su propia voluntad de continuar en la búsqueda de una solución y no a ningún otro factor externo. Considerando las 44 veces en las que se atribuyó la perseverancia mostrada por A8 a uno de los factores considerados, destacó Geogebra como el más influyente; si bien puede verse que la interacción alumno-alumno también le ayudó en ocasiones a no desanimarse y seguir con la tarea. El factor tarea apareció únicamente en la tarea 8, en la que los estudiantes no debían usar Geogebra hasta no haber hallado analíticamente los 8 mosaicos semirregulares congruentes; en el caso de A8, buscando combinaciones de polígonos que sumaran 360° . En esta tarea, una vez que definió su estrategia de resolución, comenzó a buscar las 8 combinaciones, pero tenía ciertos problemas para encontrarlas todas. No obstante, el hecho de considerar esta parte de la tarea como sencilla y mecánica le llevó a no abandonar. En las demás tareas, cuando tenía dificultades, fueron otros los factores que le incitaron a seguir, independientemente de que considerase la tarea sencilla o compleja.

Algunos de los ejemplos anteriores son significativos también para esta actitud, entre ellos los ejemplos 9-13 y 9-14 (pp. 337 y 341), pues muestran diferentes situaciones en las que la herramienta le hizo perseverar en la tarea, aunque con distintos fines. En el caso del ejemplo 9-13, el alumno quería realizar cada mosaico usando las 3 isometrías, dejándose llevar por la facilidad y rapidez de construcción de Geogebra. A pesar de que tenía ciertas dificultades para lograrlo, se mantuvo perseverante hasta que lo consiguió, ignorando mi sugerencia de que se limitase a construir los mosaicos de una única manera. En el ejemplo 9-14, las respuestas que el software le fue proporcionando le ayudaron a ser crítico con sus respuestas,

comprendiendo que era posible teselar con hexágonos y traslaciones. El hecho de que no lo consiguiese al primer intento le hizo perseverar refinando su estrategia e insistiendo hasta encontrar el vector adecuado y lograrlo.

Un comentario mío, incluido en el análisis de la tarea 6, puede considerarse otro ejemplo de la perseverancia mostrada por A8 en esta tarea, actitud que se vio favorecida por la rapidez de uso de Geogebra. Unos minutos antes de finalizar la sesión 35, en la que trabajaron esta tarea, nos disponíamos a realizar la puesta en común de la tarea 5, que los estudiantes ya habían finalizado, como muestra el siguiente fragmento:

Ejemplo 9-15. Perseverancia de A8

Profesora: Guardad ya el archivo de la tarea 6, que vamos a corregir la tarea 5.

(A8 no ha concluido la tarea 6 por completo y por esa razón, ignora mis palabras y sigue trabajando, no contento con no haber construido el mosaico de hexágonos regulares empleando giros. En unos minutos y tras pensar un poco consigue construir rápidamente este mosaico mediante giros de 120° . De lo anterior, y como en sesiones anteriores, destaco su perseverancia, de hecho a veces excesiva, ya que no sigue mis instrucciones y persiste hasta que termina lo que él tiene pensado que quiere hacer, lo cual está unido a una motivación y un fuerte deseo de hacerlo bien en matemáticas).

Destaco como causantes del aumento de perseverancia de A8 durante las tareas GG principalmente dos factores: Geogebra y la interacción con su compañero A15, por este orden de importancia. El software le brindó la oportunidad de actuar por ensayo-error cuando no tenía una estrategia de resolución definida, así como de generar gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar de un modo sencillo. Ello le mantuvo trabajando en las tareas hasta concluir las. A15 ganó protagonismo en las tareas más complejas, que para la mayoría de los estudiantes fueron las que pedían llegar a una argumentación-demostración deductiva. Dichas tareas parecían agudizar el ingenio de A15, quien las consideraba un reto, y éste fue capaz de transmitir su entusiasmo y perseverancia a A8, de modo que ambos trabajaron en todas las tareas hasta llegar a una solución que les contentara.

Precisión y Rigor (PR)

Considerando la situación inicial de A8, se puede decir que ésta era la actitud matemática que tenía más desarrollada antes del trabajo con Geogebra. Solía ser bastante riguroso y preciso, y continuó siéndolo durante la experiencia con TIC, experimentado una mejoría que le llevó a comportarse de este modo en todas las tareas GG. En esta actitud, el análisis de Atlas.ti y de las parrillas de observación coincidió en un 93.3% , debido a diferentes codificaciones del código PR12, que más adelante aclaro. Para A8, únicamente se observaron los indicadores PR10 y PR12, que atiendo en orden decreciente a la frecuencia con la que aparecieron.

PR10. No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado

Se observó esta actitud durante todas las tareas, no encontrando ninguna tendencia ascendente o descendente a lo largo de ellas; no obstante, se pueden destacar las tareas 5 y 6, por ser aquellas en las que esta actitud registró una mayor y menor frecuencia, respectivamente. Durante la tarea 5, A8 demostró ser excesivamente riguroso y preciso en repetidas ocasiones pues, como se aprecia en el ejemplo 9-13 (p. 337), no sólo intentaba resolver el problema de más de una forma (FP1), sino que quería hacerlo con todo rigor y precisión. Ello le llevó a tener que probar distintas estrategias, aún siendo consciente de que la tarea no requería ese esfuerzo. Además, durante la segunda parte de esta tarea, en la que, como ayuda para poder argumentar la existencia y unicidad de los 3 mosaicos regulares, se le pedía que hallara el ángulo interior de los polígonos regulares de hasta 12 lados, no se contentó con hacer representaciones aproximadas de éstos con LP. Empezó a hacerlas, pero comprobó que no eran regulares los polígonos que estaba obteniendo; de modo que, por iniciativa propia, abrió un nuevo archivo de Geogebra y, una vez que construyó los polígonos regulares con total precisión, los dividió en triángulos empleando segmentos. Después hizo y repasó los cálculos para hallar el valor de los ángulos interiores con calculadora. Durante la tarea 6 se codificó PR10 con menor frecuencia, siendo este hecho comprensible, pues mientras A8 realizaba la tarea 5, su empeño por construir cada mosaico regular usando las 3 isometrías le llevó a ir resolviendo simultáneamente las tareas 5 y 6. Así, cuando comenzó a trabajar esta última, sólo tuvo que realizar de nuevo los diseños que había obtenido correctamente en la tarea 5.

Centrándome en los factores que lo empujaron a mostrarse riguroso y preciso:

Tabla 9-31. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase PR10

<i>Factor que influyó mayormente en PR10</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	27
Interacción alumno-alumno	5
Interacción alumno-profesora	1
Tarea	2
Geogebra e interacción alumno-alumno	0
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	6

De los 44 fragmentos que se codificaron con este indicador, en seis de ellos no era claro el factor que le llevó a comportarse de ese modo. En los casos en los que sí se apreciaba un factor como más influyente que los restantes, la herramienta fue ese factor en el 77.14% (27 de esas 35 situaciones). La tarea apareció como factor más influyente en dos ocasiones, correspondientes ambas a la tarea 8 que, como ya he comentado, requirió muchos cálculos para poder obtener los ocho mosaicos semirregulares congruentes. A8 demostró ser totalmente preciso comprobando sus operaciones con la calculadora. La interacción con su compañero fue el factor más influyente en cinco de las situaciones codificadas como PR10, dado que en estos casos A8 evidenció esta actitud impulsado por A15. Así pues, el factor que más empujó a A8 a mejorar en esta actitud hasta llegar a mostrarse riguroso y preciso siempre fue Geogebra. El ejemplo 9-14 (p. 341), en el que se comprueba cómo construyó mosaicos usando diferentes técnicas, es válido también para ejemplificar esta afirmación. En efecto, al emplear traslaciones, la interactividad con Geogebra le hizo ver que cualquier vector no era válido, sino que éste debía ser preciso para que también lo fuese el mosaico resultante. Este hecho le obligó a pensar y razonar sobre el lugar al que quería trasladar cada pieza e ir afinando en la elección del vector.

PR12. Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso

Este código sólo se empleó durante el análisis con Atlas.ti en las tareas 5 y 10, pero no aparecía en las parrillas de observación de estas tareas. Durante estas tareas, A8 pareció contentarse con una solución aproximada en dos momentos puntuales, los cuales se codificaron como PR12 (en la codificación realizada con Atlas.ti). No obstante, posteriormente, no contento con esta falta de precisión, continuó trabajando en el intento de subsanar este error hasta lograrlo. Es por ello que durante la observación de esa tarea no se incluyó PR12 en la parrilla, pues se observó una evolución durante su resolución que lo llevó a alcanzar PR10, siendo ésta la casilla que quedó registrada en la parrilla.

Alguna de las situaciones codificadas como PR12, respondían a que A8 se había conformado con una solución bastante acertada pero no del todo precisa. No obstante, si se analiza el resto de la tarea, puede comprobarse que se trataba de una falta de rigor puntual, ya que precisamente en ambas tareas el alumno evidenció PR10 en numerosas ocasiones. Por ejemplo, en la tarea 5, cuando estaba construyendo el heptágono regular mediante giros y obtuvo como ángulo de giro un número irracional, él tomó la decisión de redondear a dos decimales porque era el procedimiento que solíamos hacer cuando trabajábamos con esta

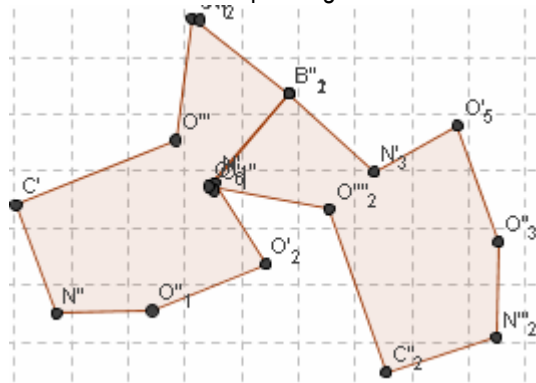
clase de números en resolución de problemas. Aunque después le mostré la posibilidad de ser totalmente preciso usando como valor para el ángulo de giro la fracción $\frac{360}{7}$ en lugar del número decimal redondeado, no modificó su construcción porque la representación obtenida con Geogebra le parecía precisa; es decir, él no apreciaba visualmente su falta de precisión y, por ello, no cambió su estrategia. En la tarea 10, se codificó PR12 cuando tras construir una tesela (motivo mínimo), en apariencia correcta, e intentar teselar con giros de 60° (como debería haber sido posible), no lo consiguió. Entonces se puso a probar distintos giros por ensayo-error y tras muchos intentos sin éxito obtuvo un giro que más o menos le convenía:

Ejemplo 9-16. A8 manifiesta el indicador PR12 (se contenta con soluciones aproximadas)

A8: ¡ale, no! 87° y ya, y ya listo

A8: ¡ale!

A8: vale son 87° a lo que he girado



(ha probado con 87° y le ha quedado regular, pero cómo ha probado infinidad de giros sin éxito, se conforma y sigue probando a añadir otra tesela más)

Resumiendo todo lo anterior, se puede decir que A8 mostró mayor precisión y rigor que cuando trabajaba con LP gracias a la interactividad y precisión de ejecución de Geogebra, que le ayudó a comportarse de este modo en todas y cada una de las tareas. Sólo en momentos puntuales pareció no apreciar esta actitud, aunque ya se han analizado estos casos y se puede concluir que el hecho de que se contentase con alguna solución no del todo precisa fue consecuencia de otros factores y por ello, no se atribuye a A8 falta de rigor y precisión.

Creatividad (C)

En esta ocasión, la situación inicial de partida de A8 era fácilmente superable, pues hasta el trabajo con TIC no se había mostrado creativo a la hora de resolver problemas. Durante las tareas GG se observó un cambio total en esta actitud, denotando gusto por encontrar nuevas estrategias de resolución por iniciativa propia. Toda la información recogida de A8 acerca de su creatividad se basó en las observaciones del indicador C13, que ahora atenderé.

C13. Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas

Examinando las tareas GG, se observa cierta estabilidad en las frecuencias con las que se asignó este código, destacando las tareas 2, 6 y 10 por desviarse ligeramente de esta tendencia. En las tareas 2 y 6, se empleó C13 únicamente una vez. Éste estaba en consonancia con lo sucedido para otras actitudes en estas tareas, pues ya se ha expuesto que exigían menor esfuerzo a los estudiantes. Debido a que la estrategia de resolución y la respuesta esperada estaban bastante claras, los alumnos dedicaron menos tiempo a su resolución, lo que limitó en cierto modo su actividad creativa. La tarea 10, en cambio, destacaba por tener una frecuencia más elevada que las restantes ($C13 = 5$), que se situaban en torno a 3, pero debe recordarse que los estudiantes contaron con dos sesiones para trabajar en ella. Por otra parte, existían infinidad de estrategias y de respuestas que podían considerarse adecuadas para la tarea 10, lo que facilitó que algunos estudiantes, entre ellos A8, se mostrasen más creativos que en ocasiones anteriores.

Centrándome en los factores que en cada momento lo empujaron a mostrarse creativo:

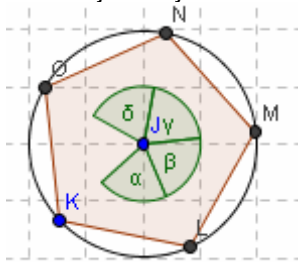
Tabla 9-32. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase C13

<i>Factor que influyó mayormente en C13</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	21
Interacción alumno-alumno	1
Interacción alumno-profesora	0
Tarea	0
Geogebra e interacción alumno-alumno	0
Geogebra e interacción alumno-profesor	0
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	6

De las 28 ocasiones en las que se empleó este indicador para codificar, en 22 de ellas se identificó un factor predominante para que A8 se mostrase creativo. En 21 de estos 22 fragmentos, Geogebra destacó como factor preponderante sobre los demás, mientras que la interacción con su compañero, conmigo o la tarea parecieron no tener influencia al ser consideradas individualmente. La secuencia de tareas fue diseñada para fomentar el desarrollo de la creatividad de los estudiantes, aunque no todas las tareas potenciaban por igual el trabajo creativo de los escolares, además, el tiempo dedicado a cada una de ellas y su nivel de dificultad hicieron unas tareas más propicias que otras para trabajar esta actitud; es decir, se puede considerar que la tarea por sí misma tenía influencia en el desarrollo de esta

actitud. Aún así, para este alumno, no se obtuvo ningún fragmento codificado como creativo en el que el estudiante se comportara de ese modo influido mayormente por la tarea, pues A8 derrochó creatividad en todas y cada una de ellas. Se observó que este estudiante buscó nuevas estrategias o caminos de resolución, empujado principalmente por el gusto por el trabajo con Geogebra y por la eficiencia de esta herramienta, que acortó el tiempo que hubiera necesitado para realizar las tareas con LP, invirtiendo A8 este tiempo extra en cultivar su creatividad.

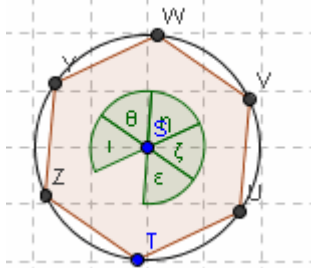
Ejemplo 9-17. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase Creatividad (y Sistematización)
A8 trabaja sólo y en silencio dibujando el pentágono con giros de 72°



A8: ¡mira cómo me ha salido! ¡parece una pizza! (se ríe)

A8: ¡vale!, 360 entre 6, a 60°

A8: (está cantando) pues mira como yo no me acuerdo de cómo se hacía ésto, pues yo he dibujado el círculo con su centro en medio, que he hecho con la herramienta "circunferencia dado el punto central que pasa a través de cierto punto", he hecho el círculo y luego con la herramienta "ángulo con amplitud dada", he pinchado en el punto que hay fuera en la circunferencia, en el centro y le he marcado el ángulo... y ahora con la herramienta "polígono"...



A8: ¡maestra!, ¿se puede hacer así, con esta herramienta? es que como no me acordaba de cómo se hacía, pues lo he hecho con la herramienta ésta, con amplitud dada

De entre las muchas ocasiones en las que A8 se mostró creativo ayudado por el software, he incluido el anterior fragmento que pertenece a la tarea 4, correspondiendo el fragmento a la sesión 33. En dicha sesión, cuando A8 tuvo que terminar la tarea sin la ayuda de A15 (quien no asistió a esa sesión), continuó con la estrategia desarrollada en la sesión anterior por ambos, pero empleó diferentes herramientas, demostrando ser creativo. En efecto, en lugar de pedir ayuda, estuvo indagando por su cuenta cómo construir los polígonos regulares hasta que lo consiguió, mostrándose muy orgulloso por ello. En otras tareas, trató de probar nuevos caminos, diferentes a los que siguieron la mayoría de sus compañeros, e intentó hacer uso y sacar partido de las distintas herramientas del programa, demostrando a su vez dominio de

este software. Cuando lograba sus objetivos, solía comunicarme su nueva estrategia, denotando gran satisfacción.

El gusto por el trabajo con Geogebra y la maestría que demostró en su manejo le llevaron a resolver los problemas de una manera eficaz y más rápida que con LP. Ello le permitió desarrollar su creatividad, explorando otros caminos y otras herramientas del programa de las que otros compañeros no sacaron partido.

Autonomía (AU)

A8, antes del trabajo con Geogebra, se mostraba autónomo en un 50% de las situaciones y su autonomía iba disminuyendo a la vez que la dificultad de las tareas iba en aumento. Durante el trabajo con este software, en todas las tareas se comportó de modo autónomo, tanto en las tareas más sencillas como en las más complejas, lo que supuso una notable mejoría. Toda la información recogida de esta actitud estaba asociada al código AU16.

AU16. Trabaja de modo autónomo

No se observó una tendencia ascendente ni descendente a lo largo de las tareas GG, siendo la frecuencia del código AU16 más elevada en todas las tareas que para otras actitudes ya analizadas. Es decir, fueron muchos los fragmentos codificados en los que se apreciaba que A8 trabajaba de modo autónomo, con su compañero y sin él, durante las sesiones en las que éste estuvo ausente. Como en casos anteriores, se puede destacar la tarea 5, por tener asociado este código un número de veces bastante superior al del resto de las tareas.

Si nos fijamos en los factores que en cada momento lo ayudaron a trabajar con autonomía:

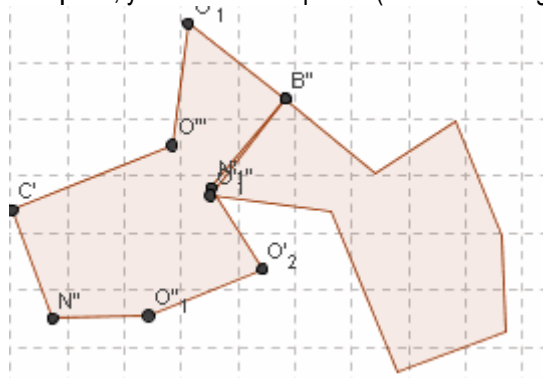
Tabla 9-33. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase AU16

<i>Factor que influyó mayormente en AU16</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	51
Interacción alumno-alumno	11
Interacción alumno-profesora	1
Tarea	4
Geogebra e interacción alumno-alumno	2
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	8

La tabla anterior muestra que se codificó AU16 en 79 fragmentos de las 10 tareas. De ellos, en 8 ocasiones no era visible ningún factor más determinante que el resto para que trabajase autónomamente. Considerando los 67 extractos de las tareas en los que se apreciaba claramente un factor responsable para que A8 se comportase de este modo, el 76.12% corresponde a la influencia del software, el 16.42% a la interacción con su compañero y el 5.97% a la influencia de la tarea, pudiendo considerar no significativa la influencia de la profesora con un 1.49%. De nuevo, Geogebra fue el factor que contribuyó en mayor medida a que A8 trabajase de un modo más autónomo, durante las tareas sencillas y también durante las más complejas. La confianza en el uso del software, como herramienta eficaz para la resolución de los problemas planteados, le ayudó a confiar más en sus posibilidades y no solicitar ayuda externa en tantas ocasiones, como cuando trabajó con LP. Sólo pidió ayuda en contadas ocasiones, cuando tras un periodo prolongado de actividad y después de muchos intentos, no conseguía encontrar un camino por sí mismo. Los ejemplos 9-13, 9-14 y 9-17, expuestos para flexibilidad de pensamiento, perseverancia y espíritu crítico, son válidos también para mostrar cómo el software potenció el trabajo autónomo de este alumno, tanto cuando lo hacía con su compañero como cuando trabajaba en solitario. Estos ejemplos ponen de manifiesto el modo en que A8 afrontaba las situaciones de bloqueo, cuando éstas sucedían, probando otras estrategias y herramientas que le condujesen a los resultados esperados, sin necesitar ayuda externa como le sucedía durante las tareas LP.

Cuando se alude a que la interacción con su compañero le ayudó a ser más autónomo, se hace referencia a que el hecho de trabajar de un modo colaborativo les ayudaba a ambos a superar algunas dificultades que probablemente les hubiesen conducido a situaciones de bloqueo, de haber trabajado en solitario. En efecto, cada uno proponía distintas estrategias y se complementaban a la hora de manejar el software y realizar las tareas, como pone de manifiesto el siguiente extracto de la tarea 10, en la que estaban intentando construir un mosaico con una tesela que diseñaron haciendo transformaciones por giros sobre los lados de un triángulo equilátero:

Ejemplo 9-18. Influencia de la interacción con A15 para que A8 manifestase Autonomía
A8: ¡mira, ya se acerca un poco! (han hecho un giro de 90°)



A15: perfect!

A8: ahí puede caber esta parte

A15: ¿ésta de aquí? ¿y ésto tendría que ir ahí?, no, éso no va ahí

A8: no, pero este lado sí puede caber ahí

A15: ¿cuál sería?

A8: esta esquina, lo que es esta esquina si puede caber ahí, ¿no?

A8: pero, ¿cuánto lo giramos?

A15: ¿y con qué centro?

Al tratar de analizar cuándo la tarea en sí fue el factor que empujó a A8 a comportarse de un modo más autónomo, sin intención de ignorar la influencia de otros factores, se hallaron cuatro fragmentos en los que se puso de relieve esta relación. Un ejemplo de ellos puede ser el siguiente, que corresponde a la tarea 8, en la que debían encontrar los 8 mosaicos semirregulares congruentes. Para ello, les pedía que encontrasen las 8 combinaciones de polígonos, antes de construirlos con ayuda de Geogebra:

Ejemplo 9-19. Influencia de la tarea para que A8 manifestase Autonomía

A8: ¡vamos a ver! ¡vamos a ver si se me ocurre otra combinación!

A8: no es tan difícil, sólo tienes que buscar las combinaciones para que te de 360° y ya está... ¿sabes lo que es una combinación?

(Bromea con su compañera y se burla de ella cariñosamente porque no sabe lo que es una combinación)

A8: una combinación es una mezcla, ¿vale?, si tú combinas, si tú combinas...60 más 90, si lo combinas te da 150, los estás sumando, los estás juntando, ¿vale?, entonces tienes que hacer combinaciones para que te den 360°

A8: ¡pero es en el papel, lista! ¡sumando los grados!

A8: ¡aahh!

A8: son 120 más 120 más

A8: 240...

A8: ¡ésto no da!, ¿eh?, ¡tío voy por la combinación 5, por la quinta, me quedan 5, 6, 7 y...8!

Los resultados obtenidos durante el análisis con el Atlas.ti para esta categoría estaban en consonancia con la observación en el aula y con la percepción global que como profesora extraje de la experiencia de trabajar matemáticas con Geogebra. Para mí, una de las ventajas

del uso del software fue la de otorgar mayor autonomía a los estudiantes, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal y favoreciendo el trabajo en equipo.

Sistematización (SS)

El análisis actitudinal previo de A8, lo situaba como sistemático en muchas ocasiones; si bien no siempre sabía cómo abordar los problemas planteados. Esto se ponía de manifiesto, sobre todo, cuando no se trataba de problemas rutinarios o familiares para él, en los que no mostraba estas dificultades. Durante las tareas GG se mostró totalmente sistemático en todas las tareas, manifestando SS17 y SS19 en cada una de ellas. En esta actitud se halló una coincidencia del 96.6% entre las observaciones de las parrillas y la codificación con Atlas.ti, debido al indicador SS18, que durante la observación en clase no se empleó y, sin embargo, durante la codificación con Atlas.ti se asignó dos veces en la tarea 6.

SS18. Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo

Las dos situaciones a las que se asignó este código respondían a una conversación conmigo en la que hice varias preguntas a A8 acerca del ángulo de giro necesario para construir el mosaico de hexágonos regulares de la tarea 6 mediante giros. El alumno respondió sin pensarlo mucho, pareciendo no tener muy claro cómo funcionaba esta isometría, por lo que le invité a pensar antes de responder nuevamente al azar. Este código apareció en dos momentos puntuales dentro de la conversación conmigo. No obstante, no apareció en las parrillas porque, si se analiza el resto de la tarea, se comprueba cómo tras tomarse un tiempo para pensar y meditar su anterior respuesta, A8 comprendió cuál debía ser el ángulo de giro por sí solo. De este modo, demostró saber lo que estaba buscando y después fue capaz de comunicármelo por escrito correctamente. Tomando una visión global de este análisis micro, no se aprecia discrepancia con las parrillas, pues el análisis minucioso también mostró como A8 manifestó SS17 y SS19 durante la tarea 6.

SS17. Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar

Las frecuencias con las que se asignó este código a lo largo de las diez tareas no presentaban una tendencia ascendente ni descendente, sino que varían de unas tareas a otras en función del comportamiento de A8 en cada una de ellas. Puede destacarse nuevamente la tarea 5, por ser en la que SS17 apareció en mayor número de fragmentos.

Considerando los factores que en cada momento lo ayudaron a ser sistemático:

Tabla 9-34. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase SS17

Factor que influyó mayormente en SS17	Frecuencia
Geogebra	42
Interacción alumno-alumno	9
Interacción alumno-profesora	6
Tarea	4
Geogebra e interacción alumno-alumno	1
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	0
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	8

Se codificaron 72 fragmentos como SS17, en 64 de los cuales parecía claro cuál fue el factor más influyente para que A8 actuase sistemáticamente. En 42 de esos 64 fragmentos, se consideró Geogebra como influencia predominante, lo que supone que en un 65.63% de las situaciones en las que A8 demostró trabajar siguiendo una meta clara, la herramienta le ayudó a comportarse de este modo. Otros factores que también potenciaron la sistematización de este alumno fueron su compañero A15, en un 14.06% de las ocasiones, y su interacción conmigo, en un 9.38% de las ocasiones, siendo la influencia de la tarea poco significativa al considerarla en solitario.

SS19. Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados

Tampoco en este código se encontró una tendencia ascendente o descendente a lo largo de las tareas. Destaca, al igual que para el código SS17, la tarea 5, por contar con la frecuencia más elevada.

Intentando buscar qué factores ayudaron a A8 a sintetizar sus cálculos y resultados:

Tabla 9-35. Factores que contribuyeron a que A8 evidenciase SS19

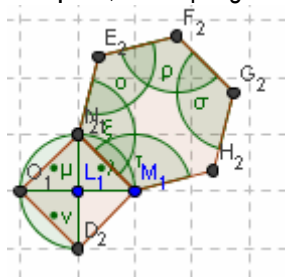
Factor que influyó mayormente en SS19	Frecuencia
Geogebra	18
Interacción alumno-alumno	3
Interacción alumno-profesora	2
Tarea	3
Geogebra e interacción alumno-alumno	0
Geogebra e interacción alumno-profesor	2
Interacciones alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es qué determinó el cambio	7

Geogebra fue el factor más influyente en un 62.07% de los casos, según la información extraída del Atlas.ti, siendo el resto de factores poco significativos (atribuidos en un porcentaje igual o inferior al 10%). El análisis muestra que A8 era capaz de sintetizar sus cálculos y resultados, tanto cuando trabajaba con A15 como cuando lo hacía en solitario. Por otro lado, resultó curioso el hecho de que, a lo largo de las 10 tareas, fue siempre A8 el que se encargó de realizar el informe escrito de cada una de ellas, explicando el procedimiento seguido y la solución obtenida.

Se analizarán conjuntamente SS17 y SS19, para comprobar en qué tareas A8 se mostró totalmente sistemático. La influencia ejercida por el software para ayudar a que A8 se comportase de este modo se sitúa en ambos indicadores en torno a un 65%, lo que permite afirmar que, como en actitudes anteriores, el software tuvo un efecto positivo en A8, que se puede ejemplificar como sigue:

Ejemplo 9-20. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase Sistematización

A8: ¡vale, ahora polígono!



A8: ¡vale!

A8: ¡no, no, no, nooooo! (tiene algún problema con Geogebra, pero lo soluciona y sigue trabajando)

A8: ahora aquí hago uno de 12, otro aquí de 12 y me da 360°

Profesora: no lo sé, 150 más...

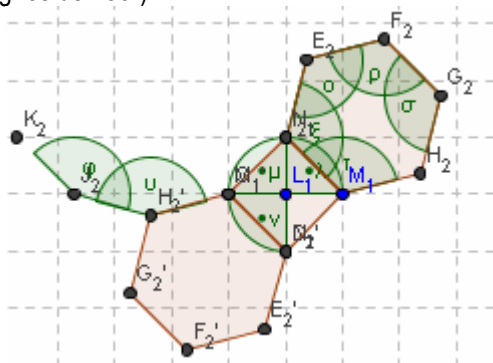
A8: sí, sí, lo he hecho con la calculadora, mira maestra, 90 más 120 más 150 igual a 360

Profesora: entonces, ¿qué has usado?

A8: un cuadrado, un hexágono y un dodecágono

Profesora: de acuerdo, escribe esa combinación en la ficha y sigue buscando más combinaciones distintas

(En lugar de ello sigue construyendo el mosaico que acaba de obtener con Geogebra. Hace una simetría del hexágono respecto del punto central del cuadrado y después se pone a construir el dodecágono con giros de 150°).



El anterior fragmento corresponde a la tarea 8, en la que los estudiantes debían encontrar los 8 mosaicos semirregulares congruentes y después construirlos con ayuda de Geogebra. No obstante, por limitaciones de tiempo para esta tarea, la mayoría de los estudiantes sólo pudieron encontrar algunos de estos mosaicos, no llegando a construirlos. A A8 le gustaba construir los mosaicos que iba obteniendo con Geogebra, aunque sólo tuvo tiempo para construir el mosaico del ejemplo anterior, pues le sugerí que primero hallase el resto de mosaicos analíticamente y después los representase.

El ejemplo anterior (ejemplo 9-20) y los expuestos anteriormente para ejemplificar la influencia de Geogebra en otras actitudes, como espíritu crítico o creatividad (ejemplos 9-14 y 9-17), ponen de relieve el modo sistemático en que A8 abordaba las tareas usando este software. Asimismo, muestran cómo, incluso cuando no sabía muy bien qué camino seguir, la posibilidad de actuar por ensayo-error y poder comprobar sus conjeturas mediante la retroalimentación proporcionada por el programa, le hacían reconducir su actuación hasta encontrar una respuesta adecuada, permitiéndole además explicar cómo había llegado a obtenerla.

El análisis presentado ha puesto de manifiesto un desarrollo notorio de las actitudes matemáticas de A8 durante el trabajo con Geogebra. Asimismo, ha encontrado tres factores principales como causantes de dicha transformación actitudinal que, por orden de importancia, fueron: Geogebra, la interacción con su compañero A15 y la interacción conmigo (con la profesora). El efecto de Geogebra destacó en actitudes como Flexibilidad de Pensamiento (FP1), Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor, Creatividad y Autonomía, al incidir la herramienta en su desarrollo en torno al 75% de las ocasiones en las que A8 las evidenció, siendo también el factor más influyente para la actitud Sistematización (65%). La influencia de las interacciones de A8 con su compañero y conmigo se hizo más visible en las tareas más complejas, contribuyendo dichas interacciones al desarrollo de actitudes como Flexibilidad de Pensamiento (FP3) y Sistematización, en aquellos momentos en los que el software por sí solo no propiciaba tal desarrollo. En efecto, para el caso de FP3, se observa que los tres factores contribuyeron a partes iguales a su desarrollo y, en cuanto a Sistematización, se obtuvieron porcentajes similares para SS17 y SS19, que reflejaban una evolución de ambos debido a la interacción con A15 en un 12% y a la interacción conmigo en torno al 8% de las situaciones en las que A8 manifestó esta actitud. De todo lo anterior, se desprende que la interacción conmigo fue poco relevante para el desarrollo actitudinal de A8,

al que sin embargo, Geogebra contribuyó en gran medida y el trabajo colaborativo con A15 en menor grado.

Para finalizar el análisis de las actitudes matemáticas de A8, expongo las relaciones que se encontraron entre las distintas actitudes analizadas individualmente en párrafos anteriores. Se observó que Autonomía y Sistematización aparecían simultáneamente en las 10 tareas GG, tanto en las observaciones de aula como en el análisis con Atlas.ti. Afinando un poco más, si se considera como unidad de análisis cada fragmento codificado con Atlas.ti en lugar de cada tarea, se obtiene que A8 se mostraba totalmente sistemático (SS17 y SS19 conjuntamente) a la vez que autónomo (AU16) en un 83.33% de los fragmentos codificados, encontrando estos fragmentos distribuidos entre las 10 tareas. También se constató que la evolución en estas dos actitudes contribuyó a la mejoría de otras. En efecto, se comprobó en todas las tareas que, siempre que A8 se mostraba autónomo y sistemático, también evidenciaba Perseverancia, Espíritu Crítico y Precisión y Rigor. Al trabajar de modo autónomo y sistemático, teniendo unos objetivos y una estrategia de actuación claramente definidos, A8 se mostró más crítico con su modo de actuar y con las soluciones obtenidas, además de más perseverante, al no abandonar ninguna tarea hasta estar convencido de su respuesta. Por otra parte, el saber cómo actuar y sentirse capaz de hacerlo por sí mismo, le llevó a ser más riguroso y preciso, no conformándose con soluciones aproximadas, como hiciese en otras situaciones anteriores de LP; principalmente por no ser consciente de sus errores y en consecuencia, no saber cómo solucionarlos. En resumen, se puede decir que A8 evolucionó en todas sus actitudes matemáticas, pues también manifestó una sorprendente mejora en Creatividad y una mayor Flexibilidad de Pensamiento que durante las tareas LP, aunque estas dos actitudes no evidenciaron una relación tan estrecha con las restantes.

Después de analizar por separado la influencia del uso de Geogebra en la transformación de las dos categorías actitudinales para este estudiante, surge de manera natural la cuestión de la posible relación encontrada entre ambas, que a continuación expongo, para cerrar el análisis actitudinal presentado para A8.

Dado que A8 dio evidencias positivas de todas las actitudes matemáticas y hacia las matemáticas objeto de investigación en las diez tareas realizadas, resultó del interés para esta investigación, analizar la posible relación entre ambas categorías. Dicha relación se vio confirmada por los análisis realizados con Atlas.ti. En primer lugar, su adecuada actitud hacia el uso de Geogebra, contribuyó a que mostrase una actitud hacia las matemáticas más

positiva. Asimismo, esta mejora de sus actitudes hacia las matemáticas contribuyó en cierta medida al desarrollo de algunas de sus actitudes matemáticas, aunque no debe olvidarse que los atributos del software también tuvieron un efecto considerable en las mismas, como ya se ha expuesto anteriormente. Analizando más en detalle la relación entre las distintas actitudes, se encontró que la Autoconfianza estaba fuertemente relacionada con otras actitudes matemáticas tales como Flexibilidad de Pensamiento, Autonomía, Creatividad y Sistematización. Este análisis confirmó mis percepciones a lo largo de la fase de observación, recogidas en el diario que escribí para este estudiante. Así, la confianza que A8 depositó en el trabajo con Geogebra, le produjo un aumento de su autoconfianza, que contribuyó a que evolucionase en las actitudes matemáticas antes señaladas. Examinando los fragmentos codificados con Atlas.ti en los que se observaron estas relaciones, Geogebra fue el factor que ejerció un mayor efecto sobre la mejora de Autoconfianza y Autonomía. Al examinar los fragmentos que se codificaron como CO23 (confía en poder resolver el problema por sí solo) y simultáneamente con los códigos favorables a las anteriores actitudes: Flexibilidad de Pensamiento, Autonomía, Creatividad y Sistematización, así como al indagar cuántos de esos fragmentos fueron codificados como IGEOGEBRA (Geogebra como factor al que se atribuyó este comportamiento), el análisis reveló la relación: influencia de Geogebra implica mejora de Autoconfianza implica mejora de Autonomía, como la más fuerte.

El análisis actitudinal de A8 presentado a lo largo de este capítulo se ha centrado en dar respuesta al objetivo 2 de *analizar las transformaciones que la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra provocó en las actitudes relacionadas con las matemáticas de A8*. Dicho análisis ha reflejado una actitud muy positiva hacia el uso de las TIC para trabajar en matemáticas y una evolución positiva de este alumno en sus actitudes hacia las matemáticas y en sus actitudes matemáticas durante el trabajo con Geogebra. Estas transformaciones se han atribuido al uso del software y también a la interacción con su compañero A15 y conmigo (profesora), siendo el factor más relevante e influyente en todas ellas Geogebra, mientras que los otros dos factores tuvieron un efecto considerable en alguna de sus actitudes, pero no en todas ellas.

9.1.3.3.2. Estudio de A3, A7, A9, y A10

Del mismo modo que para presentar la transformación de las actitudes hacia las matemáticas de estos cuatro estudiantes, muestro justificadamente la evolución de sus actitudes matemáticas. Para ello, expongo un breve análisis de resultados de sus diarios y parrillas, que

después triangulo con los resultados obtenidos con Atlas.ti (análisis de los archivos de audio de las tareas 1 y 5, de sus archivos de Geogebra y de los protocolos escritos de resolución de las tareas).

9.1.3.3.2.1. Alumno A3.

Este estudiante no había manifestado ninguna actitud matemática adecuadamente antes del trabajo con Geogebra, pues habitualmente no trabajaba en matemáticas (ni en clase ni en su casa), a pesar de mis esfuerzos porque lo hiciera. Por esa razón, resultaba de gran interés comprobar las transformaciones que el uso continuado del software podía producir en ellas.

Análisis del Diario

Las entradas del diario que para este estudiante escribí al término de las sesiones con Geogebra, mostraban mi sorpresa por la evolución que A3 estaba experimentando durante las mismas. Demostró todas y cada una de las actitudes matemáticas que se consideraron para este estudio, incluida la Creatividad, siendo uno de los pocos estudiantes que la derrochaba casi a diario durante las tareas GG. Releyendo las entradas de las 12 sesiones GG, se puede extraer una conclusión: se manifestó flexible de pensamiento, perseverante, crítico, preciso, creativo, autónomo y sistemático en casi todas ellas. Se incluyen algunos extractos del diario como ejemplo:

Sesión 4: Para el caso de los triángulos obtiene su simétrico y al formarse el paralelogramo usa traslaciones con ambos triángulos logrando teselar. Explora esta técnica con varios triángulos irregulares y consigue teselar. No obtiene una condición matemática para generalizar sus resultados, pero cree que su técnica funciona. Trabaja de modo autónomo y sistemático y demuestra que le gusta innovar y ser creativo, y además no ha abandonado la tarea aunque le ha parecido más compleja que las anteriores.

Sesión 8: Construye el mosaico (...) siendo crítico con sus decisiones. Reconoce y solventa sus errores, trabajando de modo autónomo y con gran perseverancia, hasta llegar a una respuesta correcta. (...)

Análisis de las Parrillas de Observación

En la siguiente figura se muestra su perfil actitudinal durante las tareas LP y GG, en la que FP es la abreviatura para Flexibilidad de Pensamiento, EC para Espíritu Crítico, PE para Perseverancia, PR para Precisión y Rigor, C para Creatividad, AU para Autonomía y SS para Sistematización.

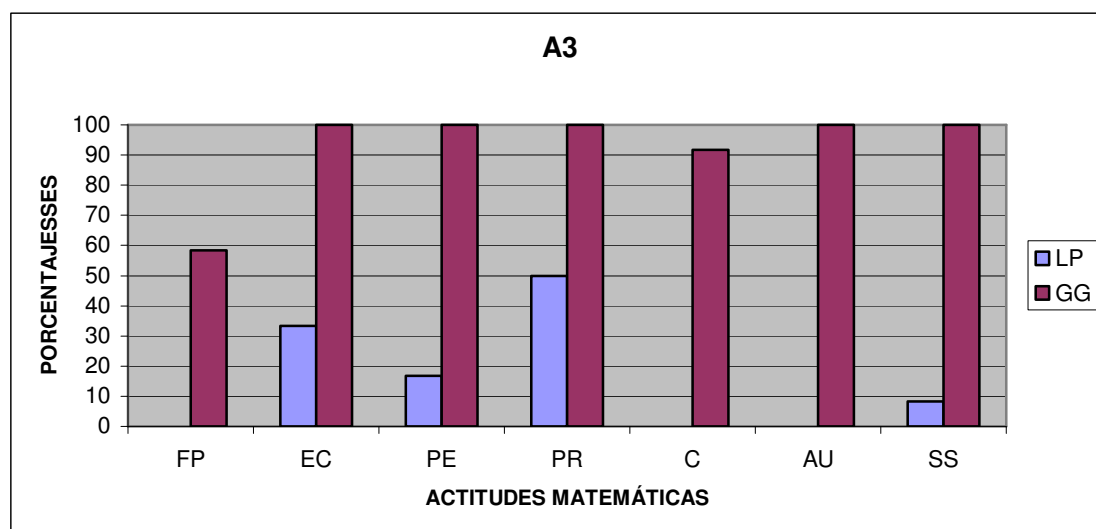


Figura 9-24. Porcentajes obtenidos por A3 en actitudes matemáticas durante tareas LP y GG

Se puede comprobar cómo, durante las tareas LP, sólo Precisión y Rigor alcanzó un nivel suficiente. El resto de las actitudes, o no las evidenció en ningún momento, o no alcanzaron niveles que pudieran considerarse adecuados. Su perfil de actitudes matemáticas estaba en consonancia con el rendimiento que mostraba en la asignatura: insuficiente.

Triangulación de los Análisis Realizados

Expongo la evolución de A3 en cada actitud, partiendo de un análisis detallado de sus parrillas de observación, que completaré con información de los restantes instrumentos (diarios, protocolos escritos de resolución de las tareas y análisis de los archivos de audio y Geogebra con Atlas.ti para las tareas 1 y 5).

Flexibilidad de pensamiento (FP)

A3, antes del trabajo con Geogebra, mostraba un perfil actitudinal bastante inadecuado, siendo esta actitud una de las que nunca evidenció. Con el uso del programa experimentó un cambio bastante sorprendente, alcanzando un 58.33% en las tareas GG. Desglosando este porcentaje global en los correspondientes a los tres indicadores usados para esta actitud:

FP1. Resuelve el problema de más de una forma ____ 58.33% de las sesiones

FP2. Se interesa por la/s forma/s en la que sus compañeros resuelven los problemas diferentes a la suya ____ el 16.6% de las sesiones

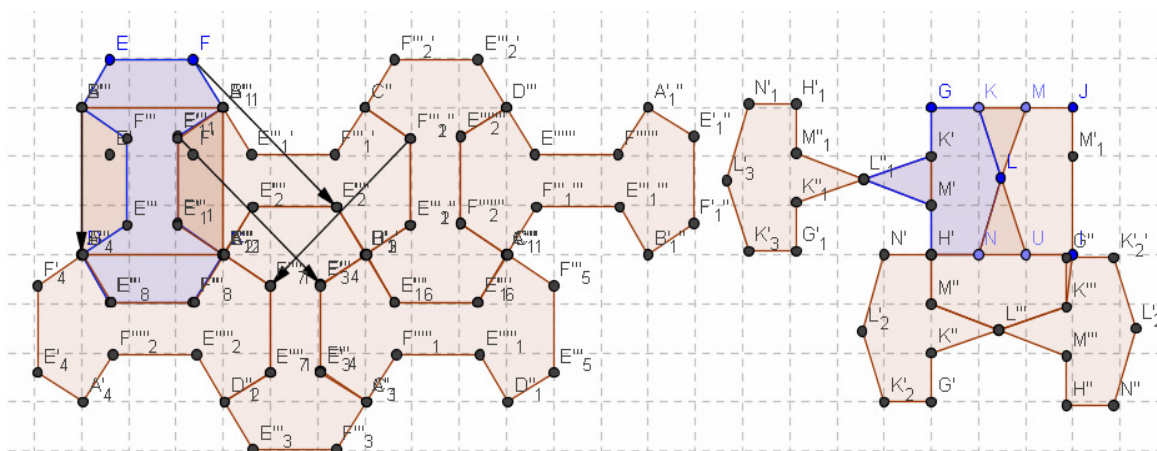
FP3. Cambia de opinión en base a argumentos convincentes ____ siempre (100%)

Estos resultados de las parrillas revelan que el uso de Geogebra, le permitió reflexionar sobre sus estrategias y resultados, motivándole para buscar distintas alternativas de resolución de

las tareas y se ven confirmados por el análisis de su diario y de sus archivos con Geogebra. A modo de ejemplo, se incluye la siguiente entrada de su diario correspondiente a la sesión 11, en la que estaba trabajando la tarea 9, cuya veracidad se ha confirmado observando el protocolo de construcción de esta tarea con Geogebra. Este fragmento del diario pone de manifiesto mi sorpresa por el hecho de que emplease distintas estrategias y resolviese la tarea de más de una forma, teniendo en cuenta que esta tarea era compleja y situada en un contexto nuevo y distinto al de las tareas anteriores:

Ejemplo 9-21. Extracto del diario y de los mosaicos construidos por A3 en la tarea 9

Primero obtiene el mosaico del hueso con giros y traslaciones. Después, para el mosaico del avión, prueba primero a construirlo dibujando con el ratón⁷¹, luego cambia de estrategia y dibuja dos triángulos y los gira, pero al apreciar que no le sale perfecto, los borra. Comienza de nuevo hallando el centro del cuadrado, después dibuja un triángulo situando uno de sus vértices sobre dicho punto central y los otros dos vértices sobre uno de los lados del cuadrado y finalmente rota este triángulo 4 veces hasta obtener el motivo mínimo del avión. Por último, mediante giros de 180° y traslaciones obtiene el mosaico completo. No sólo obtiene ambos mosaicos usando distintas estrategias, sino que lo argumenta en términos matemáticos correctos, oralmente y por escrito. Continúa trabajando de modo riguroso, mostrando gran autonomía, sistematización y perseverancia. Además, disfruta trabajando así.



Geogebra le ayudó a cambiar de opinión razonadamente, gracias a la perfecta representación gráfica de sus acciones, que le llevaron a darse cuenta de que su primera estrategia no era del todo precisa y, por ello, decidió investigar nuevos caminos de resolución. La rapidez con la que Geogebra ejecutaba cada acción permitió a A3 realizar la tarea de diversas maneras, posibilitando que se centrara en pensar y razonar más que en dibujar gráficamente los mosaicos, como hubiese ocurrido usando LP.

⁷¹ Me refiero a que trató de dibujar directamente la pieza sobre un cuadrado, marcando los vértices sobre la grilla.

Espíritu Crítico

Se observó esta actitud en este estudiante mediante los indicadores:

EC4. Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad

EC5. Aunque no es capaz de hallar una solución correcta, revisa los pasos para comprobar que todo es correcto o encontrar errores

EC6. Se da cuenta de que no llega a la solución o de que la solución no es válida, pero no se preocupa de averiguar el por qué o de seguir intentándolo

Durante las tareas con LP, A3 manifestó EC6 en un 66.67% de las sesiones y demostró ser crítico (EC4 o EC5) en las restantes: el 33.33% de las ocasiones. Durante las sesiones en las que trabajó con Geogebra, no evidenció EC6 en ningún momento, porque se comportó de modo totalmente crítico siempre, obteniendo EC4 un porcentaje del 100%.

En esta actitud, la mejora fue bastante notable y se debió a la influencia de la herramienta empleada. Durante las tareas GG, comprobó sus soluciones, y cuando no se ajustaron a sus expectativas, no dudó en buscar otras estrategias de resolución, demostrando al mismo tiempo flexibilidad de pensamiento, como he expuesto con anterioridad.

Perseverancia

Los indicadores referentes a esta actitud que A3 manifestó fueron:

PE7. Ante un problema, se da por vencido fácilmente sin llegar a ninguna respuesta

PE9. No abandona el problema hasta que llega a una solución

Durante la realización de las tareas con LP, A3 raramente manifestaba PE9: un 16.67% de las sesiones. Solía abandonar las tareas sin obtener ninguna solución, en muchos casos sin ni siquiera intentar resolverlas (PE7). Sin embargo, durante las tareas que realizó con Geogebra experimentó un cambio radical, comportándose de un modo totalmente distinto: no dejó ni una sola de ellas sin resolver (PE9), mostrándose muy perseverante en todas las sesiones.

El gusto, motivación y confianza de A3 por el trabajo en matemáticas con Geogebra le hizo pasar de un extremo a otro. En este caso, la herramienta contribuyó en primer lugar a motivarlo para trabajar en matemáticas y ello le hizo interesarse por las tareas. De este modo, al implicarse en ellas, se mostró perseverante y demostró que su bajo rendimiento anterior se debía principalmente a una falta de motivación por la asignatura.

Además de encontrar referencias a su perseverancia para realizar las tareas satisfactoriamente en todas las entradas del diario correspondientes a las tareas GG, al analizar la Tarea 1 con Atlas.ti, pude comprobar cómo no desistía en el intento de resolverla de la forma más completa que encontrase. Esto, a pesar de que su compañero A16 no dejaba de decirle que no era posible. El ejemplo 9-7 (p. 290) es una muestra de ello. Como ya se comentó, tuvo serias dificultades para construir un mosaico de pentágonos, pero no cejó en el empeño hasta que logró encontrar un pentágono con el que era posible teselar y otro con el que no. Lo esperado en A3, dado su comportamiento previo, hubiese sido abandonar los pentágonos y seguir probando con otros polígonos. En lugar de ello, siguió intentándolo, utilizando todos los recursos a su disposición, hasta que quedó satisfecho con la respuesta obtenida. Incluso regañó en repetidas ocasiones a su compañero, por su insistencia en que no lo iba a conseguir y que lo mejor era que cambiaran de diseño.

Precisión y Rigor

Observé esta actitud en A3 mediante los siguientes indicadores:

PR10. No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado

PR11. Cree que un error de cálculo no es importante

PR12. Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso

Durante las tareas LP se mostraba Riguroso y Preciso, manifestando PR10 el 50% de las sesiones observadas. Durante la otra mitad de las sesiones, parecía no valorar demasiado esta actitud, comportándose según PR11 y PR12. Sin embargo, durante las tareas realizadas con Geogebra, evidenció siempre PR10.

La herramienta le ayudó a realizar los cálculos y representaciones gráficas sin emplear mucho esfuerzo y tiempo, y parece que ésa fue la razón de su mejoría. A este alumno le gustaba ser Riguroso y Preciso, pero no siempre se comportaba así. Su falta de motivación le llevaba a abandonar las tareas, aún siendo consciente de que la respuesta obtenida no era adecuada. Manejando Geogebra trabajaba más rápido y eficientemente que con LP; ello le permitió hacer y rehacer las tareas, hasta lograr el grado de Rigor y Precisión adecuado.

La entrada del diario de la sesión 11, incluida en la actitud Flexibilidad de Pensamiento, también hacía referencia a la Precisión y Rigor de A3. Tras una primera estrategia en la que obtuvo el motivo mínimo, no conforme con su falta de rigor, probó distintas estrategias que le llevaron a obtener la precisión buscada. No le importó tener que dedicar más tiempo a esa

tarea y perseveró con tal de conseguir una respuesta que se adecuase a sus expectativas. Esta situación se repitió durante las tareas GG, en las que demostró que no le importaba dedicar más tiempo a una tarea, si con ello lograba el mayor grado de precisión y rigor posible.

Creatividad

Observé esta actitud en este estudiante mediante los indicadores:

C13. Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas

C14. No investiga distintas o nuevas estrategias

A3 fue uno de los estudiantes que más sorprendentemente evolucionaron en esta actitud, pasando de un porcentaje nulo en C13 con LP a un 91.67% con GG. No se trataba de que A3 no fuese creativo anteriormente y las TIC lo hicieran creativo; más bien, que la herramienta le hizo disfrutar con las tareas, ser más eficiente para resolverlas (rapidez de respuesta del software) y le ayudó a ser más flexible de pensamiento y autónomo. Ello le llevó a manifestar su creatividad, que hasta entonces había permanecido oculta. Demostró gusto por resolver las tareas de variadas formas y se sentía orgulloso cuando lo lograba, y también cuando los demás valorábamos y reconocíamos su trabajo.

Autonomía

Este estudiante manifestó los siguientes indicadores:

AU15. Prefiere no pensar por sí mismo y pregunta al profesor o a los compañeros que debe hacer

AU16. Trabaja de modo autónomo

Durante las tareas LP evidenció siempre AU15, mientras que en las tareas con Geogebra se comportó siempre de un modo autónomo (AU16). En esta actitud, al igual que en Creatividad, A3 pasó de un extremo a otro, de un 0% a un 100%. Aunque pueda parecer extraña tal evolución, no lo fue.

Este alumno se negaba a trabajar en clase antes de introducir las TIC. Cuando puntualmente lo hacía, su falta de interés por los contenidos trabajados le llevaban a preguntar a los demás compañeros qué debía hacer, e incluso a copiar las tareas. Durante las sesiones con Geogebra, se comportó como si cada nueva tarea fuese un reto para él. Es más, se sentía muy orgulloso del modo en que la situación cambió en el aula, pues ahora eran sus compañeros los que le

pedían ayuda a él, lo que lo llevó a estar cada vez más motivado por el trabajo que estaba realizando.

Sistematización

Observé esta actitud en A3 mediante los indicadores:

SS17. Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar

SS18. Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo

SS19. Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados

Durante las tareas LP, evidenció SS18 el 91.67% de las sesiones; es decir, casi nunca actuó de un modo sistemático, demostrando no saber a qué lugar le conducían las estrategias que ponía en práctica. Sin embargo, durante las tareas GG siempre demostró actuar con una meta (SS17) y fue capaz de explicar y sintetizar los resultados, así como el modo en que los había obtenido (SS19).

Siempre demostraba tener una meta, y aunque en ocasiones tuviese ciertas dificultades, buscaba la forma de superarlas. Por ejemplo, en la tarea 5 tenía claro cuál era la razón que debían cumplir los polígonos regulares para formar mosaicos, pero no sabía cómo explicarlo con la terminología adecuada, porque no recordaba el término “divisor”. Por ello, me comunicó sus hallazgos usando sus propios recursos para dar una definición de divisor y para argumentar la unicidad de los tres mosaicos regulares, solicitándome después que le recordase el término preciso. Así, su respuesta final a la tarea 5 (registrada en audio) incluía el término “divisor”, ya que le gustaba ser lo más riguroso posible, siendo su transcripción la siguiente:

Ejemplo 9-22. Sistematización de A3

A3: Para obtener mosaicos con losetas regulares, éstas, sus ángulos interiores tienen que ser divisores de 360. No hay más posibilidades porque o da más o da menos: las losetas de 3 lados dan 60 por 6, 360; las losetas de 4 dan 90, 90 por 4, 360; las losetas de 6 dan 120, 120 por 3, 360 y no hay más posibilidades.

El análisis realizado ha subrayado dos factores como principales causantes de la transformación experimentada por este alumno que, por orden de importancia, fueron: Geogebra y la interacción conmigo (con la profesora). A diferencia de otros escolares, para A3 la interacción con su compañero no afectó a su cambio actitudinal, y se puede destacar el software como factor más importante para el desarrollo de sus actitudes matemáticas y hacia las matemáticas. Durante el trabajo con Geogebra, este estudiante trabajó de un modo tan

autónomo que únicamente requería mi presencia para que le confirmase la bondad de sus estrategias y soluciones. En definitiva, mi interacción puntual con A3 en algunas de las tareas, le ayudó a mejorar su Flexibilidad de Pensamiento y también su Espíritu Crítico, no incidiendo de modo significativo en el desarrollo de las restantes actitudes, que sí se vieron potenciadas por el uso de Geogebra.

Se puede afirmar que existe coincidencia total entre los análisis de estas actitudes realizados con las parrillas de observación con las respuestas de los cuestionarios, con la información del diario de A3 y con los archivos de audio que pude aprovechar para trabajar con Atlas.ti. Todos ellos pusieron de relieve que A3 experimentó una transformación positiva de sus actitudes matemáticas debido al trabajo con Geogebra, que le hizo mostrar niveles satisfactorios durante las tareas GG, a pesar de partir de una situación previa bastante negativa (durante las tareas LP y a lo largo del primer trimestre de curso).

El análisis presentado se ha centrado en dar respuesta al objetivo 2 de investigación acerca de sus actitudes relacionadas con las matemáticas, siendo ésta afirmativa. Es decir, se puede afirmar que para A3 se cumplió el objetivo 2 de investigación (transformaciones actitudinales positivas debidas al trabajo con el software). Como cierre de dicho análisis, quiero añadir que este estudiante superó los pronósticos acerca de su posible desarrollo actitudinal. Se observó en él una evolución bastante sorprendente de todas sus actitudes matemáticas y hacia las matemáticas durante el trabajo con Geogebra, así como una actitud muy positiva hacia el uso de las TIC para trabajar en matemáticas. Destaco la evolución experimentada por este estudiante en actitudes matemáticas como Autonomía, Sistematización, Creatividad y Perseverancia, pues pasó de no manifestarlas nunca o en contadas ocasiones, a demostrarlas en todo momento durante el trabajo con el software. En las restantes actitudes también evolucionó, pero la transformación que sufrió se ajustó a lo que podía esperarse, dado que alcanzó niveles elevados pero no partía de una situación tan negativa como en las anteriores actitudes.

La satisfactoria actitud de A3 hacia el trabajo con Geogebra en matemáticas le hizo abandonar su comportamiento habitual de no trabajar en clase, para implicarse activamente y disfrutar con las tareas realizadas, sintiéndose más capaz en matemáticas. Aunque para este estudiante no se ha realizado un análisis en detalle de las posibles relaciones de dependencia entre actitudes, sí que se ha indagado acerca de la relación entre categorías actitudinales llegando a la misma conclusión que para A8: una actitud positiva hacia el uso de Geogebra en

matemáticas implicó una mejora de sus actitudes hacia las matemáticas que conllevó una mejora de determinadas actitudes matemáticas. En efecto, el análisis realizado para A3 ha puesto de manifiesto que la positiva transformación experimentada en sus actitudes hacia las matemáticas, como consecuencia del manejo de Geogebra, influyó en el desarrollo de algunas de sus actitudes matemáticas como Perseverancia y Creatividad. Por su parte, ciertos atributos y ventajas del uso del software sobre LP, se consideraron los causantes de la evolución de las restantes actitudes, como se expondrá debidamente en el apartado 9.2.2.

9.1.3.3.2.2. Alumna A7.

Esta estudiante, al igual que A3, partía de una situación previa muy negativa, dado que no había manifestado ninguna actitud matemática adecuadamente antes del trabajo con Geogebra. Por ello, resultó de interés estudiar las posibles modificaciones de su perfil previo fruto del trabajo con el software en matemáticas, que a continuación relato.

Análisis del Diario

Como ya expuse, esta alumna alcanzó niveles considerables en ciertas actitudes, pero no en todas, y ello se reflejó en las entradas del diario que sobre su desarrollo actitudinal escribí durante las tareas GG. Las actitudes que se mencionaban en la mayoría de las entradas fueron, por ese orden: Perseverancia, Precisión y Rigor, Espíritu Crítico y Sistematización. Ciertas actitudes matemáticas como Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad no aparecieron explícitamente en ninguna de las entradas, mientras que otras lo hicieron intermitentemente, el caso de Autonomía. A continuación, expongo una muestra de las entradas del diario:

Sesión 2: No consigue obtener la condición matemática para poder teselar por sí sola y por ello, pide ayuda a A8 y A15. El diálogo mantenido con ellos, le lleva a obtener una argumentación basada en propiedades matemáticas, aunque no del todo precisa. Ha dibujado y probado bastantes teselas. Yo contaba con que experimentaría ciertas dificultades para resolver la tarea, pero también que se esforzaría para conseguirlo y así ha sido. (...) A7 y su compañera se han mostrado muy perseverantes, precisas y autónomas.

Sesión 11: (...) Consigue construir los dos mosaicos y lo argumenta por escrito correctamente. Los ha obtenido a partir de giros de distintos ángulos, aunque también ha empleado traslaciones. Muy trabajadora, más autónoma y sistemática que de costumbre, por lo que podemos concluir que ha realizado un gran trabajo hoy.

Análisis Global de las Parrillas de Observación

El análisis de las parrillas de observación de actitudes proporcionó su perfil actitudinal durante la observación de las tareas LP y GG, que se muestra en la siguiente figura. Recuerdo nuevamente las abreviaturas empleadas en el siguiente gráfico: FP es la abreviatura para Flexibilidad de Pensamiento, EC para Espíritu Crítico, PE para Perseverancia, PR para Precisión y Rigor, C para Creatividad, AU para Autonomía y SS para Sistematización.

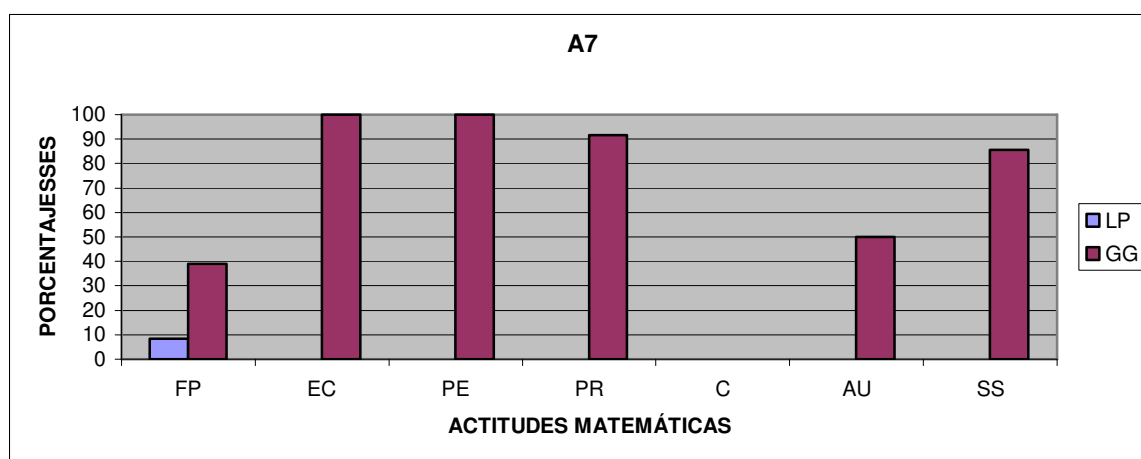


Figura 9-25. Porcentajes obtenidos por A7 en actitudes matemáticas en las tareas LP y GG

Se pudo comprobar durante las tareas LP una ausencia casi total de actitudes matemáticas pues, a excepción de alguna sesión en la que manifestó FP3, del resto de actitudes no hubo evidencia alguna. Durante las tareas GG la situación mejoró bastante, aunque no de forma homogénea para todas las actitudes consideradas.

Triangulación de los Análisis Realizados

Del mismo modo que para A3, muestro la evolución de A7 en cada actitud, mediante un análisis detallado de las parrillas de observación, que completaré con la información extraída de los diarios y análisis de tareas 1 y 5 con Atlas.ti.

Flexibilidad de pensamiento

En esta actitud no experimentó una gran mejoría, pasando del 8.33% en LP a un 38.89% con GG. Para esta actitud se emplearon los tres indicadores ya expuestos en análisis anteriores:

FP1. Resuelve el problema de más de una forma

FP2. Se interesa por la/s forma/s en la que sus compañeros resuelven los problemas diferentes a la suya

FP3. Cambia de opinión en base a argumentos convincentes

Durante la realización de las tareas LP, A7 nunca evidenció FP1 ni FP2, mostrando únicamente FP3 en el 25% de las sesiones. Sin embargo, el uso de Geogebra contribuyó a que durante las tareas GG tomara decisiones fundamentadas, cambiando de opinión por decisión propia basándose en argumentos convincentes (100% en FP3) y manifestara FP2 el 25% de las ocasiones. A lo que no ayudó la herramienta fue a que intentase resolver las tareas de más de una forma (0% en FP1), unas veces por falta de tiempo para ello, pues solía trabajar con su compañera lentamente, y otras veces por conformismo con la solución obtenida y ausencia de motivación para seguir buscando otras estrategias de resolución.

Espíritu Crítico

Esta estudiante se mostró nada crítica durante las tareas LP, dado que únicamente manifestó EC6 (*Se da cuenta de que no llega a la solución o de que la solución no es válida, pero no se preocupa de averiguar el por qué o de seguir intentándolo*). Durante las tareas GG, cambió notablemente, al no manifestar nunca EC6 y comportarse siempre según EC4 (*Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad*).

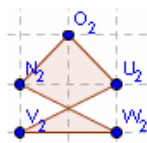
Esta evolución en EC4, de un 0% con LP a un 100% con Geogebra, resultó asombrosa. A7 pasó de no cuestionarse nunca la bondad de las estrategias y solución obtenidas en las tareas LP, a ir mostrándose progresivamente más crítica gracias al trabajo con la herramienta; es decir, manifestó una mejora gradual obteniendo un 72.73% en EC4 durante las tareas ISO (realizadas con Geogebra antes de comenzar con las tareas GG) y un 100% durante las tareas GG. También se observó cómo el uso de la herramienta le ayudó a considerar que no todos los caminos eran válidos, y no se trataba sólo de dar una solución, sino que el último paso de la resolución de problemas residía en la comprobación de la adecuación de dicha solución. Con LP no se comportaba de un modo crítico en muchas ocasiones, porque no identificaba que existía un error, o aún siendo consciente de su existencia, no sabía de dónde provenía con lo que no intentaba solucionarlo.

Durante la tarea 1 en la que probaron distintos polígonos para construir mosaicos, su pareja, A17, trataba de construir un mosaico empleando losetas que no eran polígonos. A7 intentó hacerle ver que no era posible construir un mosaico con tales teselas porque no eran iguales y además no rellenaban el plano:

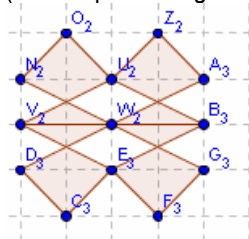
Ejemplo 9-23. Espíritu Crítico de A7

A7: Eso es lo que quería hacer yo, y no me salía

A17: De aquí para abajo no me sale



A7: Es que no lo estás haciendo bien. Es que tienes que juntar los puntos, ¿no?
(Su compañera sigue dibujando piezas)



A7: Y ése lo has hecho más chico que éstos. Tienen que estar a la misma distancia, éste, del blanco ése

A7: Tienes que quitar esa línea, ¿entiendes?

A17: Entonces no se puede...

A7: Entonces no puedes hacerlo, entonces no se puede hacer bien porque todo tiene que estar igual y entonces eso se queda muy chico y tan chico no se puede quedar

A17: Pero si la línea queda de todas formas

A7: Pero es que tú... si ahí no tienes línea...

A17: Es que entonces queda como un rombo

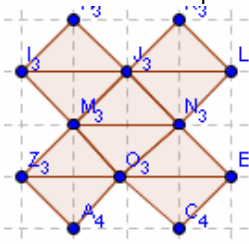
A7: Entonces no se puede, esa figura no vale, porque aquí te pone que tienes que hacerlo todo igual ¿me entiendes? a la misma di..., a la misma amplitud, ¿me entiendes o no me entiendes? a ver, esto lo has hecho lo mismo, has ocupado los mismos cuadros, aquí tienes que ocupar los mismos cuadros con todo y si aquí no hay línea, aquí no puedes hacer línea y si aquí mide 2 cuadros, aquí tiene que medir 2 cuadros y en este blanco tiene que medir 2 cuadros, es que eso no vale

A7: jeso no vale maestra! ¿a que no? porque si esto no es igual que esa figura...

Profesora: Llevas razón, debéis usar figuras iguales. Seguid probando

(Vuelve a dibujar A7)

A7: Eso se sabe que no se puede, ¿esto es lo que tú querías hacer?



Perseverancia

Los indicadores referentes a esta actitud que A7 manifestó fueron:

PE7. Ante un problema, se da por vencido fácilmente sin llegar a ninguna respuesta

PE9. No abandona el problema hasta que llega a una solución

El primero de los indicadores solamente se observó durante las tareas LP, en las que A7 nunca se mostró perseverante y a menudo dejaba las tareas sin terminar, o incluso muchas veces ni siquiera se planteaba trabajar en ellas (100% en PE7). Al introducir Geogebra, fue la primera vez que esta estudiante manifestó PE9, pudiendo afirmar con ello que experimentó

un cambio sustancial. Se implicó en las tareas y trabajó hasta estar segura de haberlas concluido con éxito, volviéndose muy perseverante (100% en PE9 durante las tareas GG).

Me sorprendió una conversación mantenida entre A7 y A8 durante la tarea 10, en un momento en el que ambos estaban algo frustrados porque no habían conseguido finalizar la tarea correctamente, pese a llevar toda la sesión intentándolo. Coincidió que ambos estaban trabajando en solitario, pues sus respectivas parejas no habían asistido a clase ese día. Después de muchos intentos fallidos, no sólo no abandonaron la tarea, sino que aún demostraron mayor perseverancia, al plantearse la posibilidad de instalar el software Geogebra en sus casas e intentar resolver de nuevo la tarea para obtener un resultado que les dejase más satisfechos. A8 así lo hizo y me envió la tarea resuelta por e-mail. A7, aunque lo intentó, tampoco consiguió resolverla en casa, pues su estrategia no era adecuada, y al no sentirse satisfecha con su trabajo no me la envió como hiciera A8.

Precisión y Rigor

Se observó en A7 los siguientes indicadores:

PR10. No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado

PR11. Cree que un error de cálculo no es importante

PR12. Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso

Durante las tareas LP, A7 se mostraba nada rigurosa y precisa, manifestando PR11 y PR12. Geogebra ayudó a que valorase gradualmente la importancia de esta actitud, pues durante las tareas ISO alcanzó un 59.09% en PR10, y esta cifra siguió aumentando hasta llegar a un 91.67% durante las tareas GG.

Trabajar con Geogebra le hizo valorar la precisión de sus cálculos y respuestas. La herramienta le ayudó a realizar los cálculos y representaciones gráficas de un modo rápido y sencillo. Además, le permitía deshacer y rehacer las construcciones sin gran esfuerzo. Cuando trabajaba con LP, si obtenía una respuesta aproximada se contentaba con ella, a veces porque no sabía a qué era debida esta imprecisión, a veces porque creía que un error de cálculo no era importante. Con Geogebra fue diferente, ya que el error estaba latente en la pantalla y podía rastrear su procedencia, siendo más crítica y rigurosa que con LP. Por otra parte, esta actitud se vio favorecida por la evolución de otras actitudes, tales como Perseverancia y Espíritu Crítico, que evitaron el comportamiento habitual de A7 en las tareas LP que vengo comentando.

Por ejemplo, cuando trataban de hallar los valores de los ángulos interiores de los polígonos regulares, obtuvieron un valor decimal para el caso del heptágono. Como A7 creía que este valor no era posible, solicitó mi atención, quedando esta situación recogida en el siguiente fragmento extraído de la reconstrucción de su tarea 5 con Atlas.ti:

Ejemplo 9-24. Precisión y Rigor de A7

A7: ¡maestra!

(Pasa medio minuto y vuelven a llamarme)

A17: ¡maestra!...¡maestra!

A7: ¿puedes venir maestra?

(Comento en general cómo realizar la tarea 6, ya que muchos de los alumnos ya están trabajando en ella. Me acerco a ellas)

A7: éste no nos sale...

Profesora: ¿cuál? (Ellas señalan el heptágono regular)

Profesora: está bien, 900 entre 7, ¿cuánto sale?

A7: con números decimales

Profesora: ¿y qué?

A7: ¡ah!, ¿se puede con números decimales?

Profesora: claro

Era habitual que cuando los alumnos trabajaban en la resolución de un problema y obtenían como resultado de alguno de sus cálculos un número irracional, considerasen que habían cometido un error en su obtención. Por este motivo, como A7 quería obtener los valores con la mayor precisión posible, solicitó mi confirmación de que el valor que había obtenido era correcto, mostrando al mismo tiempo Espíritu Crítico.

Creatividad

Se observó esta actitud en esta estudiante mediante el indicador:

C14. No investiga distintas o nuevas estrategias

En esta actitud A7 no experimentó ninguna evolución, evidenciando siempre C14. Es decir, se mantuvo nada creativa, tanto en las tareas LP como en las que realizó con Geogebra. Al igual que muchos otros alumnos, no sintió la necesidad de resolver las tareas de más de una forma (0% en C13. *Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas*), ni tampoco de experimentar estrategias diferentes a las habituales en el resto de sus compañeros. Por ello se puede afirmar que, en esta actitud, Geogebra no supuso ninguna mejoría respecto de la situación anterior. Para ella fue más que suficiente con lograr resolver la tarea de una forma. A7 y su compañera tuvieron bastantes dificultades para resolver correctamente las tareas y, aunque durante las tareas GG se mostraron perseverantes, encontrar una solución les suponía mucho más esfuerzo y tiempo del que estaban acostumbradas a emplear en resolver problemas matemáticos. Por esta razón, se mostraban más que satisfechas con llegar a una

solución y no intentaron resolver las tareas de más de una forma. Además, agotaban todo el tiempo que dedicábamos a resolver cada tarea en hallar una solución, con lo que difícilmente hubiesen podido probar otros caminos.

Autonomía

A7 manifestó los siguientes indicadores referentes a esta actitud:

AU15. Prefiere no pensar por sí mismo y pregunta al profesor o a los compañeros que debe hacer

AU16. Trabaja de modo autónomo

La situación de partida de esta alumna era muy negativa, es decir, siempre se comportaba según AU15. El uso continuado de la herramienta le ayudó a ir progresivamente mejorando; aún así, no alcanzó niveles altos de autonomía: 50% en AU16 con GG. A7 trabajaba muy poco antes de introducir las TIC y, cuando lo hacía, su falta de interés por los contenidos estudiados le llevaba a preguntar a los demás compañeros qué debía hacer y a menudo copiaba las respuestas de las tareas de otros alumnos sin comprenderlas. Durante las sesiones con Geogebra se mostró más autónoma, pidiendo ayuda cuando tras intentar varios caminos no sabía cómo seguir, y no a la primera de cambio. Es más, no intentaba que sus compañeros le resolvieran la tarea, sino que le indicaran por dónde debía seguir, lo cual ya fue una evolución bastante considerable. Releyendo las entradas del diario de A7, se aprecia como denominador común de muchas de las tareas:

Han necesitado un empujoncito inicial porque les costaba mucho encontrar una estrategia de resolución por sí mismas, a pesar de que primero lo han intentado por sí solas.

Sin embargo, también se ha de añadir que las tareas más sencillas las resolvían de modo autónomo, e incluso en alguna de las tareas más complejas, en las que yo pensaba que necesitarían apoyo constante, me asombraron. Este fue el caso de la tarea 9, siendo el fragmento del diario que refleja esta situación el siguiente:

Consiguen construir los dos mosaicos y lo argumentan por escrito correctamente. Los obtienen a partir de giros de distintos ángulos, aunque también han empleado traslaciones. Muy trabajadoras y más autónomas y sistemáticas que habitualmente. Han realizado un buen trabajo hoy.

Otro ejemplo, extraído de la tarea 5 reconstruida con Atlas.ti, es el siguiente:

Ejemplo 9-25 .Influencia de Geogebra para que A7 manifestase Autonomía

A7: maestra, ¿puedes venir ahora?

(Como ya han obtenido todos los ángulos interiores a excepción del heptágono, que también lo han hallado pero creen que no está bien porque es decimal, se ponen a leer de nuevo la ficha mientras esperan y se dan cuenta de que tienen que hallarlo también para polígonos de más de ocho lados, que no han dibujado con Geogebra)

A7: ¿hay que hacerlo con el de 9, 10, 11 y 12? ¿y cuáles son los de 9?

A7: míralo en Internet

(Llevan 4:30 minutos, no saben cómo seguir y todavía no me he acercado a hablar con ellas a pesar que me han llamado dos veces, así que deciden buscar por su cuenta información por Internet que les ayude a continuar con la tarea, en este caso, ayuda para dibujar en la ficha un polígono de 9 lados y poder así hallarle el ángulo interior. Tras unos minutos lo consiguen demostrando así que cuando no consiguen ayuda, tienen recursos para hacerlo de modo autónomo)

Puede decirse que la contribución del software al desarrollo de esta actitud residió en brindarle la oportunidad de tener actividad y navegar libre y flexiblemente, logrando así potenciar el trabajo autónomo de A7.

Sistematización

Se recogió información de esta actitud para A7 mediante los indicadores:

SS17. Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar

SS18. Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo

SS19. Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados

Durante las tareas LP nunca manifestó sistematización, pero el trabajo con la herramienta le ayudó a ser sistemática de un modo progresivo, comportándose según SS17 y SS19. Durante las tareas ISO se mostró totalmente sistemática en un 59.09% de las sesiones, mientras que durante las tareas GG lo hizo el 85.70% de las veces. Desglosando estos porcentajes por indicadores, se aprecia que A7 evidenció siempre SS18 durante las tareas LP (100% en SS18) y nunca los restantes (0% en SS17 y SS19). Durante las tareas GG, demostró actuar sabiendo dónde quería llegar en el 91.6% de las ocasiones (SS17) y fue capaz de explicar y sintetizar los resultados y el modo en que los había obtenido en el 83.3% de las sesiones GG (SS19).

El análisis con Atlas.ti de la tarea 5, reflejó momentos en los que se comportó de modo totalmente sistemática y otros en los que actuaba sin saber por qué. A modo de resumen, incluyo mis reflexiones acerca de sus actitudes matemáticas en esta tarea después de

triangular todos los datos recogidos, las cuales son aplicables a muchas otras de las restantes tareas:

En cuanto a las actitudes, comenzaron trabajando en la construcción de los mosaicos y esta parte parece que no les planteó demasiada dificultad y se mostraron autónomas, confiadas y sistemáticas. Además, analizaron los mosaicos que iban obteniendo y cuando no se ajustaban a lo que tenían en mente, deshacían y probaban otra estrategia, demostrando Espíritu Crítico y Flexibilidad de Pensamiento al cambiar de opinión basándose en sus propios razonamientos. La segunda parte de la tarea, en la que debían argumentar su respuesta, les ocasionó bastantes más problemas porque no sabían cómo hacerlo, entonces, al igual que la mayoría de sus compañeros, decidieron seguir la ayuda de la ficha y se pusieron a calcular los ángulos interiores, aunque sin saber para qué les servirían. En esta parte, alternaron fases de autonomía con fases de bloqueo en las que solicitaron mi ayuda, no obstante, como mostraban gran interés por resolver la tarea, estuvieron pensando posibles formas de obtener los valores de los ángulos por sí mismas. En respuesta a su petición de ayuda, les sugerí un modo de hallarlos y se pusieron a ello. Volvieron a tener problemas con los polígonos de mayor número de lados, pero perseveraron en ello y se les ocurrió buscar información en Internet que les permitiera continuar. Finalmente consiguieron hallar los ángulos interiores de un modo riguroso y preciso (cuando obtuvieron un valor irracional que no les convenció se aseguraron de que estaban en lo cierto). Podemos resumir lo anterior diciendo que: cuando tenían clara una estrategia a seguir trabajaban de modo autónomo, sistemático, analizando críticamente los resultados y actuando en consecuencia (Flexibilidad de Pensamiento), demostrando Precisión y Rigor. Perseveraban hasta obtener una respuesta, aunque cuando la obtenían no se preocupaban de buscar otras formas de resolver la tarea. Cuando no sabían cómo seguir, su primer impulso era preguntarme, pero como esta situación era habitual en ellas y yo pretendía cambiarla, con frecuencia ignoraba su llamada y les dejaba tiempo para que pensarán por sí mismas, lo que en esta tarea contribuyó a que tuviesen algunas iniciativas propias, como la de ir adelantando la tarea 6, la de obtener los ángulos interiores midiendo con Geogebra, o la de buscar información en la red, mejorando así su Autonomía, Autoconfianza y Perseverancia.

El análisis que he presentado para dar respuesta al objetivo 2 de investigación, ha reflejado una evolución positiva de esta alumna en la mayoría de sus actitudes matemáticas, gracias al uso del software y también a la interacción conmigo (con la profesora). Geogebra resultó ser el factor más relevante e influyente para el desarrollo de su Perseverancia, Precisión y Rigor y Autonomía. En el caso de esta estudiante, mi interacción con ella fue frecuente y le ayudó a manifestar Flexibilidad de Pensamiento, Espíritu Crítico y Sistematización en las tareas más complejas, en las cuales evidenció bastantes dificultades. Como en el caso de A3, se descarta la influencia de su compañera porque, aunque ésta trabajó colaborativamente con A7 en la resolución de todas las tareas, sus actitudes matemáticas iniciales eran aún más negativas que

las de A7 y evolucionaron, en parte debido al trabajo con Geogebra y en parte debido a la interacción con A7. Es decir, en esta pareja, la alumna con menores deficiencias era A7 y ejerció una influencia positiva en su compañera, que logró mejorar su situación actitudinal previa.

Esta estudiante evolucionó tal y como había previsto, dadas las deficiencias que con anterioridad había manifestado en matemáticas, que me llevaban a esperar una mejora actitudinal para esta estudiante más progresiva que para otros estudiantes. A7 experimentó una mejora gradual en actitudes como Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor y Sistematización, pues pasó de no manifestarlas nunca a demostrarlas de forma continua durante las tareas GG. También mejoró bastante en Autonomía, siendo ésta una de las mejoras que había previsto para esta estudiante como consecuencia del trabajo con Geogebra. Alcanzó niveles adecuados en FP3, aunque no para FP1 y FP2, de ahí que su porcentaje en Flexibilidad de Pensamiento fuese del 39% durante las tareas GG (para las tareas LP fue del 8.33%). La actitud en la que ni el software ni la interacción conmigo incidió, fue en Creatividad, que esta estudiante nunca evidenció, en parte debido a una actitud conformista: ella, consciente de sus dificultades para resolver ciertos problemas matemáticos, cuando lograba obtener una respuesta se sentía más que satisfecha y no tenía la necesidad de buscar otras estrategias de resolución. En cuanto a sus actitudes hacia las matemáticas, Geogebra ejerció una influencia notable en las componentes comportamental y afectiva, como ya expuse con anterioridad. La incidencia fue menor en la componente cognitiva, mostrándose más confiada en sus posibilidades de éxito en muchas de las tareas pero no en todas ellas, ajustándose estos cambios a mis pronósticos. Su actitud hacia el uso de Geogebra fue positiva, y este gusto y confianza en el software contribuyó a que A7 disfrutara y manifestara un autoconcepto más positivo en matemáticas durante la mayoría de las tareas GG. Sin embargo, hubo algunos momentos durante las tareas GG más complejas, en los que la falta de confianza de esta estudiante en sus posibilidades de éxito no pudo ser contrarrestada por su confianza en el uso del software, manifestando en dichas situaciones una actitud hacia el uso de TIC y hacia las matemáticas no tan positiva, en términos de confianza. Estos momentos marcaron una diferencia entre A7 y sus compañeros A8 y A3, pues ambos manifestaron siempre actitudes favorables hacia el uso de Geogebra e incluso en las tareas más complejas, su confianza en la bondad de la herramienta les llevó a manifestar autoconfianza en matemáticas.

Sintetizando todo lo expuesto con anterioridad, puede deducirse, en cuanto a relaciones de dependencia entre categorías actitudinales, que la actitud positiva hacia el uso de Geogebra de A7 en matemáticas implicó una mejora de sus actitudes hacia las matemáticas (sobre todo de sus componentes afectiva y cognitiva) que contribuyó a una mejora de determinadas actitudes matemáticas (Perseverancia y Autonomía). Por su parte, ciertos atributos y ventajas del uso del software sobre LP, y su interacción conmigo, se han señalado como los responsables de la evolución de las restantes actitudes.

9.1.3.3.2.3. Alumnas A9 y A10.

Las alumnas A9 y A10 trabajaron juntas durante las tareas LP y GG y respondían a perfiles actitudinales previos bastante diferentes. A9 había manifestado hasta el trabajo con Geogebra inadecuadas actitudes matemáticas, mientras que A10 había exhibido muchas de ellas adecuadamente, si bien podía mejorar en las restantes.

Análisis de los Diarios

La lectura del diario, que escribí conjuntamente para esta pareja de estudiantes, me permitió revivir las impresiones que fui recogiendo de las actitudes matemáticas de cada una de ellas durante las tareas GG. Dada la situación de partida de ambas, me sorprendió más la transformación de A9 que la evolución de A10. En las líneas de su diario destaca, por encima de las demás, su Autonomía, hasta el punto de que solicitaron mi ayuda una única vez durante las sesiones en las que trabajaron con Geogebra. También se repiten comentarios acerca de la Perseverancia, Precisión y Rigor, Espíritu Crítico y Sistematización de ambas y de la Creatividad mostrada por A10. Se incluyen algunos fragmentos como muestra de ello:

Sesión 2: A9 y A10 han experimentado una mejora considerable de sus actitudes matemáticas, mostrándose totalmente autónomas y sistemáticas, perseverantes, precisas y críticas. Además, A10 también ha manifestado Creatividad para resolver la tarea de distintas formas.

Sesión 6: Han encontrado los tres mosaicos regulares y se han quedado hallando los ángulos interiores (los estaban midiendo con Geogebra, obteniendo valores como 60.09° para el caso del triángulo equilátero ó 107.9° para el pentágono regular). Han analizado críticamente estos valores y reflexionado sobre el valor que deberían tener (60° y 108° , respectivamente) si la construcción fuese del todo precisa, y después de ello, la han rehecho. Siguen tan autónomas y precisas como siempre y muestran Flexibilidad de Pensamiento y Perseverancia en todo momento.

Análisis Global de las Parrillas de Observación

En las figuras FP es la abreviatura para Flexibilidad de Pensamiento, EC para Espíritu Crítico, PE para Perseverancia, PR para Precisión y Rigor, C para Creatividad, AU para Autonomía y SS para Sistematización.

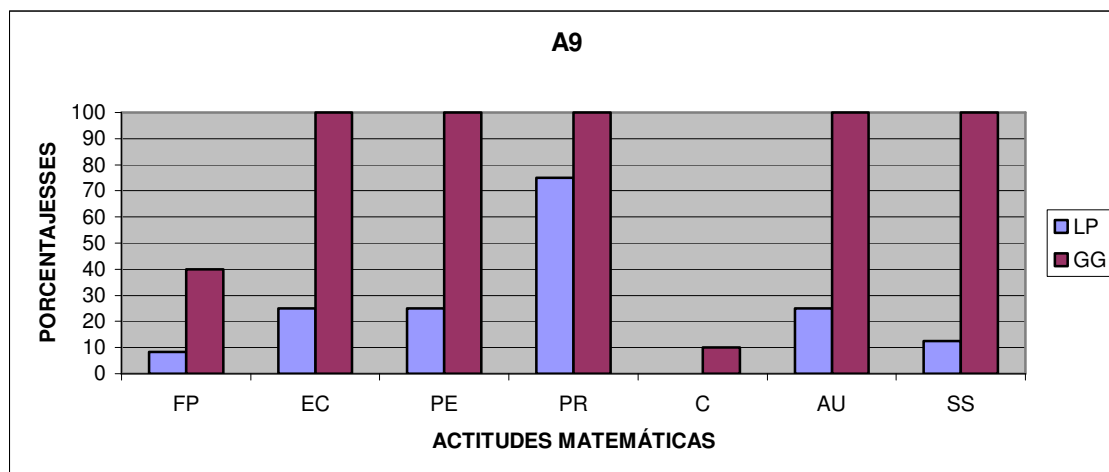


Figura 9-26. Porcentajes obtenidos por A9 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

En el caso de A9 se aprecia cómo, durante las tareas LP, sólo Precisión y Rigor alcanzó un nivel suficiente, mientras que el resto de ellas, o no las evidenció en ningún momento, o no alcanzaron niveles que pudieran considerarse adecuados. Su perfil de actitudes matemáticas encajaba con el insuficiente rendimiento que mostraba en la asignatura.

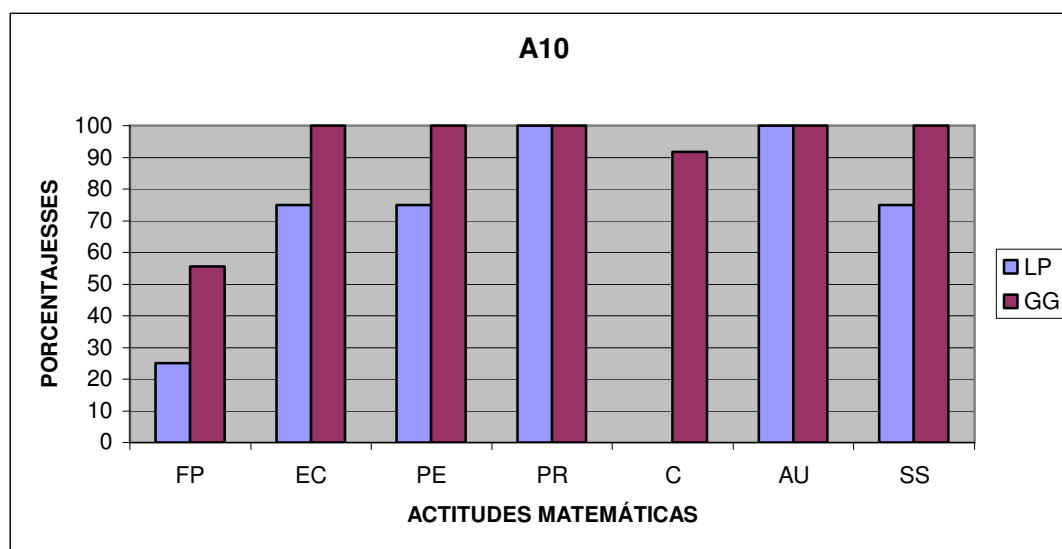


Figura 9-27. Porcentajes obtenidos por A10 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

Para A10 la situación inicial era bastante satisfactoria en casi todas las actitudes, a excepción de Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad, que manifestó aisladamente. A10 destacaba por ser muy Rigurosa y Precisa y totalmente Autónoma, y así continuó durante las tareas GG.

Triangulación de los Análisis Realizados

Como hiciera para A3 y A7, muestro la evolución de esta pareja en cada actitud, partiendo del análisis de las parrillas de observación, que completaré con la información extraída de los diarios y análisis de tareas 1 y 5 con Atlas.ti.

Flexibilidad de pensamiento

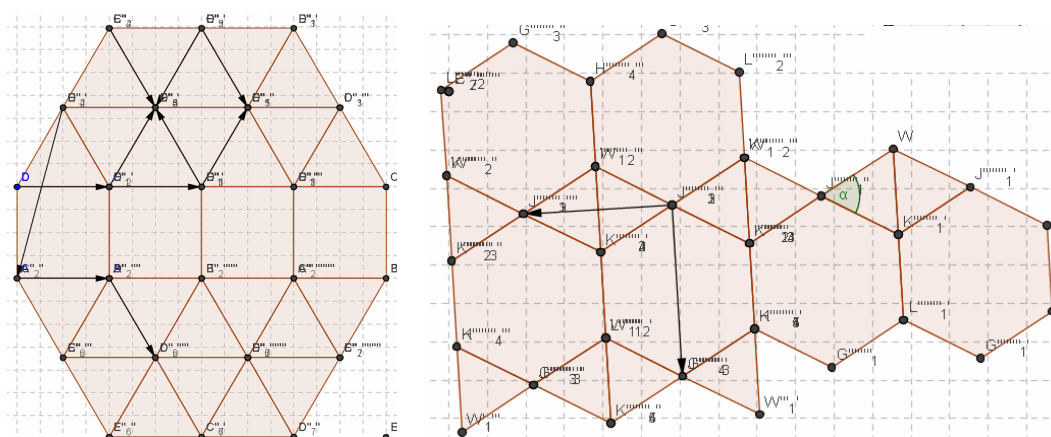
En esta actitud, la evolución en porcentaje experimentada por ambas estudiantes fue similar, en torno al 30%. No obstante, la situación de partida de A10 era un poco menos negativa que la de A9, quien durante las tareas LP sólo la evidenció el 8.33% de las sesiones. Con el uso de Geogebra, A9 alcanzó un 40% y A10 un 55.56%.

Durante las tareas LP, A9 mostró FP3 (cambia de opinión en base a argumentos convincentes) un 25% de las sesiones y A10 un 75% de éstas, mientras que ambas manifestaron siempre FP3 en todas las sesiones en las que usaron Geogebra. FP1 (resuelve el problema de más de una forma) pasó de un nivel o porcentaje nulo para A9 y A10 con lápiz y papel, a un 20% y un 66.67%, respectivamente, durante las tareas GG. Sin embargo, ambas siguieron sin interesarse por otras formas de resolución distintas a las suyas (0% en FP2 en tareas LP y GG).

El manejo continuado del software les llevó a intentar resolver los problemas de más de una forma, pues fue este indicador el que cambió gradualmente, mientras que exhibieron FP3 desde el inicio y a lo largo de todas las sesiones en las que trabajaron con este programa.

Por ejemplo, en la tarea 7, en la que debían construir mosaicos semirregulares, tras construir uno formado por cuadrados y triángulos, pensaron en hacer otro formado por mosaicos y rombos. Pronto se dieron cuenta de que, a pesar de tener lados iguales, los rombos no tenían todos los ángulos iguales, por lo que no podían considerarse polígonos regulares. Pensaron la forma de solventar el problema y se les ocurrió dividir cada rombo en dos triángulos equiláteros, con lo que el mosaico formado cumplía las condiciones pedidas por la tarea. Fueron conscientes de su error y actuaron en consecuencia, tras representarlo y visualizarlo gráficamente con Geogebra. O sea, cambiaron de opinión justificadamente basándose en la representación gráfica de su construcción inicial que, con ayuda del software, realizaron de un modo rápido y preciso. Sus mosaicos quedaron así:

Ejemplo 9-26. Mosaicos semirregulares realizados por A9 y A10



Espíritu Crítico

Durante las tareas con LP, A9 demostró ser crítica en un 25% de las ocasiones y A10 en un 75%, mientras que durante las sesiones en las que trabajaron con Geogebra, ambas manifestaron esta actitud siempre (100%), lo que representó una mejora bastante notable para A9. Comprobaron cada paso que daban y las soluciones obtenidas. Cuando éstas no se ajustaban a sus expectativas, como el caso de la tarea 7 ejemplificada con anterioridad, no dudaron en indagar acerca de su error y del modo de solventarlo. Todo ello lo realizaron de modo totalmente autónomo, pues esta pareja trabajaba muy compenetrada y raramente solicitaba ayuda externa.

Perseverancia

De nuevo, en esta actitud me sorprendió la evolución experimentada por A9. Durante las tareas LP se mostraba perseverante en una de cada cuatro sesiones (25%) y con frecuencia solía abandonar las tareas sin obtener ninguna solución; incluso, en muchos casos, ni siquiera intentaba resolverlas (75%). Sin embargo, durante las tareas que realizaron con Geogebra, experimentó un cambio radical, mostrándose muy perseverante en todas las sesiones. Esta actitud también fue manifestada por A10 (100% en tareas GG), aunque en su caso, este comportamiento ya era bastante habitual, puesto que el 75% de las sesiones LP trabajó de este modo.

Centrándonos en el caso de A9, Geogebra resultó ser el factor más influyente para esta mejoría, quedando relegada a un segundo plano la influencia de su compañera A10. Esto se infiere del hecho de que durante las tareas LP también trabajaron juntas y, sin embargo, A9 raramente se mostró perseverante. Como en el caso de A3, la herramienta contribuyó en

primer lugar a motivarla para trabajar en matemáticas; esto le hizo implicarse en las tareas y perseverar en ellas. Una muestra de la perseverancia exhibida por estas estudiantes es el siguiente fragmento del diario que escribí en referencia a la tarea 5:

Sesión 6: Han encontrado los tres mosaicos regulares y estaban hallando los ángulos interiores pero cuando ya tenían la tarea casi terminada, A10 ha abierto un nuevo archivo de Geogebra y sin querer ha sobrescrito la tarea 5, con lo que han perdido todo el trabajo realizado durante esta sesión y parte de la anterior. En lugar de quedarse paradas lamentándose por la pérdida, sin perder un segundo han abierto un nuevo archivo y han empezado de nuevo la tarea construyendo otra vez los mosaicos.

Sesión 7: Han realizado de nuevo la tarea 5 con Geogebra y obtenido los valores de los ángulos interiores aunque no han usado estos valores, pues justifican la existencia de los tres mosaicos regulares aludiendo a que son los únicos que cumplen la condición matemática para teselar (suma de los ángulos concurrentes en cada vértice es de 360°), pero no han demostrado la unicidad de estos mosaicos de un modo más formal. Sin perder un segundo se han puesto a realizar la tarea 6, pues iban algo retrasadas por tener que repetir de nuevo la tarea 5, y logran resolverla de distintas formas: por ejemplo, han construido el mosaico de triángulos con traslaciones y giros de 180° , pues en la tarea 5 ya lo habían hecho empleando traslaciones y simetrías.

Se advierte cómo su empeño por realizar lo más correctamente posible cada tarea les llevó a repetir la tarea 5 de nuevo. No la abandonaron hasta que su respuesta les satisfizo, a pesar de que tuvieron que emplear mucho más tiempo del previsto.

Precisión y Rigor

Se observó esta actitud mediante los siguientes indicadores, empleando el primero para ambas estudiantes y los dos restantes únicamente para A9 durante las tareas LP:

PR10. No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado

PR11. Cree que un error de cálculo no es importante

PR12. Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso

Ambas se mostraron totalmente rigurosas y precisas durante las tareas GG (100% en PR10). Esto supuso una mejora para A9, quien exhibió esta actitud en tres de cada cuatro sesiones LP (75% en PR10), mientras que A10 mantuvo el máximo grado en esta actitud en ambos tipos de tareas.

La mejora de A9 se debió a que la herramienta le ayudó a realizar las construcciones gráficas sin emplear mucho tiempo y esfuerzo y a que el uso de Geogebra le motivaba a implicarse más en las tareas, despertando en ella la necesidad de realizarlas todas de modo Riguroso y

Preciso. A diferencia de LP, con este programa podía testar más rápida y eficientemente sus estrategias, así como deshacer y rehacer las tareas tantas veces como fuese necesario, hasta lograr el grado de Rigor y Precisión adecuado.

Con anterioridad, he incluido, a modo de ejemplo, un fragmento de la entrada de mi diario de esta pareja correspondiente a la sesión 6, en la que estaban realizando la tarea 5. Ahora se expone otra parte de esta entrada en la que describí el espíritu crítico mostrado, así como la precisión y rigor con la que trabajaron:

Sesión 6: Estaban hallando los ángulos interiores midiéndolos con la herramienta adecuada de Geogebra (herramienta Ángulo y seleccionando en propiedades la opción “expone valor”). En el caso del triángulo obtuvieron como medida 60.09° y para el pentágono 107.9° , sabían que los valores exactos eran 60° y 108° , respectivamente, y éstos fueron los que consideraron como valores válidos. No contentas con su falta de precisión al tomar estas medidas, decidieron hallar los valores de otro modo y me comentaron su problema. Les he recordado que podían obtener estos valores descomponiendo los polígonos y entonces se han puesto a ello, obteniendo de este modo los valores de los ángulos interiores de los polígonos desde 3 a 12 lados con total Precisión. Es la primera vez que ellas han solicitado mi presencia, pues habitualmente son totalmente autónomas y solucionan sus problemas ellas mismas.

Creatividad

A10 experimentó la misma mejoría que A3, encontrándose estos dos estudiantes entre los cuatro que más sorprendentemente evolucionaron en esta actitud. A10 pasó de un porcentaje nulo con LP a un 91.67% con GG. A9, en cambio, pasó de no demostrar Creatividad nunca a hacerlo en el 10% de las sesiones, siendo esta evolución poco reseñable.

Centrándonos en A10, la eficiencia de la herramienta para resolver las tareas más rápidamente de lo que lo hacía con LP es lo que la ayudó a mostrarse más creativa. En efecto, el rigor y precisión que esta estudiante se exigía la llevaba a trabajar adecuada pero lentamente, así que Geogebra le brindó la oportunidad de gozar de más tiempo para cada tarea pudiendo de este modo desarrollar su Creatividad. Demostró gusto por resolver las tareas de variadas formas, e intentaba transmitir este sentimiento a A9, quien con frecuencia se conformaba con resolver las tareas de una única forma. Por otro lado, ya era un cambio más que remarcable, dada su actitud previa al trabajo con Geogebra.

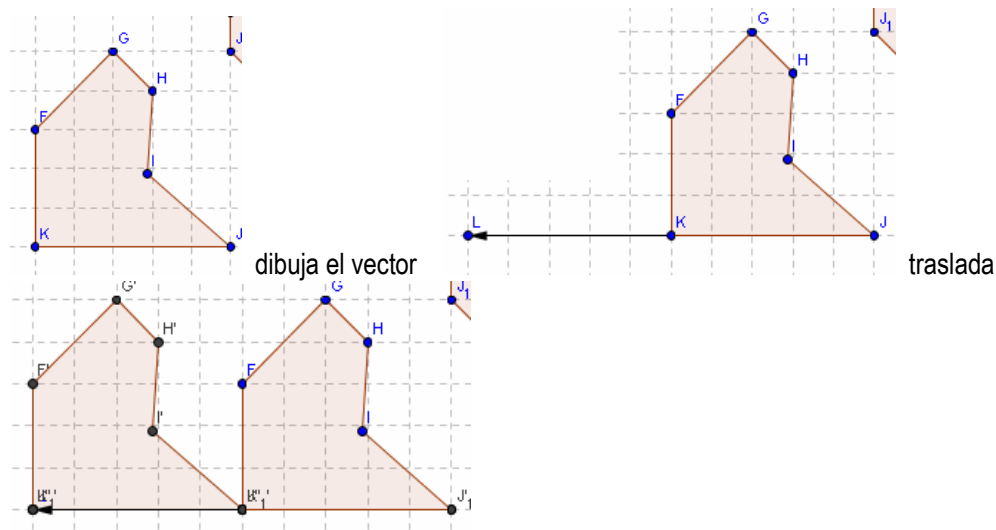
Un extracto de la tarea 1, reconstruida con Atlas.ti, muestra como A10, que en esta sesión trabajaba sola porque A9 faltó a clase, seguía caminos distintos y más creativos que el resto

de sus compañeros (éstos empezaron dibujando triángulos y cuadrados sobre la grilla, sin usar isometrías):

Ejemplo 9-27. Creatividad de A10

Profesora: En lugar de probar con piezas tan complicadas, prueba primero con piezas más sencillas.

A10: vale. (Pero ella sigue teselando con la pieza que había construido)



A10: No se puede

(Después, siguiendo mis indicaciones prueba con cuadrados y triángulos. Durante esta sesión A10 ha demostrado ser creativa y autónoma, pues mientras la mayoría empieza a probar primero con formas simples y no usan isometrías, ella empieza con un octógono y desde la primera figura usa traslaciones).

Autonomía

En esta actitud, A9 sí experimentó una sorprendente evolución, como le sucediera con su Espíritu Crítico y Perseverancia, pasando de un 25% en AU16 (trabaja de modo autónomo) con LP a un 100% con GG. A10 no experimentó ninguna mejora en esta actitud, pues ya se mostraba totalmente autónoma (100% en AU16) antes del trabajo con Geogebra, y continuó así.

Me concentraré pues en A9, para quien el uso de la herramienta le llevó a interesarse por las tareas, trabajando de un modo más autónomo y haciendo aportaciones a su compañera para resolver las mismas. Ambas interactuaron con el programa turnándose en el manejo del ratón o, lo que es lo mismo, en la construcción de las representaciones de mosaicos, impulsadas por la navegabilidad del software. Como novedad, A9 también proponía estrategias de resolución y criticaba tanto las suyas propias como las de su compañera, cuando lo creía conveniente. Dejó su actitud de inactividad o de pasividad, manifestada hasta el uso de Geogebra, para mostrarse capaz de realizar las tareas y con ganas de hacerlo.

Al releer las entradas del diario, hay una frase que se repetía en casi todas ellas que hacía referencia a la total autonomía de esta pareja. Esta pareja sólo interactuaba conmigo cuando, para obtener más información acerca del modo en que estaban resolviendo las tareas, yo les hacía preguntas o detectaba algún error en su estrategia que intentaba hacerles ver para que actuasen en consecuencia.

Sistematización

Se registró esta actitud para ambas estudiantes mediante los indicadores:

SS17. Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar

SS18. Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo

SS19. Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados

A9 evidenció esta actitud aisladamente, mostrándose totalmente sistemática (SS17 y SS19), el 12.5% de las sesiones LP, mientras que A10 se comportó de este modo el 75% de dichas sesiones. Desglosando los porcentajes globales por indicadores, A9 manifestó SS17 el 25% de las sesiones en las que trabajó las tareas LP, SS18 el 75% de ellas y SS19 en ninguna ocasión. A10 actuó de un modo más sistemático, obteniendo un 100% en SS17 y un 50% en SS19 durante la realización de dichas tareas. Durante las tareas GG ambas se mostraron siempre totalmente sistemáticas y demostraron actuar con una meta (100% en SS17), siendo capaces de explicar y sintetizar los resultados y el modo en que los habían obtenido (100% en SS19).

La evolución de ambas en esta actitud puede atribuirse al uso de Geogebra pues, a pesar de tener siempre una meta definida, no en todas las tareas tenían claro el camino a seguir para alcanzarla. La posibilidad de probar distintas vías de resolución de un modo rápido y sencillo les ayudó en este sentido.

Mediante el análisis presentado, se ha dado respuesta al objetivo 2 de investigación (p. 358), el cual ha evidenciado una evolución positiva de estas alumnas en todas sus actitudes matemáticas. Destacan dos factores como principales causantes de la transformación experimentada por esta pareja que, por orden de importancia, fueron: Geogebra y la interacción entre ellas. A diferencia de otros escolares, como A7, para quien la interacción conmigo (con la profesora) fue importante, esta pareja no solicitó mi ayuda en ninguna tarea y únicamente interactuaban conmigo cuando yo me acercaba a preguntarles por el modo en que estaban resolviendo cada tarea. Solamente requerían mi presencia para que les

confirmarse la bondad de sus estrategias y soluciones. La interacción entre A9 y A10 fue beneficiosa sobre todo para A9, quien encontró en A10 el apoyo que en algunas tareas, de forma puntual, necesitó para llegar a la respuesta buscada. Sin embargo, el hecho de que cuando trabajaron juntas durante las tareas LP no observase la misma evolución, permite afirmar que Geogebra fue el factor responsable de la transformación actitudinal tan positiva experimentada por A9, y también de las mejoras de A10.

Resumiendo la transformación experimentada por cada una de ellas individualmente, puede decirse que A9 mostró una evolución de todas sus actitudes matemáticas y hacia las matemáticas durante el trabajo con Geogebra, que superaron mis expectativas previas y que permiten dar una respuesta afirmativa al objetivo 2 de esta investigación para esta estudiante. Así, entre las actitudes matemáticas destacaron Sistematización, Espíritu Crítico, Perseverancia y Autonomía, por experimentar A9 un avance espectacular en todas ellas, gracias al uso de las TIC. En las actitudes en las que la evolución no fue tan destacable: Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad, se comprobó que Geogebra contribuyó a que tomase decisiones argumentadas, pero no logró despertar en ella la necesidad de buscar más de una forma de resolver las tareas. En lo referente a sus actitudes hacia las matemáticas, su situación inicial dio un giro y se mostró con ganas e ilusión por trabajar en la asignatura, actitud inusual en ella, pues siempre se mostraba desmotivada y apática en matemáticas y manifestaba desagrado por las tareas realizadas. Esperaba una respuesta comportamental positiva al trabajo con el software, pero no una transformación tan espectacular en las demás componentes, como sucedió.

Respecto a A10, su situación previa era bastante positiva y, por ello, la transformación experimentada por esta estudiante no fue tan sorprendente como la de su compañera y se ajustó más a mis pronósticos. Mantuvo niveles elevados en todas las actitudes matemáticas y hacia las matemáticas durante las tareas GG, experimentando un ligero avance en Espíritu Crítico, Perseverancia, Sistematización y Flexibilidad de Pensamiento. Sin embargo, el cambio sufrido en su Creatividad sí que resultó inesperado, pues de no mostrarse nada creativa durante las tareas LP, pasó a comportarse de este modo en casi todas las tareas GG.

El análisis de la relación entre categorías actitudinales para estas estudiantes revela diferencias. Para A9, caso muy similar a A3, su positiva actitud hacia el trabajo con Geogebra en matemáticas le hizo abandonar su comportamiento habitual de no trabajar en clase para implicarse activamente y disfrutar con las tareas realizadas, sintiéndose más capaz en

matemáticas. Es decir, se obtuvo la siguiente relación: una actitud positiva hacia el uso de Geogebra en matemáticas implicó una mejora de sus actitudes hacia las matemáticas que conllevó una mejora de determinadas actitudes matemáticas (Perseverancia y Autonomía). Para A10, cuyas actitudes hacia las matemáticas ya eran positivas antes del trabajo con Geogebra, no tiene sentido hablar de tal relación. La mejora de sus actitudes matemáticas puede achacarse fundamentalmente a ciertos atributos y ventajas del uso del software sobre LP, que también se consideran los causantes de la evolución de las restantes actitudes matemáticas de A9, aspecto que abordaré en el apartado 9.2.2.

Como cierre al análisis de actitudes matemáticas presentado en este apartado para los cinco estudiantes pertenecientes al estudio de casos, expongo las similitudes y diferencias encontradas en la evolución experimentada por unos y otros.

Los perfiles actitudinales de estos estudiantes, previos al trabajo con Geogebra, ya han sido expuestos en reiteradas ocasiones. También he comentado que mis expectativas se vieron superadas en A3 y A9, ajustándose la evolución de A7, A8 y A10 a mis pronósticos, aunque no por ello dejaron de sorprenderme los cambios que esos tres estudiantes experimentaron en ciertas actitudes. Por ello, en lo que sigue, incluyo algunos resultados que aportan una visión global de las actitudes manifestadas por este conjunto de estudiantes.

Atiendo en primer lugar aquellas actitudes matemáticas en las que todos alcanzaron niveles máximos durante el trabajo con Geogebra: Perseverancia, Espíritu Crítico y Precisión y Rigor. En las dos primeras actitudes la situación inicial era bastante negativa, salvo para A10, por lo que para A3, A7, A8 y A9 el cambio experimentado fue sorprendente. En el caso de Precisión y Rigor, se encontró una mejora considerable para A3 y A7, pues A8, A9 y A10 sí que manifestaron esta actitud durante las tareas LP. La siguiente actitud en mejoría fue Sistematización, que también alcanzó porcentajes elevados para todos ellos. Para A3, A7 y A9 estos resultados contrastaban con los bajos o nulos porcentajes obtenidos durante las tareas LP, no representando para A8 y A10 un cambio tan grande, pues solían comportarse de modo sistemático con anterioridad en bastantes ocasiones. Autonomía fue otra de las actitudes en las que todos, a excepción de A7, alcanzaron niveles máximos, lo que supuso una notable evolución para A3, A7 (pasó de ser nada autónoma a serlo en la mitad de las sesiones observadas), A8 y A9, dado su comportamiento previo. En Flexibilidad de Pensamiento sólo A3, A8 y A10 alcanzaron niveles aceptables durante las tareas GG, al considerar los tres indicadores conjuntamente. Considerando cada uno de ellos por separado,

se observó una mejora global en FP3, que fue evidenciada por los cinco estudiantes durante las tareas GG, representando este cambio un progreso destacable para A3, A7, A8 y A9. La actitud en la que se encontraron mayores diferencias entre unos estudiantes y otros, fue en Creatividad, pues todos partían de una situación inicial nula y solamente A3, A8 y A10 obtuvieron niveles aceptables, mientras que para A7 y A9 esta actitud permaneció inalterada.

En lo referente a los factores que influyeron en dicha transformación actitudinal, el análisis ha destacado a Geogebra, como factor más relevante para la mejora experimentada por los cinco estudiantes, mientras que el segundo factor influyente variaba de unos a otros. Para A3 y A7, dado que sus respectivas parejas no resultaron de ayuda, la interacción conmigo fue el segundo factor que intervino en la mejora actitudinal observada. No obstante, entre estos estudiantes también se debe hacer distinción, pues A7 solicitó mi ayuda en numerosas ocasiones, mientras que A3 solamente en alguna situación puntual, por lo que para este estudiante la interacción conmigo no puede considerarse significativa. Para A8 y A9, la interacción con su compañero en las tareas complejas en las que presentaron ciertas dificultades fue beneficiosa y considerada como el segundo factor en importancia. Aún así, hay diferencia entre ambos estudiantes, puesto que A8 recurrió a mi ayuda en algunas de esas situaciones, pudiendo considerar su interacción conmigo relevante en dichas tareas, mientras que para A9 fue suficiente la ayuda de su compañera y raramente solicitó mi presencia. El caso de A10 fue distinto, al considerar la interacción con A9 y conmigo poco influyentes para la mejora en ella observada; es decir, el único factor que pareció ejercer una influencia en ella fue el software. En resumen, de los cinco estudiantes el software fue el protagonista, casi en solitario, de la evolución de A3, A9 y A10, puesto que los restantes factores ejercieron una influencia puntual. Para A7 y A8, además del software, cobró relevancia la interacción conmigo y, para el caso de A8, también la interacción con su compañero A15.

9.1.4. Respuesta Global al Objetivo 2 de la Investigación

Como cierre de los análisis de las actitudes hacia las matemáticas y de las actitudes matemáticas, expuestos para los distintos conjuntos de estudiantes considerados, se ha dado respuesta al objetivo 2 de esta investigación: *analizar las transformaciones que la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de Secundaria*. En este apartado mi intención es aunar todas esas conclusiones y con ello conformar la respuesta global a este objetivo que puede derivarse de la triangulación de todos los análisis realizados.

Recordar que los análisis realizados se han centrado en evaluar el efecto de las variables personales y escolares, de interés para este estudio, descartando la influencia de otras (variables sociales y familiares), lo que puede limitar en cierto modo los resultados obtenidos. No obstante, sí que se han tenido presentes otros aspectos metodológicos como la influencia del tipo de tarea, la gestión del profesor, la metodología de trabajo colaborativo en el aula, así como la novedad del trabajo con TIC. Es decir, en el diseño de las dos secuencias de tareas para ser trabajadas con lápiz y papel y con Geogebra se cuidaron al máximo los anteriores aspectos, para poder informar de la influencia del software en las transformaciones actitudinales de los estudiantes. Así, las dos secuencias de tareas respondían a tareas contextualizadas sobre contenidos geométricos, la labor de la profesora fue la de fomentar el aprendizaje por descubrimiento guiado y ambos tipos de tareas fueron realizadas de modo colaborativo por parejas de estudiantes, para otorgar la mayor fiabilidad posible al análisis realizado. Por otro lado, para evitar que la actitud positiva de los estudiantes hacia el trabajo con Geogebra en matemáticas pudiese achacarse a la novedad de trabajar con el software, los estudiantes realizaron previamente las tareas ISO con el software (durante dos meses), después de las cuales, siguieron mostrando gusto, motivación y confianza en el trabajo realizado en matemáticas con Geogebra durante la realización de las tareas GG.

Empezando por las actitudes hacia las matemáticas, de todos los análisis realizados puede extraerse la misma conclusión: el trabajo con Geogebra contribuyó a su transformación positiva en los estudiantes, influyendo en mayor medida y de manera homogénea, en las componentes comportamental y afectiva de todos ellos. Asimismo, provocó una mejora de la componente cognitiva, aunque ésta no fue experimentada con la misma intensidad por todos los estudiantes. Por otra parte, de la relación encontrada entre actitudes hacia el uso de TIC y actitudes hacia las matemáticas, puede decirse que la gran mayoría de los estudiantes manifestó una adecuada actitud hacia el trabajo con TIC en matemáticas, que les llevó a implicarse más en las tareas y a demostrar mayor gusto por su resolución. También ayudó que muchos de ellos tuviesen más confianza en sus posibilidades de éxito. Es decir, el gusto, motivación y confianza depositado por los estudiantes en el software, como herramienta eficaz para la resolución de las tareas GG, provocó un mayor gusto, motivación, implicación y confianza en matemáticas, que ellos asociaron al manejo de Geogebra.

Estos resultados se han obtenido para el conjunto total de estudiantes y se han confirmado para los estudiantes de la muestra, tanto para los estudiantes pertenecientes al estudio de

casos que he presentado, como para los restantes estudiantes de la muestra, cuyo análisis individualizado no he expuesto pero puede consultarse en el Anexo I. Dichos resultados están en la línea de los obtenidos en otros estudios anteriores, en los que se analizaron mediante cuestionarios las actitudes de los estudiantes hacia los ordenadores en el aprendizaje de las matemáticas. De estos estudios, destaco los realizados por Cretchley y Galbraith (2002) y Gómez-Chacón (2010), que encontraron que en el aprendizaje de las matemáticas con ordenadores existe una correlación más fuerte con las actitudes hacia los ordenadores (en términos de confianza y motivación hacia los ordenadores) que con las actitudes hacia las matemáticas (en términos de confianza y motivación en matemáticas). En este trabajo, las respuestas de los estudiantes coinciden con esta mayor correlación, al atribuir al software Geogebra los cambios positivos experimentados en sus creencias, afectividad y comportamiento en matemáticas; o sea, al asociar estas transformaciones con el manejo del software.

Continuando con las actitudes matemáticas, los análisis realizados para todos los conjuntos de estudiantes revelaron una transformación positiva de estas actitudes en los estudiantes durante el trabajo con Geogebra. A diferencia de las actitudes hacia las matemáticas, para las actitudes matemáticas cobraron relevancia otros factores, además del software, como causantes de tal transformación. Empezando por el factor más influyente para la mayoría de los estudiantes, que resultó ser Geogebra, los análisis han puesto de relieve que ciertos atributos y ventajas del uso del software respecto del trabajo con Lápiz y Papel, que expondré en el apartado siguiente, unidos al gusto y confianza de los estudiantes por su uso en matemáticas, contribuyeron al desarrollo de actitudes matemáticas tales como Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor y Autonomía, manifestando los estudiantes niveles elevados de desarrollo de tales actitudes. El software ayudó a comportarse de un modo más Sistemático a muchos de los estudiantes, pero no a la mayoría de ellos, y también fomentó la Flexibilidad de Pensamiento y la Creatividad durante todas las sesiones para unos pocos estudiantes, aunque no puede afirmarse que Geogebra contribuyera directamente al desarrollo de esta última. Para estos estudiantes, que no alcanzaron un desarrollo óptimo de todas sus actitudes como consecuencia del trabajo con Geogebra, se encontraron otros factores como la interacción entre compañeros y la interacción con la profesora, que ejercieron influencia, en algunos casos puntual y en otros más notable, para el desarrollo de aquellas actitudes que se vieron menos potenciadas por el trabajo con Geogebra (Sistematización, Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad). Asimismo, en algunos casos particulares, tuvo un efecto positivo

sobre el Espíritu Crítico. De todo lo anterior, se puede concluir que el trabajo con Geogebra en matemáticas resultó efectivo para favorecer el desarrollo de actitudes matemáticas en los estudiantes, aunque, como era de esperar, no en todas las actitudes ni en todos los estudiantes produjo el mismo efecto.

Los resultados anteriores están en la línea de los obtenidos en los escasos estudios encontrados que trabajaron el tema del desarrollo de las actitudes matemáticas con TIC. Entre ellos, destaco nuevamente la investigación de Ursini, Sánchez, Orendain y Butto (2004), que analizó cómo se ve afectado, según los profesores, el comportamiento de los estudiantes cuando se usa la tecnología para apoyar la enseñanza de las matemáticas. Según los profesores, después de tres años en el proyecto EMAT⁷², la gran mayoría de los estudiantes, sin distinción de sexo, tenían una buena capacidad para analizar los problemas que se les planteaban y para interpretar las hojas de trabajo, mostraban tener más iniciativa que sus compañeros con menos tiempo en el proyecto (es decir, con menos tiempo trabajando en matemáticas con tecnologías), eran más dedicados al trabajo, defendían mejor sus ideas y tenían una actitud más creativa al enfrentarse a los problemas que se les planteaban. Buscando las similitudes y diferencias de los resultados de este estudio con los obtenidos en el presente trabajo, se encuentra coincidencia en todos los aspectos salvo en la actitud creatividad, cuya evolución fue señalada por los autores al mismo nivel que la de las restantes actitudes y sin embargo, en nuestro estudio la creatividad se desarrolló en menor grado durante el trabajo con Geogebra. Existen varias razones para explicar la diferencia de resultados en esta actitud. Por una parte, ya he comentado que no todas las tareas potenciaban el desarrollo de la Creatividad y, además, los estudiantes no contaban con un entrenamiento previo en el trabajo creativo en matemáticas. Por otra parte, se emplearon distintos instrumentos de recogida de información, que permitieron análisis de diferente nivel de profundidad de la situación. Así, los mencionados autores obtuvieron sus resultados de los análisis de las opiniones de los profesores (quienes calificaron a sus estudiantes en relación con los aspectos señalados) y de una entrevista semiestructurada a cuatro de ellos, mientras que los de esta investigación se han obtenido del análisis de variados instrumentos, que permitieron recoger en mayor detalle la actuación de los estudiantes mientras trabajaban con Geogebra la resolución de problemas, y han permitido indagar acerca de la evolución de cada actitud sistemáticamente. En nuestro caso, los análisis realizados han permitido afirmar que

⁷² Desde 1997 la Secretaría de Educación Pública en México ha promovido el proyecto nacional EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología) usando computadoras y calculadoras TI-92 para apoyar la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria (alumnos entre 12 y 15 años de edad).

algunos estudiantes desarrollaron su creatividad durante la experiencia con el software, pero esta evolución no se produjo de forma homogénea para todos los estudiantes, como sí que parecen indicar los resultados obtenidos por los mencionados autores, aunque tampoco sabemos si en su caso influyeron otras variables, además de las TIC.

Respecto a la relación encontrada entre categorías actitudinales, los análisis realizados para el estudio de casos permiten afirmar que para aquellos estudiantes con actitudes negativas hacia las matemáticas, el gusto y la confianza en Geogebra como herramienta adecuada para la resolución de problemas les llevo a transformar dichas actitudes durante su uso, exhibiendo gusto, implicación y autoconfianza en matemáticas. Esta afirmación puede extrapolarse a la mayoría de los estudiantes participantes en la experiencia, pues quedó recogida en los cuestionarios, entrevistas y buzones de sugerencias. Asimismo, se ha encontrado otra relación de dependencia entre mejora de las actitudes hacia las matemáticas y mejora de ciertas actitudes matemáticas como Perseverancia o Autonomía para la mayoría de los estudiantes. Para las restantes actitudes, las características o atributos del software ejercieron un mayor peso para su transformación positiva que el hecho de disfrutar y mostrarse motivados y confiados en matemáticas, transformación provocada a su vez por una adecuada actitud hacia el trabajo con TIC en matemáticas.

9.2. CARACTERÍSTICAS DE GEOGEBRA ASOCIADAS A LA TRANSFORMACIÓN ACTITUDINAL

En este apartado se presentan, una vez expuestos los análisis de las transformaciones de las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes, los atributos y ventajas que dichos análisis han asociado con tal transformación. Con ello se da respuesta al objetivo 3 de este estudio: *identificar las características de Geogebra que pueden influir en la transformación de determinadas actitudes relacionadas con las matemáticas.*

Los análisis realizados en los apartados anteriores de este capítulo han ido mostrando las transformaciones actitudinales de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra (objetivo 2) y, al mismo tiempo, cuáles de los factores y ventajas que pueden atribuirse a este software se pusieron de relieve en el aula e influyeron en dicha mejora. Así, para dar respuesta al objetivo 3 se analizaron para cada conjunto de estudiantes los mismos instrumentos que para dar respuesta al objetivo 2. Para su exposición en este apartado, se utiliza como marco de

referencia la Figura 2-1, incluida en el capítulo 2.3, que resume los atributos, ventajas y limitaciones atribuidas al uso de los SGD en el aula, la cual retomo a continuación:

<p style="text-align: center;"><i>Atributos</i></p> <ol style="list-style-type: none">1. Constructividad: posibilidad de construir y crear micromundos que permiten conjeturar (posibilidad de actuar por ensayo-error).2. Navegabilidad: posibilidad de explorar libre y flexiblemente.3. Interactividad: retroalimentación inmediata y efectiva que permite la toma de conciencia y conciliación de los errores cometidos.4. Interfaz: modo de capturar la acción y atención del aprendiz.5. Facilidad de uso y rapidez de respuesta: animan a la búsqueda de distintas estrategias de solución.6. Precisión: ejecuta las acciones del usuario con precisión y rigor.
<p style="text-align: center;"><i>Ventajas</i></p> <ol style="list-style-type: none">7. Función formativa global: ayudan a transmitir valores educativos y actitudes: cooperación, implicación emocional, intensidad del esfuerzo exigido, etc.8. Función motivadora: gusto por el trabajo con el software.9. Permiten que prime la reflexión y el análisis de resultados porque se requiere menos tiempo para hacer representaciones y cálculos.10. Potencian el trabajo autónomo del estudiante, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal, al tiempo que favorecen el trabajo en equipo.11. Obligan a pensar y razonar los problemas en términos de propiedades matemáticas.12. Motivan al alumnado en la búsqueda de demostraciones y facilita este proceso al posibilitar la generación de modo rápido y sencillo de gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar.13. Ofrecen la posibilidad de testar ideas, recibir feedback o manipular objetos (representaciones manipulables o ejecutables mediante dragging), que se consideran principios necesarios como apoyo para la resolución de problemas.14. Mejoran el aprendizaje de contenidos geométricos: mejoran la visualización (las representaciones mentales y la conexión entre distintas formas de representación) y la contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos.
<p style="text-align: center;"><i>Peligros o limitaciones</i></p> <ol style="list-style-type: none">15. Dependencia tecnológica: caer en el error de atribuir a los medios tecnológicos más importancia de la que tienen, pues no dejan de ser recursos que deben estar al servicio del proceso educativo, pero no a la inversa. Para evitar esta dependencia, debemos fomentar su uso adecuado.16. Confundir manipulación con conocimiento matemático, típico de cuando se adquiere un aprendizaje memorístico consistente en el almacenamiento de algoritmos, definiciones y teoremas, en vez de una construcción de las matemáticas para la resolución de problemas.17. Dificultad en la gestión del tiempo en caso de producirse problemas técnicos.

Con la intención de ser lo más concisa posible, expongo las conclusiones que se derivan del proceso de triangulación de las características destacadas para cada conjunto de estudiantes en cada actitud. Es decir, sintetizo toda la información recogida en forma de respuesta al objetivo, diferenciando para cada una de las dos categorías actitudinales objeto de investigación.

9.2.1. Características de Geogebra Asociadas a la Transformación de Actitudes Hacia las Matemáticas

Expongo cuáles de los atributos, ventajas e inconvenientes del uso de Geogebra como herramienta de trabajo en matemáticas se pusieron de manifiesto para el desarrollo de cada componente actitudinal durante dichas sesiones de aula, siguiendo el orden habitual: cognitiva, afectiva y comportamental. Después atenderé las actitudes de los estudiantes hacia el uso de Geogebra en matemáticas.

Componente cognitiva

Los análisis realizados revelan que el atributo de Geogebra que ejerció mayor influencia para el desarrollo de la autoconfianza de los estudiantes fue la constructividad; es decir, la posibilidad que brinda el software al estudiante de construir y tener actividad en todo momento (Sánchez, 2001). Estos resultados se obtuvieron para el conjunto total de estudiantes y se confirmaron para los estudiantes de la muestra, quienes manifestaron que este atributo de Geogebra les permitió estar activos y actuar con mayor autonomía, haciéndoles ganar en confianza.

Por su parte, el estudio de casos realizado también asocia esta característica del software a la mejora de la componente cognitiva de los cinco estudiantes. Para ellos, la posibilidad de construir, hacer, y tener actividad en todo momento los incitó a continuar trabajando en las tareas durante más tiempo. Por otro lado, el ir comprobando cómo eran capaces de resolverlas les fue haciendo sentirse más seguros, lo que reforzó su autoconcepto en matemáticas.

Los análisis más detallados, realizados para la muestra de estudiantes y estudio de casos, revelaron la existencia de otro atributo de Geogebra que también contribuyó a la mejora de esta componente y que la lectura de los diarios grupales confirma: la interactividad o retroalimentación inmediata y efectiva que permite la toma de conciencia y conciliación de los errores cometidos. Para muchos de los estudiantes, la retroalimentación recibida por el programa cuando experimentaban o testaban alguna hipótesis, incluso en ausencia de una

estrategia de resolución definida, les ayudó a vencer las situaciones de bloqueo que experimentaron en algunas tareas. Al mismo tiempo, el feedback inmediato y continuo ofrecido por el software, les informaba de la bondad de sus estrategias y acciones, haciéndoles ganar cierta confianza en poder resolver las tareas por sí mismos.

Componente afectiva

Para la transformación de esta componente, ya se ha resaltado en numerosas ocasiones que el gusto que manifestaron los estudiantes por el trabajo con Geogebra en matemáticas condujo a muchos de ellos a disfrutar de las tareas realizadas y también de la asignatura. Estos resultados se confirmaron para todos los conjuntos de estudiantes. En otras palabras, los análisis asocian la mejora de esta componente a la función motivadora de Geogebra (gusto por el trabajo con el software). Coincidió así con otros autores ya citados, como Zabalza (1989), Alemán de Sánchez (2002) o Preiner (2008), quienes encuentran que una de las ventajas del uso de TIC en el aula es su función motivadora.

Componente comportamental

Para todos los estudiantes se asoció la función motivadora a la mayor participación e implicación en la construcción de su propio aprendizaje en matemáticas. Si bien, para la mayoría de ellos, a esta mejora también contribuyó otro de los atributos de Geogebra: su facilidad de uso y rapidez de respuesta, que los animó en la búsqueda de distintas estrategias de resolución. En resumen, el gusto por la herramienta ayudó a que todos los estudiantes se implicasen más en las tareas, y su facilidad de uso y rapidez de respuesta contribuyó a que muchos de ellos no se limitasen a la búsqueda de una solución, sino que les incitó a buscar distintos modos de hacerlo y les hizo disfrutar de los problemas trabajados, aún cuando a priori tenían dificultades para resolverlos. Por ejemplo, Geogebra les permitió avanzar rápidamente en la construcción de cada mosaico, lo que posibilitó la creación de varios modelos en cada tarea. De este modo, el software hizo más atractiva para los estudiantes la tarea, que con LP les hubiese resultado menos motivadora, al necesitar invertir mucho más tiempo y esfuerzo para realizar dichas construcciones con Precisión y Rigor.

Actitud hacia las TIC

Nuevamente, aludo a la facilidad de uso y rapidez de respuesta de Geogebra como uno de los atributos del software que contribuyó a que los estudiantes demostrasen gusto y confianza en su uso para la resolución de tareas en matemáticas. Además, el efecto de este gusto y motivación que los estudiantes manifestaron por el uso del software como herramienta de

trabajo en matemáticas fue la positiva transformación de las componentes cognitiva, afectiva y comportamental. Es decir, se halló una relación unidireccional entre actitud favorable hacia el uso de Geogebra y mejora de actitudes hacia las matemáticas, como conclusión de los análisis mostrados en el apartado anterior.

Para finalizar, sintetizo en la siguiente figura lo anteriormente expuesto en relación al objetivo 3, de identificar las características de Geogebra que influyeron en la transformación de las actitudes hacia las matemáticas experimentada por los estudiantes:

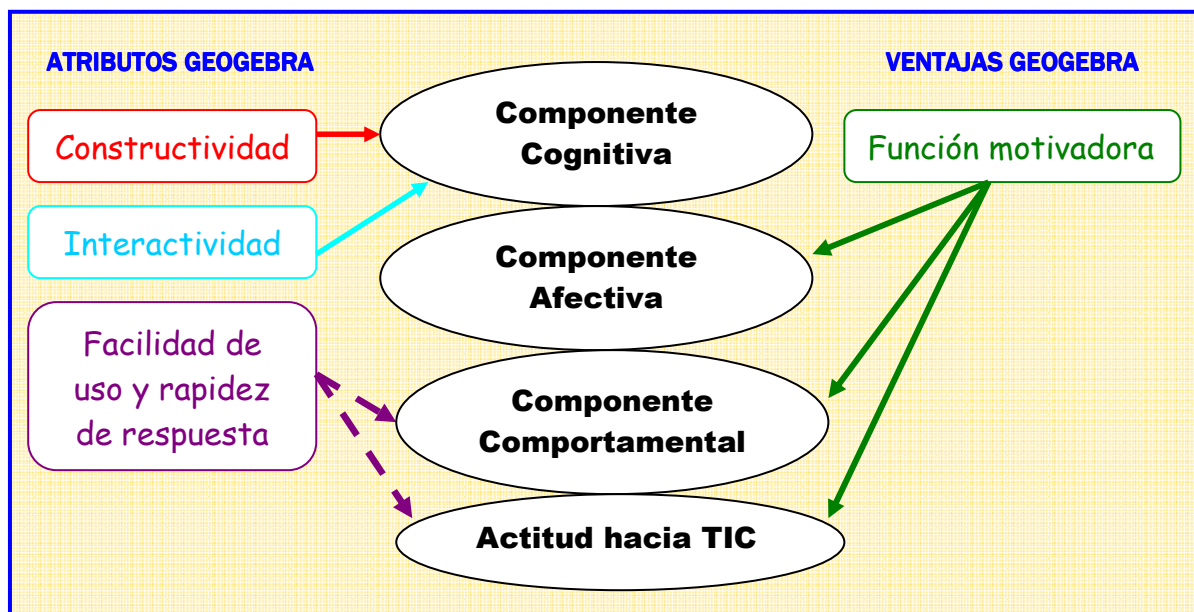


Figura 9-28. Características de Geogebra asociadas al desarrollo de actitudes hacia las matemáticas

La figura anterior resume la información presentada por separado para dichas actitudes, como consecuencia de la triangulación de los distintos análisis realizados. Este proceso ha permitido identificar las características del software asociadas a las transformaciones actitudinales experimentadas por la mayoría de los estudiantes. Es decir, la información recogida en la figura puede considerarse como el esquema base, que refleja las características asociadas a cada actitud considerando globalmente al total de estudiantes, admitiendo ligeras variaciones para cada alumno en particular. Sin embargo, al analizar los estudiantes pertenecientes al estudio de casos, se ha corroborado para todos ellos la información recogida en el esquema base.

9.2.2. Características de Geogebra Asociadas a la Transformación de Actitudes Matemáticas

Expongo cuáles de los atributos, ventajas e inconvenientes del uso de Geogebra como herramienta de trabajo en matemáticas se pusieron de manifiesto para el desarrollo de cada una de las actitudes matemáticas estudiadas, siguiendo el mismo orden en que se expusieron y caracterizaron en el capítulo 3 (pp. 80-88).

Flexibilidad de pensamiento

En esta actitud la mayoría de los estudiantes experimentó una evolución en FP3: *Cambia de opinión en base a argumentos convincentes* y algunos de ellos también lo hicieron en FP1: *Resuelve el problema de más de una forma*.

En lo que respecta a la transformación de los estudiantes de la actitud FP3, la interactividad o retroalimentación ofrecida por el software tras cada acción de los estudiantes destacó como atributo asociado a dicha transformación. La interactividad entre alumnos y software permitía a éstos extraer información acerca de la bondad de sus argumentaciones o estrategias, lo que les llevaba a cambiar de vía (justificadamente), en caso de considerarlo necesario.

En lo referente a la evolución de algunos estudiantes en la actitud FP1, coincido con Preiner (2008) en que la facilidad de uso y rapidez de respuesta de Geogebra contribuyó a que estos estudiantes resolvieran las tareas de diferentes formas, o al menos se animaran a intentarlo. Ello se debe a que permitió que primara la reflexión y el análisis de resultados, al disminuir el tiempo que necesitaron para los cálculos y representaciones de mosaicos, siendo ésta una ventaja del trabajo con Geogebra que se asoció, junto con los dos atributos anteriores, a la mejora de los estudiantes de esta actitud.

Espíritu Crítico

A la mejora de esta actitud en los estudiantes contribuyeron conjuntamente dos atributos de Geogebra. Por una parte, la precisión del software al realizar cálculos y representaciones los llevó a confiar en los resultados obtenidos, siendo conscientes de que, de existir error, éste se debía a una actuación inadecuada por su parte (falta de precisión y/o estrategia de resolución inadecuada). Ello les impulsó a buscar el error y solucionarlo, mostrándose más críticos que cuando resolvieron las tareas con lápiz y papel. Por otra parte, la interfaz gráfica del software favoreció la visualización de las propiedades geométricas, gracias a su claridad de exposición, al tiempo que contribuyó a capturar la acción y atención del aprendiz. En resumen, la precisión de Geogebra para ejecutar las acciones de los estudiantes y la

posibilidad de comprobar visualmente la bondad de las mismas, les llevó a ser conscientes de la naturaleza de sus errores, permitiéndoles actuar en consecuencia. Con LP muchos estudiantes no se comportaban de un modo crítico, porque no identificaban que existía un error, o aún siendo conscientes de su existencia, no sabían de dónde provenía por lo que no intentaban solucionarlo.

Perseverancia

La mejora de esta actitud se asoció con la constructividad de Geogebra, que brindó a los estudiantes la oportunidad de actuar por ensayo-error cuando no tenían una estrategia de resolución definida, así como de generar gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar de un modo sencillo; ello les mantuvo trabajando en las tareas hasta concluir las. También el gusto por trabajar con los ordenadores y sentirse competentes en el manejo de la herramienta les dio confianza para investigar posibles caminos de resolución y les hizo estar concentrados durante más tiempo en la tarea; por lo que también para esta actitud cobró relevancia la función motivadora del software. Resumidamente, puede decirse que el gusto y confianza que los estudiantes manifestaron por la resolución de problemas con Geogebra, unidos al hecho de que el software permitiera a los estudiantes probar sus conjeturas, ofreciéndoles la posibilidad de deshacer y rehacer, les llevó en muchas de las ocasiones a aventurarse en testar una idea, aunque no estuviesen convencidos de su adecuación (conscientes de que en caso de no serlo no habrían invertido demasiado tiempo y esfuerzo en ello). De este modo, Geogebra contribuyó a que se mostrasen más perseverantes que cuando trabajaron con lápiz y papel.

Precisión y rigor

La mejora experimentada en esta actitud por los estudiantes se asoció a dos de los atributos de Geogebra: su precisión en los cálculos y representaciones y su facilidad de uso y rapidez de respuesta. Ambas características contribuyeron a que los estudiantes realizaran las construcciones gráficas sin emplear mucho tiempo y esfuerzo. También la función motivadora del software se puso de relieve, ya que el gusto por el uso de Geogebra les impulsó a implicarse más en las tareas, despertando en muchos de los estudiantes la necesidad de realizar todas las tareas de modo riguroso y preciso. A diferencia de lápiz y papel, con este programa pudieron rehacer y deshacer las tareas tantas veces como fue necesario, hasta lograr el grado de Rigor y Precisión adecuado. No obstante, cuando trabajaron las tareas LP, muchos estudiantes se contentaron con respuestas aproximadas, a

veces por desconocer la raíz de su imprecisión, a veces por considerar que un error de cálculo no era importante. En síntesis, el gusto por el trabajo con Geogebra, así como su precisión, facilidad de uso y rapidez de respuesta, les motivó para resolver las tareas de un modo más riguroso. Ello, a su vez, les llevó a deshacer aquellas representaciones y cálculos que no eran del todo precisos, así como a plantearse si la estrategia considerada era adecuada o no.

Creatividad

Aunque los análisis expuestos en el apartado anterior concluyeron que la herramienta por sí misma no contribuyó a la evolución de esta actitud en la mayoría de los estudiantes, sí que se detectó, para aquellos que la manifestaron durante el trabajo con Geogebra, que el software contribuyó a que se mostrasen más flexibles de pensamiento y autónomos. Esta mejora actitudinal pudo tener repercusión en dicha transformación positiva de su Creatividad. Es decir, el software no ejerció un efecto directo sobre la mejora de esta actitud, pero sí que pudo contribuir a ello de forma indirecta al potenciar otras actitudes que impulsaron su desarrollo.

Autonomía

Dos atributos de Geogebra se asociaron al comportamiento más autónomo de los estudiantes durante la resolución de las tareas con Geogebra: su navegabilidad y su constructividad. En efecto, las posibilidades que ofrecía el software a los estudiantes de explorar libremente (navegabilidad) distintas estrategias, junto con la constructividad, que les permitía estar activos en todo momento, fueron dos de los atributos de la herramienta que más incidieron en el desarrollo de esta actitud, haciendo que los estudiantes se responsabilizasen más de su propio aprendizaje. Por otra parte, al desarrollo de esta actitud también se asoció una de las ventajas de usar este software, la de otorgar mayor autonomía a los estudiantes, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal y favoreciendo el trabajo en equipo. El efecto de estos atributos y ventajas de Geogebra fue visible para todos los estudiantes, pues durante la realización de las tareas GG cambiaron su modo de actuar en relación con la resolución de problemas: primero probaban a resolver cada tarea con sus respectivas parejas, testando distintas estrategias, y solamente en aquellas tareas en las que tras varios intentos fallidos seguían sin llegar a la respuesta buscada, solicitaban ayuda externa a otros compañeros o a la profesora. Por el contrario, durante las tareas con lápiz y papel, la mayoría de los estudiantes se bloqueaban después de leer el enunciado de la tarea y solicitaban ayuda inmediatamente, sin ni siquiera poner en práctica por sí mismos alguna estrategia o recurrir al ensayo-error.

Sistematización

La interactividad de Geogebra fue el atributo más influyente para el desarrollo de esta actitud en los estudiantes, puesto que la posibilidad de manipular las construcciones dinámicamente, les ofreció feedback en tiempo real que les condujo en muchos casos a confirmar o rechazar sus hipótesis, ayudándoles a descubrir qué propiedades geométricas se conservaban al deformar las construcciones y ello les ayudó a sintetizar sus hallazgos y el modo en que los habían obtenido. Por otra parte, contribuyó a establecer una relación constante entre las acciones de los estudiantes y su ejecución con Geogebra, que les ayudó a ir decidiendo en cada momento cuál sería el siguiente paso. En resumen, la retroalimentación inmediata proporcionada por el programa a los estudiantes tras cada una de sus acciones (es decir, mientras se encontraban trabajando en la resolución de una tarea) les ayudó a reconducir sus actuaciones (SS17. *Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar*) hasta encontrar una respuesta adecuada, permitiéndoles además explicar cómo habían llegado a obtenerla (SS19. *Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados*).

Para finalizar, sintetizo en la siguiente figura lo anteriormente expuesto en relación al objetivo 3, de identificar las características de Geogebra que influyeron en la transformación de las actitudes matemáticas experimentada por los estudiantes:

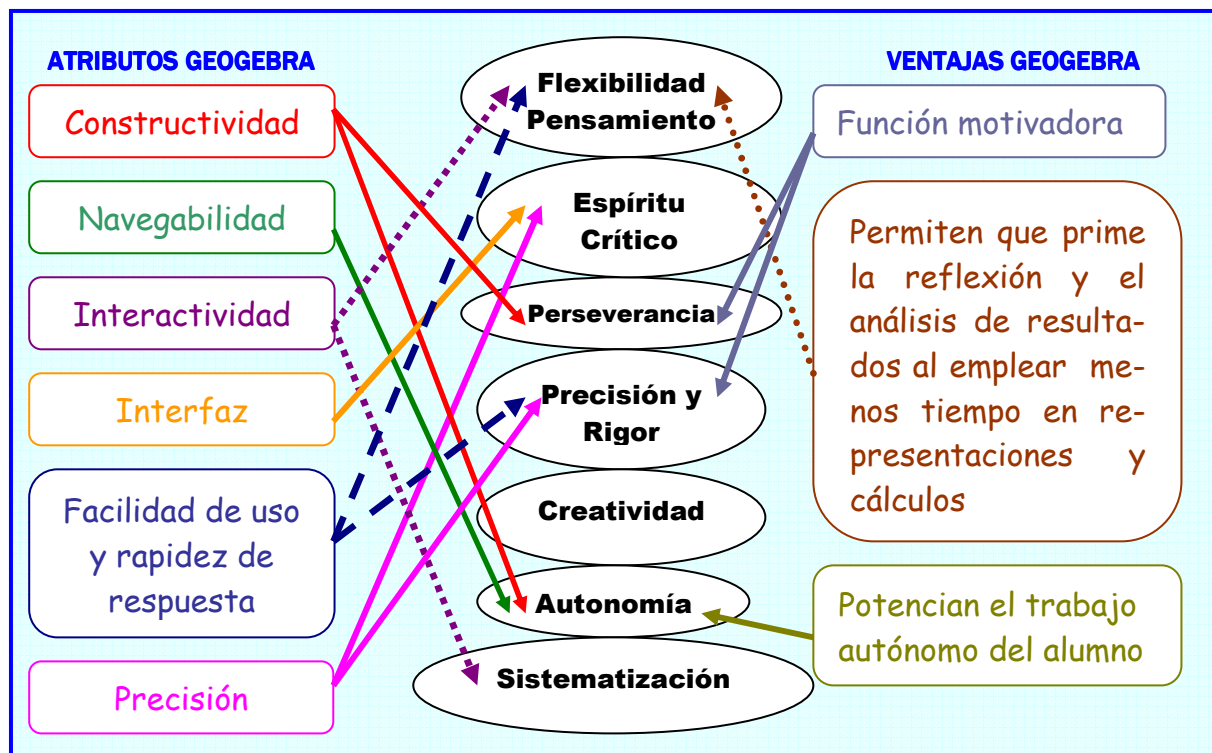


Figura 9-29. Características de Geogebra asociadas al desarrollo de actitudes matemáticas

Al igual que para las actitudes hacia las matemáticas, la figura anterior puede considerarse como el esquema base, que refleja las características asociadas a cada actitud matemática, considerando globalmente el total de estudiantes. Para esta categoría actitudinal, el esquema anterior sí que admite ligeras variaciones para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos. Por ejemplo, para A3 la función motivadora del software contribuyó no solamente a desarrollar las actitudes señaladas en el esquema, sino que también incidió en su Autonomía. Para A10, la ventaja de fomentar la reflexión y el análisis de resultados ofrecida por el software, al necesitar menos tiempo para realizar representaciones y cálculos, contribuyó no solamente a potenciar su Flexibilidad de Pensamiento, sino también su Creatividad durante las tareas GG.

Como cierre del análisis realizado sobre las características de Geogebra que se pusieron de relieve durante la experiencia, añadiré, en referencia a los inconvenientes de usar Geogebra en el aula (recogidos en la Figura 2-1 expuesta en p. 392), que no se produjeron y, por ello, no se han mencionado hasta ahora. Se puede afirmar que los estudiantes no cayeron en la dependencia tecnológica, sino que realizaron un uso adecuado del software. Tampoco confundieron manipulación con conocimiento matemático, dado que durante las tareas se les exigió que comunicaran justificadamente el modo en que habían resuelto cada tarea y así lo hicieron. El único inconveniente que se produjo puntualmente fue la pérdida de tiempo para la realización de las tareas asociado a problemas técnicos. No obstante, esta situación fue inusual, no pudiendo considerarse como un inconveniente real para el desarrollo de esta investigación.

9.2.3. Respuesta Global al Objetivo 3 de la Investigación

En los apartados 9.2.1 y 9.2.2 he dado respuesta al objetivo 3 de esta investigación, en referencia a características de Geogebra asociadas a las transformaciones experimentadas por los estudiantes en sus actitudes hacia las matemáticas y en sus actitudes matemáticas, respectivamente. En el presente apartado expongo una respuesta global a dicho objetivo, fruto de la triangulación de toda la información recogida con este fin.

Los análisis realizados de la información recogida durante la experiencia con Geogebra para los distintos conjuntos de estudiantes revelaron que ciertas características del software pueden asociarse a la evolución que muchos estudiantes experimentaron, en todas o algunas de sus actitudes durante el trabajo con esta herramienta. De estos resultados, además de la

información presentada en los apartados anteriores, pueden extraerse algunas conclusiones acerca de los atributos y ventajas del software que contribuyeron en mayor medida al desarrollo actitudinal de los estudiantes. Empezando por los atributos de Geogebra, destacaron su constructividad, interactividad y su facilidad de uso y rapidez de respuesta, como los tres que ejercieron una mayor influencia en la transformación positiva de las actitudes relacionadas con los estudiantes. En lo referente a las ventajas del software, que adquirieron mayor relevancia durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, destacó en solitario su función motivadora. Las cuatro características señaladas se asociaron al desarrollo de ambas categorías actitudinales, de ahí su relevancia. La constructividad, ayudó a los estudiantes a sentirse activos durante las tareas, evitando los habituales bloqueos que experimentaron cuando realizaron las tareas con lápiz y papel. Además, les permitió actuar por ensayo-error, en ausencia de una estrategia clara de resolución. La interactividad o retroalimentación ofrecida en tiempo real contribuyó a que pudiesen comprobar la bondad de sus acciones, redirigiendo sus procesos mentales hasta llegar a la respuesta adecuada. La facilidad de uso y rapidez de respuesta del software, junto con el gusto de los estudiantes por su manejo (función motivadora), facilitó la realización de los cálculos y representaciones gráficas. Al reducir el tiempo necesario para ello, contribuyó a que se mantuviesen implicados en las tareas durante más tiempo y evitó que se desmotivasen, como era habitual cuando trabajaron con lápiz y papel.

Estos resultados se han obtenido para el conjunto total de estudiantes y se han confirmado para los estudiantes de la muestra, tanto para los cinco estudiantes pertenecientes al estudio de casos que se ha presentado, como para los siete restantes, cuyo análisis individualizado no se ha expuesto pero puede consultarse en el Anexo I. Dichos resultados subrayan la importancia de la función motivadora atribuida a las tecnologías por Zabalza (1989), que ya se puso de relieve en los ciclos 0 y 1 de esta investigación. Asimismo, los resultados han confirmado la relevancia, para el desarrollo actitudinal de los estudiantes, de los atributos genéricos que según Sánchez (2001) poseen los software de Geometría dinámica, lo que los hace especialmente adecuados para ser usados en el aula de matemáticas.

Para finalizar este apartado, me gustaría añadir una reflexión final acerca de la bondad de Geogebra para potenciar una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes. En primer lugar, decir que la herramienta resultó de utilidad tanto para mejorar las actitudes hacia las matemáticas como las actitudes matemáticas de los

estudiantes, sin embargo no produjo el mismo efecto duradero en ambas. El uso de Geogebra provocó una transformación positiva de las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, que éstos confirmaron durante la experiencia con el software y atribuyeron a su uso. Asimismo, el uso del software, gracias a los atributos y ventajas señaladas con anterioridad, provocó un desarrollo de las actitudes matemáticas en los estudiantes, acorde con las posibilidades de cada uno, que muchos de los estudiantes siguieron exhibiendo después del trabajo con Geogebra. Es decir, el software contribuyó a despertar en muchos de los estudiantes la necesidad de manifestar dichas actitudes y les ayudó a comprender la importancia y las ventajas (para la resolución de problemas matemáticos) de comportarse de ese modo, lo que les llevó a seguir manifestando todas o algunas de estas actitudes en futuras actividades matemáticas (en especial, la Perseverancia y la Precisión y Rigor). Esta última afirmación acerca de ciertas actitudes matemáticas, cuya transformación positiva (provocada por el uso de Geogebra) fue más duradera, procede de mi observación de ambos grupos de estudiantes durante el desarrollo de las unidades didácticas trabajadas con lápiz y papel, posteriormente a la puesta en práctica de la secuencia de tareas GG realizada con Geogebra, observación que, aunque no fue sistemática ni quedó recogida en las parrillas de observación, sí me permitió tener una idea global de tales actitudes.

Las conclusiones anteriores conducen a la siguiente y última de este capítulo: Geogebra, con sus atributos y ventajas sobre métodos más tradicionales de lápiz y papel, se ha mostrado un software muy eficiente para potenciar una mejora actitudinal de los estudiantes. Por tanto, la experiencia de trabajar el campo actitudinal con este software puede considerarse exitosa.

En el próximo capítulo se presenta el análisis del desarrollo de competencias experimentado por los estudiantes durante el trabajo con el software.

CAPÍTULO 10

Análisis de competencias

En este capítulo se presenta el análisis de competencias realizado sobre los datos recogidos durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, para dar respuesta a los objetivos 4 y 5 de esta investigación. En la primera parte del capítulo, se describe el progreso realizado por los estudiantes en las siete competencias que aborda este trabajo (objetivo 4). Para su exposición, se mantiene la misma estructura empleada para el análisis de actitudes (capítulo 9). En primer lugar, se exponen los resultados de la triangulación de la información recogida mediante distintos instrumentos, atendiendo a los conjuntos de estudiantes analizados: total de estudiantes, muestra de estudiantes y estudio de casos. Este proceso permite informar del desarrollo de competencias observado en cada uno de ellos, así como de la posible relación entre transformación de actitudes y desarrollo de competencias matemáticas. Después, se triangulan los resultados obtenidos para cada uno de los tres conjuntos, respondiendo así al objetivo 4. La segunda parte del capítulo se dedica a describir qué factores del software Geogebra contribuyeron al desarrollo de competencias en los estudiantes, que da respuesta al objetivo 5 de esta investigación.

10.1. ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS DURANTE EL TRABAJO CON GEOGEBRA

En este apartado se presenta el análisis de los datos recogidos para los estudiantes con los que se llevó a cabo la experiencia, que permite dar respuesta al objetivo 4 de este estudio: *describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de Secundaria al implementar la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra.*

Para ello, en primer lugar, expongo el perfil cognitivo de los dos grupos de estudiantes. El grupo 3º A (24 estudiantes) tenía un rendimiento que podía considerarse adecuado. Un considerable porcentaje de los estudiantes obtuvo una evaluación positiva durante el primer trimestre, en el que se repasaron y ampliaron los contenidos del bloque de Números, ya

trabajados en cursos anteriores. El 45.83% obtuvo una calificación de Insuficiente, el 37.5% una calificación de Suficiente-Bien y el 16.67% una calificación de Notable-Sobresaliente. El grupo de 3º B (22 estudiantes) difería del anterior en su nivel de rendimiento, pues éste era muy bajo y la gran mayoría de los estudiantes presentaban dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. Sus calificaciones durante el primer trimestre fueron: Insuficiente el 68.18%, Suficiente-Bien el 22.73% y Notable el 9.09%. No hubo ningún estudiante con calificaciones superiores a éstas.

Los análisis se exponen comenzando por el análisis del total de estudiantes, a continuación el análisis global de los 12 estudiantes de la muestra y, por último, el análisis de los cinco estudiantes pertenecientes al estudio de casos, que se ha realizado en mayor profundidad que los anteriores.

10.1.1. Análisis del Total de Estudiantes

El análisis de competencias a nivel grupal se centró en la información recogida en mis diarios de cada grupo, en los protocolos escritos de resolución y en los archivos de Geogebra de cada tarea para cada pareja de estudiantes. Los restantes instrumentos (buzones de sugerencias y entrevistas grupales) no aportaron datos acerca del desarrollo individual de cada competencia, si bien mostraron una visión positiva del rendimiento de los estudiantes durante la experiencia con Geogebra. Resumidamente, expongo algunos resultados acerca de la mejora reflejada en tales instrumentos, empezando por éstos últimos.

El análisis de las dos entrevistas semiestructuradas, realizadas a cada grupo de estudiantes por la directora de tesis, ofreció una visión muy favorable de los estudiantes respecto del trabajo realizado con Geogebra. La mayoría de las intervenciones de los alumnos hicieron referencia a un mayor rendimiento en matemáticas usando el ordenador que con lápiz y papel, por ello expongo algunas de tales aportaciones, que pueden considerarse una muestra del sentir general del total de estudiantes:

“Con el ordenador aprendemos más y más rápido porque aprendemos a usar el ordenador, también aprendemos a hacer las cosas de matemáticas y mucho más rápido que si lo hiciéramos con Lápiz y Papel” (afirmación de A2 de 3º A que fue apoyada por la mayoría de los restantes estudiantes de este grupo)

“Es más rápido comprender y aprender las matemáticas con el ordenador y trabajando con el compañero (afirmación de A32 de 3º B)

Analizando las opiniones que los estudiantes expusieron en los buzones de sugerencias, se obtiene un balance bastante satisfactorio de la experiencia con Geogebra. De las 31 opiniones que hacían referencia al desarrollo cognitivo experimentado durante el trabajo con el software, 28 de ellas (el 90.32%) apuntaban a una visión positiva, pues los estudiantes afirmaron haber comprendido con mayor facilidad los contenidos trabajados gracias al uso de Geogebra. Únicamente tres de ellos no compartieron la opinión del resto de alumnos, manifestando preferir trabajar con lápiz y papel porque les resultaba más sencillo. Expongo, a modo de muestra de las 28 opiniones referentes a una mejora de rendimiento gracias al uso de Geogebra, las siguientes:

Opinión de A1: Me ha gustado mucho lo de hacer las mates con el ordenador porque así mejoramos nuestro rendimiento, nos gustan más, se nos pasa más rápido el tiempo y nos esforzamos más y nos lo pasamos mejor.

Opinión de A26: Me ha parecido muy bien trabajar con los ordenadores. Me gustaría seguir trabajando con los ordenadores. Yo pienso que se aprende mucho con el programa Geogebra. 😊

Análisis de los Diarios

Los diarios, uno para 3º A y otro para 3º B, los fui escribiendo al término de cada sesión con cada grupo, dedicando un apartado al desarrollo de competencias matemáticas, como se expuso en la página 192. Este apartado es el que ahora analizo, aunque también se consideró de utilidad la información recogida en el último apartado dedicado a *mi experiencia* (valoración personal del modo en que se desarrolló la sesión e información considerada importante no recogida en los apartados previos). Se revisaron las entradas de las 13 sesiones con Lápiz y Papel (o sesiones LP) y también de las 12 sesiones con Geogebra (o sesiones TIC), que correspondían a las tareas GG. En ellas se recogía el desarrollo de cada competencia, observado a nivel grupal.

En la puesta en juego de las competencias de los estudiantes durante las tareas LP se observaron deficiencias importantes, sobre todo para 3º B. Trataré de ilustrar la situación inicial de ambos grupos con los siguientes extractos de los diarios:

Sesión 2 para 3º A: Han mostrado problemas para Comunicar, pues la mayoría de los alumnos no se expresan correctamente ni de forma oral ni por escrito y confunden términos, por ejemplo, ángulo y lado. A pesar de definir los tipos de triángulos según sus lados y ángulos, cuando argumentan lo hacen usando mal esos términos. Casi el 100% de los alumnos clasifica correctamente los triángulos, pero sólo 10 de ellos resuelven el problema completo, por lo que podemos decir que Pensar y Razonar y Resolver

problemas las manifiestan en su nivel más bajo. Además, no se ayudan de las Representaciones para resolver la cuestión final. Respecto a Argumentar, he de decir que lo hacen de manera muy simple y en su mayoría (18 de 24) erróneamente. En general, he notado grandes dificultades a la hora de resolver la tarea, empezando porque no sabían medir los ángulos con el transportador y tampoco han desarrollado estrategias adecuadas de demostración.

Sesión 3 para 3º A: Aunque la casi totalidad ha puesto de manifiesto que Razonan de manera elemental, sólo cuatro estudiantes alcanzan un nivel más complejo de razonamiento. La Argumentación que hacen es bastante simple: la mayoría no es capaz de generalizar y argumentan con sus palabras en términos incorrectos, usando un vocabulario inadecuado (siguen confundiendo términos: ángulos con lados, acutángulo con obtusángulo, etc.). Estos cuatro estudiantes son los únicos que evidencian un nivel de argumentación mayor, al generalizar en términos matemáticos. Con respecto a la Comunicación, 16 expresan oralmente y por escrito los cálculos, de los cuales 14 acompañan estos cálculos con explicaciones (aunque en éstas, muestran dificultades para hablar matemáticamente, como ya he comentado). El problema completo solamente lo resuelven los cuatro estudiantes ya mencionados y el resto únicamente lo hacen para los casos particulares. Las Representaciones son muy importantes para realizar la actividad y aunque prácticamente todos descomponen los polígonos, la mitad del grupo presenta dificultades para ello.

Sesión 7 para 3º A: Únicamente he podido observar competencias en los ocho estudiantes que han trabajado en las actividades durante toda la sesión, el 33.33% del grupo. En ellos he podido comprobar que Piensan y Razonan a un nivel adecuado, planteándose qué puede o no suceder y por qué. Argumentan a distintos niveles, así mientras A4 está en el nivel más alto, cuatro de ellos se encuentran en un nivel medio y los tres restantes lo hacen a nivel bajo, ya que solamente argumentan con sus palabras y no siempre llegan a hacerlo. Utilizan distintas Representaciones y parecen comprender las diferencias entre ellas. En el resto de los estudiantes del grupo he observado dificultades para resolver los problemas y para Razonar y Argumentar adecuadamente, además de para Comunicarse oralmente y por escrito.

Sesión 12 para 3º A: Como en 3º B, la Comunicación escrita de los cálculos es adecuada, pero no de las relaciones y resultados que obtienen. Les cuesta Argumentar sus decisiones, porque muchas veces las toman a la ligera, probando estrategias por ensayo-error para ver qué obtienen. No Razonan por qué son semejantes los triángulos, ni tienen claro qué triángulos deben coger, ni qué datos necesitan hallar primero. Como ya he dicho, actúan sin pensar: tengo un triángulo rectángulo y sé aplicar el Teorema de Pitágoras, pues hallo la hipotenusa aunque no me sirva para nada. No hacen Representaciones correctas de los triángulos que necesitan en cada situación concreta y ya he comprobado en las sesiones precedentes que sólo algunos alumnos miden los ángulos correctamente. Esperaba más colaboración y participación en estas actividades basadas en situaciones reales, pues en sesiones anteriores mostraron interés por los hallazgos de Tales y sus aplicaciones, entre ellas, el cálculo de la altura de las pirámides de Egipto.

Sesión 2 para 3° B: Todos Razonan de manera simple y en su mayoría clasifican los triángulos correctamente, aunque solamente 12 de los 22 estudiantes se preocupan de anotar sus cálculos para Argumentar. Su Comunicación es bastante deficiente, tanto oralmente como por escrito, y su vocabulario matemático es muy pobre. Ningún estudiante resuelve el problema ni consigue Argumentar usando propiedades matemáticas, sino que la mayoría de ellos se contenta con Representaciones gráficas de triángulos “imposibles”. Inicialmente no sabían medir ángulos, aunque finalmente 13 estudiantes han logrado hacerlo, mientras que el resto sigue manifestando dificultades para usar el semicírculo.

Sesión 3 para 3° B: El 89.47% manifiesta Pensar y Razonar a nivel bajo, mientras que el resto no razona a ningún nivel. De los 19 estudiantes en clase, 2 Argumentan a un nivel medio-alto, 15 lo hacen a un nivel bajo y 2 no argumentan a ningún nivel. La mayoría se Comunican entre ellos o conmigo entendiendo las afirmaciones de terceros, expresan sus cálculos oralmente y por escrito, aunque no todos ellos son capaces de comunicar correctamente sus conclusiones y las relaciones que han encontrado. Solamente tres estudiantes resuelven el problema por completo y emplean estrategias y Representaciones adecuadas para descomponer los polígonos de modo autónomo, mientras que la gran mayoría ha presentado problemas para ello, que después corrigieron.

Sesión 9 para 3° B: En general, no aflora ninguna competencia, ni siquiera a su más bajo nivel. Durante la puesta en común no ha participado casi ningún estudiante y se mostraban poco atentos y participativos. No han Comunicado sus hallazgos. Aunque al principio de estas sesiones LP observé un cambio positivo en sus “actitudes hacia” y en su ritmo de trabajo, con el transcurso de las sesiones hemos vuelto al punto de partida.

Sesión 11 para 3° B: Con estas actividades se ha puesto de manifiesto que no saben, en su mayoría, Comunicar por escrito sus conclusiones, ni son capaces de explicar el por qué de sus cálculos. Piensan qué deben hacer, pero luego no saben Argumentar en términos matemáticos (por ejemplo, aplican el Teorema de Tales porque afirman que son semejantes los triángulos, pero no son capaces de argumentar por qué saben que son semejantes). La mayoría hace cálculos que parece les van a conducir a la solución, pero al final no Resuelven el problema porque no acaban de sintetizar y ajustar sus resultados al contexto del problema.

Lo anterior puede dar una idea de la situación cognitiva de cada grupo durante las tareas LP, que describo más detalladamente a continuación. En el grupo de 3° A podían distinguirse tres grupos: un grupo formado por cuatro estudiantes que demostraban ser competentes en matemáticas a nivel medio-alto, un grupo formado por nueve estudiantes que manifestaban ser competentes a nivel medio, aunque presentaban dificultades a la hora de Argumentar, y un grupo formado por 11 estudiantes que evidenciaban carencia de ciertas competencias o lo hacían a un nivel bajo, destacando en ellos sus dificultades para Pensar razonadamente, Argumentar y Comunicar. Para el grupo 3° B, la situación aún era más negativa. Sólo cuatro

estudiantes se mostraban competentes a nivel medio, mientras que de los restantes, siete alumnos evidenciaban casi todas las competencias a nivel bajo y 11 alumnos no mostraban ciertas competencias ni siquiera a su más bajo nivel. Éste era el caso de Pensar y Razonar, Argumentar, Comunicar y Representar.

Durante la experiencia con Geogebra se observó un cambio en la mayoría de los estudiantes, a pesar de que, para muchos de ellos, la situación a la que llegaron seguía siendo mejorable. El propósito de este análisis no es el de hacer una comparación entre niveles de competencias antes y después del uso del software, pues dicho contraste resultaría bastante complejo y, además, no dispongo de suficiente información para ello. No obstante, considero interesante aportar evidencias de la evolución observada en el aula y que quedó recogida en los diarios. Para ello, incluyo los siguientes extractos de las entradas correspondientes a las tareas GG:

Sesión 2 para 3º A: Aunque comprenden mis afirmaciones y explicaciones cuando hablo con cada uno de ellos, he de decir que la Comunicación por escrito les sigue costando mucho y llegar a Argumentar en términos matemáticos correctos sólo algunos estudiantes lo logran. Usan los recursos con soltura, Representando correctamente los polígonos para teselar, Modelan la situación planteada, Razonan cómo resolver el problema y lo hacen. Como ya he dicho, donde han mostrado más dificultades, ha sido en la Argumentación y en la Comunicación escrita.

Sesión 3 para 3º A: Los alumnos han mostrado en la tarea 2 la trayectoria de aprendizaje prevista y se han logrado nuestros objetivos: que apliquen sus conocimientos de isometrías para construir mosaicos de distintas formas. Estas capacidades han contribuido a las competencias seleccionadas, pues Modelan la situación planteada en la tarea, Usan Geogebra para Resolver el problema y Razonan cómo hacerlo. Yo preveía dificultades cuando intentarían teselar con triángulos usando un único movimiento y ellos lo han resuelto de modo autónomo sin presentar ninguna dificultad.

Sesión 4 para 3º A: Sólo A4 ha conseguido Argumentar-demostrar al máximo nivel en la tarea 3, generalizando por qué es posible teselar con cualquier triángulo y cuadrilátero en términos matemáticos. Mi objetivo de aprendizaje era que comprendieran que con cualquier triángulo y cuadrilátero siempre es posible teselar, quedando la argumentación formal de ello en un plano más ambicioso, pues de antemano era consciente de que ello les supondría grandes dificultades. Las capacidades desarrolladas por los estudiantes han contribuido a las competencias consideradas, pues les han llevado a Pensar y Razonar cómo construir los mosaicos en primer lugar, a Comunicar sus estrategias y resultados de forma oral y escrita con términos bastante precisos y a extraer información de sus Representaciones que les han permitido Argumentar a diferentes niveles: unos pocos estudiantes han seleccionado ejemplos lo menos particulares posible, mientras que la gran mayoría ha Argumentado a un nivel más bajo, es decir, visualmente a partir de ejemplos elegidos sin criterio. Las ventajas de los software de Geometría dinámica sobre LP se ha hecho patente, pues los alumnos han empleado “dragging” o “arrastre” de los vértices de

los polígonos, para deformar las teselas y comprobar como seguían formando mosaicos, independientemente de la forma regular o irregular de los triángulos y cuadrados empleados como motivo generador del mosaico.

Sesión 10 para 3º A: Creo que se han logrado los objetivos de aprendizaje y desarrollado las competencias consideradas, dado que los alumnos han ido realizando la tarea 9, manifestando las dificultades previstas (solamente algunas parejas), que ellos mismos han superado Pensando y Razonando cómo hacerlo. Yo creía que iban a tener mayores dificultades para obtener el motivo mínimo del hueso y el mosaico completo, pero no ha sido así. La mayoría ha seguido la estrategia prevista y lo han obtenido a partir de giros del trapecio, aunque algunos han derrochado mayor creatividad y han probado con traslaciones, simetrías respecto a un punto, distintos giros en vértices y puntos medios... y me han ido Comunicando cómo lo hacían en cada caso. También han decodificado las Representaciones de los mosaicos de la ficha para encontrar el motivo mínimo partiendo de un cuadrado.

Sesión 4 para 3º B: Como ya sucediese en 3º A, solamente algunos estudiantes, 6 de 22, siguen el camino previsto, que les ha llevado a obtener una argumentación más formal, si bien algunos de ellos han necesitado un empujoncito por mi parte. El resto también logran Resolver el problema, aunque no consiguen llegar a un nivel alto en sus Argumentaciones-Demostraciones, contentándose con hacerlo visualmente a partir de ejemplos, en algunos casos elegidos sin criterio (nivel bajo) y en otros seleccionados cuidadosamente (nivel medio). La mayoría de los estudiantes consiguen teselar y obtienen Representaciones de mosaicos de las que extraen información para seguir, algunos de ellos mostrando mayores dificultades que otros, al emplear giros para teselar con polígonos irregulares. A excepción de los seis alumnos que evidencian un nivel alto en casi todas las competencias, la Comunicación del resto de los estudiantes sigue siendo bastante pobre. La tarea 3 queda por encima del nivel de Razonamiento de la mayoría de los alumnos de este grupo y quizás debería restringirla a la construcción de mosaicos con distintos triángulos y cuadriláteros que pusiesen de manifiesto empíricamente que siempre es posible teselar con estos polígonos y explicarles la estrategia de argumentación, sin dedicarle tanto tiempo a que ellos intentasen dar con ella. No obstante, creo que el hecho de que Razonen y se esfuercen en dar una argumentación más formal, aunque solo sea con sus palabras es un paso nada desdeñable y les ayuda a mejorar en esta competencia que tan difícil les resulta. Argumentar en matemáticas requiere de cierta capacidad de abstracción (que, en su mayoría, aún no han desarrollado) y todavía les cuesta mucho imaginarse un caso genérico, pues para muchos de ellos encontrar ejemplos concretos en los que las propiedades se cumplan ya es más que suficiente para probar una afirmación. Con este tipo de tareas trato de despertar en ellos la necesidad de dar un paso más y buscar una explicación que se separe de esos ejemplos visuales, para garantizar que se cumpliría en cualquier otro caso que ejemplificasen.

Sesión 6 para 3º B: De momento se han puesto de manifiesto las dificultades previstas para la tarea 5, que como hasta ahora se centraban en la competencia Argumentar. En este caso, debían demostrar la existencia y unicidad de los 3 mosaicos regulares basándose en propiedades matemáticas y no solo de un

modo visual, a partir de sus Representaciones gráficas de mosaicos. Mañana continuaremos con esta tarea la primera parte de la sesión, para que avancen algo más los que puedan. De momento, se han cubierto algunos de mis objetivos de aprendizaje: obtención de los mosaicos regulares, manifestando los estudiantes un avance en las competencias Pensar y Razonar, Comunicar, Modelar, Representar y Uso de Herramientas y Recursos, dado que en primer lugar debieron interpretar el enunciado del problema en términos matemáticos, lo que les llevó a construir los mosaicos regulares de hasta 8 lados, para después intentar teselar con ellos usando distintos movimientos del plano, y de las representaciones obtenidas han podido Razonar cuáles se ajustaban a mosaicos y cuáles no, comunicando sus hallazgos y argumentando por el momento visualmente.

Sesión 7 para 3º B: Un número reducido de estudiantes ha llegado a argumentar basándose en las propiedades de los ángulos interiores de los polígonos regulares (deben ser divisores de 360° y sólo hay 3 de ellos que correspondan a valores de ángulos interiores de polígonos regulares), el resto solamente lo hacen visualmente y lo expresan con sus palabras, siendo su Comunicación bastante pobre en cuanto a la terminología empleada. Respecto a la tarea 6, cuando trataban de construir los mosaicos regulares empleando los tres movimientos del plano estudiados, únicamente algunos estudiantes han presentado las dificultades previstas con los ángulos de giro y ellos mismos las han solventado, primero probando por ensayo-error y después extrayendo información de las representaciones obtenidas que les ha llevado a Razonar el ángulo correcto. Casi la totalidad de los estudiantes ha alcanzado los objetivos de esta tarea: consolidar conocimientos adquiridos sobre isometrías aplicándolos a situaciones diferentes a las practicadas, de modo que comprendiesen que pueden emplear distintas isometrías y combinaciones de ellas y que hay muchas posibilidades para obtener un mismo resultado: distintos vectores de traslación, ejes de simetrías y ángulos de giro posibles.

Sesión 12 para 3º B: El análisis de actuación de la tarea 10 realizada en esta sesión coincide con el realizado para 3º A con una salvedad: no ha surgido C12 (Interpreta y extrae información de los applets de Escher para obtener sus propias teselas), aunque de no haber tenido problemas de conexión para acceder a Helvia e Internet sí que lo habría hecho, pues los alumnos deseaban volver a ver la página de los mosaicos de Escher para coger ideas. Este hecho ha ocasionado a los alumnos mayores dificultades, tanto para comprender las deformaciones que debían hacer al cuadrado y hexágono regular para formar losetas y posteriormente mosaicos con ellas, como para llevarlas a cabo. Si a esta situación, añadimos que estos estudiantes presentan, en su mayoría, mayores dificultades cognitivas que 3º A, podemos comprender por qué no se han cumplido por completo mis objetivos y no han movilizado todas las competencias asociadas a las capacidades necesarias para resolver esta tarea. Solamente unos pocos estudiantes han logrado superar sus dificultades y construir algún mosaico del tipo que se les pedía. Al comparar estos resultados con los de 3º A, llego a la conclusión de que los applets seleccionados son bastante útiles como ejemplos para obtener información sobre cómo obtener motivos mínimos deformando polígonos y las transformaciones válidas para después teselar con ellos. Ha sido una pena que no haya funcionado el

servidor, pues este grupo necesitaba el empujoncito inicial que les habría proporcionado la visualización y manipulación de ejemplos concretos.

Los fragmentos de los diarios expuestos anteriormente sirven para ilustrar el desarrollo de competencias experimentado por el conjunto de estudiantes durante la experiencia con Geogebra, que apunta a mejoras significativas para la mayoría de ellos. A continuación, paso a describir con más detalle en qué consistieron estas mejoras, a raíz de la información obtenida de los diarios.

El trabajo realizado con el software contribuyó a que los estudiantes alcanzaran niveles medios-altos en todas las competencias matemáticas, salvo en Comunicar, que muchos de ellos siguieron manifestando a un nivel bajo. Se confirmaron mis expectativas acerca de las mejoras que el uso del software produciría en las competencias Modelar, Plantear y Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos, que casi la totalidad de los estudiantes evidenciaron adecuadamente durante las tareas con Geogebra. Las competencias Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, se encontraban entre las que los estudiantes tenían menos desarrolladas antes del trabajo con el software y se puede decir que las dos primeras experimentaron una evolución considerable respecto del nivel manifestado durante las tareas con lápiz y papel. Si bien no todos los estudiantes alcanzaron niveles altos en estas competencias, la mayoría se situó en un nivel medio o medio-alto. La competencia que globalmente menos se desarrolló fue Comunicar, pues la mayoría de los estudiantes siguieron empleando un vocabulario muy pobre y manifestaron ciertas dificultades para expresarse correctamente, tanto oralmente como por escrito. Por ello, puede afirmarse que el software, por sí solo, no ejerció una influencia significativa en la mejora observada en los alumnos en esta competencia, a cuya mejora sí contribuyó el trabajo colaborativo de los estudiantes.

Triangulación de la Información Recogida para el Total de Estudiantes

Al finalizar cada una de las tareas GG realizadas con Geogebra, además de escribir los diarios grupales, analicé la información recogida en los protocolos de resolución y en los archivos de Geogebra entregados por cada pareja de estudiantes. Esta información fue útil para evaluar el aprendizaje de los contenidos de mosaicos de los alumnos (fines docentes) y al mismo tiempo, para enriquecer la información recogida en los diarios acerca del desarrollo de sus competencias (fines investigadores). Así, tras cada sesión fui contrastando la información recogida mediante los diarios, los protocolos escritos de resolución y los archivos de

Geogebra de cada tarea para cada pareja de estudiantes. Es decir, realicé un análisis de actuación durante la acción, que he presentado en el capítulo 7 (p. 197), como modo de complementar la información recogida mediante la observación con la de los otros dos instrumentos no observacionales. Dicha triangulación puso de relieve que las competencias que evolucionaron al mismo nivel para la casi totalidad de los estudiantes de ambos grupos fueron Uso de Herramientas y Recursos, Representar y Modelar. En el caso de las dos primeras, la mayoría de estudiantes exhibió un nivel medio-alto en su desarrollo. Este resultado era de esperar, debido a la facilidad de uso de Geogebra, así como a su contribución para que los estudiantes realizasen representaciones gráficas más precisas empleando menos tiempo y esfuerzo, lo que les dejó más tiempo para extraer información de las mismas. Además, la posibilidad de manipular dichas representaciones les permitió comprobar qué propiedades matemáticas se conservaban en cada construcción. También Modelar alcanzó el nivel esperado en cada tarea para la casi totalidad de los estudiantes de los dos grupos, aunque las tareas no exigían el desarrollo de esta competencia a su máximo nivel, sino a un nivel medio.

Las restantes competencias no evolucionaron de forma homogénea en los dos grupos ni entre los estudiantes de cada uno de ellos. Las diferencias más notables se observaron en las competencias Pensar y Razonar y Argumentar. En 3º A, la mayoría de los estudiantes manifestó estas competencias a nivel medio y un grupo reducido a un nivel alto, mientras que en 3º B, se encontraron tres grupos diferenciados: los que denotaban ausencia de estas competencias durante las sesiones LP que alcanzaron un nivel bajo en las tareas GG, la mayoría de los que se encontraban en un nivel bajo con LP que llegaron a un nivel medio, y unos pocos de éstos que alcanzaron un nivel alto. Con lo anterior pretendo aclarar que, aunque ambos grupos evolucionaron, si se toma como referente su situación de partida, el nivel de desarrollo de las competencias Pensar y Razonar y Argumentar fue más elevado para los estudiantes de 3º A que para los de 3º B; a excepción de unos pocos estudiantes de 3º B, que sí que evidenciaron estas competencias a un alto nivel. Aún así, el cambio experimentado por los estudiantes de 3º B resultó más sorprendente e inesperado, dadas las limitaciones previamente manifestadas por este grupo en estas competencias.

En 3º A, se observó que la gran mayoría de los estudiantes lograron hacer razonamientos fundados y Argumentar sus respuestas con cierto grado de rigor y casi todas las parejas demostraron Resolver los Problemas planteados sin demasiadas dificultades, incluso aquellos

estudiantes que con LP no evidenciaron esta competencia o solamente en ocasiones puntuales. No obstante, a la hora de Comunicar, seguían demostrando algunas dificultades para “hablar matemáticamente” (usar el lenguaje matemático aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis) con corrección durante las tareas GG.

En 3° B, fue sorprendente el trabajo que los estudiantes realizaron durante las tareas con Geogebra, considerando el nivel de desarrollo inicial de sus competencias matemáticas. En primer lugar, no sólo no abandonaron ninguna tarea, como confirmó el análisis actitudinal (mejora de la componente comportamental y de su Perseverancia), sino que un alto porcentaje de los estudiantes de este grupo consiguió dar una respuesta justificada. Ello supuso un avance considerable, pues en este grupo no se trataba de que los estudiantes argumentasen mal en los problemas, sino que no lo hacían de ningún modo. Esta mejora de su Argumentación, vino precedida por una evolución en su forma de Razonar en matemáticas, ya que lograron plantearse en cada tarea qué respuesta buscaban y cómo podían llegar a ella, en lugar de actuar por inercia como solían hacer durante las sesiones con lápiz y papel. En este grupo, incluso a los estudiantes que empezaban a dibujar sin rumbo, la visualización de sus acciones en pantalla les ayudó a comprender qué debían hacer y les animó a intentarlo. Por el contrario, los estudiantes de este grupo, a excepción de unos pocos cuya mejora en su comunicación fue notable, no alcanzaron niveles adecuados en esta competencia y siguieron demostrando una expresión matemática pobre.

A modo de resumen del análisis de competencias realizado, subrayo que el trabajo con Geogebra ayudó a los estudiantes a mejorar en la resolución de problemas contextualizados, puesto que con anterioridad al trabajo con esta herramienta manifestaron grandes dificultades en esta competencia. Más específicamente, en respuesta al objetivo 4 de investigación, se pueden destacar las siguientes competencias, que evolucionaron al mismo nivel en ambos grupos, alcanzando un nivel medio-alto en la mayoría de los estudiantes: Uso de Herramientas y Recursos, Representar y Modelar. Las restantes competencias: Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar, Comunicar y Plantear y Resolver Problemas, también mejoraron con el uso de la herramienta, pero los estudiantes alcanzaron distintos niveles de desarrollo, en consonancia con su situación cognitiva previa al trabajo con Geogebra.

10.1.2. Análisis de la Muestra de Estudiantes

Describiré cómo los 12 estudiantes de la muestra trabajaron los contenidos geométricos de teselaciones del plano usando Geogebra, relatando las competencias que pusieron en juego. Mi intención es la de contar la experiencia atendiendo a las competencias que pusieron de manifiesto los estudiantes y a la evolución observada en ellas respecto a su rendimiento previo a la incorporación del software. Para ello, aproveché la información que de ellos recogí con anterioridad dada mi condición de profesora de estos estudiantes durante dicho curso académico (la fase de observación se realizó durante los meses de abril y mayo). Con objeto de facilitar su lectura, recuerdo de un modo simplificado, los perfiles de los 12 estudiantes pertenecientes a la muestra previos al trabajo con Geogebra:

Tabla 10-1. Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada

Actitudes	Inadecuadas	Adecuadas	Buenas
Rendimiento			
Insuficiente	A2, A3, A7, A9	A5, A11	
Suficiente	A6	A1, A8, A12	A10
Bueno			A4

De entre los perfiles seleccionados y expuestos en la tabla anterior, quiero destacar los estudiantes A4 y A11, que ya comenté respondían a perfiles poco habituales en una clase común de 3º de ESO. A4 podría clasificarse como un alumno con sobredotación intelectual, mientras que la alumna A11 se situaba en el extremo opuesto y manifestaba serias dificultades de aprendizaje, que le impedían seguir el currículo ordinario de este nivel educativo.

En primer lugar se analizaron las diez parrillas de observación de competencias que, como expuse en la página 190 (apartado 6.5.2), se componían de las capacidades asociadas a cada tarea que estaban clasificadas según los niveles de complejidad presentados en la figura 4-1 (p. 113). Para ello, se empleó la asignación de capacidades-competencias expuesta en la tabla 6-4 (pp. 163-164), que permitió obtener las capacidades asociadas a cada competencia junto con su nivel de complejidad. De este modo, para cada competencia, se podían diferenciar los tres niveles o grados de desarrollo, según si el estudiante había manifestado unas capacidades u otras durante la realización de cada tarea con Geogebra. Una vez obtenida toda esta información se procedió a su análisis, con ayuda de los software SPSS y Excel. Así, en primer lugar, se obtuvo una visión global del porcentaje de sesiones en las que los estudiantes

dieron evidencias de cada competencia, independientemente del nivel de complejidad con que lo hicieron:

Tabla 10-2. Porcentaje de sesiones en que cada estudiante de la muestra manifestó cada competencia

C\VAL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PR	94.64	96	98.25	100	96.43	98.21	83.93	100	96.42	96.42	42.86	100
A	88.89	100	90	100	100	100	66.67	100	100	100	12.5	100
C	97.73	97.5	100	100	97.73	97.73	90.91	100	95.45	95.45	63.41	100
M	100	100	100	100	100	100	85.71	100	100	100	50	100
RP	90	88.89	100	100	90	90	90	100	90	90	55.56	100
R	95.16	94.64	100	100	95.16	98.39	90.32	100	96.77	96.77	57.41	100
HR	94.44	93.75	100	100	94.44	98.15	90.74	100	96.3	96.3	59.57	100

La tabla anterior puso de manifiesto que todos los estudiantes exhibieron las competencias objeto de estudio, en mayor o menor grado, durante el trabajo con Geogebra. Sin embargo, para poder informar del desarrollo alcanzado en cada una de ellas, era necesario analizar toda la información recogida para este fin en tales parrillas de observación. Así, se contrastó para cada estudiante dicha información con la recogida en mis diarios, en sus informes escritos de las tareas y en sus archivos de Geogebra. Dicha triangulación puso de relieve la bondad de las observaciones registradas en las parrillas para estos 12 estudiantes, por lo que los resultados que a continuación expongo están extraídos mayoritariamente de dichas parrillas. Igual que hiciera para las actitudes, cuando presente el estudio de casos, expondré de un modo más extendido cómo se realizó tal triangulación de los resultados obtenidos con los diferentes instrumentos empleados.

Análisis de las Parrillas de Observación de Competencias

Muestro el análisis de cada una de las competencias por separado, manteniendo el orden con que el que se presentó su caracterización en el capítulo 4 (pp. 114-125).

Pensar y Razonar

En la tabla 10-2, se observa que, a excepción de la alumna 11, el resto de estudiantes dieron evidencias de esta competencia al menos durante el 80% de las sesiones con Geogebra. Si se profundiza un poco más, atendiendo a los niveles en los que debían desarrollar esta competencia en las tareas, se encuentra que sólo A11 demostró un nivel bajo (nivel 1), A7 se

situó en un nivel medio (nivel 2) y el resto demostró Pensar y Razonar a un nivel bastante más complejo de lo que solían hacerlo con anterioridad (nivel 2-3).

A la mayoría de los estudiantes de la muestra, cuando se enfrentaban a un problema contextualizado, les costaba decidir por dónde empezar. Esta afirmación era aplicable a los restantes 34 estudiantes que participaron en la experiencia, pues la selección de la muestra fue intencionada y podía considerarse representativa de la pluralidad de perfiles cognitivos y actitudinales con los que trabajé. Durante la realización de las tareas con Geogebra (tareas GG), la situación mejoró notablemente, pues gracias a su uso, los estudiantes mejoraron la calidad de sus razonamientos. Y, aunque no todos los estudiantes alcanzaron el mismo nivel de desarrollo de esta competencia, hasta en los casos más extremos como la alumna 11, Geogebra contribuyó a la mejora de su pensamiento geométrico, gracias a algunos de sus atributos y ventajas, que se expondrán en el apartado 10.2.

Para ejemplificar lo anterior, recurriré a la tarea 1 (página 168) con la que comenzamos a trabajar los contenidos de mosaicos. Esta tarea requería que los estudiantes comprendiesen qué es un mosaico, construyesen ejemplos empleando distintas teselas y explicasen en términos matemáticos por qué con unas teselas era posible construir mosaicos y con otras no. Todos los alumnos interpretaron el enunciado de la tarea y comenzaron rápidamente a crear mosaicos sencillos dibujando los vértices de los polígonos con el ratón. Para ello usaron la opción grilla, que les permitía garantizar que las piezas eran iguales, pues dibujaban los polígonos manteniendo los mismos cuadritos; es decir, comenzaron razonando cómo construir mosaicos de un modo sencillo. Como habíamos trabajado isometrías con Geogebra previamente, el 58.33% de los estudiantes decidió usar estas herramientas para obtener mosaicos más rápida y rigurosamente. Además, probaron losetas más creativas que no se ajustaban a la grilla; o sea, fueron razonando cómo usar, sobre todo traslaciones y simetrías, para colocar las piezas donde querían. Se puede decir que el programa les incitó a probar muchos y variados diseños, y la observación de estos diseños les permitió reflexionar y razonar acerca de cómo resolver la tarea.

Argumentar-Demostrar

Estaba muy interesada en ver cómo evolucionaba esta competencia con el uso de Geogebra, pues era en la que los estudiantes manifestaban mayores dificultades. Hasta el trabajo con el software, cuando les proponía tareas que requirieran de una argumentación basada en propiedades matemáticas más allá de la generación de ejemplos concretos, los estudiantes se

mostraban incapaces de resolverlas. No distinguían entre pruebas (demostraciones empíricas a partir de ejemplos concretos) y formas más amplias de argumentación y razonamiento. Durante el trabajo con Geogebra, y desde la consideración de la situación inicial de cada estudiante, se puede decir que todos ellos mostraron evolución, en unos casos más significativa que en otros, pues no todos llegaron al mismo grado de maestría a la hora de Argumentar-Demostrar.

Se comprobó que las diferencias entre los niveles alcanzados por unos estudiantes y otros en la competencia Pensar y Razonar (PR) se mantenían para Argumentar-Demostrar (AD), lo cual por otra parte era de esperar dado que la segunda no tiene lugar sin la primera. La alumna 11 alcanzó un nivel bajo, la alumna 7 un nivel medio, pero no todos los que en PR alcanzaron un nivel elevado lo consiguieron en AD. Resumiendo: cinco de ellos se situaron en un nivel medio (A1, A2, A5, A6, y A9) y cinco en un nivel alto (A3, A4, A8, A10, y A12). Para aclarar la afirmación anterior, continúo con el ejemplo anterior:

-Manifestaron un nivel bajo de argumentación aquellos estudiantes que siguieron una demostración empírica, tipo experimento Naïf, según la caracterización expuesta en la página 116 del apartado 4.3.1. Estos estudiantes crearon diseños de mosaicos sin ningún criterio y únicamente llegaron a argumentar-demostrar visualmente a partir de esos ejemplos.

-Se situaron en un nivel medio, aquellos estudiantes que se ajustaron a una demostración empírica tipo experimento crucial. Los alumnos, conscientes de la necesidad de generalizar, daban sus respuestas basándose en ejemplos seleccionados cuidadosamente, convencidos de que si el resultado era válido en ese ejemplo lo era siempre. Así daban un paso más, pues argumentaban visualmente pero intentaban asegurarse de la bondad de su solución. Este fue el caso, por ejemplo, de los estudiantes que probaron distintos diseños de un mismo polígono para asegurarse de su respuesta; es decir, distintos triángulos, cuadrados y pentágonos. Ello les llevó a argumentar que no dependía del número de lados, pues encontraron pentágonos con los que podían teselar y otros con los que no. Por tanto, siguieron intentando buscar una generalización, aunque no llegaron a obtenerla basándose en las propiedades de las figuras geométricas.

-Alcanzaron un nivel alto los estudiantes, que llegaron a realizar una demostración deductiva tipo experimento mental; es decir, organizaron la demostración con la ayuda de los ejemplos. En la tarea 1, la información que les proporcionaron los distintos ejemplos que habían elegido, les llevaron a argumentar considerando las propiedades que se verificaban tanto en los ejemplos como en los contraejemplos. O sea, afirmando que para que se pudiera

formar un mosaico con un tipo de polígono la suma de los ángulos que concurren en cada vértice debía ser de 360° .

Comunicar

El interés por esta competencia iba más allá de comprobar qué lenguaje empleaban los estudiantes cuando comunicaban sus cálculos y resultados: se pretendía analizar la calidad de estas comunicaciones. Se distinguió, siguiendo a Nesher (2000), entre *hablar matemáticamente*, que se refiere a usar el lenguaje matemático aplicándolo a variados contextos pero teniendo en cuenta su propia sintaxis y *hablar de matemáticas*, que hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas. De este modo, en cada tarea, se comprobó si los estudiantes hablaban matemáticamente observando los siguientes indicadores de las parrillas:

CG2.1. Se expresa oralmente con sus palabras

CG2.2. Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado

CG2.3. Se expresa por escrito con sus palabras

CG2.4. Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado

También en cada tarea se analizó cómo hablaban de matemáticas, es decir, el modo en que fundamentaron oralmente y por escrito sus cálculos y razonamientos o la forma en que se comunicaron entre ellos. Se prestó atención a la capacidad de los estudiantes para entender afirmaciones orales o escritas de terceros.

La tabla 10-2 muestra el porcentaje de sesiones en que cada estudiante de la muestra manifestó cada competencia. Fijándonos en la competencia Comunicar, se comprueba cómo todos los estudiantes dieron indicios de ella en al menos el 95% de las sesiones que trabajaron con Geogebra, a excepción de la alumna 11, que lo hizo en el 63% de las mismas. Desde el punto de vista docente, esto no fue una banalidad, pues no todos los estudiantes antes de las tareas GG solían comunicar, sobre todo por escrito, los pasos que habían seguido en una tarea y hasta qué respuesta les habían conducido, a pesar de pedirles que lo hiciesen. Al desarrollo de esta competencia contribuyó principalmente la metodología de trabajo colaborativo adoptada para la experiencia, no incidiendo el software de modo significativo en dicha evolución. Sin embargo, para aquellos estudiantes que no trabajaban en clase y raramente se comunicaban conmigo, ni oralmente ni por escrito, antes del trabajo con Geogebra, el uso del programa sí contribuyó a la mejora de esta competencia. Geogebra los motivó para trabajar

en matemáticas y este cambio de actitud les hizo poner de manifiesto sus competencias, entre ellas, la que ahora nos ocupa.

En esta competencia se siguió perpetuando la diferencia entre los niveles alcanzados por unos estudiantes y otros. A7 y A11 manifestaron un nivel bajo, pues aunque reproducían los nombres y las propiedades de los polígonos y de los movimientos del plano, tenían dificultades para fundamentar oralmente y por escrito de forma clara y concisa. Situación que se acentuaba para A11, que en reiteradas ocasiones no entendía las afirmaciones de sus compañeros o las mías (profesora). El 50% de la muestra (A1, A2, A5, A6, A9 y A10) se situó en un nivel de comunicación medio, pues se expresaron adecuadamente en la mayoría de las ocasiones y además lograron explicar las relaciones que obtenían de un modo aceptable. El tercio restante, es decir, A3, A4, A8 y A12, se situaron en un nivel alto pues, además de expresarse adecuadamente en todas las tareas tanto oralmente como por escrito, eran capaces de explicar y comprender aquellas relaciones más complejas que encontraron en los contenidos matemáticos trabajados en las tareas. Estos estudiantes también alcanzaron el nivel 3 en la competencia Argumentar-Demostrar.

La tarea 5 (página 170), que exigía a los estudiantes encontrar y argumentar la existencia y unicidad de los 3 mosaicos regulares, permite ejemplificar estos niveles de comunicación. En un nivel bajo se situaron aquellos estudiantes que para comunicar sus respuestas se ayudaban de las representaciones gráficas obtenidas en la pantalla y empleaban expresiones como: “sólo se pueden construir mosaicos regulares con triángulos, cuadriláteros y hexágonos porque con los demás polígonos cuando los juntas dejan huecos o se solapan” o “sólo se puede con triángulos, cuadriláteros y hexágonos porque sus ángulos tienen que sumar 360° ”. En un nivel medio, se encontraban los que cuando comunicaron sus respuestas se interesaron por hacerlo de un modo más riguroso, incluyendo las relaciones que habían encontrado: “para poder construir polígonos regulares los ángulos que se unen en cada vértice deben sumar 360° y lo cumplen el triángulo, cuadrilátero y hexágono porque sus ángulos interiores son divisores de 360° ”. En un nivel alto, se ubicó a los estudiantes que llegaron un poco más lejos y establecieron que no había más divisores de 360° cuyo valor correspondiese a un ángulo de un polígono regular. En este nivel, destacó una vez más A4 que, empleando un vocabulario matemático adecuado, me comunicó textualmente: “los únicos divisores de 360 posibles para un polígono regular son 60, 72, 90 y 120, y los únicos polígonos que tienen como ángulo interior alguno de éstos son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono

regular. 180 también es divisor de 360 pero en un polígono no se puede dar este caso, ya que entonces sería un segmento”. De este estudiante no solo sorprendía su modo de expresarse, sino su interés por hacerlo del modo más riguroso posible, cuidando el vocabulario empleado, e incluyendo representaciones gráficas que aclarasen sus afirmaciones (incluyó un dibujo de cómo sería un polígono con un ángulo de 180° para clarificar su argumento). A diferencia de A4, la mayoría de sus estudiantes cuando comunicaban por escrito la estrategia seguida y la solución hallada a un problema solían hacerlo de un modo escueto, sin extenderse demasiado en sus respuestas.

Modelar

Siguiendo a Ortiz, Rico y Castro (2007), y como ya expuse en el apartado 4.3.1, entiendo que los alumnos modelan en dos fases, resultando ambos modelados de interés para esta investigación. La primera de ellas es la modelización horizontal, en la que los estudiantes traducen los problemas desde el mundo real al matemático. La segunda fase corresponde a la modelización vertical, en la que plantean y responden cuestiones utilizando conceptos y destrezas matemáticas, concluyendo este proceso con el análisis crítico de la adecuación de la solución matemática al problema original. Las tareas diseñadas requerían un nivel medio y sólo para resolver la tarea 9 se solicitaba a los estudiantes un mayor dominio de esta competencia, según los indicadores de nivel considerados para la misma.

Durante las tareas LP, la situación inicial de bloqueo que muchos estudiantes manifestaban al enfrentarse a la resolución de un problema, producida por falta de estrategias de actuación, les llevaba a abandonar la tarea. Esto mejoró al trabajar con el software, al evitar que éstos se quedaran bloqueados sin saber cómo empezar y ayudarles a ir progresivamente definiendo una estrategia de resolución adecuada. A excepción de A11 que, como en las anteriores competencias demostró un nivel bajo, el resto de los estudiantes alcanzaron el nivel esperado en esta competencia, que se puede situar en un grado medio-alto.

Para poner un ejemplo recurriré a la tarea 9 (página 172), en la que se les planteaba la situación inversa a la que les proponía en tareas anteriores, pues partiendo de la representación gráfica de dos mosaicos debían reproducirlos obteniendo el motivo mínimo con el mayor rigor posible. Con mayor o menor esfuerzo, todos los estudiantes lograron interpretar la situación planteada por la tarea (modelización horizontal) y llegaron a obtener el motivo mínimo y después el mosaico (modelización vertical), comprobando que el resultado se ajustaba a sus expectativas. El modo en el que obtuvieron los motivos mínimos

variaba bastante de unos alumnos a otros, demostrando mayor dominio los que también lo habían evidenciado en las otras competencias. Así, los estudiantes A1, A2, A5, A6, A7, A9 y A11 construyeron el “hueso” dibujando trapecios iguales sobre cada lado del cuadrado usando la opción de grilla del software, como medio para garantizar el rigor y la precisión. En contraste, los estudiantes más avanzados (A3, A4, A8, A10 y A12) crearon un trapecio sobre uno de los lados y lo giraron tres veces hasta obtener el motivo mínimo de un modo preciso y riguroso, demostrando mayor dominio de los movimientos del plano. Una vez obtenido el motivo mínimo, todos construyeron el mosaico mediante giros sucesivos, pero de nuevo actuaron de diferente modo: los primeros probaron por ensayo-error hasta que comprendieron cuál debía ser el ángulo de giro, mientras que los segundos no necesitaron hacer pruebas al tener claro qué movimientos usar y cómo hacerlo; tras obtener el mosaico de un modo rápido y sencillo, invirtieron parte del tiempo en embellecerlo (coloreando y ocultando objetos innecesarios).

Plantear y resolver problemas

Siguiendo la definición de esta competencia, así como los niveles de dominio considerados, se puede decir que todos los estudiantes, a excepción de la alumna 11, se situaron en un nivel medio-alto. En efecto, lograron Resolver Problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar, pero también a través de procedimientos que les llevaron a establecer conexiones entre distintas formas de representación y comunicación (tablas, gráficos, palabras e ilustraciones), reflexionando sobre sus estrategias y resultados. Como señalé en la página 121, algunos investigadores consideran, entre otros, los siguientes principios como necesarios para apoyar a los estudiantes cuando afrontan la resolución de problemas matemáticos: posibilidad de testear ideas, recibir feedback o manipular objetos. Desde la consideración de estos principios, se eligió trabajar la resolución de problemas con ayuda de herramientas tecnológicas, desde la convicción de que éstas permitirían a los estudiantes desarrollar esta competencia y así fue. El comportamiento de los estudiantes ante la resolución de problemas mejoró considerablemente en aquellos que, hasta el uso de Geogebra, tenían poca confianza en poder resolverlos por sí mismos cuando se trataba de problemas “de pensar”, como los ellos mismos los calificaban. A ello indudablemente contribuyeron ciertos atributos del software, que en su momento se expondrán, y los principios antes señalados, que para esta investigación se han considerado entre las ventajas del uso del software con respecto a métodos más tradicionales de lápiz y papel.

Para clarificar la interpretación de los niveles de esta competencia, usaré como ejemplo la tarea 7 (páginas 170-171), que invitaba a los alumnos a construir mosaicos semirregulares. En un nivel bajo se situaron aquellos estudiantes cuya estrategia de resolución fue la de actuar por ensayo-error. Así, obtuvieron algunos mosaicos semirregulares sencillos, sin llegar a comprender qué condición o relación matemática tenían que cumplir los polígonos; es decir, no fueron capaces de extraer la información contenida en los ejemplos (representaciones de mosaicos semirregulares) que habían generado. Fue el caso de A11. En un nivel medio-alto, se situaron los restantes estudiantes de la muestra. Algunos de estos alumnos empezaron probando por ensayo-error y ello les llevó a definir una estrategia de resolución, mientras que otros tenían clara la estrategia a seguir desde el principio. Todos ellos lograron obtener mosaicos semirregulares complejos, conectando las representaciones de tales mosaicos con las relaciones matemáticas que éstos deben cumplir, así como reflexionando sobre sus estrategias y resultados, como paso último para la resolución de la tarea.

Representar

En el entorno de geometría dinámica en el que trabajaron los escolares, las representaciones ejecutables o manipulables permitieron actuar directamente sobre ellas, posibilitándoles la visualización de ciertas propiedades de objetos matemáticos. Esto constituye una clara ventaja con respecto a las representaciones estáticas. Otro aspecto importante a considerar es la capacidad de Geogebra para la conversión de distintas representaciones de la misma situación u objeto matemático, que Duval (2002) considera un proceso fundamental para la comprensión de la situación particular. Junto a las ventajas señaladas en líneas anteriores, el uso de este software contribuyó a mejorar las representaciones o habilidades visuales de los estudiantes. Les permitió percibir visualmente ejemplos, identificar figuras y propiedades y poder asociarlas con sus conocimientos previos.

Las experimentaciones de esta investigación previas a la que ahora nos ocupa (ciclos 0 y 1) habían confirmado la hipótesis de que esta competencia sería una de las que más se beneficiaría del trabajo con TIC; en esta experiencia se volvió a tener evidencias de ello. A excepción de A11, que se situó en un nivel bajo en esta competencia (acorde con el resto de ellas) y A7, que alcanzó un nivel medio, los restantes 10 estudiantes exhibieron gran soltura descodificando, codificando e interpretando formas de representación más o menos familiares

de los objetos geométricos trabajados, así como cambiando entre las diferentes formas de representación de las situaciones y de dichos objetos.

De nuevo aludiré a la tarea 9 (página 172), para ejemplificar los distintos niveles de complejidad considerados para esta competencia. La alumna 11 se situó en un nivel bajo, porque cuando intentaba reproducir los mosaicos lo hacía construyendo las teselas una a una, dibujándolas directamente a partir de sus vértices como si de polígonos se tratasen. Es decir, tratando de imitar el mosaico representado en la ficha, pero sin emplear isometrías; además, en el caso del avión no identificó el motivo mínimo. La alumna A7, se ubicó en un nivel medio porque, aunque inicialmente intentó crear los motivos mínimos siguiendo la misma estrategia que A11, después comprendió que la tarea le pedía que los obtuviese partiendo de un cuadrado y realizando transformaciones en sus lados. Con mucho esfuerzo y tesón, A7 superó sus dificultades, logrando descodificar la representación del hueso y obtener las teselas. Para ello, dibujó un trapecio en el interior del cuadrado, tomando como base mayor uno de sus lados y girándolo 90° con centro en los distintos vértices. Después, construyó el mosaico empleando diferentes movimientos (giros y traslaciones), aunque para hallar los ángulos de giro necesitó recurrir de nuevo al ensayo-error. Además, tuvo dificultades con el mosaico del avión, pero con algo de ayuda por parte de sus compañeros logró construirlo. Los restantes estudiantes decodificaron e interpretaron correctamente las representaciones de mosaicos dadas en la tarea y construyeron ambos motivos mínimos a partir de un cuadrado del modo descrito para la alumna A7. Estos estudiantes evidenciaron mayor maestría a la hora de visualizar y hacer representaciones mentales, que les llevaron a razonar cuáles eran los ángulos de giro o los vectores de la traslación sin mucho esfuerzo.

Uso de Herramientas tecnológicas y Recursos

He insistido en que es importante desarrollar en los estudiantes la capacidad de manejar diversos recursos y herramientas tecnológicas para garantizar una adecuada alfabetización matemática y a la vez tecnológica. La elección de Geogebra quedó ampliamente justificada en capítulos anteriores, pero, resumidamente, se puede decir que factores determinantes fueron su facilidad de manejo y la convicción de que ayudaría al aprendizaje de los contenidos geométricos seleccionados, así como al desarrollo de las competencias matemáticas del alumnado.

Dado que mi intención no era la de emplear tiempo en adiestrar a los estudiantes en el uso del software, opté por hacer una breve presentación del manejo del programa y de las distintas

posibilidades que ofrecía y permitir a los estudiantes indagar por sí mismos la mejor forma de sacarle partido. La respuesta de los estudiantes fue la esperada: A11 alcanzó un nivel bajo y el resto un nivel medio-alto. Fueron capaces de emplear Geogebra en contextos, situaciones y maneras diferentes a las ya practicadas para el caso de los movimientos del plano, llegando algunos alumnos (A3, A4, A8 y A12) a alcanzar un conocimiento bastante profundo del funcionamiento del software y de sus posibilidades y limitaciones.

Para distinguir los niveles alcanzados por unos y otros, partiré del siguiente ejemplo: todos los estudiantes construían los polígonos regulares partiendo de una circunferencia (centro conocido), de la que tomaban un punto cualquiera como primer vértice y después giraban sucesivamente ese vértice el número de veces y el ángulo que en cada caso fuese preciso. Cuando los mencionados estudiantes con gran manejo del programa querían embellecer los polígonos regulares eliminando la circunferencia, eran conscientes de que si borraban la circunferencia o su centro eliminarían también el polígono construido, con lo que buscaron otras opciones encontrando la de “ocultar objetos” que se ajustaba a sus propósitos sin alterar las construcciones. O sea, estos estudiantes, a diferencia de los que se situaban en niveles de desarrollo inferiores para esta competencia, llegaron a comprender cómo funcionaban las construcciones en Geogebra y qué elementos eran dependientes de otros en una construcción geométrica. Es más, aprovecharon el carácter dinámico del software y la posibilidad del “dragging” o arrastre de elementos independientes en una construcción, para deformarlas y extraer información de las propiedades geométricas que se conservaban en cada caso.

A modo de resumen del análisis de competencias presentado, pueden establecerse diferentes niveles de desarrollo de las mismas durante el trabajo con este software, para dar respuesta al objetivo 4 de investigación. Se observó que no todos los estudiantes alcanzaron el mismo grado de desarrollo de sus competencias, estando esta evolución muy relacionada con su situación cognitiva de partida. Esta reflexión se retoma y expone más en detalle en los siguientes apartados, en los que se presenta el análisis individualizado de cada estudiante de la muestra. Algunos estudiantes progresaron con el uso de Geogebra, pero no hasta el punto de llegar a ser totalmente competentes, lo cual era previsible pues por el hecho de trabajar con esta herramienta no iban a superar todas las deficiencias cognitivas arrastradas de cursos anteriores. Tampoco todas las competencias estudiadas evolucionaron al mismo ritmo, destacando Representar y Uso de Herramientas tecnológicas y Recursos, por ser las dos en las que los estudiantes obtuvieron los mejores resultados. Éstos también mejoraron sin

demasiado esfuerzo en las competencias: Modelar y Resolver Problemas y avanzaron con mayor dificultad a la hora de Comunicar por escrito, Razonar y sobre todo, al Argumentar-Demostrar sus resultados.

10.1.3. Estudio de Casos

En el capítulo 8 (p. 223) quedó justificada la selección de los cinco estudiantes con los que se llevó a cabo el estudio de casos, que ahora presento para describir el desarrollo de competencias experimentado por los mismos.

Siguiendo el mismo esquema que para el análisis de actitudes, expongo en primer lugar el análisis de competencias exhaustivo y detallado realizado con Atlas.ti para el estudiante A8. Su lectura pondrá de relieve el desarrollo de cada competencia experimentado por A8 durante las diez tareas GG, así como en qué medida era atribuible al trabajo con Geogebra, a la interacción con su compañero y/o con la profesora o a la tarea. La lectura previa de la historia de A8, facilitará la comprensión de los análisis de competencias, que presentaré de forma más simplificada (análisis de las tareas 1 y 5), para los restantes cuatro estudiantes que componen este estudio de casos: A3, A7, A9 y A10.

10.1.3.1. Historia de A8

El análisis de las competencias que voy a presentar difiere del de actitudes en que no pretendía hacer una comparación exhaustiva entre lápiz y papel y Geogebra, sino que la intención era la de narrar cómo A8 fue desarrollando sus competencias matemáticas usando el software. Comienzo considerando su situación cognitiva de partida, obtenida de la evaluación previa de este alumno, que realicé cuando trabajaron contenidos geométricos y de otros tópicos matemáticos como números o proporcionalidad. Continúo exponiendo los análisis del diario que escribí para A8 tras cada sesión de aula con Geogebra y de las parrillas de competencias de este estudiante, que permiten extraer las primeras conclusiones. Después, expongo el trabajo realizado con Atlas.ti de la restante información recogida (archivos de Geogebra y de audio, junto con los protocolos escritos de resolución de cada tarea GG), así como la triangulación de todos los análisis mencionados.

Se puede decir que A8 tenía un rendimiento aceptable, que se reflejaba en una evaluación positiva. Había obtenido una calificación de 6 en el bloque de contenidos de Números y Proporcionalidad, trabajado con anterioridad al de Geometría. Su interés por superar la

asignatura y el nivel en el que se encontraba (3º ESO) le llevaba a trabajar en clase y en casa, y solía memorizar los procedimientos que empleábamos en las tareas, a pesar de que no siempre comprendía el por qué de su utilidad y aplicación. Demostraba soltura con las destrezas básicas y numéricas, pero no tanto cuando debía hacer razonamientos fundamentados. Esto le llevaba a tener ciertas dificultades en la resolución de problemas, sobre todo en los que eran más complejos o no le resultaban familiares, como evidenció durante las tareas LP (obtuvo una calificación de 7). Durante el trabajo con Geogebra, parecía como si las deficiencias cognitivas que solía manifestar hubiesen desaparecido, pues demostró ser altamente competente en matemáticas (obtuvo una calificación de 9), como confirmarán los análisis posteriores.

Análisis del Diario

El análisis del diario de este estudiante reflejó una evolución considerable de sus competencias matemáticas. Dicho análisis evidenciaba que A8 demostró un alto nivel de desarrollo de sus competencias matemáticas durante las tareas con Geogebra (tareas GG), algunas de las cuales (Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar) no había manifestado con anterioridad a ese nivel. La posibilidad que le brindó Geogebra de generar múltiples ejemplos sobre los que razonar y argumentar, contribuyó en gran medida a esta evolución. A modo de ejemplo, incluyo extractos de algunas entradas del diario que para este estudiante escribí al término de cada sesión con el software, referentes al desarrollo de competencias:

Sesión 3: A8 y A15 realizan los mosaicos con distintos polígonos y empleando diferentes isometrías. Se dan cuenta de que deben sumar 360° los ángulos que concurren en un vértice y para el caso de los triángulos, con algo de ayuda, identifican que al girar los triángulos han colocado los tres ángulos cuya suma es 180° en cada vértice (dos veces). Llegan más lejos que el resto de la clase y buscan ejemplos más selectos para argumentar. Aunque han estado un tiempo bloqueados por la dificultad que supone para ellos encontrar una demostración deductiva o formal de la propiedad que estaban trabajando en la tarea 3, no se han rendido y finalmente me han comunicado oralmente cómo podría argumentarse (demostrando un nivel medio en su forma de hablar matemáticamente) y poco a poco hemos ido perfilando sus ideas. Razonan basándose en propiedades matemáticas y no sólo visualmente, lo cual ya es un logro dada la complejidad de la tarea.

Sesión 4: Argumentan por escrito (ayer no lo hicieron), la generalización para cualquier triángulo y cuadrilátero pedida en la tarea 3. La demostración de que siempre es posible teselar con cualquier cuadrilátero, les ha costado menos que la del triángulo (en la que se han tomado más tiempo midiendo ángulos e identificando los que son iguales, para ver que los que concurren en cada vértice son precisamente los tres ángulos de cada triángulo y por ello, siempre suman 180°). Se expresan

adecuadamente de modo oral y A8, que es quien completa el protocolo de resolución, también lo hace por escrito de un modo correcto. Después se ponen a trabajar en la tarea 4 (que les ha parecido bastante sencilla) y en pocos minutos ya habían dibujado un triángulo equilátero con giros de 120° . Además, durante la sesión han ayudado a sus compañeros cuando éstos les han pedido ayuda (...)

Sesión 10: Comienzan a trabajar en la tarea 9 y aunque no les da tiempo a argumentarlo por escrito, son rapidísimos y en poco tiempo obtienen ambos mosaicos con gran precisión y lo explican en audio. Construyen los motivos mínimos empleando movimientos del plano (no dibujando sobre cuadrícula como han hecho otros estudiantes con menor dominio de las isometrías) y después amplían los mosaicos empleando giros y traslaciones. Manejan con gran soltura los conocimientos de isometrías, eligiendo los ángulos de giro y los vectores de traslación eficazmente. En definitiva, esta pareja está manifestando niveles altos en sus razonamientos, argumentaciones y comunicaciones, evolución que no esperaba alcanzara esta dimensión para A8 y mucho menos para A15⁷³, cuya situación inicial era bastante más negativa que la de A8.

Las restantes entradas del diario aludían, al igual que las anteriores, a que A8 manifestó adecuadas competencias matemáticas a lo largo de las tareas GG. Estas mejoras las manifestó tanto cuando trabajó con su compañero como cuando lo hizo en solitario, porque éste no había asistido a clase.

Análisis de las Parrillas de Observación de Competencias

Con anterioridad al trabajo realizado con Geogebra, A8 se caracterizaba por tener gran interés por la asignatura, aunque cuando hablábamos de su rendimiento en la misma, él se autoatribuía ciertas limitaciones cognitivas. Durante el primer trimestre del curso y también durante la realización de las tareas de lápiz y papel (tareas LP), A8 reconoció tener habilidad para las tareas rutinarias y de cálculo, pero se mostró poco confiado cuando se trataba emplear conceptos matemáticos ya aprendidos para resolver problemas cuyo contexto no le resultaba familiar. Manifestó poco interés y gusto por realizar tareas más complejas, en las que no solamente tuviera que aplicar conceptos ya trabajados, sino que le exigieran interpretar, diseñar estrategias y argumentar sus hallazgos.

⁷³ A15, cuyo rendimiento hasta la incorporación de Geogebra había sido insuficiente, mostraba las mismas dificultades de A8, además de una falta de motivación por la asignatura que únicamente le llevaba a trabajar en clase puntualmente. No obstante, debido al aumento de motivación producido por el uso del software experimentó la misma evolución que A8, tanto en sus actitudes como en sus competencias matemáticas.

Para mostrar un primer análisis del nivel de desarrollo de las competencias matemáticas objeto de estudio que A8 mostró durante las tareas GG, sintetizo la información extraída de sus parrillas de competencias en la siguiente tabla:

Tabla 10-3. Niveles de competencias de A8

COMPETENCIAS	NIVEL
Pensar y Razonar	3
Argumentar-Demostrar	3
Comunicar	3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

A8 alcanzó el máximo nivel esperado en todas las competencias. Resultó sorprendente, no obstante, su evolución en algunas de ellas, como Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar, Comunicar y Plantear y Resolver Problemas, pues con anterioridad había manifestado ciertas limitaciones al respecto. Trabajando con Geogebra, logró superar sus deficiencias previas y llegar a obtener razonamientos y argumentaciones de gran nivel. Con ello pudo resolver todas las tareas, aunque en ocasiones necesitó, además de la ayuda del software, la de su compañero, A15, o la mía para las tareas que requerían de un nivel alto de estas competencias. Su forma de comunicarse, tanto oralmente como por escrito, también se enriqueció durante las tareas GG, en parte debido a la interacción con su compañero A15 y conmigo, y en parte debido al uso del software. Asimismo, y sin restarle importancia, demostró un buen uso y gran aprovechamiento de Geogebra y, gracias a esta herramienta, consiguió mejorar sus representaciones mentales y la conexión entre las distintas formas de representación de los objetos matemáticos estudiados.

En el siguiente apartado expongo un análisis de competencias detallado, para mostrar la evolución de A8, triangulando todos los datos recogidos sobre la evolución cognitiva de este alumno, que confirman estos resultados extraídos de sus parrillas y del diario que para él escribí.

Análisis realizado con Atlas.ti: Triangulación

En primer lugar, con el software Atlas.ti se analizaron conjuntamente los archivos de audio y de Geogebra, así como los protocolos escritos de resolución de cada tarea de A8, que

permitió la reconstrucción del modo en que A8 resolvió cada tarea. Después se codificó cada tarea empleando como códigos los mismos indicadores incluidos en las parrillas de observación, es decir, se emplearon como códigos las capacidades asociadas a cada tarea y a la/s competencia/s que contribuía/n a desarrollar. El paso siguiente fue el de contrastar las observaciones registradas en las parrillas de competencias con la codificación hecha con Atlas.ti para cada tarea, incorporando también la información extraída del diario. Este contraste evidenció concordancia total entre la observación de aula y el análisis exhaustivo realizado con dicho software en todas las competencias, a excepción de Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, en las que se obtuvo un 98.44%, un 92.86% y un 98.57% de coincidencia, respectivamente. El hecho de que los diferentes instrumentos proporcionasen resultados similares, otorga mayor fiabilidad a éstos y a la información que de ellos se ha extraído.

Procedo a continuación, una vez expuestos los resultados del análisis del diario y de las parrillas de observación para A8, a analizar sus archivos de audio, de Geogebra y sus protocolos escritos de resolución de cada tarea, con ayuda del software Atlas.ti. Asimismo, este software ha permitido triangular los distintos análisis realizados para informar del desarrollo de competencias matemáticas de A8 y ayudará a exponer los resultados del mismo, ejemplificándolos adecuadamente.

En cada competencia partiré de mi reflexión inicial acerca de cómo A8 solía actuar y cómo lo hizo trabajando con Geogebra, para contar si se observó algún cambio y a qué se atribuyó. Describiré la trayectoria de este alumno y los factores que en cada momento se consideraron los responsables de su evolución.

Pensar y Razonar (PR)

Como ya he expuesto, a A8 le costaba comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos. Cuando le proponía problemas contextualizados de este tipo acostumbraba a solicitar ayuda externa, como sucedió durante las tareas LP. Por esta razón, interesaba comprobar si se produciría algún cambio cuando trabajase con Geogebra. Como resultado de los análisis, se encontró que A8 hizo progresos en su forma de Pensar y Razonar, quedando registrada esta evolución también en las entradas del diario que para este estudiante escribí durante la experiencia con el software. En lo que sigue mostraré más detalladamente cómo pensaba y razonaba este estudiante durante las tareas GG.

Todas las tareas diseñadas para ser trabajadas con Geogebra requerían que los estudiantes pensaran y razonaran (a distintos niveles de complejidad), para poder comprobar qué estrategias ponían en juego cuando la dificultad iba en aumento, así como el grado de desarrollo de esta competencia que cada alumno alcanzaba durante su resolución. Se puede afirmar que A8 demostró un nivel alto en esta competencia y su evolución coincidió con la que de él esperaba. Es decir, fue mejorando progresivamente, como la mayoría de los estudiantes que tenían deficiencias cognitivas antes del trabajo con el software. No obstante, no todos ellos lograron altos niveles de razonamiento, como sucedió para este alumno.

Comenzando por las capacidades que estaban asociadas con esta competencia en su más bajo nivel, se puede decir que, como esperaba, no tuvo ninguna dificultad para adquirirlas. Debido a la facilidad de manejo del software, A8, así como el resto de los estudiantes, manifestaron estas capacidades desde la tarea 1. El nivel 1 de desarrollo se alcanzaba manifestando capacidades como, por ejemplo, la siguiente capacidad del bloque de Mosaicos:

C3. Crear mosaicos sencillos dibujando cada tesela a partir de sus vértices, sin usar isometrías

A medida que se le exigía mayor nivel de razonamiento, iba teniendo más dificultades. No obstante, A8 fue evolucionando progresivamente a lo largo de las tareas, con la ayuda del software y de su compañero. Este estudiante manifestó todas las capacidades que exigían un nivel medio o nivel 2 de razonamiento. El análisis de los fragmentos de las tareas en los que A8 las evidenció, permite informar, además, de los factores influyentes para que A8 las mostrara:

Tabla 10-4. Análisis global de las capacidades de nivel 2 asociadas a PR manifestadas por A8

Factor que influyó mayormente en A8 para su desarrollo	Frecuencia
Geogebra	33
Interacción alumno-alumno	4
Interacción alumno-profesora	2
Tarea	1
Geogebra e interacción alumno-alumno	1
Geogebra e interacción alumno-profesora	2
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	5

Se observa que el factor más influyente en el 68.75% de ellos fue Geogebra, en el 8.33% su interacción con su compañero, en el 4.17% su interacción conmigo (profesora) y en el 2.08%

la tarea, quedando un 10.42% de los fragmentos en los que no era claro cuál fue el factor más influyente para el desarrollo de tales capacidades. Si se hace un análisis más minucioso de estas capacidades de nivel 2, se comprueba que algunas de ellas eran comunes a varias tareas (siendo mayor la frecuencia con la que se observaron). Por ello, se consideró relevante estudiarlas específicamente. Se analizó cómo las adquirió A8, sintetizando la información relativa a los factores que mayormente contribuyeron a que las alcanzase, expresando esta influencia en porcentajes:

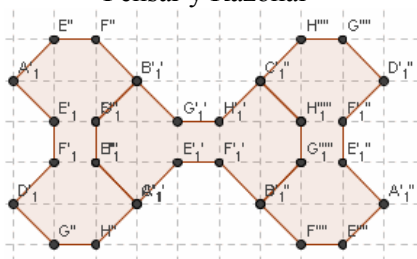
Tabla 10-5. Influencia, en %, de cada factor en las capacidades nivel 2 más relevantes, asociadas a PR

<i>Factor más influyente en A8</i>	<i>C1.1. Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos (18 veces)</i>	<i>C2. Distingue representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías (31 veces)</i>	<i>C4. Crea mosaicos sencillos usando un tipo de isometría (15 veces)</i>
Geogebra	83.33	74.19	80
Interacción alumno-alumno	16.67	6.45	6.67
Interacción alumno-profesora	0	3.23	0
Tarea	0	0	0
Geogebra e interacción alumno-alumno	0	3.23	0
Geogebra e interacción alumno-profesora	0	6.45	13.33
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	0	6.45	0

Observando los porcentajes anteriores, se comprueba como a la adquisición de las capacidades de nivel medio que se consideraron más representativas en esta experiencia para el desarrollo de la competencia Pensar y Razonar, el factor que más ayudó fue el software, pudiendo despreciar la influencia de otros factores como la interacción con su compañero y conmigo, por alcanzar porcentajes mínimos. Además, no se halló el factor tarea como el más influyente en ninguna de las ocasiones en las que A8 evidenció las anteriores capacidades.

Un ejemplo de cómo Geogebra ayudó a que A8 alcanzase las capacidades anteriores, o lo que es lo mismo, demostrase un nivel medio de razonamiento, es el siguiente extraído de la tarea 9, en el que una vez construido el motivo mínimo del hueso trataban de ampliar el mosaico:

Ejemplo 10-1. Influencia de Geogebra para que A8 manifestara a nivel medio la competencia Pensar y Razonar



A8: ahora intenta poner uno ahí en el medio

A8: ¿90 también?

A15: sí

A15: ¡uy, no!

A15: ¿cómo?

A8: éste no sería...lo podemos trasladar, le hacemos aquí un vector inclinado y lo ponemos ahí

A15: ¡vale!

A8: ahora tenemos, tenemos... eso te iba a decir... pues mira podemos poner, como hay que pinchar en el punto

A15: no, hay que pinchar en la imagen, a ver en éste, 1, 2 y 3, no, a ver, desde aquí van 1, 2 y 3, 3 sí, desde aquí hay 3, ¡ah, sí hay 3!

A8: 1, 2, 3, sí, más o menos

Analizando ahora las capacidades asociadas a este competencia que exigían un nivel de desarrollo alto o nivel 3, puede decirse que A8 evidenció el 91.3% de tales capacidades, de ahí que se ubicase en un nivel 3 de desarrollo de esta competencia. Haciendo el mismo análisis que para las capacidades asociadas a nivel 2:

Tabla 10-6. Análisis global de capacidades de nivel 3 asociadas a PR manifestadas por A8

<i>Factor que influyó mayormente en A8 para su desarrollo</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	20
Interacción alumno-alumno	7
Interacción alumno-profesora	6
Tarea	3
Interacción alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	9

Cuando este estudiante manifestaba las capacidades que exigían un razonamiento más complejo, el factor que se consideró más influyente fue Geogebra en el 43.48% de las ocasiones, la interacción con su compañero en el 15.22%, la interacción conmigo en el 13.04% y la influencia de la tarea en el 6.52%, quedando un 19.57% de los fragmentos en los que no era claro qué factor o factores ejercieron mayor influencia para que este estudiante mostrase estas capacidades.

Los anteriores porcentajes ponen de relieve que, cuando aumentaba el nivel de desarrollo exigido para esta competencia, el software perdía protagonismo y no ejercía tanta influencia como cuando se trataba de pensar y razonar a niveles inferiores. Para llegar a algunos de estos razonamientos complejos, no fue suficiente la ayuda de Geogebra, sino que el estudiante recurrió a su compañero o a la profesora.

Haciendo un análisis más exhaustivo de estas capacidades de nivel 3, se comprueba que no sucede como con las capacidades de nivel 1 ó 2, que eran comunes a varias tareas, sino que la mayoría de ellas eran específicas de una o dos tareas a lo sumo. Se analizaron las de mayor interés, de las que se presentan los porcentajes en que cada factor contribuyó a que A8 las alcanzase:

Tabla 10-7. Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de las capacidades nivel 3 más relevantes, asociadas a PR

<i>Factor más influyente en A8</i>	<i>C6. Argumenta /obtiene la condición matemática para poder teselar (8 veces)</i>	<i>C3/C5. Crea mosaicos semirregulares sencillos/ complejos, usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido (7 veces)</i>	<i>C5. Crear tesselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, explicando el procedimiento seguido (5 veces)</i>
Geogebra	25	71.43	40
Interacción alumno-alumno	25	14.29	20
Interacción alumno-profesora	25	0	0
Tarea	0	14.29	0
Geogebra e interacción alumno-alumno	0	0	0
Geogebra e interacción alumno-profesora	25	0	40
No tengo claro el/los factor/es que determinó el cambio	0	0	0

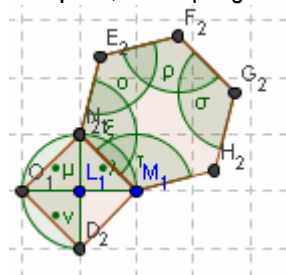
Entre las capacidades destacadas, se aprecia cómo la herramienta Geogebra seguía ejerciendo una influencia notable; sin embargo, ganaron relevancia los restantes factores, especialmente la interacción con su compañero A15. Ejemplifico cómo Geogebra y su compañero ayudaron a que A8 fuese mejorando su forma de Pensar y Razonar a un alto nivel:

- **Influencia de Geogebra:** Durante la tarea 8, en la que trabajó en solitario porque su compañero no asistió a clase, A8 debía hallar los 8 mosaicos semirregulares congruentes

y después construirlos con Geogebra. No obstante, el gusto por el trabajo con el software, unido a su facilidad de manejo y rapidez de ejecución de los comandos, llevaron a A8 empezar a construir con Geogebra el primero de estos mosaicos que encontró. Ello, a pesar de aconsejarle que primero obtuviese analíticamente los 7 restantes (7 combinaciones de polígonos), antes de representarlos gráficamente. Si hubiese tenido que construir este mosaico complejo con LP, esta situación no se hubiese producido y A8 habría seguido el camino de resolución sugerido para esta tarea. Para construir con Geogebra el mosaico formado por cuadrados, hexágonos y dodecágonos regulares, A8 debía pensar y razonar en términos de propiedades geométricas. En esta ocasión, demostró haber mejorado considerablemente en su dominio de los movimientos del plano, razonando qué isometría era la más adecuada en cada caso y cómo debía emplearla, sin necesidad de recurrir al ensayo-error:

Ejemplo 10-2. Influencia de Geogebra para que A8 manifestara a nivel alto la competencia Pensar y Razonar
(Había dibujado un cuadrado con giros de 90° a partir de un vértice, y después colocado un hexágono regular encima, girando uno de los vértices del cuadrado 120° sucesivamente)

A8: ¡vale, ahora polígono!



A8: ¡vale!

A8: ahora aquí hago..., hago aquí uno de 12, otro aquí de 12 y me da 360°

(Me lo está diciendo a mí)

Profesora: no lo sé, 150 más...

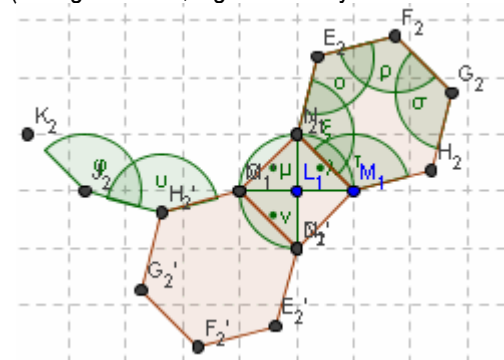
A8: sí, sí, lo he hecho con la calculadora, mira maestra, 90 más 120 más 150 igual a 360

Profesora: entonces, ¿qué has usado?

A8: un cuadrado, un hexágono y un dodecágono

Profesora: de acuerdo, escribe esa combinación en la ficha y sigue buscando más combinaciones distintas

(en lugar de ello, sigue construyendo el mosaico)



(ha hecho una simetría del hexágono respecto del punto central del cuadrado y después se pone a construir el dodecágono con giros de 150°).

Comentario: Me sorprende que lo haya construido bien, pensando el ángulo de giro previamente y usando la simetría desde un punto (herramienta que no usamos normalmente). Veo que está mejorando bastante, sobre todo teniendo en cuenta que hoy no está su compañero para ayudarlo.

- Influencia de la interacción con A15: durante la tarea 3, y después de haber argumentado que es posible teselar con cualquier triángulo, ambos estaban pensando por qué siempre es posible teselar con cualquier cuadrilátero. Como estaban algo atascados, solicitaron mi ayuda:

Ejemplo 10-3. Influencia de la interacción con A15 para que A8 manifestara a nivel alto la competencia Pensar y Razonar (y Argumentar-Demostrar y Resolver y Plantear Problemas)

(Les deformedo uno de los mosaicos que ellos habían construido con cuadriláteros arrastrando los vértices de la pieza inicial)

Profesora: Fijaos en los ángulos de cada pieza y en los que están colocados juntos, ¿cuánto suman siempre los ángulos de un cuadrilátero?

A15: ¿los ángulos de un cuadrilátero? 360

Profesora: 360, que son....

A15: dos triángulos

Profesora: exactamente, entonces ahora usando el razonamiento que habéis dado para el caso de los triángulos.... (me voy y los dejo pensando)

A8: ¿te has enterado?

A15: pero me ha gustado esto de hacer así...¡Dios, mira parece que está en relieve! ¡ahí! (está deformando los mosaicos, como yo he hecho antes, comprobando que se mantiene la estructura)

A8: ¡qué guay! parecen triángulos ahora

A8: ¡madre mía!

A15: vamos a ver, ahora esto lo mismo porque, porque para los cuadriláteros miden trescientos..., los ángulos

A8: ¡oye!, pégate más el micrófono que no se te siente

A15: los ángulos de los cuadriláteros miden 360° y ...

A8: lo borramos (se refiere a la respuesta que habían escrito antes en la ficha de la tarea 3)

A15: no, pero no borres eso

A8: ya, ya, ya, ahora, los ángulos de los cuadriláteros suman

A15: 360°

A8: 360° y ¿qué más?

A15: entonces en cada vértice al haber 4 cuadrados, al estar las 4 esquinas diferentes de cada cuadrilátero pues suma 360°

A15: bueno, en cada vértice, ¿no?, porque mira, en este vértice está la esquina del cuadrado, luego está otra esquina del cuadrado, la tercera esquina del cuadrilátero y la cuarta esquina del cuadrilátero

A8: ¡ah! porque se juntan las 4 esquinas del cuadrilátero

A15: claro, en cada vértice se juntan las 4 esquinas del cuadrilátero

A8: en cada... (está escribiendo)

A8: ¡ya está!... ¡pues ya está!

A8: guarda

A15: ¿y ahora qué?

A8: pues guarda el audio también, ¡adiós, jejeje!

Se comprueba en el extracto anterior cómo, aunque la interfaz de Geogebra contribuyó a que A8 hiciese razonamientos visualmente, sin la ayuda de A15, no habría logrado comprender por qué siempre es posible construir mosaicos con estos dos tipos de polígonos. Por esta razón, se codificó para ese fragmento que la mejora de esta competencia estaba determinada en mayor medida por la interacción o influencia de su compañero.

En relación con la creación de los distintos tipos de mosaicos, hilo central de las 10 tareas, y a modo de resumen de aquellas capacidades que implicaban la construcción de mosaicos, caracterizo brevemente los distintos niveles de razonamiento asociados. Cuando se trataba de construir mosaicos dibujando sobre la grilla o cuadrícula (tarea 1) el nivel de razonamiento era mínimo, la creación de mosaicos sencillos usando movimientos del plano (tareas 1-6) exigía un nivel de razonamiento medio y, finalmente, la creación de mosaicos más complejos (tareas 7-10) requería razonar a un nivel alto. Se analizó cómo A8 construyó los mosaicos a lo largo de las 10 tareas, análisis que reflejó una evolución en su forma de razonar, que le llevaron a pasar de un nivel básico hasta un nivel elevado. Ello se tradujo en la sustitución progresiva de la estrategia de ensayo-error, por la de pensar antes de actuar. Geogebra posibilitó que A8 realizase numerosas pruebas rápidamente, lo que le brindó mayor tiempo para la reflexión, de este modo fue paulatinamente mejorando sus representaciones mentales, mostrándose más hábil para decodificar las representaciones gráficas proporcionadas por el software en la pantalla, hasta llegar al punto de no tener que empezar con pruebas aleatorias para determinar la estrategia correcta. El segundo factor más importante para que A8 desarrollase esta competencia a un elevado nivel fue la influencia ejercida por su compañero A15, cuya interacción ganó protagonismo cuando aumentó el nivel de complejidad de las tareas.

El análisis anterior muestra cómo A8 fue avanzando a lo largo de las tareas, manejando con mayor maestría las isometrías y haciendo progresivamente razonamientos más complejos en aquellas en las que era necesario pensar y razonar a un alto nivel.

Argumentar-Demostrar

El trabajo previo de A8, así como del resto de los estudiantes, con tareas de argumentación-demostración era casi nulo. Por ello, cabía esperar que manifestaran más dificultades para alcanzar un nivel de desarrollo elevado en esta competencia; la experiencia en el aula corroboró esta presunción. Los estudiantes alcanzaron niveles de dominio distintos, encontrándose A8 entre los más aventajados. Hasta el trabajo con Geogebra, este estudiante

tenía serias dificultades cuando se le pedía argumentar-demostrar el por qué de una afirmación. Normalmente sólo era capaz de hacerlo a partir de ejemplos, ya que, además, no distinguía entre demostración empírica mediante ejemplos concretos y formas más amplias de argumentación y razonamiento.

A8 experimentó una considerable mejoría respecto de su situación de partida, alcanzando un nivel de argumentación alto en la mayoría de las tareas, si bien su evolución fue progresiva y necesitó apoyo en muchas de ellas. Durante la experiencia con Geogebra se observó el avance manifestado por A8, ayudado por la herramienta, por su compañero y en ocasiones por mí, desarrollando todas las capacidades asociadas a esta competencia en los niveles 1 y 2, y el 90% de las capacidades de nivel 3 de complejidad.

Según el nivel de argumentación-demostración exigido por la tarea, A8 tenía mayores o menores dificultades y requería o no apoyo externo. Cuando argumentaba a un nivel básico o nivel 1, lo hacía *visualmente a partir de ejemplos concretos* (capacidad C6), de modo autónomo sin necesitar apoyo externo. Únicamente lo hacía con el de Geogebra que, primero le facilitaba la generación y construcción de ejemplos y después le permitía extraer conclusiones a partir de su visualización en pantalla.

En las argumentaciones de nivel medio que A8 realizó, también Geogebra jugó un papel principal. Por ejemplo, en la tarea 3, cuando después de argumentar visualmente y, entendiendo la diferencia entre argumentar a partir de ejemplos o hacerlo formalmente, *buscó cuidadosamente ejemplos de triángulos y cuadriláteros lo menos particulares posible* (capacidad C7.2).

Mayoritariamente, las tareas diseñadas exigían argumentaciones-demostraciones de un nivel alto o nivel 3, aunque muchos estudiantes se situasen en niveles inferiores. Para alcanzar el nivel 3 en esta competencia, A8 experimentó ciertas dificultades que, con ayuda externa, fue superando. Éste no fue el caso de muchos otros compañeros que mostraron la misma problemática y, sin embargo, no lograron dar argumentaciones más formales ni cuando se les proporcionó la misma ayuda que recibió A8. Las capacidades asociadas a esta competencia que exigían este dominio (nivel 3), son las que expongo en la siguiente tabla:

Tabla 10-8. Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de capacidades de nivel 3 asociadas a AD

<i>Factor más influyente</i>	<i>C6. Argumenta la condición matemática para poder teselar (4 veces)</i>	<i>C7.3. Generaliza el resultado para cualquier triángulo y cuadrilátero (4 veces)</i>	<i>C6.2. Obtiene la condición para teselar con polígonos regulares (2 veces)</i>	<i>C7.2. Deduce la solución obteniendo la suma de los ángulos que concurren en un vértice (1 vez)</i>	<i>C7. Argumenta cómo obtienen las teselas y los mosaicos (2 veces)</i>
Geogebra	25	0	50	0	0
Interacción alumno-alumno	25	25	0	0	50
Interacción alumno-profesora	25	50	50	0	0
Tarea	0	0	0	100	0
Interacción alumno-alumno y alumno-profesora	0	25	0	0	0
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	25	0	0	0	50

Esta competencia, a diferencia de otras que se requirieron desde el inicio y a lo largo del desarrollo de cada tarea, puede considerarse como una competencia final, pues los alumnos solían argumentar-demostrar para concluir las tareas. Es el resultado de un proceso previo de razonamiento, modelado, representación y manejo de las herramientas y recursos; de ahí que la frecuencia con la que aparecen las capacidades anteriores sea inferior a la de otras competencias.

Cuando a este alumno se le pedía que argumentara a nivel alto, mostraba bastantes dificultades, que fue superando principalmente con ayuda de la profesora, de Geogebra y de su compañero, según muestra la tabla anterior. La influencia de la interacción conmigo, se puso de relieve en las tareas en las que A8 buscaba estas demostraciones más formales. Necesitó que yo lo guiase en el proceso, formulándole preguntas cuyas respuestas le ayudaron a encadenar los argumentos visuales (obtenidos de los ejemplos) con las propiedades matemáticas subyacentes, produciendo así una demostración deductiva de tipo experimento mental. Un ejemplo de tal situación es el siguiente fragmento extraído de la tarea 3, en la que A8 y su compañero A15 trataban sin éxito de dar una argumentación a por qué cualquier triángulo tesela. Después de dialogar conmigo, se quedaron pensando y llegaron a dar una respuesta adecuada, generalizando el resultado obtenido:

Ejemplo 10-4. Influencia de la interacción con la profesora para que A8 manifestase a nivel alto la competencia Argumentar-Demostrar

A8: ¿puede ser esto de eres capaz de explicar por qué? eso ¿puede ser porque miden 360° en total?

Profesora: ésa es una de las razones, ¿pero cómo sabemos que siempre va a medir 360° ? ¿Habéis medido los ángulos del triángulo? vamos a verlo con triángulos...Los ángulos de un triángulo, ¿cuánto suman?

A15: 180

Profesora: vamos a ver cómo se colocan en cada vértice

A8: uno para arriba, otra para abajo, uno para arriba, otro para abajo

Profesora: pero, ¿qué ángulos van coincidiendo?

A15: los mismos con los mismos, ¿no?

La contribución de Geogebra al desarrollo de la competencia Argumentar-Demostrar puede resumirse diciendo que le permitió confirmar sus hipótesis y conjeturas visualmente. Una vez convencido de la certeza de una afirmación, lo animó a buscar formas de demostración más formales. De nuevo, la herramienta le permitió probar distintas estrategias e hipótesis, que evitaron que abandonara las tareas cuando se encontraba bloqueado por la dificultad de la demostración, aunque por sí sola la herramienta no le llevaba a encontrar esta demostración más formal. Un ejemplo de ello es el siguiente fragmento de la tarea 5, en el que A8 obtuvo primeramente una argumentación visual, basada en las representaciones realizadas con Geogebra, que le llevaron a encontrar los 3 mosaicos regulares. Después decidió argumentar su respuesta más formalmente. Para ello, realizó más representaciones, que le permitieron extraer información y le llevaron a afirmar que debía cumplirse la propiedad matemática para poder teselar. Posteriormente, estas representaciones le ayudaron a argumentar la existencia y unicidad de tales mosaicos regulares:

Ejemplo 10-5. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase la competencia Argumentar-Demostrar

Profesora: ¿con qué polígonos has podido teselar?

A8: con el triángulo, cuadrado, ésta tampoco está muy claro pero es por lo de los puntos. Triángulo, rombo..

Profesora: rombo no, es un cuadrado (le explico la diferencia)

A8: ¡ah bueno! el cuadrado, el hexágono y ya está

Profesora: (les señalo los otros polígonos) ¿y por qué con estos no se puede?

A8: porque se ponen unas encima de otras

Profesora: ya, pero en ese vértice por ejemplo, ¿qué se cumple?

A8: que se juntan todas las esquinas de la figura

Profesora: ¡vale!, ¿cuánto?

A8: 360°

Profesora: yo: ¡vale! ¿y en éstos?

A8: en éstos cumplen que tienen más de 360°

Profesora: ¿y en este caso?

A8: menos

Profesora: pues eso es lo que me tienes que explicar

A8: ¡vale!

En las tareas en las que A8 trabajó en la generación de demostraciones deductivas con su compañero A15, éste último ejerció una influencia positiva en él en algunas ocasiones. Muestra de ello es el ejemplo 10-3 antes expuesto, extraído de la tarea 3, en el que se puede comprobar cómo su compañero le ayudó a razonar por qué cualquier cuadrilátero tesela, y en consecuencia, a obtener una demostración basada en propiedades matemáticas.

Únicamente en la tarea 8 se encontró que el factor tarea influyó para que este estudiante argumentase sin ayuda externa, pues no tuvo dificultades para encontrar la estrategia adecuada y llevarla a la práctica.

Estos resultados están en consonancia con los que se esperaban, pues en experiencias anteriores ya se había comprobado cómo el desarrollo de esta competencia se producía más lentamente y con mayor dificultad que el de las restantes. Las expectativas acerca de la utilidad del software para mejorar el nivel de argumentación de los estudiantes se vieron cumplidas. Por una parte, la herramienta ayudó a que todos los estudiantes lograsen desarrollarla al menos a un nivel básico. En el caso de A8, la posibilidad de generar ejemplos y comprobar conjeturas rápidamente y con precisión, le llevó a buscar las propiedades matemáticas asociadas a las afirmaciones, que en un primer momento obtuvo visualmente. Respecto a mi influencia en el desarrollo de esta competencia, he de decir que se ajustó a la previsión realizada. Esperaba que los estudiantes solicitasen mi ayuda para la búsqueda de demostraciones deductivas más formales y, por ello, había planificado sugerencias o ayudas progresivas que les facilitaran la generación de tales argumentaciones. A8 únicamente reclamó mi ayuda en aquellas tareas que requerían del desarrollo de esta competencia a un alto nivel, pero siempre después de intentar resolverlas con ayuda de su compañero A15 y no obtener la respuesta buscada. Es decir, mi influencia en el desarrollo de esta competencia en este estudiante solamente ganó protagonismo en las tareas más complejas en las que A15 también mostró dificultades. En lo referente a A15, tercer factor de importancia para la evolución experimentada por A8 en Argumentar-Demostrar, la interacción entre ambos jugó un papel importante en aquellas argumentaciones de nivel medio-alto que A8 no alcanzaba a obtener, pero A15 sí. Haciendo balance, se considera la experiencia de trabajar colaborativamente por parejas con Geogebra positiva para el desarrollo de esta competencia. Hasta el trabajo con este software, este alumno mostraba desinterés por las tareas en las que se le exigía argumentar, no logrando en muchas de ellas hacerlo ni siquiera empíricamente. Durante las tareas GG, se implicó en esta actividad y obtuvo resultados bastante asombrosos,

teniendo en cuenta su comportamiento previo, ayudado por el software y en algunas situaciones por mí (profesora) o por su compañero A15.

Comunicar

Interesaba indagar cómo A8 se comunicaba con su compañero y conmigo durante el trabajo con Geogebra, tanto oralmente como por escrito. Puede decirse que este estudiante demostró un alto nivel en la mayoría de sus comunicaciones, desarrollando todas las capacidades asociadas a esta competencia en los niveles 1 y 2, y el 88.24% de las capacidades de nivel 3 de complejidad.

Durante las tareas con lápiz y papel demostró un nivel medio en sus comunicaciones orales y por escrito, dado que tenía ciertas dificultades para expresar correctamente las relaciones que encontraba, así como para comprender las afirmaciones orales o escritas de otras personas en las tareas más complejas. Desde el comienzo de las tareas GG, y a lo largo de toda la experiencia con Geogebra, manifestó una mejoría en ambos aspectos. Ello fue debido al uso de esta herramienta, al trabajo colaborativo con A15 (compartían el manejo del programa y testaban y discutían las conjeturas e hipótesis que ambos planteaban) y a las interacciones conmigo. Así, se observó una evolución desde su nivel medio previo a un nivel alto en su comunicación oral y escrita.

Estructuraré el análisis de esta competencia atendiendo a las capacidades asociadas con su modo de hablar y escribir matemáticamente, así como con su forma de hablar de matemáticas.

A8 manifestó en todas las tareas realizadas las capacidades generales CG2 y CG3, admitiendo la primera de ellas distintos niveles de desarrollo:

Tabla 10-9. Capacidades generales comunes a todas las tareas, asociadas con C

<i>Capacidades</i>	<i>Subcapacidades</i>	<i>Nivel</i>
<i>CG2. Expresar oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados</i>	CG2.1. Se expresa oralmente con sus palabras	1
	CG2.2. Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	2
	CG2.3. Se expresa por escrito con sus palabras	1
	CG2.4. Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	2
<i>CG3. Comprender razonamientos y argumentaciones de otros compañeros y de la profesora</i>		2

La capacidad CG2, muy relacionada con su forma de *hablar/escribir matemáticamente*, admitía dos niveles de desarrollo: el nivel 1 cuando se expresaba oralmente o por escrito con sus palabras, y nivel 2 cuando lo hacía usando vocabulario matemático adecuado. La capacidad CG3, referida a su forma de *hablar de matemáticas*, se correspondía con un nivel 2 de desarrollo de esta competencia. Además de estas capacidades generales, la mayoría de las tareas exigían que los estudiantes comunicasen sus razonamientos y argumentaciones (*hablar de matemáticas*) pudiendo hacerlo a nivel bajo, a nivel medio o a nivel alto, según la calidad de estas comunicaciones, situándose A8 en un nivel alto.

Analizando la forma de *escribir matemáticamente* de A8 a lo largo de las tareas (nivel medio de desarrollo de esta competencia comunicativa), se puede afirmar que A8 demostró siempre *CG2.4: ser capaz de expresarse por escrito con vocabulario matemático adecuado*, como reveló el análisis de sus protocolos escritos de resolución de cada una de las tareas⁷⁴.

Me centraré ahora en su forma de *hablar matemáticamente*. A8 manifestó siempre CG2.2, a excepción de algunas ocasiones en las que empleó términos no del todo precisos, pero que eran frecuentemente utilizados por sus compañeros e incluso por mí misma.

A 40 de los 41 fragmentos de las tareas que se codificaron como CG2, se les asignó el código CG2.2 y sólo en una ocasión se empleó el código CG2.1. Realizando el mismo procedimiento seguido hasta ahora, expongo los factores que contribuyeron, en mayor medida, a que A8 se comunicase oralmente de forma adecuada, lo que le llevó a comunicarse también por escrito de este modo. En 30 de los 40 fragmentos codificados como CG2.2, destacó un factor como más influyente que los restantes para que A8 manifestase esa capacidad, que expongo en la siguiente tabla:

⁷⁴ En la pareja de estudiante formada por A8 y A15, fue A8 quien se encargó de redactar los informes escritos de todas las tareas, después de consensuar con su compañero cada respuesta.

Tabla 10-10. Influencia de cada factor en el desarrollo de A8 de la capacidad CG2.2

Factor que influyó mayormente en A8 para su desarrollo	Frecuencia
Geogebra	13
Interacción alumno-alumno	7
Interacción alumno-profesora	4
Tarea	3
Geogebra e interacción alumno-alumno	1
Geogebra e interacción alumno-profesora	1
Interacción alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	10

Las cifras anteriores ponen de relieve que el software (43.33%) y la interacción con su compañero (23.33%) fueron los factores que más ayudaron a que A8 manifestase CG2.2. El hecho de que los estudiantes necesitasen conocer la terminología asociada a isometrías, para poder emplear las herramientas del programa, fue la contribución principal de Geogebra a esta capacidad, pues les ayudó a interiorizar estos términos. Por ejemplo, yo solía usar los términos “simetría respecto a un eje o respecto a un punto” y “giro” en lugar de “refleja objeto por recta o por punto” y “rotación”, que eran los términos empleados por Geogebra, de modo que los estudiantes debían conocer ambos términos e identificarlos, enriqueciendo de este modo su vocabulario matemático. Por otra parte, la interacción con A15 fue beneficiosa para que A8 hablase matemáticamente de un modo más preciso, pues ambos se corregían mutuamente cuando usaban términos incorrectos o expresiones inadecuadas. Un ejemplo de estas situaciones es el siguiente fragmento de la tarea 7, en la que trataban de construir mosaicos semirregulares uniendo distintos polígonos regulares:

Ejemplo 10-6. Influencia de la interacción con A15 para que A8 hablara matemáticamente de modo correcto

A8: con rombos...

A15: ¡vale!... pero los rombos no son regulares...

A8: ¡ah, es verdad!

Al indagar acerca de su forma de *hablar en matemáticas*, considerando su capacidad para comprender razonamientos y argumentaciones de terceros (CG3), así como para expresar las relaciones complejas encontradas en las tareas, tanto oralmente como por escrito, se encontró una mejoría en su competencia comunicativa que le permitía situarse en un nivel alto. Voy a analizar la capacidad CG3 y algunas de las capacidades específicas de cada tarea, que guardaban relación con la forma de expresar las relaciones encontradas por los estudiantes.

Se codificaron 31 fragmentos como CG3, en 23 de los cuales destacó uno de los siguientes factores contemplados como más influyente para que A8 evidenciase tal capacidad:

Tabla 10-11. Influencia de cada factor en el desarrollo de A8 de la capacidad CG3

<i>Factor que influyó mayormente en A8 para su desarrollo</i>	<i>Frecuencia</i>
Geogebra	2
Interacción alumno-alumno	7
Interacción alumno-profesora	11
Tarea	0
Geogebra e interacción alumno-alumno	1
Geogebra e interacción alumno-profesora	1
Interacción alumno-alumno y alumno-profesora	1
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	8

En esta ocasión, la interacción con la profesora y el trabajo colaborativo con su compañero se consideraron los causantes de esta mejora, pudiendo desprestigiar la influencia de Geogebra, situación que era de esperar. Un ejemplo extraído de la tarea 4 pone de relieve cómo la interacción conmigo le ayudó a comprender el razonamiento que se esperaba realizase para poder resolver esta tarea:

Ejemplo 10-7. Influencia de la interacción con la profesora para que A8 hablara de matemáticas de modo correcto

A8: ¡ahh! pues se mide este ángulo y así con lo que mida lo vamos girando

(están pensando cómo construir con Geogebra los polígonos regulares mediante giros y como no se les ocurre cómo hacerlo, están observando el pentágono regular incluido en la ficha como ejemplo y deciden medirlo para obtener el ángulo de giro. Yo pretendo que entiendan cuál ha sido el procedimiento que he seguido para construirlo, para que puedan hacerlo para otros polígonos regulares con distinto número de lados)

Profesora: no hace falta ni medirlo, ¿cuántas veces lo hemos girado?

A8: aquí sería...

A15: ¿hacemos una cosa así?

A8: 1, 2, 3, 4 y 5

Profesora: tienes 5 lados y has girado 5 veces, ¿no?, entonces ¿cuánto será el ángulillo de cada uno?

A8: en total, una vuelta entera..., son 360° entre 5

Profesora: Eso para este caso que es un pentágono, pero...

A8: pues igual, 360 entre 3,4,5,6,7...

(señala el enunciado de la tarea en la que les pido que construyan polígonos regulares de 3,4,5,6,7... lados)

Las restantes capacidades asociadas con esta competencia hacían referencia al modo en que comunicaban sus estrategias, razonamientos, argumentaciones y soluciones. Éstas eran específicas de cada tarea y también estaban ligadas al desarrollo de las competencias Pensar y Razonar y Argumentar, ya analizadas con anterioridad. La frecuencia con la que aparecieron

y se codificaron fue inferior al resto de capacidades asociadas con esta competencia, tratadas en párrafos anteriores. Por ese motivo, no incluyo su análisis.

Como conclusión, se puede afirmar que los factores más influyentes para el desarrollo alcanzado por A8 en esta competencia fueron su interacción conmigo, con A15 y Geogebra, por ese orden. En las situaciones en las que trataban de elaborar un argumento-demostración complejo, partiendo de ejemplos contruidos, fue donde los diálogos que A8 mantuvo mayoritariamente conmigo, y en algunas ocasiones con A15, lo ayudaron a mejorar la calidad de sus explicaciones. Es decir, nuestra interacción contribuyó a que este estudiante progresivamente fuese siendo capaz de explicar sus cálculos y resultados, de más de una manera, situándose de este modo en un nivel alto. Resolver las tareas colaborativamente con A15 enriqueció el proceso comunicativo entre ellos. En cada tarea ambos exponían sus puntos de vista y los sometían a discusión hasta llegar a un consenso, lo que les llevó a ampliar sus horizontes cognitivos y a comprender razonamientos y argumentaciones de terceros con mayor facilidad. Geogebra ayudó a que A8 mejorara sus comunicaciones únicamente cuando éstas requerían un nivel bajo-medio, considerando despreciable su influencia cuando debía hacerlo a un nivel superior. El software contribuyó a que los estudiantes hablaran matemáticamente con mayor rigor, al obligarles a conocer la terminología asociada a cada concepto geométrico para poder seleccionar las herramientas adecuadas en cada caso. Además, su manejo continuado facilitó el proceso memorístico de dicha terminología, fomentando su uso adecuado, tanto en las comunicaciones orales como por escrito de A8.

Modelar

Expongo cómo A8 evolucionó considerablemente en esta competencia, tanto en el proceso de modelización horizontal como vertical.

Durante las tareas LP, cuando se enfrentaba a problemas sencillos o situados en contextos familiares, realizaba ambos modelados correctamente. Sin embargo, cuando debía modelar tareas más complejas, presentaba dificultades para el modelado vertical y, en algunas de ellas, también para el modelado horizontal. Durante las tareas GG, A8 manifestó las capacidades asociadas a esta competencia:

Tabla 10-12. Capacidades asociadas a la competencia Modelar

	Capacidades	Nivel
Modelado horizontal	CG1. Interpretar el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos, es decir, pasar del contexto de la tarea al matemático	2
Modelado Vertical	C3. Identificar y explicar la obtención del motivo mínimo de un mosaico dada su representación contextualizada	3

La capacidad CG1 se les solicitaba a los estudiantes en las tareas 1, 5, 7, 8, 9 y 10, mientras que la capacidad C3 era específica de la tarea 9. Analizando la capacidad CG1, ésta se encuentra codificada en 7 fragmentos:

Tabla 10-13. Influencia de cada factor en el desarrollo de A8 de la capacidad CG1

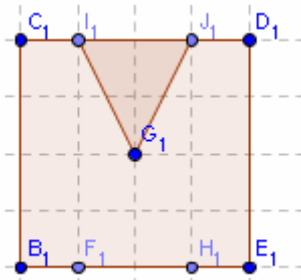
Factor que influyó mayormente en A8 para su desarrollo	Frecuencia
Geogebra	2
Interacción alumno-alumno	1
Interacción alumno-profesora	0
Tarea	1
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	3

La capacidad C3, al ser necesaria únicamente para la tarea 9, sólo fue evidenciada por A8 una vez en dicha tarea. Por ello, se puede afirmar que las frecuencias registradas para las capacidades asociadas a esta competencia no aportaron cifras que puedan considerarse significativas. Sin embargo, el análisis de las tareas con Atlas.ti permitió hacer una descripción del modo en que los distintos factores considerados influyeron para el desarrollo de tales capacidades y, por tanto, de la competencia Modelar.

A la fase de modelado horizontal, es decir, al desarrollo de la capacidad CG1, el factor que más contribuyó fue Geogebra, impidiendo que este estudiante se quedase bloqueado cuando no sabía cómo actuar. En la fase de modelado vertical, destacaron como factores influyentes, Geogebra, la interacción con A15 y conmigo, sin entrar en cuál fue el factor más influyente de los tres. La herramienta ayudó a este estudiante a testar diferentes hipótesis, y la interactividad mantenida entre el software y A8, le ayudó a ir redefiniendo su estrategia de resolución hasta llegar a una respuesta adecuada. En aquellas situaciones de modelado vertical en las que experimentó alguna dificultad, fue en las que su compañero y la profesora actuaron como apoyo fundamental. Éste fue el caso de la tarea 9, en la que no tuvo dificultades con el mosaico del hueso pero sí con el del avión, y A15 le ayudó a comprender cómo obtener el motivo mínimo en este caso:

Ejemplo 10-8. Influencia de la interacción con A15 para que A8 desarrollase las competencias Modelar (modelado vertical) y Plantear y Resolver Problemas

Estaban construyendo el motivo mínimo del avión, pero habían pensado diferentes estrategias:



A8: por simetrías, refleja objeto por punto

A15: mejor rota, ¿no? para ponerlo así

A8: ¡ah bueno!

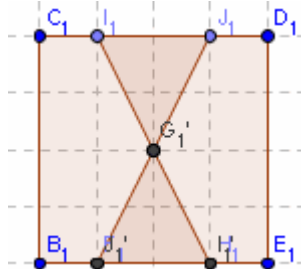
(Las dos opciones eran válidas)

A8: ¿cuánto? ¿90, no?

A15: no, 180

A8: ¿180?

A15: ahora...



A15: ahora girar, ¿no? porque giramos esto y tenemos que ponerlo aquí.... ¡a ver!

A8: ¡yo es que no lo veo, chaval!

A15: ¡mira espérate! Cuando termine ya verás... ¡a ver!

Unos minutos después, cuando A15 terminó de obtener el motivo mínimo a su manera, A8 reconoció comprender cómo lo había hecho su compañero y por qué la estrategia que él tenía en mente no era viable.

Este alumno no sólo realizó correctamente el modelado horizontal y vertical de las tareas que lo requerían, sino que, como paso último del proceso de modelado, analizó críticamente la adecuación de las soluciones matemáticas obtenidas en dichas tareas contextualizadas. Demostró así no perder la perspectiva de las tareas al despegarse del contexto real para resolverlas matemáticamente. El siguiente extracto de la tarea 1 (comentario de A8 a otros compañeros que le preguntaban cómo llevaba la tarea 1), refleja la afirmación anterior:

Ejemplo 10-9. Modelado de la tarea 1 de A8

A8: pues nosotros ya ves..., bueno en verdad las hice yo todas, menos ésta que la ha hecho A15 ahora. Hay que dar, hay que dar, es que tú piensa que tienes que dar una buena reputación a tu rey para enlosarle la casa

Plantear y Resolver Problemas

La Resolución de Problemas, como eje central del currículo de matemáticas, puede considerarse como una competencia general que engloba las restantes. O sea, para resolver problemas es necesario Pensar y Razonar, Argumentar, Comunicar, Modelar, Representar y Uso de Herramientas y Recursos. Sin embargo, se ha caracterizado dicha competencia en la misma línea de PISA que la considera como una competencia más, al mismo nivel que las anteriores. Bajo esta consideración, expongo los procedimientos de resolución empleados por A8, el modo en que reflexionó sobre sus estrategias y soluciones y qué factores contribuyeron a ello.

Para muchos estudiantes, entre ellos A8, la resolución de problemas era considerada una de las partes de las matemáticas menos atractivas. Se sentían incapaces de abordar los problemas y resolverlos con éxito, presentando con frecuencia situaciones de bloqueo durante este proceso. Éste fue el comportamiento más habitual de A8 durante las tareas LP, en las que solicitó ayuda externa para poder superar el bloqueo inicial y también para las dificultades que experimentaba con posterioridad, por no encontrar estrategias adecuadas que le condujesen a la respuesta esperada. No obstante, durante las tareas GG sólo necesitó tal apoyo externo en momentos puntuales de algunas tareas, situándose este alumno en un nivel alto. Desarrolló todas las capacidades asociadas a esta competencia de nivel 2, y el 88.89% de las capacidades de nivel 3 de complejidad, lo cual representó una evolución respecto de su situación previa al trabajo con Geogebra. A8 demostró cierta maestría en la resolución de problemas, pues después de poner en práctica una estrategia o cuando llegaba a una solución, siempre reflexionaba sobre su bondad hasta quedar convencido de ello.

En principio, este estudiante no se sentía cómodo resolviendo problemas, en parte, porque se consideraba a sí mismo incapaz de hacerlo con éxito cuando los problemas eran complejos o no le resultaban familiares. Durante las tareas LP era frecuente que, tras la lectura del enunciado se sintiese bloqueado, y en muchas ocasiones no supiese por dónde empezar, por lo que acostumbraba a solicitar ayuda externa para superar el bloqueo inicial. Al trabajar con Geogebra, la situación mejoró y, en lugar de solicitar ayuda externa, A8 comenzaba a interactuar con el software hasta que conseguía definir una estrategia de resolución.

Las capacidades asociadas a esta competencia, respondían a un nivel 3 de complejidad. A continuación, muestro las frecuencias de los factores que contribuyeron en mayor grado a que A8 las manifestase:

Tabla 10-14. Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de A8 de capacidades asociadas a RP

Factor más influyente en A8	C5. Crea un mismo mosaico sencillo por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido (10 veces)	C5. Crea mosaicos semirregulares complejos, usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido (2 veces)	C6. Obtiene los 8 mosaicos semirregulares congruentes (5 veces)	C6. Crea mosaicos a partir de polígonos deformados con distintas isometrías o con combinaciones de ellas, explicando el procedimiento seguido (8 veces)
Geogebra	70	50	40	62.5
Interacción alumno-alumno	10	0	0	12.5
Interacción alumno-profesora	10	0	0	0
Tarea	0	50	40	0
No es claro qué factor/es determinaron el cambio	10	0	20	12.5

El factor que más pareció influir en la competencia que nos ocupa fue Geogebra. Ello se debió a que permitió a A8 mantenerse activo todo el rato. Además, su eficiencia para realizar cálculos y representaciones les proporcionó, a él y a su compañero A15, el tiempo suficiente para poner en práctica las estrategias sugeridas por ambos en cada tarea, cuando creían que podían ser efectivas. A continuación, expongo un fragmento que ilustra esta influencia:

Ejemplo 10-10. Influencia de Geogebra para que A8 manifestase la competencia Plantear y Resolver Problemas a nivel alto

A15: hay que hacerlo por...

A8: por simetrías, ahora, es que se caen los micrófonos

A8: te lo tienes que pegar a la boca (a A15 apenas se le oye)

A8: ¡se cae!

A15: bueno, ahora por traslaciones, ¿no?

A8: ¡hola, hola! se cae y se despega...

A8: ahora es por simetría

A15: ¿qué he dicho entonces?

A8: por traslaciones, jejeje

Se ponen a trabajar en ello

A8: bueno, a ver, déjame un momento

A8: es que... espera, a ver... podemos hacerlo "refleja objeto por punto", ¿no?

A15: pero para la simetría, es respecto a un eje

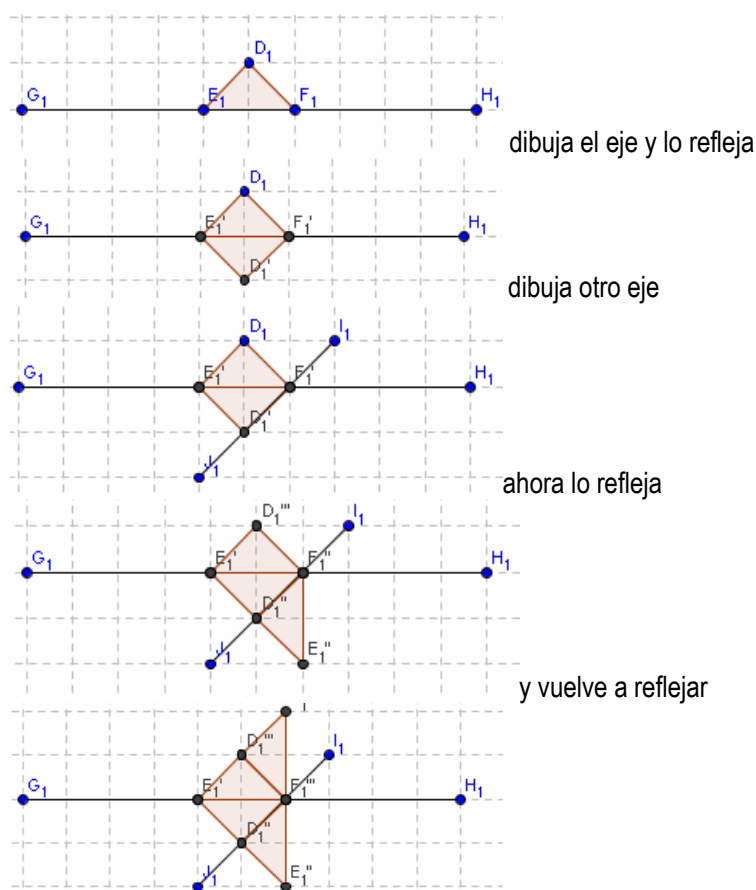
A8: pero también se refleja objeto si pinchas, si pinchas en un punto y no hace falta estar todo el rato dibujando...

A15: más bien sería con éste, que tú haces así... y te lo refleja

A8: pues eso es más fácil, ¿no?

A15: pero habrá que dibujar los ejes para que se sepa... digo yo, vamos que por lo menos hacer los ejes que tampoco cuesta tanto. que se sepa cuáles son los ejes de simetría

(Después de ponerse de acuerdo sobre la forma de hacerlo, ya que cada uno tiene una estrategia propia y ambas son válidas, optan por la de A15)



A8: pues bueno

A8: pero es que también es un latazo tener que estar todo el rato con la... las rectas

A diferencia de otras competencias, en ésta, la interacción con la profesora o la tarea no ejercieron gran influencia. La interacción con A15 se puede considerar como segundo factor más importante para la evolución de A8, pues ambos criticaban sus propias actuaciones y las de su compañero cuando no compartían la misma opinión acerca de su adecuación, y ello enriquecía el proceso de resolución de problemas. En las tareas en las que A8 trabajó en solitario, logró resolver los problemas al mismo nivel que cuando trabajaba con A15, siendo la principal contribución de A15 la de ayudarle a razonar con mayor precisión en las tareas más complejas. Una muestra de ello son los ejemplos 10-3 y 10-8 antes expuestos.

Representar

Sin duda, ésta era una de las competencias en la que a priori se esperaba que Geogebra jugase un papel más relevante, gracias a la visualización de propiedades geométricas a través de su interfaz (pantalla con la que los estudiantes interactuaban) y a la posibilidad de manipular sus representaciones. A8 adquirió un alto nivel en esta competencia durante las tareas GG, desarrollando todas las capacidades asociadas a esta competencia en los niveles 1 y 2, y el

92.31% de las capacidades de nivel 3 de complejidad, lo que supuso una mejora considerando su situación previa.

Durante las tareas LP solía tener grandes dificultades para conectar distintas formas de representación y para decodificar e interpretar problemas que no fuesen sencillos o situados en contextos conocidos. Además, manifestaba ciertas limitaciones para hacerse representaciones mentales de ellos, situación que fue mejorando progresivamente durante las tareas GG.

Se analizaron qué factores contribuyeron, durante el trabajo con Geogebra, a que A8 adquiriese las capacidades de nivel 2 y nivel 3 asociadas con esta competencia, que fueron las que se consideraron merecedoras de mayor atención. Para ello, se analizaron los fragmentos codificados en Atlas.ti como evidencia de estas capacidades, de las cuales se seleccionaron aquellas que aparecían en mayor número de tareas GG, que ahora expongo en las siguientes tablas:

Tabla 10-15. Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de capacidades de nivel 2 asociadas a R

<i>Factor más influyente en A8</i>	<i>C1.1. Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos (18 veces)</i>	<i>C2. Distingue representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías (31 veces)</i>	<i>C4. Crea mosaicos sencillos usando un tipo de isometría (aparece 15 veces)</i>	<i>CG.4.1. Dibuja los polígonos y los coloca correctamente para teselar (10 veces)</i>
Geogebra	83.33	74.19	80	90
Interacción alumno-alumno	16.67	6.45	6.67	10
Interacción alumno-profesora	0	3.23	0	0
Tarea	0	0	0	0
Geogebra e interacción alumno-alumno	0	3.23	0	0
Geogebra e interacción alumno-profesora	0	6.45	13.33	0
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	0	6.45	0	0

Tabla 10-16. Influencia, en %, de cada factor en el desarrollo de capacidades de nivel 3 asociadas a R

Factor más influyente en A8	<i>C3/C5. Crea mosaicos semirregulares sencillos/ complejos, usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido (7 veces)</i>	<i>C5. Crear teselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, explicando el procedimiento seguido (5 veces)</i>
Geogebra	71.43	40
Interacción alumno-alumno	14.29	20
Interacción alumno-profesora	0	0
Tarea	14.29	0
Geogebra e interacción alumno-profesora	0	40
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	0	0

Los valores de las tablas anteriores reflejan que el protagonista fue Geogebra, resultando la influencia de su compañero, de la profesora o de la tarea, menos significativas en esta competencia que en otras como por ejemplo, Argumentar-Demostrar. No obstante, se observa una menor influencia del software cuando el nivel de complejidad de las capacidades aumenta.

Durante las tareas GG, A8 manifestó ciertas dificultades cuando trataba de representar mentalmente objetos matemáticos y no era capaz en la mayoría de las situaciones de conectar sus representaciones mentales de estos objetos con sus representaciones gráficas. Por ejemplo, a la hora de emplear giros, tenía dificultades para identificar el ángulo de giro partiendo de la representación gráfica del objeto a girar, lo que le llevaba a actuar por ensayo-error en estas situaciones. Geogebra le ayudó a mejorar en este sentido, posibilitándole hacer repetidas pruebas de giros con distintos ángulos. Ello le permitió conectar su imagen mental con la de la pantalla y traducir la información matemática de una a otra. Es decir, le brindó la oportunidad de probar en las tareas con diferentes isometrías para teselar e incluso con distintos elementos para cada una de ellas. Gracias a la eficiencia y precisión del software, empleó menos tiempo del que hubiese necesitado para hacerlo con LP, dejando así mayor espacio para decodificar las representaciones obtenidas. Logró de este modo comprender más profundamente estos conceptos e ir abandonando progresivamente su estrategia de ensayo-error por la de razonar antes de actuar. El siguiente fragmento pertenece a la tarea 5, en la que debía encontrar los tres mosaicos regulares y después argumentar su existencia y unicidad. A8 había obtenido el mosaico de triángulos equiláteros con traslaciones y ahora lo estaba

construyendo con giros, a pesar de que la tarea no exigía que lo construyese empleando distintos movimientos. Aún así, él quería dibujarlo de varias formas y el hecho de poder hacerlo rápidamente, sin tener que invertir mucho tiempo como sucedería con LP, le llevaba a actuar de esta manera:

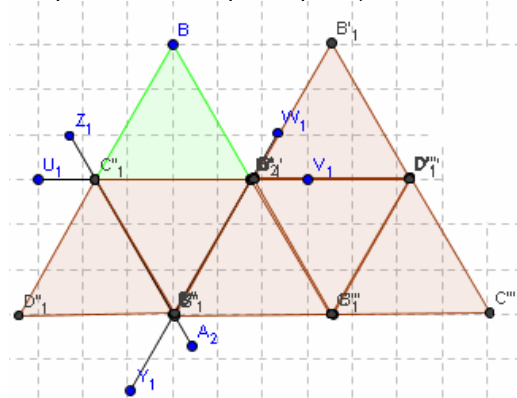
Ejemplo 10-11. Influencia de Geogebra para que A8 desarrollase la competencia Representar

A8: ¡perfect! ahora por giros...

A8: rota... rota objeto alrededor de un punto por un ángulo, vamos a intentar hacer... punto D mismo

A8: ¡vale! ahora

(Trabaja en silencio durante 3:32 minutos hasta completar el mosaico del triángulo con giros también y elimina los puntos que le habían salido mal de hacer otras pruebas anteriores. Hace giros de 60° para completar el hueco que le queda)



Geogebra, no solamente le ayudó a mejorar sus representaciones mentales, de modo que fue capaz de elegir el ángulo de giro adecuado sin tener que recurrir a hacer pruebas por ensayo-error, sino que le hizo valorar más la belleza de las construcciones, como dejó patente al cuidar la imagen de la construcción realizada.

El uso del software también contribuyó a que A8 decodificase las representaciones obtenidas cuando no se ajustaban a sus expectativas, para encontrar en qué consistía el error (estrategia inadecuada, falta de precisión en su ejecución, etc.). Como ya reveló el análisis de actitudes de este estudiante, durante el trabajo con Geogebra demostró una transformación positiva de su Espíritu Crítico y Precisión y Rigor, que le llevaron a comportarse de este modo en todo momento. Por ejemplo, cuando tras intentar crear un mosaico mediante movimientos del plano, la representación en pantalla no se ajustaba a la que él tenía en mente (es decir, distinguía la obtenida como no correspondiente a un mosaico), A8 era consciente de que no se trataba de un error de dibujo sino de planteamiento. Ello le llevaba a considerar si había realizado correctamente estos movimientos. A modo de ejemplo, expongo el siguiente extracto de la tarea 6, en la que, cuando teselaba con hexágonos regulares mediante traslaciones, no obtuvo la respuesta esperada. Encontró que el error radicaba en el vector

elegido, por lo que lo solventó considerando un nuevo vector que le permitió obtener la representación buscada:

Ejemplo 10-12. Influencia de Geogebra para que A8 desarrollase la competencia Representar
 A8: maestra, ¿cómo es? ¿con simetrías y traslaciones?

Profesora: como quieras siempre que se pueda teselar

A8: éste es simetrías

Profesora: ¿y éste qué?

A8: traslaciones

Profesora: ¿con qué vector?

A8: con éste, con este vector

Profesora: estos los has hecho con simetrías, ¿cuáles has querido hacer con traslaciones?

A8: estos

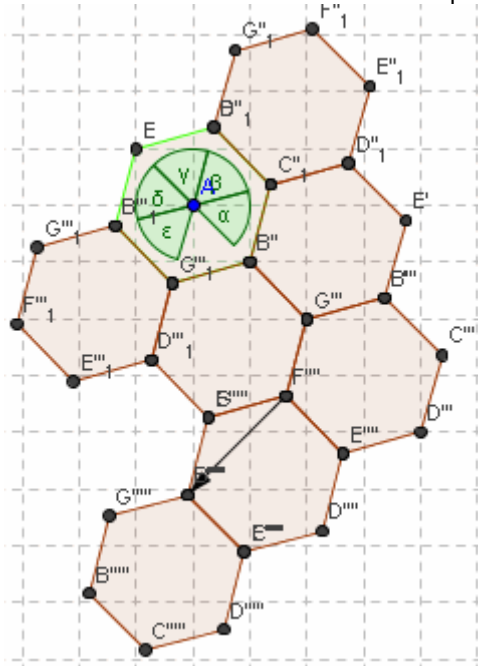
Profesora: pero no te ha salido, has dejado huecos, ¿me explico?, así no puede ser

A8: sí, sí, es por este vector por lo que no me han salido estos, pero estos ya si me han salido con éste

Profesora: entonces borra lo que no vale y prueba más vectores, ¿cómo sería el vector para que tú puedas trasladarlo?

A8: así, de este punto, por ejemplo, a éste, ¿no?

Profesora: correcto (ha deshecho las traslaciones incorrectas y ha dibujado el nuevo vector y trasladado con él obteniendo el mosaico que él esperaba)



En otras palabras, el hecho de que el software garantizase que las representaciones gráficas obtenidas en pantalla siempre eran el reflejo de las acciones del estudiante, sin cabida para un error de representación, eliminaban la tendencia que en muchos casos manifestaban los alumnos ante una respuesta aproximada pero no del todo precisa: justificar el error por su falta de precisión, para no tener que admitir que la estrategia no era adecuada y tener que seguir trabajando en la tarea.

Otra de las ventajas de Geogebra respecto a LP, cuando se trataba de representar, fueron las representaciones manipulables, que los estudiantes usaron en numerosas ocasiones. Una muestra de ello es el siguiente comentario extraído de la tarea 10 que realizó A15 a A8, cuando trataban de deformar una tesela que habían construido previamente:

Ejemplo 10-13. Influencia de las representaciones manipulables de Geogebra para que A8 desarrollase la competencia Representar

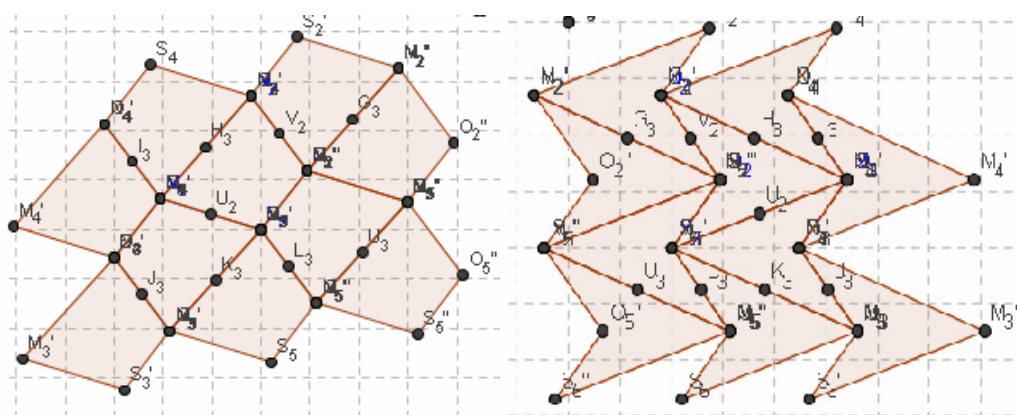
A8: claro, tienes que mover éste

A15: ¡a ver!, pero no se deforma bien, se hace más pequeño o más grande, pero no se deforma

A8: ¡espérate!, ¿por qué no intentamos hacer la simetría por lado?

Los estudiantes trataban de hacer deformaciones de Escher a un triángulo equilátero y en principio no sabían cómo empezar, por lo que intentaron deformar el triángulo arrastrando sus vértices. Su sorpresa fue que siempre obtenían triángulos equiláteros de mayor o menor tamaño, lo que les llevó a pensar en otra estrategia para deformar la figura mediante transformaciones en los lados. La propiedad del “dragging” (arrastre) también fue útil en otras tareas como en la tarea 3, en la que cuando trataban de probar que podían teselar con cualquier triángulo y cuadrilátero, partiendo de uno cualquiera de estos mosaicos y deformando la figura inicial, iban obteniendo distintos mosaicos irregulares que les hacían comprender visualmente esta propiedad. Los dos mosaicos siguientes (el de la izquierda fue el que originalmente construyeron los estudiantes, y el de la derecha lo obtuvieron usando dragging) son una muestra de estas deformaciones producidas por el arrastre de los vértices del cuadrilátero original. Éstas ayudaron a que A8 comprendiese visualmente y después argumentase que siempre es posible teselar con cualquier cuadrilátero:

Ejemplo 10-14. Mosaicos original y deformado por dragging o arrastre



Uso de Herramientas y Recursos

Para esta competencia, relato cómo este estudiante manejó la herramienta Geogebra y si tuvo dificultades o no para ello. A8 demostró un alto nivel de maestría manejando el software,

desarrollando todas las capacidades asociadas a esta competencia en los niveles 1 y 2, y el 91.67% de las capacidades de nivel 3 de complejidad. A8 y A15 demostraron gusto por su uso y, por ello, compartían el manejo del ratón y del teclado.

Todas las capacidades asociadas a esta competencia también estaban asociadas a la competencia Representar. Muchas de ellas contribuían, además, a otras competencias, como Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar. Por esa razón, ya han sido analizadas en esas competencias anteriormente y ahora únicamente expongo los factores que, en cada una de ellas, ayudaron en mayor medida a que A8 las manifestase durante el trabajo con Geogebra:

Tabla 10-17. Influencia, en %, de cada factor en desarrollo de capacidades de nivel 2 asociadas a HR

Factor más influyente en A8	<i>CG.4.1. Dibuja los polígonos y los coloca correctamente para teselar (10 veces)</i>	<i>CG4.2. Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar (31 veces)</i>
Geogebra	90	83.87
Interacción alumno-alumno	10	6.45
Interacción alumno-profesora	0	3.23
Tarea	0	0
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	0	6.45

Tabla 10-18. Influencia, en %, de cada factor en desarrollo de capacidades de nivel 3 asociadas a HR

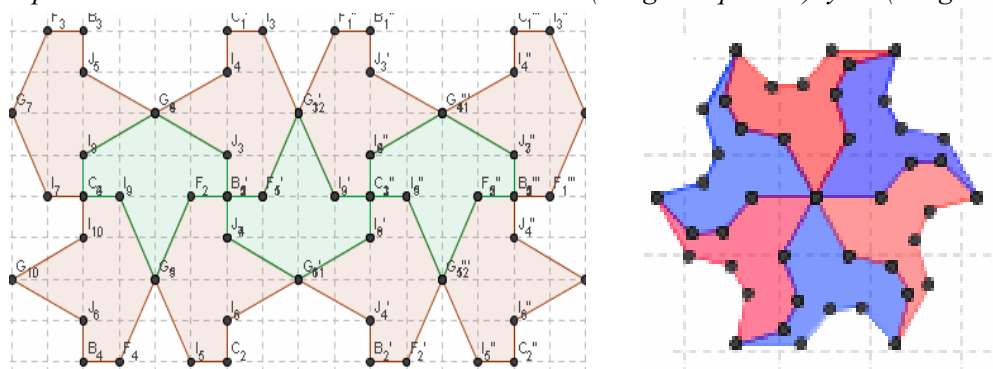
Factor más influyente en A8	<i>C3/C5. Crea mosaicos semi- rregulares sencillos/ complejos, usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido (7 veces)</i>	<i>C5. Crear teselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regular, explicando el procedimiento seguido (5 veces)</i>
Geogebra	71.43	40
Interacción alumno-alumno	14.29	20
Interacción alumno-profesora	0	0
Tarea	14.29	0
Geogebra e interacción alumno-profesora	0	40
No es claro el/los factor/es que determinó el cambio	0	0

La influencia del software fue la más determinante. No obstante, como ya sucediese para algunas de las competencias anteriormente estudiadas, ésta fue disminuyendo al aumentar la

complejidad de las capacidades que el alumno debía desarrollar. Los porcentajes mostrados en las tablas anteriores pueden atribuirse a la facilidad de manejo del software, que permitió que A8 desarrollase estas capacidades durante las tareas GG. Haciendo un análisis más centrado en el uso que este estudiante hizo de Geogebra, se puede justificar el alto nivel que alcanzó en esta competencia atendiendo a su conocimiento de las distintas herramientas del software, de su funcionamiento y de las limitaciones del mismo. A lo largo de todas las tareas, A8 demostró manejar perfectamente el programa y tener iniciativa propia para emplear herramientas distintas a las habitualmente empleadas. Por ejemplo, a la hora de realizar movimientos del plano como simetrías, usó en cada mosaico la que más se ajustaba a sus necesidades. Este hecho quedó reflejado en sus archivos de Geogebra y también en la transcripción de los audios realizada con Atlas.ti. Algunos ejemplos anteriores, como el ejemplo 10-2 expuesto en la página 415, son válidos para ilustrar las afirmaciones anteriores.

En algunas tareas, cuando A8 usaba herramientas distintas a las habituales, solía comentarlo conmigo en busca de aprobación antes de continuar. Le gustaba explorar las posibilidades ofrecidas por el programa que pudieran resultarle útiles en las tareas. Así, su compañero y él encontraron que la herramienta “desplaza zona gráfica” era adecuada cuando la interfaz gráfica se les quedaba pequeña para exponer todas las representaciones gráficas de mosaicos que querían hacer y la empleaban para disponer de mayor espacio libre para sus diseños. También le gustaba embellecer los mosaicos e investigó cómo ocultar los elementos que no eran necesarios (por ejemplo, las circunferencias que usaban para construir los polígonos regulares) o cómo cambiar de color las teselas, coloreando los mosaicos con repetición y ritmo, como hizo en los siguientes fragmentos de las tareas 9 y 10:

Ejemplo 10-15. Mosaicos realizados en las tareas 9 (imagen izquierda) y 10 (imagen derecha)



No solamente demostró manejar correctamente todas y cada una de las herramientas del programa sino también conocer su funcionamiento interno; es decir, el modo en el que el software realizaba las construcciones a partir de los elementos introducidos por el usuario.

Distinguía en sus construcciones cuáles eran los elementos dependientes e independientes.

Por ejemplo el siguiente fragmento refleja este dominio del proceso de construcción:

Ejemplo 10-16. Uso de Herramientas y Recursos a nivel alto de A8

A8: ¿por qué se borra? ¡ah, bueno que es el centro!

Profesora: ¿qué ocurre?

A8: nada es que estaba borrando el punto, pero es que era el centro y entonces se borra todo

Además de lo anteriormente expuesto, quiero destacar un comportamiento manifestado por A8 a lo largo de las tareas que refuerza las afirmaciones anteriores acerca de su dominio en el manejo de Geogebra. A8 brindó ayuda a sus compañeros cuando éstos la solicitaban, explicándoles no sólo qué herramientas debían usar y cómo hacerlo en cada caso, sino también razonando el por qué debían usar estas herramientas y no otras.

Como resumen del análisis de competencias realizado para dar respuesta al objetivo 4 de investigación, y teniendo en cuenta que he ido exponiendo la evolución que A8 experimentó en cada una de ellas por separado, únicamente quiero añadir que mis expectativas acerca del desarrollo que A8 experimentaría en las competencias matemáticas objeto de estudio se vieron superadas, sobre todo, en algunas de ellas como Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar. A8 mejoró notablemente gracias al trabajo con Geogebra, al trabajo colaborativo con A15 y a la interacción conmigo (en aquellas tareas en las que por sí solos no lograron obtener la respuesta buscada). La influencia de Geogebra fue significativa para que A8 lograra desarrollar sus competencias a un nivel medio, aunque también contribuyó a que alcanzara un nivel alto en ciertas competencias como Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos. Se mostró competente manejando el software y aprovechó su potencialidad para realizar múltiples representaciones y resolver las tareas propuestas, manifestando, además, gusto por el trabajo con Geogebra desde la primera sesión hasta la última. La interacción con su compañero y conmigo fueron relevantes para que este estudiante alcanzara el nivel máximo en Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar, Comunicar y en el Modelado vertical de las tareas más complejas, competencias en las que trabajando con la herramienta había alcanzado por sí mismo un nivel medio. Es decir, la interacción con A15 y conmigo, únicamente cobró relevancia en aquellas tareas en las que debía movilizar estas competencias a su máximo nivel, para las que necesitó un empujoncito por nuestra parte, constituyendo A15 gran ayuda para la mejora comunicativa y siendo mi influencia más notoria para que pensara y razonara y sobre todo, argumentara a un nivel alto.

Al analizar para este estudiante las relaciones existentes entre las distintas competencias, se apreció, como ya sucediese para el caso de las actitudes, que las distintas competencias ejercieron influencia las unas sobre las otras. Así, la evolución de A8 en Pensar y Razonar, le llevó a hacer Argumentaciones-Demostraciones de mayor calidad y al evolucionar en estas competencias, también lo hizo su competencia Comunicativa. Por otro lado, su buen uso de Geogebra (HR) le llevó a probar infinidad de Representaciones, mejorando así también en esta competencia.

Por último, y para concluir el análisis de las transformaciones experimentadas por este estudiante debido al trabajo con Geogebra, tanto a nivel actitudinal como cognitivo⁷⁵, incluyo la relación entre su evolución actitudinal y mejora de competencias, que he analizado minuciosamente. La visión que yo tenía en mente durante la experiencia con Geogebra de esta relación, y que plasmé en las páginas de mi diario de A8, hacía referencia a que el hecho de disfrutar más de la asignatura y demostrar mayor confianza en sí mismo, le ayudaron a mejorar sus actitudes matemáticas y con ello, también sus competencias. Los análisis de las parrillas de observación y el realizado con Atlas.ti corroboraron esa afirmación. En efecto, al confrontar ambas parrillas (de actitudes y competencias), se comprueba que en las sesiones en las que manifestó actitudes relacionadas con las matemáticas positivas, también evidenció una mejora de sus competencias, y al repetir este mismo análisis en las tareas de Geogebra reconstruidas con Atlas.ti, se obtienen las mismas conclusiones. Esta relación se dio en este sentido en A8 y no al revés, pues su avance cognitivo fue más progresivo y fruto del cambio actitudinal previo. Las actitudes matemáticas al tener un carácter cognitivo y no afectivo, podrían considerarse parte de la competencia matemática global y por ello, se esperaba que un cambio en las actitudes matemáticas provocase un cambio en las competencias matemáticas de los estudiantes.

10.1.3.2. Estudio de A3, A7, A9, y A10

Muestro la experiencia de estos cuatro estudiantes con Geogebra de manera que resulte comprensible, pero sin entrar en el detalle con el que he expuesto el análisis del estudiante A8. Para cada estudiante, comienzo presentando su situación cognitiva de partida, obtenida de la evaluación previa, correspondiente al trabajo con contenidos geométricos y de otros tópicos matemáticos, como números o proporcionalidad. Continúo desarrollando los análisis del diario (que escribí para uno de ellos, tras cada sesión de aula con Geogebra) y de sus

⁷⁵ Presentados en los apartados 9.1.3.3.1 y 10.1.3.1 de los capítulos 9 y 10, respectivamente.

parrillas de competencias, de cuyos análisis se extraen las primeras conclusiones. Después, expongo el proceso de análisis realizado con Atlas.ti, que coincide con el de A8. Para cada estudiante se reconstruyeron las tareas 1 y 5, integrando la información contenida en los archivos de audio y de Geogebra, así como sus protocolos escritos de resolución. A continuación éstas se codificaron, empleando como códigos los mismos indicadores incluidos en las parrillas de observación. Por último, se contrastó la codificación realizada con Atlas.ti con la información extraída del diario y de las parrillas de observación de competencias. De este modo, se trianguló y se integró toda la información recogida para cada estudiante durante la realización de ambas tareas y se procedió a su análisis con Atlas.ti, el cual expongo a continuación para cada estudiante.

10.1.3.2.1. Alumno A3

El perfil cognitivo de A3 era fácilmente mejorable, dado que hasta la experiencia con Geogebra este estudiante no había dado signos de competencia en matemáticas, ni al más bajo nivel. Durante el primer trimestre, a pesar de comenzar con contenidos del bloque de Números, que mis alumnos ya habían estudiado en cursos anteriores, A3 experimentó grandes dificultades, que se reflejaron en las bajas calificaciones obtenidas en sus pruebas escritas, las cuales generalmente dejó en blanco (obtuvo una calificación de 2 en la primera evaluación del curso). Parecía haber tirado la toalla desde el principio, por considerar insalvables las deficiencias que arrastraba de años anteriores. Y, a pesar de que intenté animarlo, no conseguí motivarlo lo suficiente como para que se produjese una mejora en su nivel de competencias matemáticas. Tenía dificultades con las destrezas básicas, como operaciones con fracciones, pero también demostraba dificultades a la hora de resolver problemas, pues con frecuencia no sabía cómo empezar ni dónde debía llegar.

Durante las tareas GG, este estudiante superó mis expectativas previas, siendo uno de los estudiantes cuya evolución resultó más impresionante. Cuando trabajó con Geogebra, mostró una imagen totalmente distinta a la que yo estaba acostumbrada, que me hizo comprender que la muy deficiente competencia matemática manifestada durante las tareas LP y con anterioridad se debía principalmente a una actitud hacia las matemáticas muy negativa. En el momento en que ésta mejoró, gracias al trabajo con Geogebra, demostró no tener dificultades cognitivas tan serias como yo creía, lo que se reflejó también en una mejora de sus calificaciones (obtuvo un 9 en las unidades de isometrías y teselaciones del plano).

Ya comenté que únicamente se pudo rescatar el audio completo de la tarea 1, reduciéndose los audios de las restantes tareas de este alumno a unos pocos minutos en los que él, muy interesado en demostrar su competencia matemática, exponía los modos o estrategias seguidas en la resolución de cada tarea y las conclusiones y respuestas a las que había llegado (trabajó solo en casi todas las tareas, pues su compañero A16 no contribuyó a la realización de las mismas).

Análisis del Diario

Todas las entradas del diario que para A3 escribí al término de las sesiones con Geogebra hacían referencia a lo asombrada que estaba por la transformación que este estudiante estaba sufriendo, como consecuencia del trabajo con el software. Manifestó todas las competencias matemáticas que se consideraron para este estudio, incluida Argumentar-Demostrar a su más alto nivel, siendo uno de los pocos estudiantes que llegó a obtener demostraciones formales basadas en propiedades geométricas. Releyendo las entradas de las 12 sesiones con Geogebra puede extraerse una conclusión: se manifestó altamente competente en todas ellas. Incluyo algún extracto del diario como ejemplo:

Sesión 7: Como ayer casi concluyó la tarea 6, para hoy solamente le faltaba teselar con el hexágono y lo ha hecho con simetrías, traslaciones (probando con distintos vectores hasta que él mismo ha comprendido por qué no obtenía la representación buscada, encontrando finalmente vectores adecuados) y giros (con el ángulo de giro le ha pasado igual que con los vectores de la traslación: primero ha probado con 180° y al solaparse las teselas, se ha parado a pensar y ha razonado que el ángulo adecuado era 120°). Después ha comenzado a trabajar en la tarea 7, pero de momento, únicamente ha dibujado un triángulo regular sin obtener aún ningún mosaico. Está encantado de ser tan eficiente y se esfuerza en que su compañero también participe en las tareas, y a veces hasta lo consigue.

Sesión 8: Tras obtener los mosaicos semirregulares congruentes de un modo analítico, se ha puesto a representarlos con Geogebra. Ha construido dos de ellos sin ninguna dificultad, razonando correctamente cuáles debían ser los ángulos de giro y los vectores de las traslaciones (...) Le gusta comunicarme sus hallazgos y sin embargo, antes del trabajo con Geogebra nunca se comportó de este modo.

Sesión 11: Obtiene los motivos mínimos y mosaicos usando distintas estrategias. Primero obtiene el hueso mediante giros y traslaciones. Después para el avión, prueba en primer lugar con el ratón dibujando sobre cuadrícula, no contento con el resultado, dibuja dos triángulos iguales y los gira, pero al apreciar que no le sale perfecto también los borra. Decide entonces hallar el centro del cuadrado y dibujar un triángulo en su interior, situando uno de sus vértices en dicho centro, que después rota cuatro veces hasta obtener el avión (motivo mínimo buscado). Finalmente, argumenta oralmente y por escrito, empleando términos matemáticos correctos, cómo ha realizado esta tarea.

Análisis de las Parrillas de Observación de Competencias

A lo largo de las tareas GG, este alumno demostró ser altamente competente en matemáticas, como confirmó el análisis de sus parrillas de competencias que expongo a continuación. Dicho análisis aportó la siguiente información, relativa al nivel alcanzado por A3 en cada competencia, durante el trabajo con Geogebra:

Tabla 10-19. Niveles de competencias alcanzados por A3

COMPETENCIAS	NIVEL
Pensar y Razonar	3
Argumentar-Demostrar	3
Comunicar	3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

Los elevados niveles de desarrollo obtenidos por A3 en todas las competencias pusieron de manifiesto que, cuando se lo proponía, las deficiencias y dificultades que habitualmente presentaba se desvanecían, lo que reforzaba mi teoría de que su bajo rendimiento estaba condicionado por falta de motivación y su actitud totalmente negativa en la asignatura.

Análisis realizado con Atlas.ti: Triangulación

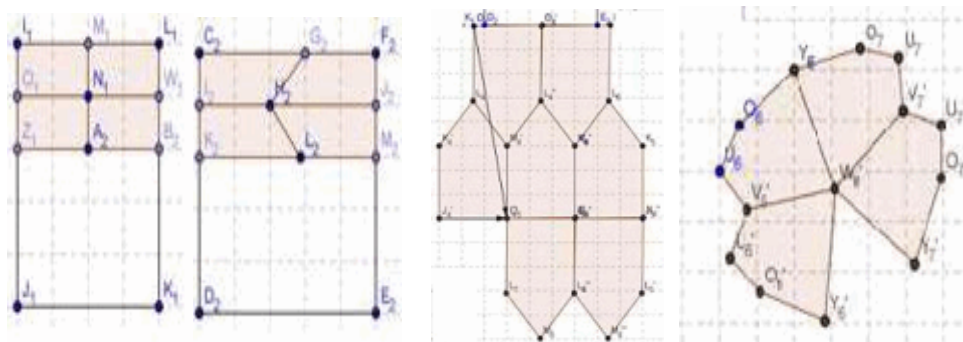
Una vez presentados los análisis del diario y de las parrillas de competencias de A3, paso a exponer los resultados de la triangulación realizada con Atlas.ti de la información contenida en dichos instrumentos, con la recogida mediante los restantes instrumentos empleados (archivos de audio y de Geogebra, así como los protocolos escritos de resolución de las tareas 1 y 5). El análisis de estos datos para cada competencia, que en lo que sigue expongo resumidamente, ha permitido informar del desarrollo experimentado por A3 en cada una de ellas, así como de los factores causantes de dicho desarrollo.

Pensar y Razonar

Durante la experiencia con Geogebra, mi concepción de las limitaciones cognitivas de A3, que me había formado a lo largo del primer trimestre, fue cambiando progresivamente. Este alumno demostró Pensar y Razonar con más claridad de lo que yo esperaba, exhibiendo un nivel alto en sus razonamientos, al emplear los conceptos de isometrías en contextos nuevos. Por ejemplo, el análisis de la tarea 1 mostró cómo en primer lugar comenzó creando mosaicos

sencillos, dibujando las teselas a partir de sus vértices (imágenes 1 y 2), para después crear mosaicos más complejos usando simetrías y traslaciones (imágenes 3 y 4):

Ejemplo 10-17. Muestra de mosaicos construidos por A3 en la tarea 1



Además, para cada polígono y tomando como ejemplo el caso de pentágonos, A3 no se contentó con construir un único mosaico, sino que probó a teselar con distintos pentágonos. Ello le llevó a tener una visión más amplia y a poder razonar que la formación de mosaicos a partir de polígonos no dependía del número de lados de éstos, sino de los valores de sus ángulos interiores, argumentando que los ángulos que concurrían en cada vértice debían sumar 360° . Llegar a este razonamiento le llevó bastante tiempo y dedicación pero, desde el momento en que empezó a trabajar con Geogebra, se implicó de tal modo en las tareas, que no parecía importarle realizar tal esfuerzo con tal de obtener la respuesta esperada. Por ello, se considera Geogebra como el factor más influyente para esta evolución. El nivel obtenido por A3 en esta competencia no puede atribuirse a la interacción con su compañero porque éste no trabajó en las tareas, ni tampoco a su interacción conmigo, pues él razonaba de modo autónomo.

Argumentar-Demostrar

En todas las tareas en las que se le solicitó Argumentar-Demostrar logró salir airoso. Puede descartarse la influencia de su compañero A16, pues apenas participó en algunas de las tareas y además sus aportaciones no fueron de ayuda. Realizando un análisis más exhaustivo del modo en que argumentó A3 durante la experiencia, se llega a la conclusión de que cuando debía hacerlo a un nivel bajo o medio, no necesitó ayuda externa, sino que él mismo con ayuda de Geogebra lo consiguió. En las tareas que requerían de una demostración formal, necesitó puntualmente mi ayuda para superar sus situaciones de bloqueo. He expuesto, al presentar el desarrollo de la competencia Pensar y Razonar, su argumento para la tarea 1 (extraído de los ejemplos construidos con Geogebra) y mediante el ejemplo 9-22 (p. 365) su

argumentación para la tarea 5, a las que llegó por sí mismo. No obstante, estimo conveniente incluir un fragmento de la entrada del diario de la sesión 6 en la que concluyó la tarea 5:

Sencillamente espectacular el avance de este alumno que obtiene los 3 mosaicos regulares y me lo explica con sus palabras, pues como no recordaba el término “divisor”, me ha comentado que el ángulo interior debe de ser un número que al dividir 360 entre él de exacto y dice que el siguiente número que cumple esa condición es 180, pero que éste no vale como ángulo interior de un polígono, por lo que no hay más posibilidades. No comprueba si hay más divisores de 360° , pero este razonamiento ya era mucho más de lo que cabía esperar.

En la tarea 3, fue en la que experimentó más dificultades, al igual que el resto de sus compañeros, llegando por sí mismo a una demostración empírica de tipo experimento crucial. Realizando numerosos ejemplos, llegó a la conclusión de que siempre era posible teselar con cuadriláteros y triángulos, empleando distintas isometrías. Además, obtuvo que el caso de los triángulos podía reducirse al de los cuadriláteros, pues dado un triángulo cualquiera, siempre era posible obtener su simétrico formando así un cuadrilátero. No llegó a realizar en esta tarea una demostración formal basada en propiedades matemáticas, pero él se mostró bastante satisfecho con su respuesta, a la que había llegado sin solicitar mi ayuda. El desarrollo experimentado en esta competencia estuvo asociado a su evolución en la anterior, dado que al experimentar una mejoría en su forma de Pensar y Razonar, era de esperar que también mejorase sus argumentaciones, tal como sucedió. En las tareas en las que no tenía clara una estrategia a seguir, la herramienta le ayudó a generar múltiples ejemplos que confirmaron sus hipótesis (demostración basada en ejemplos tipo empirismo Naïf, experimento crucial o ejemplo genérico) y le permitieron extraer conclusiones. En muchos casos, éstas le llevaron a una demostración deductiva, organizada con la ayuda de un ejemplo.

Comunicar

A3 también experimentó un gran avance en la competencia Comunicar, dado que, hasta el trabajo con Geogebra, nunca había manifestado habilidades comunicativas, ni oralmente ni por escrito. No solía participar en las puestas en común de las tareas, en las que se discutían las distintas estrategias seguidas por los estudiantes. Como no trabajaba en el aula, difícilmente se comunicaba conmigo o con sus compañeros y tampoco lo hacía por escrito, acostumbrando a dejar las tareas y las pruebas escritas en blanco. Para este estudiante, el aumento de autoconfianza y autonomía, producido por el gusto y confianza en el uso de Geogebra (función motivadora), fue una de las causas de la mejora de esta competencia. El trabajo con el software le permitía hacer conjeturas, que comunicaba oralmente a sus

compañeros, y obtener respuestas, que comunicaba por escrito de un modo bastante correcto. También le llevó a participar en las discusiones de clase, aportando sus hallazgos y atreviéndose incluso a criticar las contribuciones de otros compañeros cuando las consideraba erróneas. Releyendo las entradas de los diarios, sus respuestas a las tareas y las grabaciones de audio, puede apreciarse cómo fue evolucionando a lo largo de la experiencia con Geogebra, mejorando tanto su forma de *hablar matemáticamente* como su forma de *hablar de matemáticas*. En primer lugar, se observó cómo fue evolucionando su modo de hablar de matemáticas: de no hablar nunca de este modo, pasó a hacerlo durante todas las sesiones, tanto con sus compañeros como conmigo, comunicándome sus estrategias y soluciones buscando aprobación. Dicha interacción le ayudó a su vez a comprender las argumentaciones y razonamientos de otros. Además, este avance y el hecho de que para poder seleccionar las herramientas de Geogebra adecuadas en cada caso necesitara conocer la terminología asociada a cada concepto geométrico, contribuyeron a una mejora en su modo de hablar matemáticamente. De este modo, progresivamente fue memorizando y reproduciendo los nombres y las propiedades básicas de los objetos matemáticos que estábamos estudiando, llegando a comunicar sus cálculos y resultados de más de una manera, así como las relaciones que había encontrado.

Modelar

No demostró tener dificultades para Modelar las situaciones presentadas en las tareas, a pesar de no haber manifestado durante las tareas de lápiz y papel (LP) esta competencia. En la fase de *modelado horizontal*, logró traducir los problemas del mundo real al matemático con rapidez ayudado por el software. No obstante, la mayor aportación de Geogebra al desarrollo de esta competencia, se produjo durante la fase de *modelado vertical*, al proporcionarle herramientas adecuadas para testar sus hipótesis y comprobar si eran adecuadas, que le llevaron a resolver las tareas utilizando conceptos y procedimientos matemáticos. Aunque no era usual en él, al terminar el modelado vertical, dedicó un tiempo a reflexionar sobre el proceso seguido con el fin de validarlo y a interpretar la solución obtenida en términos del problema original. La mayoría de las tareas no exigían modelar al más alto nivel, sino que las tareas solían situarse en un nivel medio. La única tarea que exigía un nivel alto de esta competencia fue la tarea 9, y A3 la resolvió sin manifestar dificultades, obteniendo de un modo riguroso y preciso los motivos mínimos y los mosaicos. La influencia de otros factores como la interacción conmigo o con sus compañeros no fue significativa para el desarrollo de A3 en esta competencia.

Plantear y Resolver Problemas

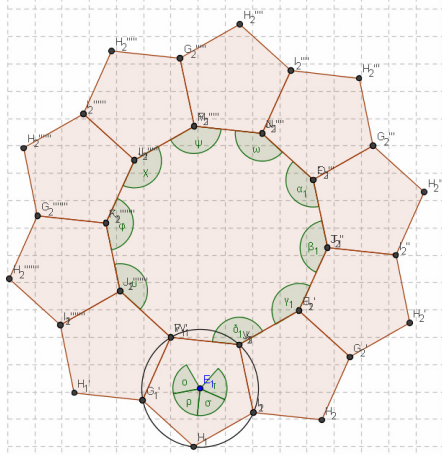
Durante las tareas LP y con anterioridad, A3 no se mostraba capaz de resolver ningún problema, por sencillo que fuese; ni siquiera cuando se trataba de problemas situados en contextos que le eran muy familiares y que requerían de un razonamiento a un nivel bajo. Sin embargo, desde el primer momento en el que empezó a trabajar con Geogebra, esta situación mejoró, demostrando que era más competente de lo que yo creía para Plantear y Resolver Problemas. Le gustaba trabajar con esta herramienta y ello le llevó a disfrutar de las tareas, tomándose su resolución como un reto, no dejando ninguna de ellas sin concluir. Geogebra, además de animarlo a trabajar sin descanso, resultó de gran ayuda para superar sus habituales situaciones de bloqueo (bloqueo inicial y en las fases de implementación y evaluación). Este alumno demostró gran maestría a la hora de resolver las tareas, dado que utilizó procedimientos estándar en muchos casos, pero también otros procedimientos más originales, mostrándose creativo durante las tareas con Geogebra (tareas GG). Al estar esta competencia fuertemente relacionada con el resto y haber mejorado en todas ellas, no era de extrañar que también lo hiciera en ésta. Logró resolver por sí solo todas las tareas, necesitando únicamente mi ayuda de manera puntual en algunas de las más complejas.

Representar

Esperaba que Geogebra ayudase a A3 a Representar, y no sólo lo hizo, sino que a un alto nivel. Desde la tarea 1 distinguió las representaciones correspondientes a mosaicos, que inicialmente dibujaba sobre cuadrícula, pero que posteriormente realizó con isometrías, estando relacionado el avance que experimentó en su forma de crear los mosaicos con el progreso en sus representaciones mentales. Por ejemplo, en la tarea 7 obtuvo sin problemas la condición que debían cumplir los polígonos regulares para formar mosaicos semirregulares y encontró sin dificultad los ocho mosaicos semirregulares congruentes que pedía la tarea 8. A la hora de representar estos mosaicos, necesitó usar isometrías para colocar las teselas pero, mientras muchos de sus compañeros probaban a teselar por ensayo-error (por ejemplo, probando con distintas amplitudes de ángulo de giro hasta dar con la amplitud correcta), él manifestó haber mejorado sus representaciones mentales al emplear directamente los elementos correctos para cada movimiento del plano. Al representar las combinaciones halladas en la tarea 8, se dio cuenta de que no todas ellas correspondían a mosaicos congruentes. Por ejemplo, la combinación de dos pentágonos y un decágono, a pesar de que sumaban 360° , no respondía a un mosaico y así me lo comunicó oralmente y por escrito, tras

representarlo gráficamente con Geogebra, pues comprobó que cuando trataba de ampliarlo las piezas se solapaban:

Ejemplo 10-18. Muestra de mosaico construido por A3 en la tarea 8



Uso de Herramientas y Recursos

Respecto de su competencia en el Uso de Herramientas y Recursos, no hay mucho que añadir pues, a lo largo de los párrafos anteriores, ya he comentado cómo su buen uso de Geogebra contribuyó a que mejorara sustancialmente en todas y cada una de las competencias matemáticas. Al igual que A8, a este alumno le gustaba indagar sobre herramientas de Geogebra distintas a las que habitualmente usaba en las tareas, y no dudaba en emplearlas cuando lo creía oportuno. Manejaba el programa con soltura y rapidez, y era consciente de sus limitaciones.

En respuesta al objetivo 4 de investigación, sintetizo lo anteriormente expuesto acerca del desarrollo experimentado por A3 en sus competencias matemáticas durante el trabajo con Geogebra. A la evolución de este estudiante contribuyó casi en solitario el software, con sus atributos y ventajas sobre lápiz y papel para resolver problemas geométricos, pudiendo despreciar la influencia de otros factores como la interacción con su compañero y conmigo, por producirse de modo aislado. Geogebra mejoró el desarrollo de todas sus competencias, especialmente Modelar, Plantear y Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos, permitiéndole alcanzar un nivel alto en todas ellas. Los diálogos que mantuvimos A3 y yo, le ayudaron en aquellas tareas en las que le exigía Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar de un modo más riguroso. Solamente solicitó mi ayuda en contadas ocasiones, pudiendo considerarlo un alumno totalmente autónomo. Este comportamiento era inusual en él, pues hasta el trabajo con Geogebra se mostró incapaz de alcanzar ni siquiera un nivel bajo en todas sus competencias, lo que se reflejó en su nulo rendimiento en matemáticas

durante el primer trimestre del curso. Por esta razón, se puede considerar a este estudiante como uno de los mayores beneficiados del trabajo con Geogebra.

Para A3 se encontraron las mismas relaciones entre competencias señaladas para A8 y también se confirmó la relación de dependencia entre mejora actitudinal y cognitiva detectada en dicho estudiante. En resumen, puede decirse que Geogebra se consideró el desencadenante de las mejoras de este estudiante. En primer lugar, el gusto y confianza depositado en el software lo motivó para trabajar y disfrutar en matemáticas, al tiempo que mejoró su confianza en sus posibilidades de éxito. Esta transformación le llevó a proponerse realizar todas las tareas con éxito, mostrándose más autónomo, perseverante, sistemático, etc.; es decir, experimentó una mejoría de sus actitudes matemáticas. Dicha transformación actitudinal, tuvo su efecto en el desarrollo de ciertas competencias, al que no solamente contribuyó la función motivadora del software, sino otros factores y ventajas que se exponen más adelante. En efecto, durante las tareas con Geogebra, A3 manifestó ser competente en matemáticas de un modo que hasta la fecha no había evidenciado, de ahí mi sorpresa inicial y posterior satisfacción, por cumplir mis objetivos con este estudiante, en el que la realidad superó mis expectativas previas.

10.1.3.2.2. Alumna A7

A7 era poco disciplinada y generalmente no realizaba las tareas ni en clase ni en casa. No obstante, como quería superar la asignatura, cuando tenía que entregar alguna relación de ejercicios voluntaria u obligatoria o realizar una prueba escrita, recurría a ayuda externa para repasar los contenidos trabajados en clase, generalmente asistiendo a una academia por las tardes. Durante el primer trimestre, en el que se recordaron y ampliaron los contenidos del bloque de Números, estudiados en cursos anteriores, demostró que cuando se trataba de aplicar algoritmos o seguir procedimientos de resolución ya practicados, no tenía grandes dificultades, pues los memorizaba y aplicaba con relativa destreza (obtuvo una calificación de 5). Sus dificultades surgían cuando tenía que resolver un problema o tarea en el que tenía que Pensar y Razonar qué estrategia seguir. En estos casos, habitualmente solía probar algún procedimiento conocido, sin meditar previamente si era adecuado o no, y cuando no le funcionaba, se bloqueaba. Ella reconocía que tenía dificultades a la hora de Resolver Problemas, dado que con frecuencia no sabía cómo empezar, ni encontrar una estrategia adecuada que le condujese a la solución buscada.

A lo largo de las tareas GG, esta alumna experimentó una evolución considerable, que se ajustó bastante a mis expectativas previas y la llevó a mejorar su rendimiento (obtuvo una calificación de 7). En lo que sigue presento tal progreso más detalladamente.

Análisis del Diario

Esta alumna no alcanzó niveles altos en todas sus competencias, como sucediese para los dos estudiantes ya analizados, A8 y A3, y ello se reflejó en las entradas del diario que sobre su desarrollo cognitivo escribí durante las tareas GG. Hubo ciertas competencias matemáticas, como Comunicar, que no desarrolló adecuadamente. En otras, como Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar, logró mejorar su situación inicial, pero sin llegar a evidenciarlas a un alto nivel. Las entradas del diario hacían referencia a esta situación; incluyo algunas como ejemplo:

Sesión 3: Hoy avanza poco, porque comienza a teselar con un triángulo isósceles y con un rectángulo usando isometrías, pero no sabe argumentar por qué siempre es posible teselar (con cualquier triángulo y cuadrilátero). Yo suponía que la tarea 3 le supondría dificultades a la hora de argumentar de un modo más formal y no solamente de modo empírico, a través de los ejemplos construidos. Esta tarea requiere un mayor dominio de ciertas competencias matemáticas, como Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar, que ella no demuestra. No obstante, ha trabajado durante toda la sesión y al menos ha conseguido construir diferentes mosaicos que les sirven para argumentar a un nivel mínimo.

Sesión 6: Consigue obtener los tres polígonos regulares con los que es posible teselar, pero solamente argumenta visualmente con sus palabras: "no dejan huecos y no se solapan porque suman 360°". Sabe hallar los ángulos interiores de los polígonos, pero no para qué los necesita. Comienza la tarea 6, en la que trabaja bien (probando con traslaciones y simetrías para construir los mosaicos).

Sesión 8: Ha conseguido formar el mosaico de cuadrados y triángulos (ha colocado los triángulos sobre los cuadrados mediante giros, razonando cuáles debían ser los ángulos de giro) y se ha quedado intentando dibujar otro mosaico con hexágonos y triángulos. Ha trabajado con dificultades inferiores a otros días, sobre todo a la hora de utilizar los movimientos del plano para construir y ampliar los mosaicos, demostrando haber mejorado sus razonamientos y representaciones. Sigue muy trabajadora y motivada.

Análisis de las Parrillas de Observación de Competencias

A lo largo de las tareas GG, esta alumna manifestó ser medianamente competente en matemáticas, como confirmó el análisis de sus parrillas de competencias que ahora expongo, y que muestra el nivel alcanzado por A7 en cada competencia, durante las tareas GG:

Tabla 10-20. Niveles de competencias alcanzados por A7

COMPETENCIAS	NIVEL
Pensar y Razonar	2
Argumentar-Demostrar	2
Comunicar	1
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	2-3
Representar	2-3
Uso de Herramientas y Recursos	2-3

Análisis realizado con Atlas.ti: Triangulación

Describo, del mismo modo que para A3, el desarrollo de cada competencia alcanzado por esta estudiante durante las tareas GG.

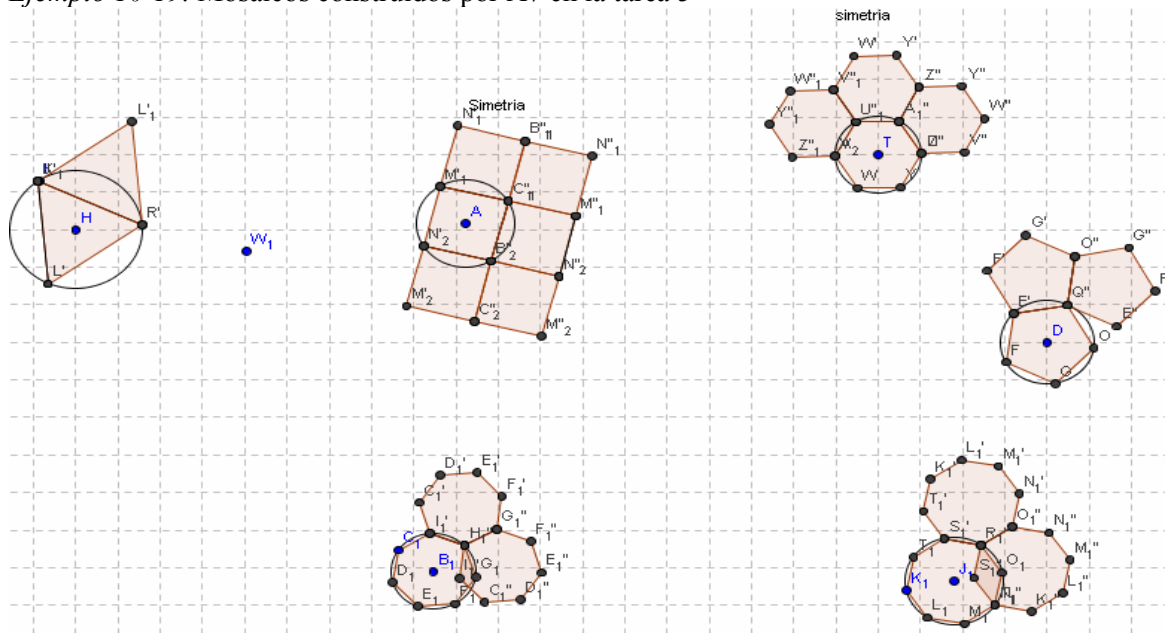
Pensar y Razonar

Se pudo apreciar, durante la experiencia con Geogebra, cómo A7 iba superando algunas de sus deficiencias cognitivas. Como siempre, se mostraba reacia a Pensar y Razonar antes de actuar, pues le suponía mayor esfuerzo que comenzar directamente por ensayo-error. En esta competencia, Geogebra contribuyó notablemente, dado que en primer lugar le permitió seguir con este modus operandi, pero poco a poco fue obligándola a Pensar y Razonar en términos de propiedades geométricas, para obtener la respuesta buscada. Sin embargo, a pesar de las mejoras comentadas, A7 siguió mostrando dificultades en las tareas en las que debía razonar a un alto nivel, y en estas situaciones necesitó ayuda externa para encontrar una estrategia adecuada. Comprendía los razonamientos de terceros, pero le costaba llegar a ellos por sí sola, manifestando haber mejorado respecto de su situación previa, pero no lo suficiente como para obtener éxito en las tareas de modo totalmente autónomo.

Por ejemplo, en la tarea 5 razonaba correctamente cómo construir los mosaicos regulares usando isometrías, como muestra la siguiente imagen. Sin embargo, cuando trataba de buscar una argumentación no visual de la existencia y unicidad de los tres mosaicos regulares, necesitó ayuda externa. Siguió las sugerencias de la ficha y se puso a calcular el valor de los ángulos interiores de cada uno de los polígonos regulares de diferentes formas: midiéndolos con Geogebra y descomponiéndolos en triángulos razonadamente, para después hallar la suma de los ángulos del polígono y dividir este valor entre el número de lados. A pesar de razonar adecuadamente cómo obtener estos valores, no sabía por qué los estaba hallando, es

decir, no encontró relación entre el valor de los ángulos interiores de los polígonos regulares y la posibilidad de construir mosaicos con ellos.

Ejemplo 10-19. Mosaicos construidos por A7 en la tarea 5



Argumentar-Demostrar

En todas las tareas en las que se le solicitó Argumentar-Demostrar logró, con mucho esfuerzo, alcanzar un nivel medio. Igual que en el caso de A3, puede descartarse la influencia de su compañera A17, pues a pesar de que ésta cambió satisfactoriamente con la introducción de Geogebra, implicándose y trabajando en las tareas como no lo había hecho hasta entonces, tenía serias dificultades cognitivas que hicieron que sus aportaciones no fueran de gran ayuda. Así, era A7 la que llevaba la voz cantante cuando se trataba de obtener argumentaciones más allá del campo visual. Realizando un análisis más exhaustivo del modo en que A7 argumentó durante la experiencia, se puede afirmar que cuando debía hacerlo a un nivel bajo se mostró autosuficiente, gracias a la ayuda del software que le permitió hacerlo empíricamente, a partir de la visualización en la pantalla de los ejemplos construidos. Por ejemplo, argumentó de este modo que en cualquier mosaico la suma de los ángulos concurrentes en cada vértice era siempre de 360° . En las tareas que requerían de una demostración formal, sólo llegó a un nivel medio; es decir, no logró obtener estas argumentaciones-demostraciones de alto nivel, sino que ella y su compañera justificaron sus respuestas mediante demostraciones empíricas tipo experimento crucial. A ello también contribuyó Geogebra, al permitirles generar diferentes ejemplos hasta encontrar uno que resultara adecuado para garantizar la bondad de sus afirmaciones. A este nivel de dificultad,

A7 necesitó puntualmente mi ayuda para superar las situaciones de bloqueo. En las tareas que exigían un gran dominio de esta competencia, siempre necesitó apoyo externo y no en todas ellas logró obtener la argumentación buscada. Así, por ejemplo, en las tareas 3 y 5, no logró argumentar por qué cualquier triángulo y cuadrilátero siempre tesela o la unicidad de los tres mosaicos regulares. No obstante, en algunas tareas sí que avanzó un poco más lejos de lo esperado, siendo un ejemplo la tarea 9, en la que con un empujoncito inicial logró construir los mosaicos del hueso y del avión y argumentar correctamente y en términos matemáticos su obtención. Estos resultados se ajustaron a mis expectativas, pues pensaba que no alcanzaría un alto grado de desarrollo de esta competencia, pero que experimentaría una considerable evolución, ya que durante las tareas LP no demostró competencia alguna a la hora de justificar sus respuestas.

Previamente expuse para A8 y A3 la relación encontrada entre esta competencia y la anterior. De nuevo, en el caso de A7, se apreció que la mejora experimentada en su forma de Pensar y Razonar le llevó a mejorar en sus argumentaciones.

Comunicar

A7 no experimentó un gran avance en la competencia Comunicar, sino que más bien se mantuvo en la línea que había llevado durante todo el curso, manteniendo una calidad baja en sus comunicaciones. Se observó cierta evolución en su comunicación por escrito, pues se esmeró en usar terminología adecuada, aunque cuando se comunicaba oralmente, unas veces cuidaba su expresión y otras no tanto. Su aumento de autoconfianza le llevó a participar en las discusiones de clase, aportando sus hallazgos y criticando las contribuciones de otros compañeros cuando no las consideraba acertadas, manifestando en estas ocasiones un nivel medio en sus comunicaciones. A la mejora observada en esta competencia contribuyó la mayor interacción con sus compañeros y conmigo durante la realización de las tareas GG, ayudándole a comprender las argumentaciones y razonamientos de otros. La herramienta, además de motivarla para trabajar en matemáticas, le ayudó a ampliar su vocabulario matemático, al obligarla a memorizar la terminología asociada a cada concepto geométrico para poder seleccionar la herramienta de Geogebra adecuada a las necesidades de cada tarea. Dos ejemplos ponen de manifiesto, por un lado la mejoría experimentada en su forma de *hablar matemáticamente*, al emplear nomenclatura adecuada y, por otro lado, cómo la calidad de sus comunicaciones no siempre era la adecuada. Ambos ejemplos están extraídos de sus protocolos escritos de resolución de la tarea 5:

Ejemplo 10-20. Fragmento del protocolo escrito de resolución de la tarea 5 de A7 en el que habla matemáticamente de forma adecuada

Pregunta: ¿qué forma pueden tener las losetas? (les preguntábamos con qué polígonos regulares se puede teselar)

Respuesta de A7: Se puede con el cuadrado, triángulo y con el hexágono. No se puede con el pentágono, heptágono y octágono.

Ejemplo 10-21. Fragmento del protocolo escrito de resolución de la tarea 5 de A7 en el que habla matemáticamente de forma inadecuada

Pregunta: ¿Puedes obtener más mosaicos usando losetas regulares de mayor número de lados? Justifica tus respuestas.

Respuesta de A7: No, porque sus lados tienen que sumar 360° y no se pueden quedar espacios libres.

Modelar

Esta alumna no manifestó grandes dificultades para Modelar las situaciones presentadas en las tareas, a pesar de no haber demostrado esta competencia durante las tareas LP. Aún así, empleó en ello más tiempo que otros compañeros, como A3 ó A8. El trabajo con el software fue beneficioso para ella al permitirle actuar por ensayo-error, en ausencia de una estrategia de resolución definida, lo que evitó su habitual bloqueo inicial. Asimismo, la interacción con Geogebra le ayudó durante la fase de *modelado vertical*, porque fue reconduciendo sus acciones hasta encontrar una respuesta adecuada. La única tarea que exigía un nivel alto de esta competencia fue la tarea 9, para cuya resolución fue suficiente la ayuda inicial que le proporcioné para que lograra obtener los mosaicos de un modo riguroso y preciso. Por tanto, en esta competencia, mi influencia y la de sus compañeros fueron poco significativas.

Plantear y Resolver Problemas

A la hora de Plantear y Resolver Problemas, A7 no manifestaba en principio ser muy competente, pues durante las tareas LP y con anterioridad fue capaz de resolver únicamente problemas sencillos situados en contextos que le eran muy familiares y que requerían de un razonamiento a un nivel bajo. Cuando se trataba de aplicar procedimientos o algoritmos ya estudiados, solía memorizarlos y aplicarlos correctamente. Las dificultades de esta estudiante llegaban cuando debía resolver problemas abiertos, para los que no tenía una estrategia de resolución clara y ya conocida. Generalmente, en estos casos necesitaba ayuda externa para superar la situación de bloqueo que le producía la ausencia de una estrategia de resolución. Durante las tareas LP, A7 se quejó en reiteradas ocasiones, haciéndome saber que no le

gustaban este tipo de tareas, sino que prefería otras más mecánicas, en las que no tuviese que pensar. Al incorporar Geogebra mejoró en este sentido, pues el hecho de que le gustase trabajar con esta herramienta, la llevó a disfrutar de las tareas, y trató de no dejar ninguna tarea inacabada. No llegó a demostrar altos niveles en esta competencia, sino que se situó en un nivel medio, lo cual ya era una evolución más que aceptable para ella, dada su situación de partida. Al estar esta competencia fuertemente relacionada con el resto, es comprensible la mejoría experimentada por A7, pues también evolucionó en las restantes.

Representar

A7 manifestaba un nivel de representación bajo durante las tareas LP. En cambio, y acorde con las anteriores competencias, esta estudiante evidenció un nivel medio cuando se trataba de Representar durante las tareas con Geogebra. Experimentó una evolución similar a la de otros compañeros, pues comenzó dibujando sobre cuadrícula y progresivamente fue incorporando las isometrías en sus representaciones, aunque su avance fue más lento y no comenzó a usar estos movimientos hasta la tarea 2. En todo momento, distinguió las representaciones correspondientes a mosaicos y, muy lentamente, fue mejorando también sus representaciones mentales. A veces le costaba imaginar cuál era el elemento adecuado para realizar un movimiento y necesitaba probar por ensayo-error hasta que ello le permitía comprender cuál era este elemento. Por ejemplo, al usar giros tenía ciertas dificultades para encontrar el ángulo de giro adecuado, dificultades que ya manifestó durante las tareas ISO, y su forma de superar este escollo era realizar varios intentos, a veces fundamentados y otros con una medida cualquiera. Las representaciones obtenidas de un modo riguroso y preciso por el software le permitían distinguir si la amplitud testada era adecuada o no. A7 consiguió decodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos estudiados, mejorando así su visualización de las propiedades geométricas, gracias al trabajo con Geogebra. Con gran esfuerzo, logró en bastantes ocasiones cambiar de unas formas de representación a otras. A modo de ejemplo, incluyo el siguiente fragmento del diario de la sesión 9 en la que realizó la tarea 8:

Tarea 8: Aunque no sabía cómo empezar para obtener los 5 mosaicos semirregulares congruentes que le faltaban, tras usar sus mosaicos como ejemplo y señalarle un vértice ha comprendido la estrategia que debía seguir y ha obtenido cuatro de estos mosaicos, faltándole únicamente el mosaico 8 compuesto de cuatro triángulos y un hexágono. Después se ha puesto a dibujar el mosaico de hexágonos y cuadrados, aunque no ha tenido tiempo suficiente para terminarlo antes de que acabase la sesión.

En la tarea 7, la estudiante puso de relieve que, efectivamente, sus representaciones mentales iban mejorando, llevándola a encontrar la amplitud de giro correcta para construir el mosaico sin necesidad de actuar por ensayo-error. En la tarea 8, demostró cierta competencia para decodificar las representaciones de mosaicos incluidas en la ficha, tras la sugerencia de observar los polígonos concurrentes en cada vértice. Ello le llevó a encontrar una estrategia de resolución satisfactoria.

Uso de Herramientas y Recursos

En lo referente al Uso de Herramientas y Recursos, es decir, a su competencia manejando Geogebra, la facilidad de manejo del software contribuyó a que A7 alcanzase un nivel medio. No evidenció un nivel alto de desarrollo de esta competencia porque en ocasiones tuvo que solicitar ayuda a sus compañeros para emplear algunas de las herramientas. Tampoco demostró la curiosidad experimentada por otros, como A3 y A8, de indagar sobre herramientas de Geogebra distintas a las que habitualmente se usaban en las tareas. Demostraba ser capaz de emplear el programa para realizar las tareas en situaciones similares y diferentes a las ya practicadas durante las tareas de isometrías del plano, también realizadas con el programa.

Respondiendo al objetivo 4 de investigación, se puede afirmar que A7 experimentó una evolución que la llevó a mostrarse competente a un nivel medio, salvo en sus comunicaciones, que siguieron siendo muy pobres. El trabajo con Geogebra contribuyó a que manifestase algunas competencias, como Modelar, Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos a nivel medio y también a que desarrollase a un nivel bajo Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, que hasta entonces apenas había evidenciado. Para alcanzar un nivel medio en sus razonamientos y argumentaciones, esta alumna necesitó ayuda externa, generalmente la mía, aunque en ocasiones recurrió a A8, quien gustosamente respondió a sus peticiones de ayuda. En resumen, para esta estudiante el trabajo con Geogebra fue beneficioso pues, a priori, se esperaba que tuviese ciertas dificultades con las tareas de Argumentar y con aquellas que exigían razonamientos de alto nivel, como sucedió, y que abandonaría dichas tareas antes de obtener una respuesta adecuada, pero no fue así.

Para A7, se encontraron las dos mismas relaciones entre competencias señaladas para A8 y A3, aunque no se observó la última de las implicaciones de la primera de tales relaciones. Es decir, se observó cómo la mejora de la competencia Pensar y Razonar, la llevó a Argumentar-

Demostrar correctamente en aquellas tareas cuyo nivel de complejidad era medio, si bien, la evolución experimentada en tales competencias no potenció el desarrollo su competencia comunicativa a un nivel aceptable. La otra relación encontrada para A8 y A3: buen uso de Geogebra (HR) implicó mejora de sus Representaciones, también se apreció en A7. Por otra parte, la relación entre mejora actitudinal y cognitiva detectada en dicha estudiante, coincidió con la encontrada para los dos anteriores, con algunas matizaciones. En A7, la actitud positiva hacia el uso de Geogebra en matemáticas contribuyó a una mejora de las actitudes hacia las matemáticas, sobre todo de sus componentes afectiva y comportamental. Esta transformación positiva de dichas componentes de las actitudes hacia las matemáticas provocó una mejora de determinadas actitudes matemáticas como Perseverancia y Autonomía, mejora que a su vez incidió en el desarrollo de ciertas competencias matemáticas, como Modelar y Plantear y Resolver Problemas. Para esta estudiante, ciertos atributos y ventajas del uso del software sobre LP, así como su interacción conmigo, se han señalado como los responsables de la evolución de las restantes actitudes y competencias.

10.1.3.2.3. Alumnas A9y A10

A9 era de las estudiantes que pasaban totalmente desapercibidas en clase, porque nunca participaba en las actividades y se mostraba totalmente desmotivada por los contenidos trabajados en matemáticas. Su comportamiento era bastante variable porque, a pesar de no mostrar interés alguno en mis clases, cuando realizábamos pruebas escritas, sí que observaba cierto deseo de superarlas para llegar al aprobado en matemáticas. En estas pruebas y en aquellas situaciones en las que tuve oportunidad de indagar acerca de sus dificultades cognitivas, comprobé que era capaz de memorizar algoritmos sencillos ya trabajados en repetidas ocasiones y aplicarlos correctamente en algunas situaciones, pero no siempre. Por el contrario, cuando debía enfrentarse a problemas abiertos, se mostraba incapaz de encontrar una estrategia de resolución que le llevase a obtener una respuesta. Durante el primer trimestre, a pesar de comenzar con contenidos del bloque de Números, que ya habían trabajado en cursos anteriores, no logró alcanzar su objetivo de llegar al “5” (obtuvo una calificación de 3) y ello hizo que se desmotivase aún más en matemáticas. Durante las tareas LP siguió manifestando estas dificultades, sobre todo con las tareas más complejas, obteniendo una calificación de 4. Esperaba que el cambio metodológico que suponía incluir Geogebra para trabajar las tareas, lograse motivarla lo suficiente como para que se produjese

una mejora en su nivel de competencias matemáticas, y así fue (obtuvo una calificación de 8 en la unidad de teselaciones del plano).

El perfil de A10 era radicalmente distinto, no sólo manifestaba una actitud muy positiva hacia la asignatura, sino que además evidenciaba ser matemáticamente competente a un nivel medio. Demostró, a lo largo del primer trimestre del curso, no tener dificultad para comprender y aplicar procedimientos simples, así como con las destrezas numéricas, y resolvía problemas sencillos de proporcionalidad con relativa soltura (obtuvo una calificación de 6). Durante las tareas LP, al trabajar problemas abiertos sin estrategia de resolución definida, tuvo algunas dificultades a la hora de hacer razonamientos y argumentaciones de alto nivel, pero siguió demostrando un rendimiento adecuado (obtuvo una calificación de 7). Mis expectativas acerca del desarrollo de competencias de esta estudiante se vieron cubiertas, pues a priori, esperaba que demostrara mayor maestría en aquellas competencias que hasta entonces no había desarrollado a su más alto nivel. Esto fue lo que sucedió, mejorando con ello su calificación (obtuvo un 9) en los contenidos trabajados con Geogebra.

Análisis del Diario

La lectura del diario que escribí conjuntamente para esta pareja de estudiantes permite recordar cómo fueron desarrollando sus competencias durante el trabajo con Geogebra. Ya he comentado que la situación de partida de ambas era bien distinta. Por ello, resultó más sorprendente la transformación de A9, cuyas competencias matemáticas durante las tareas LP eran casi nulas, que la evolución de A10, que evidenciaba la mayoría de ellas con asiduidad a un nivel medio. En las líneas del diario de esta pareja pongo de relieve la total autonomía con la que trabajaron durante las tareas GG, hasta el punto de que solicitaron mi ayuda una única vez. Asimismo, la información recogida con este instrumento apunta a una mejora de las competencias de ambas estudiantes, que llevó a A9 a manifestar la mayoría de ellas a un nivel medio-alto y a A10 a desarrollarlas a un nivel alto. Incluyo algunos fragmentos como muestra de ello:

Sesión 7: Han realizado de nuevo la tarea 5 con Geogebra (ayer cuando fueron a guardarla A10 la sobrescribió sin querer) y después han obtenido los valores de los ángulos interiores, aunque no los han empleado para argumentar la unicidad de los tres mosaicos regulares. Sólo argumentan visualmente a partir de sus ejemplos y aludiendo a que estos ejemplos son los únicos en los que se cumple que la suma de los ángulos que concurren en un vértice es de 360° . A continuación realizan la tarea 6 de distintas formas: teselan con triángulos empleando simetrías, traslaciones y giros de 180° , y para el caso de los hexágonos emplean simetrías y traslaciones, pues en la tarea 5 ya lo habían hecho mediante giros. A9

piensa mientras que A10 piensa y actúa (suele ser ella la que maneja el ratón y responde por escrito), aunque también es verdad que se turnan con el ratón e interactúan bastante entre ellas, interacción que yo no observé con anterioridad al trabajo con Geogebra.

Sesión 8: Logran construir sin problemas el mosaico 6 y después se ponen a construir un mosaico formado por hexágonos y rombos, que aunque tienen lados iguales no son regulares. Al visualizarlo en pantalla, se dan cuenta de que el mosaico no es semirregular y se cercioran de ello midiendo los ángulos del rombo, obteniendo dos ángulos de amplitud 120° y dos de 60° . Para arreglar su error, descomponen cada rombo en dos triángulos equiláteros, que sí cumplen la condición de regularidad necesaria para los mosaicos semirregulares, y les lleva a obtener el mosaico formado por hexágonos y triángulos.

Sesión 11: Realizan y explican correctamente la tarea 9. Tienen algunas dificultades con el mosaico del avión (no para obtener el motivo mínimo sino para ampliar el mosaico), pues no habían usado la herramienta “polígono” para marcar el motivo mínimo, pero se han dado cuenta por sí solas y tras superar esa pequeña dificultad han logrado extender el mosaico empleando giros. Después se han puesto a trabajar en la tarea 10, aunque únicamente les da tiempo a construir los polígonos regulares que en la siguiente sesión deformarán.

Análisis de las Parrillas de Observación de Competencias

El análisis de las parrillas de observación de competencias permite afirmar que, a lo largo de las tareas GG, estas alumnas alcanzaron un desarrollo adecuado de todas sus competencias. El nivel alcanzado por A9 fue ligeramente inferior al de A10 en algunas competencias, lo cual parecía lógico, dada su situación inicial. No obstante, teniendo en cuenta el nivel de desarrollo previo de cada una de ellas, resultó más remarcable la evolución experimentada por A9.

Tabla 10-21. Niveles de competencias alcanzados por A9 y A10

COMPETENCIAS	NIVEL A9	NIVEL A10
Pensar y Razonar	2-3	3
Argumentar-Demostrar	2-3	3
Comunicar	2-3	2-3
Modelar	2-3	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3	3
Representar	3	3
Uso de Herramientas y Recursos	3	3

Análisis realizado con Atlas.ti: Triangulación

Siguiendo la misma estructura que para los dos casos anteriores, A3 y A7, describo el desarrollo de cada competencia exhibido por estas estudiantes durante las tareas GG, triangulando toda la información recogida con este fin.

Pensar y Razonar

Como sucediese con A3, durante las tareas GG fui cambiando progresivamente mi concepción de las limitaciones cognitivas de A9 que me había formado a lo largo del primer trimestre. A9 demostró Pensar y Razonar con más claridad de lo que yo esperaba, alcanzando un nivel medio en sus razonamientos. No sólo comprendía las estrategias propuestas por su compañera, sino que ella misma planteaba las suyas propias, abandonando así su comportamiento pasivo manifestado durante las tareas LP. Cuando las tareas exigían un razonamiento a un nivel alto, era A10 la que tomaba el mando y proponía distintos caminos que exploraban juntas. En estos casos, A9 puso de manifiesto que, aunque por sí misma no era capaz de hacer tales razonamientos, sí que llegaba a comprenderlos. La herramienta contribuyó a que ambas mejoraran en esta competencia, al brindarles la oportunidad de generar gran cantidad de ejemplos sobre los que Razonar y Argumentar de un modo rápido y sencillo, optimizando así el tiempo de cada sesión. La diferencia con lápiz y papel es que, para construir los mosaicos en papel de un modo preciso, habrían necesitado mucho más tiempo. Asimismo, las posibles imprecisiones en sus construcciones y la imposibilidad de interactuar con ellas habrían dificultado la visualización de ciertas propiedades matemáticas que con Geogebra captaron fácilmente. El factor tiempo fue muy importante para que A9 participase en las tareas aportando sus ideas, pues inicialmente siempre testaban la estrategia propuesta por A10. Con Geogebra, aún tenían tiempo suficiente para comprobar también la estrategia de A9, en caso de que ambas propusiesen caminos de resolución distintos. Esta pareja no solicitó mi ayuda para resolver las tareas, excepto en la tarea 3, debido a que ambas se mostraban autónomas y autosuficientes. Cuando debían razonar a nivel medio, Geogebra contribuyó a que ambas desarrollaran esta competencia y también influyó para que A10 razonase a nivel alto. Sin embargo, para A9, además del software, fue necesaria la ayuda de A10 para llegar a razonamientos complejos, pues por sí sola parecía no conseguirlo.

Argumentar-Demostrar

A la hora de Argumentar-Demostrar se perpetuaron las mismas diferencias encontradas entre A9 y A10 para el caso de Pensar y Razonar, pues A9 alcanzó un nivel medio mientras que

A10 manifestó un nivel alto. En el caso de A9, la mejora en esta competencia se debió a varios factores: por un lado, el software contribuyó a que primeramente argumentara visualmente y, por otro lado, su compañera le transmitió la necesidad de buscar una demostración más formal y no contentarse únicamente con demostraciones empíricas a partir de ejemplos concretos. Esta pareja solamente solicitó ayuda en la tarea 3, quedando reflejado en el diario como sigue:

Sesión 3: Aunque generalmente son totalmente autónomas, como hoy tenían dudas me han llamado. Teselan con distintas isometrías y distintos polígonos y buscan un ejemplo lo menos particular posible para argumentar, un triángulo irregular no rectángulo ni isósceles, aunque tienen ciertos problemillas y entonces les he sugerido a ellas y al resto del grupo, que probasen a teselar con giros en los puntos medios de los lados y así lo han hecho aunque no han llegado a argumentar todavía.

Sesión 4: Obtienen la generalización para triángulos y cuadriláteros, aunque tienen más dificultad con los triángulos: identifican ángulos iguales tras sugerirles que midan los de uno cualquiera de los triángulos. Una vez comprendida la estrategia, advierten que ocurre lo mismo para los cuadriláteros, que también lo comprueban midiendo los ángulos.

Puede resumirse el modo en que ambas argumentaron de la siguiente manera: cuando debían hacerlo a un nivel bajo o medio, no necesitaron ayuda externa y ambas colaboraron por igual en la obtención de la demostración, impulsadas por la posibilidad que les ofrecía Geogebra de testar diferentes ideas y manipular los objetos construidos. Sin embargo, en las tareas que requerían de una demostración más formal, mientras que A10 expresó toda la potencialidad del software y solamente solicitó mi ayuda puntualmente, A9 necesitó las sugerencias y explicaciones de A10 para superar las situaciones de bloqueo que experimentaba cuando intentaba argumentar de un modo más formal.

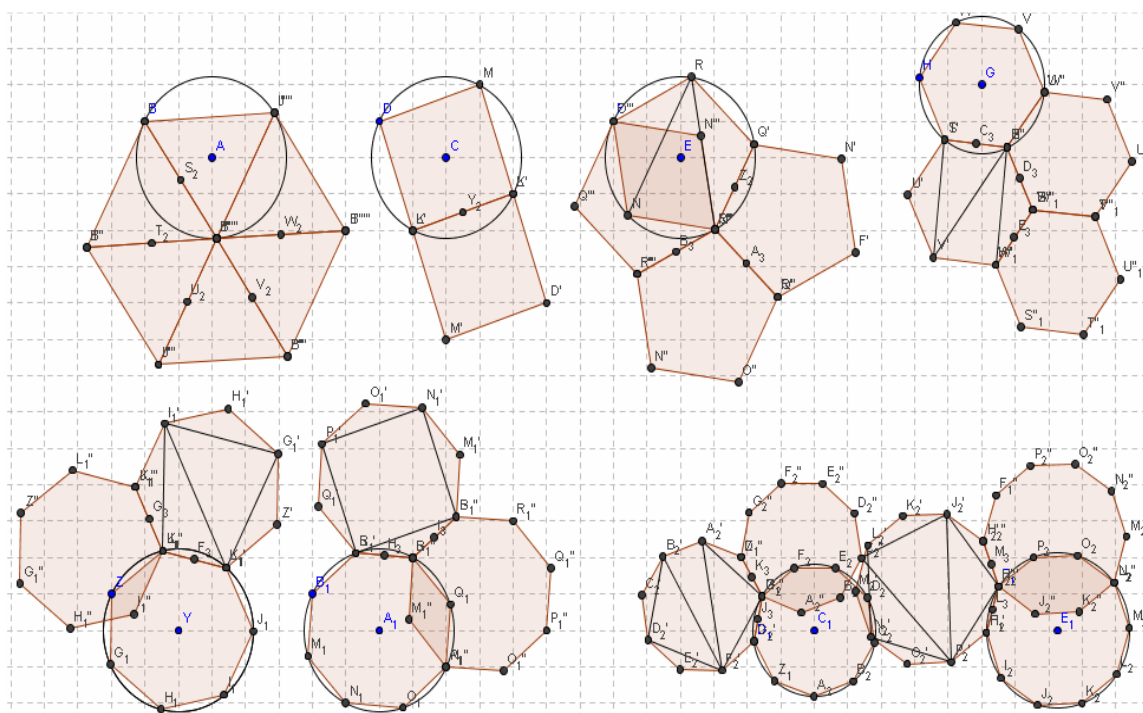
Como he expuesto al analizar otros estudiantes, se halló una fuerte relación entre esta competencia y anterior (PR), y al experimentar una evolución en su forma de Pensar y Razonar era de esperar que también mejorasen sus argumentaciones, tal como sucedió. La herramienta les ayudó a generar múltiples ejemplos que confirmaron sus hipótesis (demostración basada en ejemplos tipo empirismo Naïf, experimento crucial o ejemplo genérico) y les permitieron extraer conclusiones que en muchos casos las llevaron a una demostración deductiva, organizada con la ayuda de un ejemplo.

Comunicar

En la competencia Comunicar ambas demostraron un nivel de desarrollo medio, lo que para A9 supuso un gran avance, pues nunca había manifestado habilidades comunicativas oralmente ni por escrito. A9 no solía participar en las puestas en común de las tareas y A10, dada su timidez, tampoco lo hacía. Sin embargo, el gusto y la confianza que estas estudiantes manifestaron hacia el trabajo con Geogebra, provocó en ellas un aumento de su Autoconfianza y Autonomía en matemáticas. Esto las llevó a abandonar esta conducta, mostrándose más comunicativas entre ellas, con sus compañeros y conmigo. Releyendo las entradas de su diario, sus respuestas a las tareas, las tareas en Atlas.ti y las grabaciones de audio, se aprecia cómo fueron evolucionando a lo largo de la experiencia con Geogebra. Mejoraron sobre todo su forma de *hablar de matemáticas*, pues de no hablar nunca de este modo, pasaron a hacerlo durante todas las sesiones, afianzando así la relación entre ellas. También experimentaron un cierto avance en su modo de *hablar matemáticamente*, ya que progresivamente fueron memorizando y reproduciendo los nombres y las propiedades básicas de los objetos matemáticos que estaban estudiando. A este avance contribuyó el uso continuado de Geogebra que, como ya expuse para A8, A3 y A7, exigía que los estudiantes conocieran dicha terminología para poder usar las herramientas que deseaban emplear en cada momento. Asimismo, llegaron a comunicar sus cálculos y resultados correctamente, si bien el lenguaje empleado en algunas ocasiones era susceptible de mejora. La evolución comentada y la interacción con sus compañeros y conmigo, les ayudó a comprender las argumentaciones y razonamientos de otros. Un extracto de la tarea 5, que pone de manifiesto cómo a veces no cuidaban mucho su modo de hablar matemáticamente, es el siguiente:

Ejemplo 10-22. A9 y A10 no hablaban matemáticamente de modo adecuado

(Tras contestar que sólo pueden formar mosaicos regulares con triángulos, cuadrados y hexágonos regulares, tratan de contestar a la pregunta de la tarea 5: ¿Puedes obtener más mosaicos usando losetas regulares de mayor número de lados? Para ello se fijan en los ejemplos que han construido:)



A10: a ver, no, ¿por qué no se puede?

A9: ¿estos? que ¿por qué no se puede?

A10: sí, porque sus ángulos...

A9: sus vértices, los vértices es la esquina ésa que forman

A10: sus vértices forman... miden más de 360°

A9: miden más o menos

A10: más... si no se suben

A9: más y éste menos y éste también mide más y éste también mide más, no éste mide menos... a ver éste mide más de 360

A10: espérate (quiere escribir la respuesta en la ficha) no, porque sino en total no..... espérate, no porque sus vértices

A9: no miden en total 360

A10: no miden en total o lo superan

A9: claro

Modelar

A9 y A10 lograron Modelar las situaciones presentadas en las tareas con relativa soltura, a pesar de que A9 no había mostrado durante las tareas LP esta competencia. La fase de *modelado horizontal* no supuso ninguna dificultad para ellas, traduciendo los problemas del mundo real al matemático con rapidez, ayudadas por Geogebra, cuya influencia también fue notoria para que llevaran a cabo con éxito la fase de *modelado vertical*. Además, durante las tareas GG, se preocuparon de reflexionar sobre el proceso seguido, con el fin de validarlo y de interpretar la solución obtenida en términos del problema original. El software puede considerarse el factor más influyente para el desarrollo experimentado en esta competencia por ambas estudiantes, que trabajaron de modo totalmente autónomo por lo que mi interacción con ellas fue casi nula. La siguiente entrada del diario expone cómo ambas

resolvieron la tarea 9, que era la única que entrañaba un grado alto de dificultad a la hora de Modelar:

Sesión 10: Obtienen rápidamente y sin ayuda el hueso y construyen con él el mosaico mediante varios giros de distinta amplitud. Después de argumentar cómo lo han obtenido se pasan al avión y tras observar y obtener información de la representación gráfica de este mosaico incluida en la ficha, se ponen manos a la obra obteniendo el motivo mínimo. Casi concluyen la tarea entera. Les gusta ser eficaces y acabar pronto las tareas, sobre todo a A10 que no descansa hasta que esto ocurre.

Plantear y Resolver Problemas

Durante las tareas LP y con anterioridad, A9 tenía dificultades hasta con los problemas situados en contextos que le eran muy familiares y que requerían de un razonamiento a un nivel bajo. Al trabajar con Geogebra, esta situación cambió radicalmente, porque el aumento de motivación que experimentó gracias al uso de esta herramienta, le llevó a mostrar que era más competente de lo que hasta entonces había demostrado para Plantear y Resolver Problemas. A10, no exhibía las dificultades de su compañera, pero tenía ciertas limitaciones cuando trataba de resolver problemas más complejos. Geogebra contribuyó a la mejora de otras competencias como Pensar y Razonar o Argumentar, y ello indiscutiblemente influyó positivamente en esta competencia, logrando que ambas estudiantes demostraran gran maestría a la hora de resolver las tareas. A nivel medio, ambas lograron resolver los problemas, impulsadas por ciertos atributos del software. Sin embargo, para manifestar esta competencia a nivel alto, en cada una de ellas incidieron distintos factores: a A10 le ayudó Geogebra, mientras que A9 alcanzó dicho nivel gracias a la interacción con su compañera.

Representar

Tanto A9 como A10 alcanzaron un nivel alto cuando se trataba de Representar, distinguiendo las representaciones correspondientes a mosaicos y decodificando las propiedades matemáticas subyacentes en cada caso, de modo que cambiaban entre unas formas de representación y otras de los objetos matemáticos con cierta soltura. La posibilidad de plasmar sus representaciones mentales en pantalla de un modo preciso y comprobar su adecuación les ayudó progresivamente a ir mejorándolas, sobre todo a A9, que tenía más dificultades para ello que A10. Desde la tarea 1 optaron por usar isometrías. Como la mayoría de sus compañeros, solían emplear simetrías y traslaciones, puesto que obtener la amplitud de giro adecuada para emplear rotaciones, entrañaba mayor dificultad para ellas. Geogebra les ayudó en este sentido, y cuando A9 y A10 tuvieron problemas para obtener los ángulos de giro adecuados, la herramienta les brindó la oportunidad de probar diferentes hipótesis

(actuando en ciertas ocasiones por ensayo-error) de un modo rápido y sin esforzarse demasiado, ya que podían hacer y deshacer con un solo clic del ratón. En la tarea 7, en la que debían construir mosaicos semirregulares, pensaron en hacer uno formado por mosaicos y rombos, a pesar de que los rombos no son polígonos regulares. No advirtieron su error hasta representar el mosaico y visualizarlo gráficamente en pantalla. Decodificaron el mosaico representado, obteniendo que los rombos no tenían todos los ángulos iguales, por lo que no podían considerarse polígonos regulares (mejora de la visualización de las propiedades geométricas de los polígonos). Lograron solventar el problema como ya expuse, dividiendo cada rombo en dos triángulos equiláteros, con lo que el nuevo mosaico cumplía las condiciones pedidas por la tarea. A esta competencia el factor que más contribuyó para su desarrollo a todos los niveles fue Geogebra.

Uso de Herramientas y Recursos

A9 y A10 manifestaron ser altamente competentes en el uso de Geogebra, explorando todas las herramientas del software distintas a las que habitualmente usábamos en las tareas y haciendo buen uso de ellas. Ambas manejaron el programa con soltura y rapidez, debido a su facilidad de manejo, y disfrutaron con ello, como pusieron de manifiesto con sus opiniones en los buzones de sugerencias. Además, ellas creían que el trabajo con Geogebra les había ayudado a mejorar sus competencias.

Respondiendo al objetivo 4 de investigación, puede sintetizarse lo anterior diciendo que A9 experimentó una evolución que la llevó a mostrarse competente a un nivel medio-alto, mientras que A10 mejoró hasta alcanzar un nivel de desarrollo alto en casi la totalidad de las competencias analizadas. El trabajo con Geogebra contribuyó a que ambas manifestasen algunas competencias, como Modelar, Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos, a su máximo nivel. También propició que A9 manifestase un nivel medio a la hora de Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, competencias que hasta entonces apenas había evidenciado. Para el caso de A10, que solía demostrar estas competencias a un nivel bajo-medio, la herramienta hizo que alcanzase un nivel alto en Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar, al tiempo que mejoró la calidad de sus comunicaciones orales y escritas. Se puede descartar la interacción conmigo como factor influyente en el desarrollo observado en esta pareja de estudiantes, considerando responsable del mismo al trabajo con Geogebra, para A10, y al software y la interacción con su pareja, para A9.

Para ambas estudiantes se encontraron las mismas relaciones entre competencias señaladas para A8 y A3. La evolución que experimentaron a la hora de Pensar y Razonar les llevó a hacer Argumentaciones-Demostraciones de mayor calidad, contribuyendo el desarrollo de tales competencias a la mejora de su competencia Comunicativa. Por otro lado, su buen uso de Geogebra (HR) les llevó a probar infinidad de Representaciones, lo que influyó positivamente en el desarrollo de dicha competencia. También para estas estudiantes se observó relación de dependencia entre mejora actitudinal y cognitiva, aunque se detectaron ciertas diferencias entre A9 y A10. El caso de A9 fue similar al de A3; es decir, se consideró vital la transformación positiva de sus “actitudes hacia las matemáticas” como activador de la evolución en el ámbito cognitivo. Así, desde el momento en que empezó a valorar más la asignatura y a mostrar más confianza en sus posibilidades de éxito, gracias su actitud favorable hacia el uso de Geogebra, se implicó en la resolución de las tareas y manifestó adecuadas actitudes matemáticas. Dicha transformación actitudinal tuvo su efecto en el desarrollo de ciertas competencias, al que no solamente contribuyó la función motivadora del software, sino otros factores y ventajas que se exponen más adelante. De este modo, durante las tareas con Geogebra, A9 manifestó sus competencias matemáticas a un nivel adecuado, como no lo había hecho con anterioridad, y superó mis expectativas previas en cuanto a su posible rendimiento. Esta transformación de A9 significaba haber cumplido mis objetivos a nivel cognitivo, sintiéndome muy satisfecha por ello.

El caso de A10 fue diferente, pues ya estaba motivada para trabajar en matemáticas y solía hacerlo. Además, su situación cognitiva de partida era bastante aceptable, por lo que de producirse algún cambio debido a la introducción de Geogebra, éste no sería muy asombroso. Por esta razón, no se puede hablar de implicación mejora de actitudes-mejora de competencias, como en el caso de A9. Para esta alumna, únicamente añadir que el uso del software le dio la oportunidad de trabajar de un modo más efectivo que con lápiz y papel, al necesitar menos tiempo para las cuestiones más rutinarias, como hacer cálculos o representaciones gráficas. Ello le permitió centrarse en razonar e intentar argumentar sus respuestas más allá del campo visual. Además, el trabajo con Geogebra aún le parecía más interesante y ameno que el de LP. Esto es, sus actitudes “hacia” fueron más positivas que durante las tareas LP, demostrando mayor entusiasmo por las tareas y por resolverlas de un modo rápido, riguroso y de más de una forma, siempre que le fue posible.

Para concluir este apartado, y como cierre al análisis de competencias realizado para los cinco casos estudiados más en detalle, expongo las similitudes y diferencias encontradas entre la evolución experimentada por unos y otros.

De los cinco estudiantes, A3, A7 y A9 respondían a perfiles cognitivos previos bastante similares, evidenciando escasas competencias matemáticas. A8 y A10 también se ajustaban a un mismo patrón cognitivo y hasta el trabajo con Geogebra habían manifestado un grado de desarrollo bajo-medio de sus competencias. Durante las tareas con Geogebra, se produjo un desarrollo de las mismas para los cinco estudiantes, aunque los niveles alcanzados no coincidían en todos ellos. Puede diferenciarse el grupo formado por A3, A8, A9 y A10, quienes manifestaron un nivel medio-alto de todas sus competencias y el formado por A7 quien evidenció un grado de desarrollo medio de las mismas. Debido a la transformación experimentada por cada uno de estos estudiantes, se puede decir que mis expectativas se vieron superadas en A3 y A9, ajustándose la evolución de A7, A8 y A10 a mis pronósticos, aunque no por ello dejaron de fascinarme los cambios que esos tres estudiantes experimentaron en ciertas competencias.

Para mostrar las diferencias encontradas en el grado de desarrollo alcanzado en cada competencia durante las tareas GG entre los alumnos, así como la evolución que ello supuso respecto de su situación previa particular, incluyo la siguiente tabla, que sintetiza dicha información:

Tabla 10-22. Niveles de desarrollo alcanzados por cinco casos estudiados trabajando con Geogebra

	Nivel competencia previo	Nivel competencia con Geogebra	Niveles de cada competencia (competencias por orden de mejora para conjunto de 5 casos)						
			M	RP	R	HR	PR	AD	C
A8	Bajo-Medio	Alto	Medio-Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
A3	Muy Bajo	Alto	Medio-Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
A7	Bajo	Medio	Medio-Alto	Medio-Alto	Medio-Alto	Medio-Alto	Medio	Medio	Bajo
A9	Muy Bajo	Medio-Alto	Medio-Alto	Alto	Alto	Alto	Medio-Alto	Medio-Alto	Medio-Alto
A10	Bajo-Medio	Alto	Medio-Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Medio-Alto

Durante el trabajo con Geogebra destacaron las competencias Modelar (M), Plantear y Resolver Problemas (RP), Representar (R) y Uso de Herramientas y Recursos (HR) en las que, a excepción de A7 que se situó en un nivel medio-alto, todos los estudiantes

seleccionados alcanzaron los niveles máximos exigidos para cada una de ellas. Se subraya la evolución experimentada por los estudiantes en la resolución de problemas y en sus representaciones, gracias al trabajo con el software, que resultó más sorprendente para A3, A7 y A9. La evolución observada en Modelar y Uso de Herramientas y Recursos estaba en consonancia con la esperada, pues en el caso de Modelar debían hacerlo casi siempre a un nivel medio, lo que no supuso mucha dificultad para ellos. Para el desarrollo de la competencia Uso de Herramientas y Recursos al nivel deseado, se esperaba que la facilidad de manejo de Geogebra contribuyera a ello y así sucedió. En las restantes competencias: Pensar y Razonar (PR), Argumentar-Demostrar (AD) y Comunicar (C), los estudiantes alcanzaron niveles diferentes de desarrollo, ajustándose A7 y A10 a mis expectativas previas, mientras que A3, A8 y A9 superaron mis pronósticos.

En lo referente a los factores que incidieron en el desarrollo de las competencias matemáticas en cada uno de los estudiantes, se han diferenciado tres: Geogebra, la interacción con su compañero y la interacción conmigo (con la profesora). Para los cinco estudiantes el factor más relevante para la mejora experimentada fue el software, mientras que el segundo factor influyente variaba de unos a otros. Para A3 y A7, dado que sus respectivas parejas no resultaron de ayuda, la interacción conmigo fue el segundo factor que intervino en la mejora observada. Sin embargo, entre estos estudiantes también he de hacer distinción, pues A7 solicitó mi ayuda en numerosas ocasiones, mientras que A3 solamente en alguna situación puntual, por lo que para este estudiante la interacción conmigo no fue muy significativa. Para A8 y A9, la interacción con sus respectivas parejas, en las tareas complejas en las que presentaron ciertas dificultades, fue beneficiosa y considerada como el segundo factor en importancia, sobre todo a la hora de Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar. También se diferencia entre ambos estudiantes, puesto que A8 recurrió a mi ayuda en algunas de esas situaciones, pudiendo considerar la interacción conmigo relevante en dichas tareas, mientras que para A9 fue suficiente la ayuda de su compañera y raramente solicitó mi presencia. El caso de A10 fue diferente al considerar la interacción con A9 y conmigo poco influyentes para la mejora en ella observada, que puede asociarse al gusto por el manejo del software. Es decir, de los cinco estudiantes se encontró que el software fue el protagonista, casi en solitario, de la evolución de A3 y A10, puesto que los restantes factores ejercieron una influencia puntual. Para A7, A8 y A9 además del software, cobraron relevancia los otros factores señalados: la interacción conmigo para A7, la interacción con su compañero A15 y conmigo para A8, y la interacción con su compañera A10 para A9.

Por último, sintetizo las distintas relaciones antes expuestas entre competencias y mejora actitudinal y cognitiva para cada uno de los cinco estudiantes, en la siguiente tabla:

Tabla 10-23. Relaciones encontradas en cinco casos estudiados entre competencias y actitudes

	<i>Relación 1:</i> Mejora en Pensar y Razonar (PR) \Rightarrow Mejora en Argumentar-Demostrar (AD)	Relación 1 \Rightarrow Mejora en comunicar	<i>Relación 2:</i> Buen uso de Herramientas y Recursos (HR) \Rightarrow mejora de Representar (R)	Actitud positiva hacia uso de Geogebra \Rightarrow mejora de actitudes hacia las matemáticas \Rightarrow mejora de ciertas actitudes y competencias matemáticas
A8	✓	✓	✓	✓
A3	✓	✓	✓	✓
A7	✓		✓	✓
A9	✓	✓	✓	✓
A10	✓	✓	✓	✓

Pueden observarse ligeras diferencias entre las relaciones encontradas para A7 y para el resto de los estudiantes pertenecientes al estudio de casos, que ya expuse debidamente al término del análisis de competencias de dicha estudiante. Al mismo tiempo, la tabla anterior informa de coincidencia para todos los estudiantes en las relaciones 1 y 2 encontradas entre determinadas competencias y en la relación existente entre mejora actitudinal y cognitiva, lo que aporta mayor relevancia a dichos resultados.

10.1.4. Respuesta Global al Objetivo 4 de la Investigación

Como cierre de los análisis de competencias matemáticas expuestos para los distintos conjuntos de estudiantes considerados, he ido dando respuesta al objetivo 4 de esta investigación: *describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de Secundaria al implementar la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra*. En este apartado aunaré todas esas conclusiones para conformar la respuesta global a este objetivo, que puede derivarse de la triangulación de todos los análisis realizados.

De los mencionados análisis se extrae la misma conclusión: el trabajo con Geogebra contribuyó al desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, siendo su influencia más notoria en unas competencias que en otras. Destaca el potencial de este software para el desarrollo de las competencias Representar y Uso de Herramientas y Recursos, al promover una evolución considerable en los estudiantes, de manera homogénea. Los análisis también subrayaron el efecto de Geogebra a la hora de Modelar y Plantear y Resolver Problemas, que llevó a la mayoría de los estudiantes a manifestarlas a un nivel

medio y a un número considerable de ellos a exhibirlas a un nivel superior. Por tanto, aunque no produjo el mismo efecto en todos los estudiantes, éste se consideró aceptable en todos los casos. Las competencias en las que la influencia de Geogebra fue perdiendo protagonismo en favor de otros factores, como la interacción entre compañeros o la interacción con la profesora, fueron por este orden: Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar. Para estas competencias el software resultó de gran utilidad cuando los estudiantes debían manifestarlas a un nivel bajo-medio, pero cuando se les exigía mayor dominio de las mismas, muchos de los estudiantes necesitaron ayuda externa, bien de sus parejas o bien de la profesora.

Los resultados anteriores se han obtenido para el conjunto total de estudiantes y se han confirmado para los de la muestra, tanto para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos, como para los restantes, cuyo análisis individualizado puede consultarse en el Anexo I. Dichos resultados están en la línea de los obtenidos por otros investigadores cuyo objetivo era el de describir la mejora de ciertas competencias matemáticas debido al trabajo con software de Geometría Dinámica en el aula. La mayoría de estos trabajos se centran en analizar la influencia del uso de estos software en la forma de Resolver Problemas de los estudiantes, focalizando en la forma que éstos Razonan y Demuestran (Sinclair y Yurita, 2008). En síntesis, dichos estudios apuntan a una mejora de estas competencias producida por el manejo del software, resultado que viene a coincidir con los obtenidos para esta investigación. Retomaré esta reflexión debidamente en el capítulo siguiente.

Respecto a la relación encontrada entre competencias, el estudio de casos realizado ha permitido comprobar cuáles competencias incidieron en el desarrollo de otras para estos estudiantes. De entre ellas, se han destacado las dos siguientes relaciones de dependencia, por evidenciarse de forma homogénea en todos los casos estudiados:

- Mejora en Pensar y Razonar implicó mejora en Argumentar-Demostrar
- Nivel adecuado de desarrollo de Uso de Herramientas y Recursos contribuyó a una mejora en Representar.

En lo referente a la primera relación, el desarrollo experimentado por los estudiantes en la competencia Argumentar-Demostrar se asoció a los factores externos indicados: uso del software e interacción con compañeros y/o profesora, pero también a la propia mejora de los estudiantes en la competencia Pensar y Razonar. La mejora de esta última competencia les ayudó a distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones y

reflexionar sobre estas distinciones, lo que les puso en la tesitura de justificar sus resultados, situación poco habitual en ellos hasta entonces. Junto a la necesidad de justificar sus respuestas, la mayor capacidad para hacer razonamientos complejos contribuyó a que sus demostraciones fuesen aumentando progresivamente de calidad.

En lo que respecta a la otra relación encontrada, ya he justificado cómo la competencia Representar fue la que más se benefició del Uso de Geogebra, manifestando la mayoría de los estudiantes un nivel adecuado durante las tareas GG.

En cuanto a la relación entre transformación de actitudes y desarrollo de competencias, se encontró que una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes contribuyó al desarrollo de sus competencias matemáticas. En el capítulo anterior se justificó la relación: *una actitud positiva hacia el uso de Geogebra en matemáticas implicó una transformación positiva de las actitudes hacia las matemáticas que contribuyó a una mejora de ciertas actitudes matemáticas*. A la relación anterior habría que añadirle una afirmación acerca de la mejora de las competencias en la última implicación, de forma que se ponga de manifiesto que *la mejora de las actitudes hacia las matemáticas contribuyó a la mejora de ciertas actitudes y competencias matemáticas*. Se observó en la mayoría de los estudiantes cómo, además de los factores del software que se exponen en el apartado siguiente, la transformación actitudinal de los estudiantes contribuyó al desarrollo de competencias de los mismos. En efecto, el estudio de casos reveló que el hecho de que los estudiantes disfrutaran más de la asignatura y demostraran mayor confianza en sí mismos debido al uso de Geogebra, les ayudó a mejorar algunas de sus actitudes matemáticas y también al desarrollo de ciertas competencias. Los análisis de las parrillas y el realizado con Atlas.ti corroboraron esa afirmación. Al confrontar ambas parrillas (de actitudes y competencias), se comprobó que en las sesiones en las que los estudiantes manifestaron actitudes relacionadas con las matemáticas positivas, también evidenciaron una mejora de sus competencias. Al repetir este mismo análisis para las tareas de Geogebra reconstruidas con Atlas.ti, se obtuvieron las mismas conclusiones. Esta relación se dio en este sentido y no al revés, pues el avance cognitivo de los estudiantes fue más progresivo y estuvo en consonancia con el cambio actitudinal previo. Por otra parte, al tener las actitudes matemáticas un carácter marcadamente cognitivo y no afectivo, podrían considerarse parte de la competencia matemática global. Por ello, esperaba que, de producirse una transformación

positiva de las actitudes matemáticas de los estudiantes, ésta viniese acompañada de un desarrollo de sus competencias matemáticas, tal como sucedió.

10.2. CARACTERÍSTICAS DE GEOGEBRA ASOCIADAS AL DESARROLLO DE COMPETENCIAS

En este apartado presento, una vez descrito el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes durante la experiencia con Geogebra, los atributos y ventajas del software que se asocian a tal desarrollo, lo que permite dar respuesta al objetivo 5 de este estudio: *identificar qué factores de Geogebra intervienen en el desarrollo de determinadas competencias matemáticas.*

Los análisis realizados en el apartado anterior, han ido mostrando el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra. Al mismo tiempo, de dichos análisis se han extraído resultados acerca de cuáles de los factores y ventajas que pueden atribuirse a este software se pusieron de relieve en el aula e influyeron en dicha evolución, que en lo que sigue presento. Para su desarrollo en este apartado, del mismo modo que para las actitudes (apartado 9.2), tomaré como marco de referencia la Figura 2-1, incluida en las páginas 54 y 392.

No expongo el análisis de los factores de Geogebra que han intervenido en el desarrollo de cada competencia para cada conjunto de estudiantes, como hiciese para describir la evolución de las competencias en el apartado anterior, sino las conclusiones que se derivan del proceso de triangulación de los factores destacados para cada conjunto de estudiantes en cada actitud. Es decir, sintetizo toda la información recogida en forma de respuesta al objetivo 5 de este trabajo.

10.2.1. Atributos y Ventajas que Influyen en el Desarrollo de cada Competencia

Muestro cuáles de los atributos y ventajas del uso de Geogebra se pusieron de manifiesto para el desarrollo de cada competencia durante dichas sesiones de aula, siguiendo el orden habitual para su presentación. Los inconvenientes o peligros del trabajo con Geogebra en el aula que podían presentarse no cobraron protagonismo durante la experiencia con el software, como ya comenté en el apartado del capítulo anterior homólogo a éste (apartado 9.2), por lo que no haré referencia a ellos.

Pensar y Razonar

Al desarrollo de esta competencia a niveles bajo y medio, contribuyó la facilidad de manejo y rapidez de respuesta de Geogebra. Ésta permitió que los estudiantes realizaran diferentes construcciones o mosaicos en cada tarea, que de haber sido realizadas con lápiz y papel habrían requerido mucho más tiempo y esfuerzo. Es decir, la herramienta contribuyó a la mejora de esta competencia, al brindarles la oportunidad de generar gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar de un modo rápido y sencillo, optimizando así el tiempo de cada sesión, siendo ésta una de sus principales ventajas respecto a métodos más tradicionales de lápiz y papel. Por otra parte, como factores del software asociados al alto nivel de razonamiento exhibido por muchos de los estudiantes, destacaron su interactividad y el hecho de que los obligase a pensar en términos de propiedades geométricas. La interactividad de Geogebra resaltó entre sus atributos porque proporcionó a los estudiantes retroalimentación en tiempo real, tras cada prueba o acción, permitiéndoles extraer información y, consecuentemente, definir una estrategia de actuación. Obligar a los estudiantes a pensar en términos de propiedades geométricas fue la ventaja más destacada para conseguir razonamientos más complejos por parte de los estudiantes, pues les ayudó a ir mejorando progresivamente su comprensión de los contenidos trabajados y, de este modo, ir refinando sucesivamente la calidad de los mismos.

Argumentar-Demostrar

El software contribuyó a que los estudiantes argumentaran a un nivel bajo. Así, les permitió verificar propiedades geométricas, observando propiedades o elementos matemáticos a partir de ejemplos y permitiéndoles la generación de multitud de estos sin gran esfuerzo por su parte. Ello motivó y condujo a muchos estudiantes a la búsqueda de una demostración más formal, buscando las propiedades matemáticas asociadas a las afirmaciones que, en un primer momento, obtuvieron visualmente.

Para que los estudiantes argumentasen de un modo más complejo (niveles medio y alto), resultó de gran ayuda la posibilidad de testar ideas o manipular objetos ofrecida por Geogebra. Ésta les permitió comprobar rápidamente sus conjeturas (comprobar si las propiedades encontradas se mantenían al deformar una construcción, etc.), guiándolos durante el proceso de argumentación hasta obtener una respuesta que les resultara satisfactoria. En resumen, puede decirse que Geogebra permitió que los estudiantes testaran diferentes ideas, mediante la construcción de una manera rápida y sencilla de múltiples

ejemplos, cuya visualización y deformación les ayudó a obtener y comunicar razonadamente sus respuestas.

Comunicar

Los análisis realizados para informar de esta competencia han puesto de relieve que no se produjo una mejora significativa durante el trabajo con Geogebra. En general, la mejora comunicativa experimentada por algunos estudiantes podía achacarse al trabajo colaborativo realizado con sus respectivas parejas. Se puede afirmar que el software no contribuyó explícitamente a su desarrollo, aunque sí que repercutió en la evolución de ciertos aspectos. Por una parte, fomentó un uso adecuado de la terminología asociada a las herramientas de Geogebra que los estudiantes emplearon para resolver las tareas (isometrías del plano, polígonos, ángulos, etc.), lo que tuvo un efecto positivo en su forma de *hablar matemáticamente*. Por otra parte, la facilidad de uso y rapidez de respuesta del software permitió a las parejas de estudiantes más aventajadas, que trabajaron más eficientemente con Geogebra, testar en cada tarea las diferentes hipótesis propuestas por ambos. Ello contribuyó, al mismo tiempo, a una mejora de su comprensión de las afirmaciones de otros, alcanzando su competencia comunicativa en estos casos un nivel adecuado.

El análisis de datos realizado también reveló que, para algunos estudiantes, la función motivadora del software, que les llevó a trabajar incesantemente en matemáticas, les hizo desarrollar algunas de sus competencias, entre ellas, Comunicar. Estos estudiantes demostraron entonces, que no sólo eran capaces de explicar sus cálculos y resultados, sino que muchos de ellos lo hacían de un modo riguroso y empezaron a sentir gusto por compartirlos con los demás. Es decir, el efecto del gusto y confianza por el trabajo con el software, que resultó de gran relevancia para el desarrollo de las actitudes de algunos estudiantes, también ejerció cierta influencia en el desarrollo de esta competencia para dichos estudiantes.

Modelar

Distingo los factores de Geogebra que incidieron en cada una de las fases de modelado: horizontal y vertical. Respecto a la primera fase del proceso de modelado o modelado horizontal, en la que los estudiantes debían traducir los problemas del mundo real al matemático, los análisis subrayaron la potencialidad constructiva del software. Así, Geogebra brindó a todos los estudiantes la posibilidad de construir y estar activos, permitiéndoles actuar por ensayo-error, en ausencia de una estrategia clara de resolución, lo que evitó la situación

habitual de bloqueo que la mayoría de ellos experimentaron cuando trabajaron con lápiz y papel. Respecto al modelado vertical, fase en la que los estudiantes debían resolver el problema dentro de la matemática con todas las herramientas que ésta nos proporciona, la ventaja ofrecida por la herramienta para testar diferentes ideas e hipótesis, unida a la interactividad mantenida entre el software y los estudiantes, les ayudó a ir redefiniendo su estrategia de resolución hasta llegar a una respuesta adecuada. En resumen, Geogebra posibilitó a los estudiantes la construcción y manipulación de objetos, al tiempo que les permitió probar distintas conjeturas, ayudando el feedback inmediato y continuo entre acciones del estudiante-respuestas del software, a que éstos fuesen progresivamente definiendo una estrategia de resolución.

Plantear y Resolver Problemas

Durante la experiencia se puso de manifiesto cómo la constructividad e interactividad, junto a la facilidad de manejo y rapidez de respuesta del software, ayudaron a que los alumnos se mantuvieran activos e implicados en la resolución de problemas. También les ayudó a que superasen cierto miedo o falta de confianza que mostraban al realizar esta actividad matemática, logrando así todos los estudiantes desarrollar esta competencia al menos a un bajo nivel. Nuevamente, la constructividad del programa jugó un papel esencial, permitiéndoles comenzar por ensayo-error en aquellas situaciones en las que no sabían cómo actuar y que, de haber sido trabajadas con LP, les hubiesen conducido a desmotivarse e incluso a abandonar el problema. Por otra parte, para aquellos que demostraron un nivel medio-alto de esta competencia, la posibilidad de testar ideas y manipular objetos ofrecida por Geogebra fue la ventaja más relevante de su uso para el desarrollo de esta competencia. En conclusión, la constructividad y la facilidad de uso y rapidez de respuesta de Geogebra, ayudaron a evitar el frecuente bloqueo inicial experimentado por la mayoría de los estudiantes durante las tareas LP, mientras que la posibilidad de testar ideas y manipular las representaciones construidas, así como el feedback recibido del software los fue conduciendo hacia la solución buscada.

Representar

En esta competencia el desarrollo experimentado por la gran mayoría de los estudiantes fue notable, y puede atribuirse al uso de Geogebra. Destacaron dos atributos y dos ventajas del software, respecto a la resolución de tareas con lápiz y papel (LP), como responsables de tal evolución. Por una parte, la precisión del software para realizar las representaciones gráficas

asociadas a las acciones y decisiones de los estudiantes les permitió comprobar si sus estrategias eran adecuadas o no, al tiempo que redujo el tiempo que hubiesen necesitado para realizar dichas construcciones con LP, dejando así mayor espacio para decodificar las representaciones obtenidas. Por otra parte, la claridad de exposición de su interfaz gráfica y la mejora de la visualización de los contenidos geométricos, debido a su manejo continuado, ayudó a que los alumnos identificasen figuras y propiedades y las asociaran con sus conocimientos previos. De este modo, les ayudó a representar lo mental a través de formas visuales externas de un modo riguroso y rápido, lo que les proporcionó más tiempo para la reflexión. La otra ventaja destacada de Geogebra fue la de posibilitar que los estudiantes testaran distintas ideas y manipulasen las representaciones realizadas mediante dragging. Ello favoreció la visualización de ciertas propiedades de objetos matemáticos, siendo ésta una clara ventaja con respecto a las representaciones estáticas. En síntesis, la posibilidad de comprobar visualmente las propiedades geométricas de los objetos representados con total precisión, así como las ventajas que ofrecían estas representaciones ejecutables sobre las estáticas, ayudaron a los estudiantes a decodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos estudiados, así como cambiar de unas formas de representación a otras.

Uso de herramientas Tecnológicas y Recursos

El desarrollo experimentado por la mayoría de los estudiantes, que les llevó a demostrar un nivel medio-alto en el manejo de Geogebra, se debió fundamentalmente a su facilidad de manejo y a su rapidez de respuesta. Al tratarse de un software muy intuitivo, posibilitó que los estudiantes fuesen descubriendo por sí mismos el funcionamiento de las herramientas necesarias para la resolución de las tareas diseñadas y no fuera necesaria una formación previa.

Para concluir, sintetizo en la siguiente figura lo anteriormente expuesto en relación al objetivo 5, identificando los factores de Geogebra que incidieron en el desarrollo de las competencias matemáticas experimentado por los estudiantes:

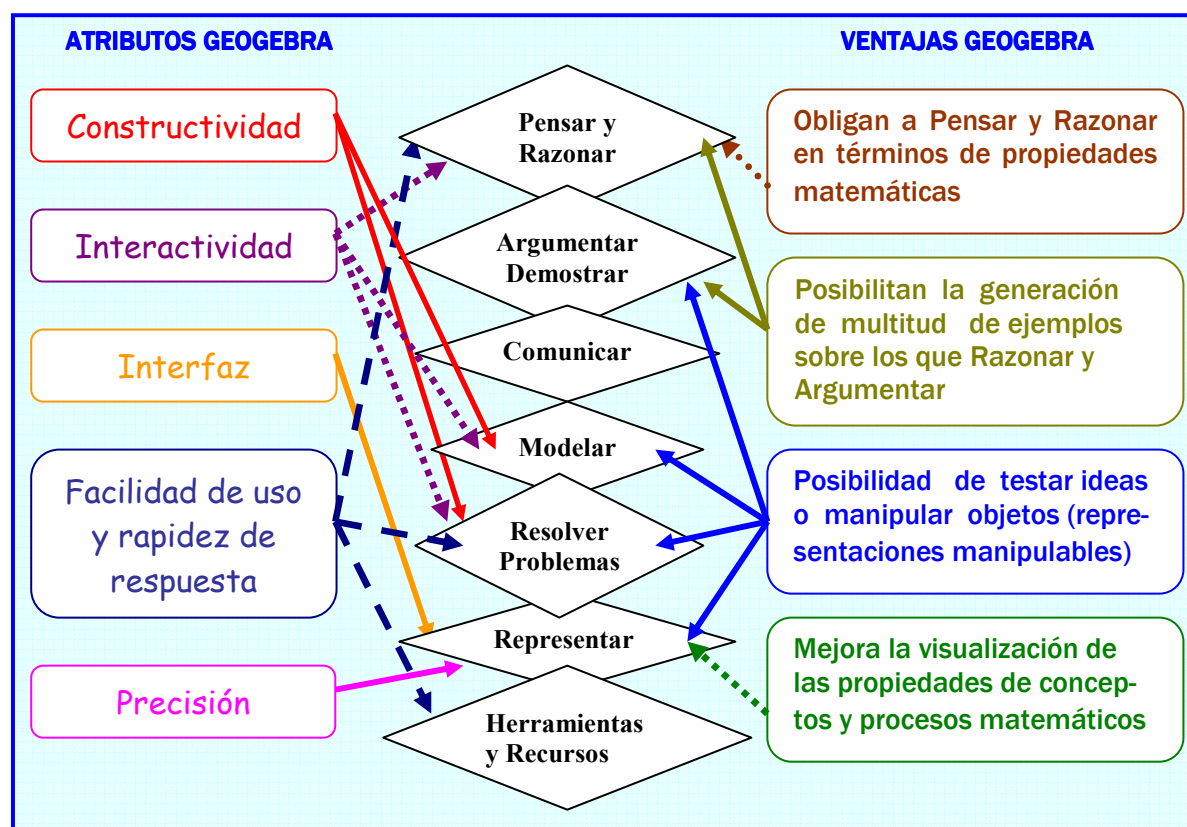


Figura 10-1. Atributos y ventajas de Geogebra asociadas al desarrollo de competencias

La figura anterior puede considerarse como el esquema base, que refleja los factores del software asociados al desarrollo de cada competencia matemática, considerando globalmente el total de estudiantes. No obstante, el análisis de casos realizado sugiere ligeros cambios para algunos estudiantes en algunas competencias. Así, para A3 se contempló la función motivadora de Geogebra como una ventaja a añadir, debido a su importancia para el desarrollo de las competencias Comunicar y Plantear y Resolver Problemas de este estudiante. Y para las estudiantes A9 y A10, la mejora de la visualización de las propiedades de conceptos y procesos matemáticos provocada por el uso de Geogebra también contribuyó al desarrollo de ambas en la competencia Argumentar-Demostrar.

10.2.2. Respuesta Global al Objetivo 5 de la Investigación

Con anterioridad he dado respuesta al objetivo 5 de esta investigación, particularizando para cada competencia matemática individualmente. En esta ocasión, aporto una respuesta global a dicho objetivo, fruto de la triangulación de toda la información recogida en referencia al mismo.

Los análisis realizados para los distintos conjuntos de estudiantes revelaron que ciertos factores del software pueden asociarse al desarrollo que muchos de ellos experimentaron en

todas o algunas de sus competencias matemáticas durante el trabajo con esta herramienta. De estos resultados, además de la información presentada en los apartados anteriores, pueden extraerse algunas conclusiones acerca de los atributos y ventajas del software que mayor efecto tuvieron en dicho desarrollo. Entre los atributos de Geogebra, destacaron su interactividad y su facilidad de uso y rapidez de respuesta, como los dos que ejercieron una mayor influencia, siendo la constructividad del software el tercer atributo relevante para el desarrollo de competencias que experimentaron los estudiantes. En lo referente a las ventajas del software que adquirieron mayor relevancia durante la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, destacó la posibilidad de testar ideas o manipular objetos como la más influyente, seguida de la ventaja de generar gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar de un modo rápido y sencillo.

Los cinco factores señalados se asociaron al desarrollo de varias competencias matemáticas, de ahí su relevancia. La interactividad, o retroalimentación ofrecida en tiempo real, fomentó el desarrollo de ciertas competencias como Pensar y Razonar, Modelar o Plantear y Resolver Problemas. Ello se debió a que permitió a los estudiantes comprobar la bondad de sus acciones y obtener información acerca de las mismas, que fue redirigiendo sus procesos mentales y estrategias de resolución hasta llegar a la respuesta buscada. La facilidad de uso y rapidez de respuesta de Geogebra contribuyó al desarrollo de la competencia Uso de Herramientas y Recursos. Además, facilitó la realización de cálculos y representaciones gráficas de un modo rápido y sencillo, permitiendo a los estudiantes dedicar más tiempo a Pensar y Razonar. Este hecho, a su vez, tuvo un efecto positivo en su competencia para Plantear y Resolver Problemas. La constructividad del software les ayudó a superar la fase de modelado horizontal, evitando así el habitual bloqueo inicial que éstos experimentaban cuando no sabían cómo resolver un problema y contribuyendo, de este modo, tanto a la mejora de la competencia Modelar como a la de Plantear y Resolver Problemas. Entre las ventajas atribuidas al software, la de testar ideas o manipular objetos (representaciones manipulables) fue la más relevante al contribuir al desarrollo de las competencias Argumentar-Demostrar, Modelar, Resolver Problemas y Representar. Los estudiantes se mostraron más motivados en la búsqueda de demostraciones, al posibilitar Geogebra la generación de gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar de un modo rápido y sencillo. Esta ventaja contribuyó, junto con la anterior, al desarrollo experimentado por los estudiantes en la competencia Argumentar-Demostrar.

Los resultados expuestos se han obtenido en todos los análisis realizados para los distintos conjuntos de estudiantes y han puesto de relieve, como ya sucediese para el caso de las actitudes, la importancia de algunos de los atributos de los software de Geometría dinámica, en particular de Geogebra, señalados por Sánchez (2001), para el desarrollo de ciertas competencias matemáticas. Asimismo, los análisis han subrayado ciertas ventajas de su uso, algunas de las cuales ya fueron encontradas por estudios previos como los de Laborde, Kynigos, Hollebrands y Straesser (2006) y Santos-Trigo (2008). La primera de tales investigaciones encontró que el uso de SGD con estudiantes de secundaria de matemáticas produjo una mejora de la comprensión de los conceptos geométricos y fomentó el desarrollo de demostraciones por parte de los estudiantes. El trabajo de Santos-Trigo, resaltó ciertos aspectos de la resolución de problemas matemáticos que mejoraron con el uso de SGD, entre ellos, la necesidad de pensar en términos de propiedades geométricas y su virtud para facilitar el proceso de verificación de conjeturas de distintos modos (visual o empíricamente y mediante dragging).

Para finalizar este apartado y concluir este capítulo, añadiré algunas reflexiones más acerca del desarrollo de competencias de los estudiantes. El uso del software contribuyó a la mejora de las competencias señaladas en párrafos anteriores, como han mostrado los análisis de datos realizados. Sin embargo, me gustaría abordar una cuestión que no se estudió ni analizó de forma sistemática, pero sí que, desde mi labor como profesora, consideré interesante observar al término de la experiencia con Geogebra. Me refiero al carácter temporal o permanente del desarrollo de competencias observado. Comprobé, al trabajar la resolución de problemas contextualizados con Lápiz y Papel en las unidades didácticas posteriores a la de Teselaciones del Plano, que el uso de Geogebra había concienciado a los estudiantes de la importancia de cultivar sus competencias matemáticas para mejorar en dicha actividad. En especial, me sorprendió que los estudiantes siguiesen sintiendo la necesidad de argumentar-demostrar sus respuestas, aún teniendo dificultades para ello que no siempre les permitieron lograrlo. Esta situación era bastante inusual hasta el trabajo con Geogebra. Quiero decir con esto, que los estudiantes trataron de seguir manifestando el nivel de competencias alcanzado con Geogebra en futuras actividades matemáticas. No obstante, la mayoría de ellos volvieron a evidenciar muchas de las limitaciones cognitivas que demostraban antes del trabajo con el software, lo que les llevó a no poder mantener tal nivel de desarrollo de las mismas sin la ayuda de Geogebra. Es decir, los atributos y ventajas del software antes señalados resultaron esenciales para el desarrollo de las competencias de los estudiantes, sobre todo para aquellos

con mayores deficiencias cognitivas. Ello conduce a la siguiente reflexión: Geogebra, con sus atributos y ventajas sobre métodos más tradicionales de lápiz y papel, se ha mostrado un software muy eficiente para fomentar el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes, reflexión que coincide con la expuesta para el ámbito actitudinal, por lo que la experiencia de trabajar con este software en el aula puede considerarse doblemente beneficiosa y totalmente exitosa, en lo que respecta a las metas de esta investigación.

Después de exponer los distintos análisis realizados con los estudiantes para dar respuesta a los objetivos de este trabajo, en el siguiente bloque presento las conclusiones que de ellos se han podido extraer, que permiten sintetizar toda la información presentada en este capítulo y en el anterior, dedicados al análisis de competencias y de actitudes, respectivamente.

BLOQUE IV:

Conclusiones y Aportaciones de la
investigación

What are the significant products of research in mathematics education? I propose two simple answers:

- 1. The most significant products are the transformations in the being of the researchers.*
- 2. The second most significant products are stimuli to other researchers and teachers to test out conjectures for themselves in their own contexts. (John Mason)*

CAPÍTULO 11

Conclusiones y aportaciones de la investigación

En esta memoria se recoge el estudio llevado a cabo dentro del área de conocimiento de la Didáctica de la Matemática, dedicado a indagar sobre formas de potenciar la Enseñanza-Aprendizaje de esta disciplina en Educación Secundaria. Dicho trabajo se ha centrado en explorar modos satisfactorios de incorporar las TIC, en particular el software Geogebra, al estudio de las matemáticas, tratando de comprender cuáles son las aportaciones o ventajas que los estudiantes y docentes pueden obtener, tanto a nivel actitudinal como cognitivo, de su uso en el aula.

Con esta meta siempre presente, consulté numerosos estudios teóricos y empíricos relacionados de algún modo con el tema de interés, que me permitieron conocer el estado actual de la investigación desde múltiples perspectivas. Por un lado, esta revisión de la literatura facilitó la elección del software más adecuado para mis propósitos, mostrándome las ventajas y limitaciones que otros investigadores habían experimentado previamente cuando lo pusieron en práctica con estudiantes, así como los resultados y conclusiones a los que éstos llegaron. Por otra parte, la revisión de los estudios recientes me permitió estar al día de corrientes investigadoras en auge, poniendo de relieve aquellos campos poco explorados, como es el caso de las Actitudes Matemáticas y también los de actualidad, como es el caso del uso de TIC en las aulas o la Educación basada en Competencias. Además, me proporcionó conocimiento sobre herramientas novedosas, como el Análisis Didáctico, para el diseño de la secuencia de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y otras tantas consideraciones que tuve en cuenta antes de la puesta en práctica de este estudio.

Una vez diseñada la intervención en el aula y después de su puesta en práctica con los estudiantes, el siguiente paso fue el de realizar un cuidadoso análisis de los datos recogidos, que condujo a los resultados que de esta investigación se derivan. Dichos resultados se articulan en torno a dos pilares fundamentales: actitudes y competencias de los estudiantes en matemáticas. Los mencionados análisis permitieron identificar qué actitudes relacionadas con

las matemáticas pusieron de manifiesto los estudiantes trabajando contenidos geométricos con el software de Geometría Dinámica Geogebra, así como qué competencias matemáticas movilizaron para la resolución de las tareas diseñadas y el modo en que el uso del software contribuyó a su desarrollo.

En este capítulo resumo los resultados obtenidos en torno a los objetivos de investigación que se desprenden del análisis de datos realizado y permiten dar respuesta a la conjetura que guía este estudio, señalo algunas de las limitaciones de este trabajo y, por último, expongo sus principales aportaciones, así como implicaciones para posibles futuras investigaciones.

11.1. RECORDANDO EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como he expuesto en el capítulo 5, este trabajo se enmarca dentro del paradigma de *investigación-acción* y, al mismo tiempo, se aproxima en su diseño a los *experimentos de enseñanza transformativos dirigidos por una conjetura*. Debido al carácter cíclico de ambos paradigmas, la investigación ha sido guiada por unas preguntas, una conjetura y unos objetivos de investigación, redefinidos y revisados progresivamente. Recuerdo a continuación la conjetura y los objetivos que han guiado el tercer ciclo de esta investigación, que constituyen el núcleo del presente trabajo:

Se puede diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza basada en el uso de Geogebra que promueva una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas y un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes de secundaria. El uso de Geogebra potenciará en mayor grado determinadas actitudes y competencias. Ciertas características y atributos del software guardarán relación directa con las transformaciones provocadas en determinadas actitudes y competencias de los estudiantes.

Los objetivos de investigación, que han permitido hacer operativa dicha conjetura, son:

1. Diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de software de Geometría dinámica (SGD), utilizando el Análisis Didáctico
2. Analizar las transformaciones que la puesta en práctica de dicha secuencia provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de Secundaria
3. Identificar las características del SGD que pueden influir en la transformación de determinadas actitudes relacionadas con las matemáticas

4. Describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de Secundaria al implementar la secuencia anteriormente descrita
5. Identificar qué factores del SGD intervienen en el desarrollo de determinadas competencias matemáticas

En el siguiente apartado expongo resumidamente el modo en que he dado respuesta a estos objetivos.

11.2. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En este capítulo presento, a modo de reflexión final, las conclusiones que pueden extraerse del análisis de datos realizado para informar de los cinco objetivos de investigación expuestos.

Objetivo 1. Diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de software de Geometría dinámica (SGD), utilizando el Análisis Didáctico

El análisis de actuación llevado a cabo confirmó que es posible diseñar, poner en práctica y evaluar una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, resultando ésta adecuada para trabajar los contenidos geométricos seleccionados.

La bondad del diseño de la secuencia de tareas la atribuyo, por una parte, a la utilidad del Análisis Didáctico realizado, cuyos análisis de contenido, cognitivo y de instrucción me proporcionaron un conocimiento más profundo acerca de los contenidos trabajados y de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, la experimentación previa durante el ciclo 1 de esta investigación reveló los caminos de aprendizaje, errores y dificultades más frecuentes de los estudiantes cuando trabajaron estos contenidos con SGD. Así, el análisis didáctico me ha ayudado a mejorar y operativizar mi planificación docente.

La puesta en práctica de la secuencia diseñada para ser trabajada con Geogebra puso de relieve no solamente la adecuación de las tareas diseñadas, sino también de las otras decisiones metodológicas que previamente se habían tomado. Me estoy refiriendo a la idoneidad del software elegido y a la decisión de trabajar de modo colaborativo. Geogebra resultó ser un programa de muy fácil manejo, que requería poco tiempo para familiarizarse con las herramientas que ofrecía y cuyos atributos y ventajas respecto a métodos tradicionales de lápiz y papel se pusieron de relieve en todo momento. El hecho de que los estudiantes

trabajasen colaborativamente por parejas la resolución de problemas contextualizados no tuvo un efecto significativo durante las tareas realizadas con lápiz y papel; sin embargo, emergió como una forma de trabajo adecuada durante las tareas realizadas con Geogebra, al fomentar el diálogo entre los estudiantes y contribuir a que éstos manifestasen menos dificultades que si hubiesen realizado en solitario estas tareas. Coinciden estos resultados con los encontrados por Lavy y Leron (2004) y Sordo (2005) quienes afirman que el entorno tecnológico potencia el aprendizaje colaborativo de los estudiantes.

Respecto al modo de evaluar a los escolares durante la secuencia de enseñanza-aprendizaje realizada con Geogebra, debo decir que los instrumentos empleados para la recogida de datos durante la fase de observación me ayudaron a tener un conocimiento más preciso de las transformaciones actitudinales experimentadas por éstos, así como del desarrollo que alcanzaron en sus competencias matemáticas. La riqueza de los datos recogidos mediante los distintos instrumentos resultó de utilidad, tanto para la evaluación a nivel docente como para la realizada como meta de investigación. A nivel docente, la corrección de las tareas y el análisis realizado de los distintos instrumentos empleados durante la fase de observación me permitieron evaluar a cada uno de los estudiantes y obtener su calificación para la unidad didáctica de teselaciones del plano que trabajaron con Geogebra. El software permitió que la evaluación de las tareas fuese más rica en matices, al posibilitar su observación durante las sesiones de aula y el análisis a su término (examinando el protocolo de cada construcción realizada con Geogebra). Por ello, no fue necesario realizar una prueba escrita al finalizar la unidad de teselaciones del plano.

En referencia a la evaluación de la propia secuencia de enseñanza-aprendizaje, el análisis de actuación realizado durante la experiencia como última fase del análisis didáctico, expuesto en el apartado 7.2.1, resultó muy útil, tanto para mi labor docente como investigadora, pues permitió comprobar la adecuación de las tareas seleccionadas para lograr mis objetivos de enseñanza-aprendizaje. Es decir, mediante el análisis de actuación pude comprobar si realmente las tareas diseñadas produjeron el desarrollo de las competencias matemáticas que a priori esperaba y si el grado de complejidad de dichas tareas permitió que los estudiantes manifestaran, durante su resolución, el nivel de desarrollo de sus competencias considerado en la fase de diseño (análisis de instrucción). Resumidamente, este análisis confirmó la bondad de la secuencia diseñada para lograr mis objetivos: mejorar las actitudes y desarrollar las competencias matemáticas al nivel deseado. Únicamente ciertos aspectos relativos al

diseño la secuencia de tareas, reseñados en el apartado 7.2.1, son susceptibles de mejora para una futura puesta en práctica en el aula (las tareas 3 y 8 han sufrido pequeños retoques), quedando la secuencia definitiva expuesta en el Anexo K. Dicha secuencia es adecuada para ser implementada en el aula por otros profesores, adaptándola a sus propios intereses y a las características de su contexto educativo concreto.

Objetivo 2. Analizar las transformaciones que la puesta en práctica de dicha secuencia provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de Secundaria

En los análisis de actitudes realizados a distintos niveles de profundidad: total de estudiantes, muestra de estudiantes y estudio de casos, se han obtenido resultados bastante homogéneos, que muestran una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas de la mayoría de los estudiantes, gracias al trabajo con Geogebra. Además, quiero destacar que ninguna actitud empeoró con el uso de este software, lo cual es un hecho bastante significativo, pues aunque algunos estudiantes no experimentaron avances remarcables, tampoco la herramienta ejerció un efecto negativo en ellos. Siguiendo la misma estructura empleada en capítulos anteriores, empezaré reflexionando acerca de las actitudes hacia las matemáticas, continuando después con las actitudes matemáticas.

Los análisis de datos llevados a cabo para todos los conjuntos de estudiantes (total de estudiantes, muestra y estudio de casos), condujeron a las mismas conclusiones sobre las transformaciones experimentadas por los escolares en sus actitudes hacia las matemáticas. De ellos se desprende que el uso del software tuvo su efecto en las tres componentes analizadas (cognitiva, afectiva y comportamental), destacando su mayor potencialidad para mejorar las componentes afectiva y comportamental, al lograr que los estudiantes manifestaran mayor gusto, agrado, interés e implicación en la actividad matemática durante las tareas GG. La componente cognitiva (percepciones y creencias sobre sus posibilidades de éxito en matemáticas, como la autoconfianza), fue la que en general experimentó menos evolución, sobre todo para algunos estudiantes con deficiencias cognitivas previas al trabajo con Geogebra. A priori, y basándome en anteriores experiencias, confiaba en que el trabajo con SGD tuviese un efecto positivo en las tres componentes, siendo éste más visible para las dimensiones afectiva y comportamental y menos relevante para el desarrollo de la componente cognitiva, y así sucedió en el aula. Sin embargo, he de añadir que en el ámbito

afectivo no esperaba una evolución positiva tan grande como la que tuvo lugar, hecho que me dejó muy satisfecha de la experiencia.

Por otra parte, los estudiantes manifestaron a lo largo de la experiencia con Geogebra actitudes muy positivas hacia su uso. Los análisis han confirmado que el gusto, motivación y confianza depositado por los estudiantes en el software, como herramienta eficaz para la resolución de las tareas GG, provocó un mayor gusto, motivación, confianza e implicación en matemáticas; es decir, una transformación positiva de sus actitudes hacia las matemáticas. No obstante, esta transformación aparece ligada al uso del software y no es extrapolable a la asignatura y a la materia, tal como la conciben los estudiantes, sin el apoyo de esta herramienta. Estos resultados están en la línea de los obtenidos en otros estudios, llevados a cabo Cretchley y Galbraith (2002) y Gómez-Chacón (2010), quienes analizaron mediante cuestionarios las actitudes de los estudiantes hacia los ordenadores en el aprendizaje de las matemáticas. Dichos autores encontraron que en el aprendizaje de las matemáticas con ordenadores existe una correlación más fuerte con las actitudes hacia los ordenadores (en términos de confianza y motivación hacia los ordenadores) que con las actitudes hacia las matemáticas (en términos de confianza y motivación en matemáticas). En el presente trabajo, la triangulación de los análisis realizados (no solamente de las respuestas a los dos cuestionarios empleados, sino de la restante información recogida mediante variadas técnicas observacionales y no observacionales) ha puesto de relieve esta mayor correlación, al atribuir los estudiantes los cambios positivos experimentados en sus creencias, afectividad y comportamiento en matemáticas al software Geogebra.

En otro orden de cosas, puede considerarse el trabajo con Geogebra como artífice del cambio observado en las componentes afectiva y comportamental durante todas las tareas GG, mientras que para la componente cognitiva, la herramienta contribuyó a su mejora en aquellas tareas de dificultad baja o media, pero fue perdiendo importancia en las tareas más complejas. En relación a lo anterior, el segundo factor más influyente para el cambio observado en la componente cognitiva de los estudiantes variaba de unos casos a otros. Para muchos estudiantes, el segundo factor resultó ser la interacción con su pareja o, dicho de otra manera, el hecho de que trabajasen de modo colaborativo. Y para aquellos estudiantes para los que no resultó efectiva la interacción con sus respectivos compañeros, el segundo factor relevante fue mi interacción con ellos. Estas interacciones y el trabajo con Geogebra repercutieron positivamente en la mejora del autoconcepto y autoconfianza en matemáticas.

Respecto a las transformaciones experimentadas por los estudiantes en sus actitudes matemáticas durante la experiencia con Geogebra, los análisis realizados para los distintos conjuntos de estudiantes devuelven coherencia y similitud de resultados. Estos análisis reflejaron que no todas las actitudes experimentaron la misma evolución y que, además de Geogebra, otros factores, como la interacción con los compañeros (trabajo colaborativo por parejas) y con la profesora, incidieron en las transformaciones observadas, variando la influencia de estos factores para cada alumno en particular.

Durante las tareas realizadas con Geogebra, la gran mayoría de los estudiantes evidenciaron Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización en casi la totalidad de las sesiones en las que usaron el software para resolver las tareas diseñadas de teselaciones del plano (tareas GG). A diferencia de las anteriores actitudes, Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad no alcanzaron valores elevados para la mayoría de los estudiantes, sino solamente para algunos de ellos.

En lo referente a los factores considerados como principales causantes de las transformaciones experimentadas por los alumnos en sus actitudes matemáticas, el factor más relevante para la mayoría de los estudiantes resultó ser Geogebra. En efecto, los análisis pusieron de relieve que ciertos atributos y ventajas del uso del software respecto del trabajo con Lápiz y Papel, expuestos en el capítulo 9 (pp. 396-400), unidos al gusto y confianza de los estudiantes por su uso en matemáticas (función motivadora del software), contribuyeron al desarrollo de actitudes matemáticas tales como Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor y Autonomía, manifestando los estudiantes niveles elevados de desarrollo de tales actitudes. El software ayudó a comportarse de un modo más Sistemático a muchos de los estudiantes, aunque no a la mayoría de ellos, y también fomentó la Flexibilidad de Pensamiento y la Creatividad durante todas las sesiones para unos pocos estudiantes, aunque no puede afirmarse que el software contribuyera directamente al desarrollo de esta última. En el caso de estos estudiantes para los que el trabajo con el software no propició el desarrollo de todas sus actitudes matemáticas a un alto nivel, se encontraron otros factores como la interacción entre compañeros y la interacción con la profesora, que ejercieron influencia, en algunos casos puntual y en otros más notable, para el desarrollo de las actitudes Sistematización, Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad.

Los resultados expuestos para las actitudes matemáticas también se ajustaron a los obtenidos por otros autores como Ursini, Sánchez, Orendain y Butto (2004), trabajo que destaco de

entre el número muy reducido de estudios encontrados centrados en este tema. Dichos autores indagaron acerca de los cambios apreciados por 24 docentes cuando sus estudiantes trabajaban la resolución de problemas con TIC en relación a: participación; capacidad para analizar un problema e interpretar las hojas de trabajo; iniciativa; solicitud de ayuda; dedicación; defensa de sus ideas; creatividad. Según los profesores, la gran mayoría de los estudiantes, mejoraron en dichos aspectos debido al uso de TIC. Estos resultados coinciden con los obtenidos para esta investigación, salvo en la actitud creatividad. La evolución de esta actitud fue señalada por los autores al mismo nivel que la de las restantes actitudes y, sin embargo, en nuestro estudio, la Creatividad se desarrolló en menor grado durante el trabajo con Geogebra, dado que no se produjo de forma homogénea para todos los estudiantes como sucediese para las restantes actitudes. Con anterioridad justifiqué que esta diferencia respecto a la Creatividad puede deberse al hecho de que no todas las tareas diseñadas favorecían el desarrollo de la creatividad y los estudiantes no contaban con un entrenamiento previo en la resolución de tareas que fomentasen el trabajo creativo y también a la diferencia de instrumentos de recogida de información empleados en los dos estudios. Así, los mencionados autores obtuvieron sus resultados de los análisis de las opiniones de los profesores (quienes calificaron a sus estudiantes en relación con los aspectos señalados) y de una entrevista semiestructurada a cuatro de ellos, mientras que los de esta investigación se han obtenido del análisis de variados instrumentos, que permitieron recoger en mayor detalle la actuación de los estudiantes mientras trabajaban con Geogebra la resolución de problemas, y permitieron indagar acerca de la evolución de cada actitud sistemáticamente. En síntesis, los resultados obtenidos en este estudio han evidenciado una mayor influencia de Geogebra en la transformación de las actitudes relacionadas con una mayor implicación en las tareas y en la asignatura como Perseverancia, Espíritu Crítico, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización, que en aquellas actitudes con mayor carga psicológica como Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad.

Otra cuestión referente a las actitudes de los estudiantes que merece atención son las relaciones halladas entre las dos categorías actitudinales estudiadas y entre las distintas actitudes pertenecientes a ambas, las cuales se analizaron sistemáticamente para los cinco estudiantes con los que se llevó a cabo el estudio de casos. Por una parte, los análisis realizados para dichos estudiantes encontraron una relación de dependencia entre actitud positiva hacia el uso de Geogebra y positivas actitudes hacia las matemáticas. Como conclusión de tales análisis, se puede afirmar que el gusto y la confianza que los escolares

depositaron en Geogebra, como herramienta adecuada para la resolución de problemas, contribuyó a que mejorasen sus actitudes hacia las matemáticas durante su uso, exhibiendo gusto, implicación y autoconfianza en matemáticas. Esta implicación resultó más sorprendente para aquellos estudiantes cuyas actitudes hacia las matemáticas previas eran negativas y, sin embargo, su actitud positiva hacia el trabajo con el software (en términos de gusto y confianza) les llevo a transformarlas favorablemente durante su uso. Los anteriores resultados, obtenidos para el estudio de casos, pueden extrapolarse a la mayoría de los estudiantes participantes en la experiencia, pues éstos pusieron de manifiesto en cuestionarios, entrevistas y buzones de sugerencias que consideraban que la mejora de sus actitudes hacia las matemáticas era el efecto del gusto y confianza en el trabajo con el software. Por otra parte, se encontró relación de dependencia entre mejora de las actitudes hacia las matemáticas y mejora de las actitudes matemáticas Perseverancia y Autonomía para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos y también para la mayoría de los escolares que participaron en la experiencia. Así, al comportamiento más perseverante y autónomo de los estudiantes durante el trabajo con Geogebra, contribuyeron tanto los atributos y ventajas del software sobre métodos de lápiz y papel, como la transformación positiva de sus actitudes hacia las matemáticas. Para las restantes actitudes matemáticas, las características o atributos del software ejercieron un mayor peso para su transformación positiva que el hecho de disfrutar y mostrarse motivados y confiados en matemáticas, es decir, la implicación entre mejora de actitudes hacia las matemáticas y mejora de actitudes matemáticas no fue tan notable.

Sintetizando lo anteriormente expuesto, puede decirse que la herramienta resultó de utilidad tanto para mejorar las actitudes hacia las matemáticas como las actitudes matemáticas de los estudiantes; no obstante, no produjo el mismo efecto duradero en ambas. La transformación positiva de las actitudes hacia las matemáticas experimentada por los estudiantes como consecuencia del trabajo con Geogebra, se asoció a su manejo. Así lo confirmaron los estudiantes durante la experiencia y también cuando, a su término, al volver a trabajar con lápiz y papel, la mayoría de ellos volvieron a su situación de partida (antes del trabajo con Geogebra) en tales actitudes. Para el caso de las actitudes matemáticas, el uso del software provocó un desarrollo de éstas en los estudiantes, acorde con las posibilidades de cada uno, que muchos de los estudiantes continuaron manifestando al trabajar las unidades didácticas posteriores sin la ayuda del software. Es decir, la herramienta ayudó a que los estudiantes tomaran conciencia de la necesidad de manifestar dichas actitudes, así como de su

importancia para la resolución de problemas matemáticos, lo que les llevó a seguir manifestando todas o algunas de estas actitudes en futuras actividades matemáticas (en especial, la perseverancia y la precisión y rigor).

Antes de pasar al siguiente objetivo de investigación, me gustaría añadir una reflexión acerca de la influencia del uso de TIC en la transformación de las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes, extraída de los tres ciclos en los que se ha llevado a cabo esta investigación. En lo referente a las actitudes hacia las matemáticas, que se estudiaron en todos los ciclos de esta investigación, se observó cómo el trabajo con ordenadores lograba motivar a los estudiantes para trabajar más en matemáticas, al tiempo que los hacía disfrutar más de la asignatura. Estos resultados se obtuvieron por primera vez en el ciclo 0, cuando los estudiantes trabajaron la resolución de problemas matemáticos, recurriendo a la búsqueda de información por Internet, como recurso eficaz para el estudio de los contenidos matemáticos seleccionados. Más tarde, durante los ciclos 1 y 2, se amplió el estudio del ámbito actitudinal incluyendo las actitudes matemáticas y el uso de las TIC se centró en el manejo de software de Geometría dinámica (SGD). Los análisis realizados en tales ciclos permitieron comprobar la eficiencia de estos programas para el estudio de la Geometría, destacando el software Geogebra en este aspecto y también por su capacidad para mejorar ambas categorías actitudinales. En efecto, no sólo contribuyó al desarrollo de las componentes comportamental y afectiva (como sucediese en el ciclo 0), sino también al de la componente cognitiva de las actitudes hacia las matemáticas. Por su parte, el trabajo con Geogebra provocó una mejora considerable de cinco de las siete actitudes matemáticas consideradas como imprescindibles para una adecuada alfabetización matemática de los estudiantes. En síntesis, Geogebra, con sus atributos y ventajas sobre métodos más tradicionales de lápiz y papel, se ha mostrado un software muy eficiente para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos, cuestión que abordo más específicamente a continuación.

Objetivo 3. Identificar las características del SGD que pueden influir en la transformación de determinadas actitudes relacionadas con las matemáticas

En el segundo apartado del capítulo 9, he expuesto qué atributos y ventajas de Geogebra se pusieron de relieve para la evolución de las actitudes estudiadas, encontrando coherencia entre cada atributo o ventaja observada y las actitudes en cuya mejora incidió en cada caso en todos los análisis realizados a distintos niveles de profundidad, según los conjuntos de estudiantes (total de estudiantes, muestra de estudiantes y estudio de casos). Reflexionando

sobre los resultados de dichos análisis, pueden destacarse algunos de ellos, dada su mayor relevancia para el desarrollo actitudinal de los estudiantes. En lo que sigue, los expongo más resumidamente.

Para las actitudes hacia las matemáticas destacaron tres atributos del software y su función motivadora como única ventaja relevante para la mejora de las tres componentes analizadas (componentes cognitiva, afectiva y comportamental). La constructividad y la interactividad de Geogebra se distinguieron como los atributos más influyentes para la mejora de la componente cognitiva, pues la posibilidad de construir y tener actividad en todo momento, junto a la retroalimentación ofrecida por el software tras cada acción del estudiante, reforzó el bajo autoconcepto de muchos de ellos y les hizo manifestar mayor confianza en sus posibilidades para afrontar con éxito la resolución de problemas durante las tareas GG que la exhibida durante las tareas LP. La facilidad de uso y rapidez de respuesta de la herramienta, tercer atributo señalado, provocó una mayor implicación de los estudiantes en las tareas realizadas en el aula, contribuyendo de este modo a la mejora de la componente comportamental. En último lugar, me ocupo de la ventaja observada de Geogebra sobre LP para la evolución de las actitudes hacia las matemáticas: su función motivadora. Ésta influyó directamente en las componentes afectiva y comportamental, produciendo una mejora en la afectividad hacia las matemáticas de los estudiantes superior a la esperada.

Para las actitudes matemáticas, se apreció durante la realización de tareas con Geogebra la influencia de todos sus atributos y de algunas de sus ventajas (expuestos en la figura 2-1 (p. 54)) en el desarrollo de dichas actitudes en los estudiantes. Los resultados de los análisis confirmaron esta afirmación y aportaron información más detallada de la relación existente entre ambas variables, cuyas conclusiones ahora presento. Concentraré los seis atributos observados en dos grupos por orden de importancia, es decir, según el peso o influencia ejercida para la mejora de estas actitudes.

El primer grupo lo formaron la constructividad; interactividad; facilidad de uso y rapidez de respuesta; y precisión del software para ejecutar las acciones del usuario. La constructividad de Geogebra fomentó una mayor Perseverancia y Autonomía en los estudiantes, al permitirles construir y tener actividad en todo momento. La interactividad del software, o en otras palabras, la retroalimentación inmediata y efectiva proporcionada en tiempo real, contribuyó a la mejora de actitudes como Flexibilidad de Pensamiento y Sistematización. La facilidad de

uso y rapidez de respuesta de Geogebra animó a los estudiantes en la búsqueda de distintas estrategias de resolución influyendo en actitudes como Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad, para los estudiantes que las evidenciaron, al tiempo que facilitó que demostrasen mayor Precisión y Rigor. La precisión con la que el software ejecutaba las acciones de los estudiantes contribuyó a la mejora de actitudes como Espíritu Crítico y Precisión y Rigor, pues les ayudó a tomar conciencia de sus errores a la vez que redujo el esfuerzo y tiempo que necesitaban con LP para mostrar dichas actitudes.

El segundo grupo lo formaron la navegabilidad e interfaz. La navegabilidad de Geogebra tuvo efecto en la mejora de Autonomía de los estudiantes, brindándoles la oportunidad de explorar sus ideas de un modo libre y flexible. La interfaz o modo de capturar la acción y atención del alumno, contribuyó a mejorar la visualización de los estudiantes de los errores cometidos, fomentando también de este modo su Espíritu Crítico. Respecto a las ventajas del software sobre lápiz y papel para la mejora de estas actitudes, destacaron tres, que ahora abordo en orden de mayor a menor relevancia. La función motivadora del software se apreció en la casi totalidad de los estudiantes, encontrando que este gusto por trabajar con Geogebra les llevó a manifestar mayor Perseverancia y Precisión y Rigor que cuando lo hacían con LP. Las restantes dos ventajas del uso de SGD que se pusieron de relieve en el aula fueron, por una parte, el fomento de la reflexión y el análisis de resultados, al emplear menos tiempo en representaciones y cálculos y, por otra, el fomento del trabajo autónomo del estudiante, las cuales incidieron directamente en su Flexibilidad de Pensamiento y Autonomía, respectivamente.

Los resultados anteriores confirman en la práctica la relevancia de ciertas características de las tecnologías, señaladas teóricamente por otros autores. En efecto, durante la experiencia con Geogebra se puso de relieve la importancia para el desarrollo actitudinal de los estudiantes de su función motivadora, de entre las señaladas por Zabalza (1989), así como la relevancia de los seis atributos genéricos que, según Sánchez (2001) poseen los software de Geometría dinámica. Estas características también resaltaron en los ciclos anteriores de esta investigación, por su trascendencia para la mejora actitudinal de los estudiantes.

Por otra parte, quiero destacar que, de los aspectos negativos de la introducción de Geogebra como herramienta de trabajo en el aula señalados por Sordo (2005), durante la experiencia con el software únicamente se puso de manifiesto un inconveniente con el que ya contaba: la pérdida de tiempo de clase debido a problemas técnicos. En esta experiencia, por fortuna, este

inconveniente sólo surgió en momentos puntuales. Además, tales problemas no se debieron al software, sino a otras de las aplicaciones de los equipos informáticos que se emplearon y a la conexión con Internet. Estos problemas técnicos únicamente afectaron a la recogida de datos con fines investigadores, al manifestar algunas parejas de estudiantes problemas puntuales con la aplicación empleada para recoger los archivos de audio, que provocaron la pérdida de algunos de estos archivos. También en un par de sesiones falló la conexión a Internet, lo que dificultó el envío por parte de los estudiantes de los archivos de Geogebra y de audio de dichas sesiones, aunque no tuvo mayor repercusión, puesto que los estudiantes almacenaron estos archivos en sus carpetas de usuario, pudiendo tener acceso a ellos en cualquier momento. En resumen, las incidencias técnicas experimentadas respondieron a cuestiones de investigación, no representando un inconveniente real para el desarrollo de esta experiencia por otros profesores con fines docentes, que posiblemente prescindirían de la grabación de archivos de audio. Ello, a su vez, reduciría los minutos iniciales que en cada sesión se necesitaron para la conexión de los auriculares, micrófonos y de la grabadora de audio.

Objetivo 4. Describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de Secundaria al implementar la secuencia anteriormente descrita

Los análisis de competencias realizados a distintos niveles de profundidad: total de estudiantes, muestra de estudiantes y estudio de casos, han proporcionado resultados bastante satisfactorios, que muestran un desarrollo notable de determinadas competencias matemáticas para la mayoría de los estudiantes, gracias al trabajo con Geogebra. Dichos resultados reflejaron que no todas las competencias experimentaron la misma evolución y que, además de Geogebra, otros factores como la interacción con los compañeros y con la profesora, influyeron en su desarrollo, variando la influencia de estos factores para cada alumno en concreto. Quiero añadir también que, al igual que para el ámbito actitudinal, no se encontraron efectos negativos del trabajo con el software en el desarrollo de las competencias de los escolares, por lo que se considera muy positiva la experiencia de trabajar la resolución de problemas contextualizados con Geogebra.

Tres de las siete competencias estudiadas evolucionaron al mismo nivel, alcanzando un nivel medio-alto en la mayoría de los estudiantes durante las tareas GG: Uso de herramientas y recursos, Representar y Modelar. Las restantes competencias: Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar, Comunicar y Plantear y Resolver Problemas, también mejoraron durante la experiencia con Geogebra, aunque su evolución no fue homogénea, sino que los estudiantes

alcanzaron distintos niveles de desarrollo, en la mayoría de los casos en consonancia con su situación cognitiva previa al trabajo con el software. Es decir, aunque la mayoría de los estudiantes experimentaron un progreso cognitivo trabajando con Geogebra, solamente algunos se mostraron totalmente competentes geoméricamente, lo cual era previsible, pues sólo por el hecho de trabajar con esta herramienta no iban a superar todas las deficiencias cognitivas que arrastraban de cursos anteriores.

Como conclusión de los análisis realizados puede decirse que, Geogebra resultó muy potente para el desarrollo de las competencias más relacionadas con procesos de visualización. Ello contribuyó a que Representar, junto con Uso de Herramientas Tecnológicas y Recursos, fueran las dos competencias en las que los estudiantes obtuvieron los mejores resultados desde el inicio de la experiencia con el software. También Geogebra contribuyó al desarrollo de las competencias Modelar y Plantear y Resolver Problemas, en las que la mayoría de los estudiantes mejoraron sin demasiado esfuerzo, resultando sorprendente la evolución observada en la resolución de problemas contextualizados, puesto que con anterioridad al trabajo con Geogebra habían manifestado grandes dificultades en esta competencia. En cambio, la herramienta resultó menos efectiva para la evolución de las competencias más ligadas a procesos de razonamiento como Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, observando en estas competencias un avance más lento, no alcanzando todos los estudiantes niveles de desarrollo adecuados. Por lo general, en estas competencias los estudiantes subieron un peldaño, es decir, aquellos que durante las tareas LP no habían manifestado estas competencias alcanzaron un nivel bajo durante las tareas GG, los que mostraban un nivel bajo evolucionaron hasta un nivel medio-alto y los que ya evidenciaban un nivel medio en tales competencias (número muy reducido de estudiantes) progresaron hasta un nivel alto de desarrollo de las mismas durante la experiencia con Geogebra. No obstante, debo señalar que, aunque la mayoría de los estudiantes avanzaron siguiendo el esquema anterior, destacaron bastantes alumnos para los que el efecto del trabajo con el software fue sorprendente y pasaron de niveles nulos o bajos iniciales a niveles medios-altos durante las tareas GG.

Otra reflexión importante acerca de la influencia del uso de Geogebra en el desarrollo de competencias de los estudiantes, se refiere al carácter permanente o no de dicho desarrollo, al volver a trabajar la resolución de problemas contextualizados sin contar con la ayuda del software. Comprobé cómo el trabajo con Geogebra había concienciado a los estudiantes de la

importancia de cultivar sus competencias matemáticas para mejorar en dicha actividad. Por ello, trataron de mantener el nivel de competencias alcanzado con Geogebra en posteriores actividades matemáticas. Sin embargo, la mayoría de ellos no lo consiguieron y volvieron a evidenciar muchas de las limitaciones cognitivas que demostraban antes del trabajo con el software. Esta afirmación subraya la relevancia de los atributos y ventajas del software, expuestos en el segundo apartado del capítulo 10, para el desarrollo de las competencias de los estudiantes, en especial, para aquellos con mayores deficiencias cognitivas.

En cuanto a los factores que contribuyeron al desarrollo de competencias observado en los estudiantes, aludo a los mismos que ya he destacado como causantes de las transformaciones actitudinales: Geogebra, la interacción entre alumnos y la interacción con la profesora. Al igual que el desarrollo de algunas competencias difería de unos estudiantes a otros, el peso o la influencia de cada factor en su evolución cognitiva también fue variable. El software resultó el factor más importante, de entre los tres mencionados, para el desarrollo de competencias experimentado por los estudiantes. No obstante, debo matizar que contribuyó más al desarrollo de unas competencias que a otras y no ejerció el mismo efecto en todos los estudiantes. La influencia de Geogebra fue significativa para el desarrollo de las siete competencias matemáticas hasta un nivel medio, aunque contribuyó también a que la mayoría de estudiantes alcanzara un nivel alto de desarrollo en las competencias Representar y Uso de Herramientas y Recursos. Asimismo, la herramienta contribuyó en gran medida a que muchos de los alumnos llegaran a manifestar un nivel medio-alto en Modelar⁷⁶ y Plantear y Resolver Problemas. El software fue perdiendo protagonismo a medida que la complejidad de las tareas aumentaba y en estos casos fueron ganando relevancia los otros factores mencionados para el desarrollo de ciertas competencias como Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, en las que los estudiantes demostraron mayores dificultades. El segundo factor de importancia para el desarrollo de dichas competencias en los estudiantes variaba de unos alumnos a otros, aunque para la mayoría de los estudiantes resultó ser su interacción conmigo (con la profesora), siendo mi labor en estos casos la de dialogar con ellos y proporcionarles ayudas o sugerencias para que ellos mismos llegasen a razonamientos y argumentaciones fundamentados y los comunicasen adecuadamente. Para unas pocas parejas, cuyos miembros se complementaron a la perfección, el segundo factor de importancia para el desarrollo de estas competencias fue su interacción o el trabajo

⁷⁶ Las tareas exigían el desarrollo de esta competencia a nivel medio, y solamente la tarea 9 exigía un nivel alto, por ello, globalmente puede considerarse que las tareas diseñadas requerían de esta competencia a nivel medio-alto.

colaborativo entre ambos alumnos, pudiendo considerar en estos casos su interacción con la profesora el tercer factor de importancia. La interacción de cada estudiante con su pareja respectiva en muchos casos no resultó beneficiosa para el desarrollo de competencias, aunque tampoco perjudicial, porque dependía en gran medida de la idiosincrasia de los componentes de cada pareja y de si se encontraban al mismo nivel cognitivo o no. Se puede decir que ésta fue efectiva para aquellos estudiantes cuya pareja mostraba mayor competencia y le brindaba su ayuda en las situaciones en las que presentaba alguna dificultad.

Las conclusiones anteriores están en la línea de las obtenidas en otros estudios, cuyo objetivo también era el de describir la mejora de ciertas competencias matemáticas debido al trabajo con software de Geometría Dinámica (SGD) en el aula. No obstante, la mayoría de los estudios encontrados se centran en las competencias Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Plantear y Resolver Problemas. Así, comparando los resultados obtenidos en tales estudios acerca de dichas competencias con los de esta investigación, se encuentra coincidencia en todos ellos. En efecto, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Straesser, (2006) encontraron que el uso de SGD con estudiantes de secundaria produjo una mejora de la comprensión de los conceptos geométricos y apoyó el desarrollo de demostraciones formales por parte de los estudiantes. Por su parte, Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2004) comprobaron que el hecho de que el SGD propiciara una mayor participación de los estudiantes durante la fase previa a la demostración (en la que los estudiantes se convencieron de la validez de sus conjeturas) les llevó a la necesidad de encontrar una demostración más formal. Según Santos-Trigo (2008), ciertos aspectos de la resolución de problemas matemáticos mejoran con el uso de SGD, afirmación corroborada por los resultados obtenidos en esta investigación. Resumidamente, tales aspectos hacen referencia a la necesidad de los estudiantes, provocada por el uso del software, de pensar los problemas en términos de propiedades relevantes y también al hecho de que el trabajo con SGD facilita el proceso de verificación de conjeturas considerando distintos métodos que incluyen visual, empírica, dragging (arrastre) y demostraciones formales para apoyar las conjeturas. A modo de conclusión puede decirse que dichos estudios apuntan a una mejora de las tres competencias señaladas producida por el manejo del software, resultado que viene a coincidir con los obtenidos para esta investigación.

Como hice para el ámbito actitudinal, y antes de pasar al siguiente objetivo, me gustaría añadir una reflexión acerca de la influencia del uso de Geogebra en el desarrollo de las

competencias matemáticas de los estudiantes. A lo largo de los tres ciclos de investigación llevados a cabo, se han obtenido resultados positivos sobre el desarrollo de competencias que los estudiantes experimentaron trabajando con TIC. Aunque el análisis realizado durante los dos primeros ciclos no fue tan exhaustivo como en esta última experimentación, sí que permitió afirmar que se produjo un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes durante el trabajo con tecnologías, incidiendo su uso en unas competencias más que en otras, lo que confirma la eficiencia de tales herramientas no solamente en el ámbito actitudinal, sino también en el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

Objetivo 5. Identificar qué factores del SGD intervienen en el desarrollo de determinadas competencias matemáticas

En el segundo apartado del capítulo 10 (pp. 491-496) he expuesto los atributos o ventajas de Geogebra que se pusieron de relieve para el desarrollo de cada competencia estudiada. Algunos de ellos resultaron más relevantes que otros, por asociarse al desarrollo de varias competencias, al igual que sucediese para las distintas actitudes analizadas.

Durante la puesta en práctica en el aula de la secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, se apreció la influencia de casi todos los atributos y de algunas de las ventajas del software, expuestos en la figura 2-1 (p. 54), en el desarrollo de las competencias de los estudiantes. Comenzando por los atributos del SGD que se pusieron de relieve para la mejora de determinadas competencias, destacaron cinco de ellos, que clasifiqué en dos grupos, según el peso o influencia que ejercieron para el desarrollo de estas competencias.

El primer grupo lo formaron la constructividad; la interactividad; y la facilidad de uso y rapidez de respuesta del software. La constructividad y la interactividad de Geogebra permitieron a los estudiantes tener actividad (les llevó a “probar”) y retroalimentación inmediata de sus acciones, incidiendo en el desarrollo de competencias como Modelar y Plantear y Resolver Problemas. Además, la interactividad también ayudó a reconducir los Pensamientos y Razonamientos de los estudiantes, mejorando así la calidad de éstos. La facilidad de uso y la rapidez de respuesta de Geogebra no solamente contribuyó a fomentar un Uso de Herramientas y Recursos adecuado, sino que animó a los escolares en la búsqueda de distintas estrategias de resolución, influyendo así en el desarrollo de competencias como Pensar y Razonar y Plantear y Resolver Problemas. El segundo grupo de atributos lo formaron la interfaz y la precisión del Geogebra. Ambos atributos incidieron en el desarrollo

de la competencia Representar, al hacer más visible para los estudiantes la conexión entre distintas formas de representación y mejorar sus representaciones mentales.

Respecto a las ventajas del software sobre lápiz y papel para el desarrollo de competencias, destacaron cuatro, que ahora abordo en orden de mayor a menor relevancia. La posibilidad de comprobar ideas, recibir retroalimentación o manipular objetos (representaciones manipulables o ejecutables mediante dragging) fue la ventaja más relevante para el desarrollo de competencias, incidiendo positivamente en la mejora de Argumentar-Demostrar, Modelar (modelado vertical), Plantear y Resolver Problemas y Representar. La posibilidad de generar gran cantidad de ejemplos de un modo rápido y sencillo fue refinando la forma de Pensar y Razonar de los estudiantes y los motivó en la búsqueda de Argumentaciones-Demostraciones, facilitando además este proceso. La mejora de la visualización y la contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos, provocada en los estudiantes por el uso del software, influyó a la hora de Representar. Por último, el hecho de que el software obligase a los estudiantes a pensar y razonar los problemas en términos de propiedades matemáticas, resultó ser una ventaja sobre LP que desarrolló la competencia Pensar y Razonar.

Estos resultados subrayan la importancia de los atributos de los software de Geometría dinámica, señalados por Sánchez (2001), pues contribuyeron simultáneamente al desarrollo de ciertas competencias matemáticas y a la positiva transformación actitudinal experimentada por la mayoría de los estudiantes, antes comentada. Asimismo, las anteriores ventajas del uso de Geogebra que han resultado relevantes para el desarrollo de determinadas competencias, vienen a coincidir con las propuestas por Underwood et al. (2005) y Yerushalmy (2005) como herramientas necesarias en tales software para apoyar la resolución de problemas en matemáticas. Dichas ventajas concuerdan con las encontradas por los estudios previos de Laborde, Kynigos, Hollebrands y Straesser (2006) y Santos-Trigo (2008), que ya señalé en el capítulo 10 (p. 498).

Respecto a los inconvenientes del uso de Geogebra como herramienta de trabajo en el aula, ya he comentado para el ámbito actitudinal la pérdida de tiempo ocasionada por problemas técnicos en momentos puntuales de algunas de las sesiones de aula, que únicamente afectó a la recogida de datos y no supuso una limitación real en el plano docente. Por lo que respecta al ámbito cognitivo, únicamente tengo que añadir que unos pocos estudiantes parecían confundir manipulación con conocimiento matemático, y en estos casos, interaccioné con

ellos para hacerles ver que debían pensar y razonar cómo construir las matemáticas, con el fin de que sus respuestas tuviesen una base sólida sobre la que sostenerse.

Relación encontrada entre actitudes y competencias

Considero importante incluir la relación observada entre evolución actitudinal y mejora de competencias para los estudiantes del estudio de casos. Para el conjunto total de estudiantes esta relación fue analizada a partir de la información que de ellos se recogió (cuestionarios, mis diarios grupales, entrevistas y buzones de sugerencias). Tal análisis ofreció una visión global que coincide con la encontrada para los estudiantes del estudio de casos, para los que esta relación se analizó en profundidad al disponer de mucha más información adicional (mis diarios individuales, archivos de audio y de Geogebra de cada tarea).

A priori, y teniendo en cuenta los resultados de las anteriores experiencias, se esperaba que una transformación positiva de las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes contribuyera a una mejora de sus actitudes matemáticas y ello, a su vez, propiciara el desarrollo deseado de sus competencias. En parte, debido a que al tener las actitudes matemáticas un carácter cognitivo y no afectivo, podrían considerarse parte de la competencia matemática global. Los resultados expuestos en el capítulo anterior confirmaron tal relación, al reflejar que una positiva actitud hacia el uso de Geogebra en matemáticas implicó una transformación positiva de sus actitudes hacia las matemáticas que conllevó a la mejora de ciertas actitudes matemáticas. Esta mejora a su vez contribuyó al desarrollo de ciertas competencias matemáticas.

Para la mayoría de los estudiantes, el gusto y confianza en el trabajo con Geogebra les llevó a disfrutar más de la asignatura, a implicarse activamente en la resolución de las tareas y a mostrar más confianza en sus posibilidades de éxito. Esta transformación positiva de sus “actitudes hacia las matemáticas” resultó vital para muchos de ellos, como activador de su evolución en el ámbito cognitivo, pues les llevó a manifestar adecuadamente sus actitudes matemáticas, lo que a su vez, los condujo a probar distintos caminos de resolución, que les llevaron a hacer razonamientos y argumentaciones fundamentados, a partir de la decodificación de las representaciones obtenidas con Geogebra, de un modo rápido y sencillo. Es decir, la mejora de sus actitudes matemáticas, contribuyó al desarrollo de sus competencias a un nivel adecuado. Para otros estudiantes con mayores deficiencias cognitivas, la transformación positiva de sus actitudes hacia las matemáticas, como

consecuencia del gusto y confianza en el trabajo con Geogebra en matemáticas, les ayudó a mejorar en algunas actitudes matemáticas, evolución que fomentó el desarrollo de determinadas competencias, pero no de todas ellas. Encuentro que la relación se dio en este sentido y no al revés, pues el avance cognitivo que los estudiantes experimentaron fue más progresivo y fruto del cambio actitudinal previo.

Conjetura de investigación y reflexión final

Después de atender debidamente los objetivos de esta investigación, es el momento de retomar la conjetura que la ha guiado. Los resultados expuestos suponen una confirmación de dicha conjetura, al tiempo que permiten matizar distintos aspectos emergentes que pueden ser tenidos en cuenta para futuras reformulaciones, dependiendo de los intereses y contextos en los que el estudio pudiera ser continuado. A continuación, y a modo de reflexión final, contrastaré la conjetura mediante una síntesis de todo lo expuesto con anterioridad.

En primer lugar, aludo a la planificación de la experiencia. Tanto las secuencias de tareas como los instrumentos diseñados para la recogida de información han cubierto las necesidades de este estudio y han resultado útiles para sus propósitos. Por otra parte, las caracterizaciones de actitudes y de competencias, así como las características de Geogebra consideradas como marco teórico de análisis se han mostrado válidas. Por tanto, se consideran adecuadas para investigaciones futuras que tengan alguno/s de estos focos de interés. En este punto, quiero resaltar algunos procedimientos como el Análisis Didáctico que ha resultado de gran utilidad para el diseño de la secuencia didáctica y de las parrillas de observación de competencias de esta investigación y además, ha contribuido a mejorar la forma de planificar mi práctica docente.

Respecto a las decisiones tomadas para la intervención en el aula: uso de Geogebra, aprendizaje por descubrimiento guiado y trabajo colaborativo, todas ellas han resultado efectivas para la evolución de las actitudes y competencias de los estudiantes. La decisión de trabajar con Geogebra en el aula se ha visto recompensada con el efecto positivo que produjo en los estudiantes. En efecto, Geogebra contribuyó al desarrollo de las actitudes hacia las matemáticas⁷⁷ y a la mejora considerable de cinco de las siete actitudes matemáticas objeto

⁷⁷ Geogebra se mostró una herramienta efectiva para mejorar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, debido al gusto y confianza que ellos depositaron en su uso para el estudio de contenidos geométricos. Además, puede descartarse que esta mejora fuese el efecto de la novedad de trabajar con el software, pues los estudiantes ya habían realizado con Geogebra las tareas de Isometrías del Plano durante los dos meses previos al estudio de los contenidos de Teselaciones del Plano (tareas GG).

de estudio (Espíritu Crítico, Perseverancia, Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización). Además, resultó una herramienta eficaz para fomentar el desarrollo de cuatro de las competencias matemáticas a un nivel medio-alto en la mayoría de los estudiantes (Modelar, Plantear y Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos), teniendo un efecto menos notable en las tres restantes (Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar) que, sin embargo, permitió que los estudiantes mejorasen respecto de su situación previa. En síntesis, Geogebra, con su función motivadora y sus atributos y ventajas sobre métodos más tradicionales de lápiz y papel, puede considerarse un software de gran utilidad para la enseñanza-aprendizaje de la geometría y, por estas razones, se recomienda fomentar su uso adecuado en las aulas. Otro aspecto a tener en cuenta es su sencillez de manejo que permite una rápida formación a través de cursos presenciales o a distancia o la autoformación a partir de los manuales de uso disponibles en Internet. Además, existe una gran cantidad de material gratuito elaborado por otros profesores para trabajar distintos contenidos matemáticos con Geogebra que se encuentra en la red a disposición de cualquier usuario.

Por su parte, la enseñanza para fomentar un aprendizaje por descubrimiento guiado, ha resultado un modelo muy adecuado para la experiencia de trabajar con Geogebra en el aula, pues brindó la oportunidad a los estudiantes de convertirse en pensadores autónomos, creativos y críticos, responsables de su propio aprendizaje, actitudes que el trabajo con Geogebra contribuyó a desarrollar. Mi labor consistió en proporcionarles el material adecuado, guiarlos en el proceso y ayudarlos cuando ellos así lo solicitaban. Se confirmó, durante la experiencia, el buen maridaje de este modelo de enseñanza con el trabajo en entornos tecnológicos, aspecto que ya había sido estudiado por otros autores, entre ellos, Olkunn, Sinoplu y Deryakulu (2005), quienes encontraron que el uso de SGD en matemáticas facilitaba el aprendizaje por descubrimiento guiado y repercutía beneficiosamente en el aprendizaje de los estudiantes.

Otra decisión que se vio respaldada por la respuesta de los estudiantes fue la de optar por una metodología basada en el trabajo colaborativo. Los estudiantes se pronunciaron positivamente a este respecto de muy variadas formas: cuestionarios, entrevistas, opiniones y sugerencias de los buzones, y en todas ellas subyacía la idea de la bondad de esta metodología de trabajo para mejorar la comunicación con los compañeros y facilitar el aprendizaje. Además, el análisis de datos reveló la importancia del trabajo colaborativo,

como segundo factor influyente, después del software, en la mejora de actitudes como la autoconfianza (componente cognitiva), la Flexibilidad de Pensamiento, la Sistematización y la Creatividad y en el desarrollo de la competencia Comunicar. Dicho análisis también señaló al trabajo colaborativo o interacción entre estudiantes, como tercer factor de peso, después del software y de la interacción estudiantes-profesora, para el desarrollo de las competencias Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar. Estos resultados apoyan la relación bilateral establecida por Calzadilla (2001) entre trabajo colaborativo y entorno tecnológico. Por un lado, el uso de TIC en las aulas, requiere del soporte que proporciona el aprendizaje colaborativo para optimizar su intervención y por otro lado, las tecnologías fomentan el aprendizaje colaborativo, al potenciar y desarrollar las habilidades interpersonales.

En lo que respecta a los aspectos negativos de la experiencia de trabajar con Geogebra, que fueron mínimos, he destacado problemas técnicos que se presentaron de manera puntual y sin gran repercusión, dado que no supusieron una pérdida considerable del tiempo de clase. Las experiencias anteriores llevadas a cabo con TIC (consecuencia de la metodología cíclica adoptada para la investigación), pusieron de relieve los peligros⁷⁸ y limitaciones de trabajar con ellas en el aula, y desde estas consideraciones, para este tercer ciclo de investigación conseguí reducir tales efectos negativos.

En este punto, me parece conveniente aludir, de un modo general, al carácter permanente o transitorio de las transformaciones producidas por el uso del software, tanto en las actitudes como en las competencias matemáticas de los escolares. Así, aunque no puedo hacer una comparación de las actitudes y del nivel de desarrollo de las competencias de cada estudiante durante y después del trabajo con Geogebra, sí que puedo aportar algunas observaciones, en términos de rendimiento en la asignatura, que extraje comparando el comportamiento en el aula y las calificaciones obtenidas por los alumnos en ambos casos. Diferencí dos grupos de estudiantes: aquellos que no experimentaron una mejora reseñable en ningún sentido debido al trabajo con el software (en torno a un 15%), y los que mejoraron en actitudes, competencias o en ambas durante la experiencia con Geogebra (el 85% restante). De los alumnos que sí experimentaron una mejora de su rendimiento con Geogebra, ésta fue permanente para el 64%, mientras que para el 36% de ellos la mejora fue temporal y puede

⁷⁸ Por ejemplo, un problema común suele ser la desconexión a Internet, que en experiencias anteriores sí que afectó negativamente en algunas sesiones, pero que en esta ocasión apenas hubo que lamentar, gracias a la decisión de emplear paralelamente las plataformas Moodle y Helvia, empleando Helvia como segunda opción en caso de no funcionar la red Internet en el centro (necesaria para acceder a Moodle).

atribuirse al trabajo con el software, pues obtuvieron una calificación inferior para los contenidos de álgebra trabajados con posterioridad sin esta herramienta, a pesar de que éstos ya los habían estudiado en el curso anterior. Analizando más exhaustivamente a estos estudiantes que mejoraron únicamente durante las tareas con Geogebra, comprobé que éstos fueron precisamente los que, debido al gusto y confianza depositado en el uso del software, experimentaron un sorprendente cambio en sus actitudes hacia las matemáticas, que provocó una mejora de sus actitudes matemáticas y de sus competencias. Al dejar de trabajar con Geogebra, estos 14 estudiantes volvieron a manifestar actitudes hacia las matemáticas inadecuadas, que les llevaron a no trabajar suficientemente en el aula (desmotivación por las tareas, escasa implicación y autoconfianza en sus posibilidades de éxito), con lo que sus actitudes y competencias matemáticas empeoraron y por tanto, también su calificación. Respecto a los estudiantes que mejoraron durante la experiencia con Geogebra y después siguieron manifestando un rendimiento adecuado en matemáticas, puede decirse que el trabajo con el software los concienció de la necesidad de desarrollar sus actitudes y competencias matemáticas para mejorar en la asignatura y, por ello, en futuras actividades matemáticas siguieron dando muestra de algunas de ellas a un nivel adecuado. Sin embargo, mantener el grado de desarrollo alcanzado con Geogebra en determinadas actitudes y competencias como Espíritu Crítico, Autonomía, Argumentar-Demostrar, Plantear y Resolver Problemas o Representar, a muchos de ellos les resultó difícil sin la ayuda del software. Ello puso de manifiesto la relevancia de los atributos y ventajas del software, antes mencionados, para el desarrollo de actitudes y competencias de los estudiantes.

Para concluir, haré un balance de los resultados obtenidos a lo largo de los tres ciclos de investigación llevados a cabo en este estudio. Se puede afirmar que el uso de TIC (Internet en ciclo 0 y SGD en ciclos 1 y 2) provocó una transformación actitudinal positiva y un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, si bien se encontraron diferencias entre el ciclo 0 y los ciclos 1 y 2. Durante el ciclo 0, en el que el uso de TIC se centró en el uso de Internet⁷⁹, solamente se analizaron en detalle la transformación de las actitudes hacia las matemáticas y el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. Los resultados que se obtuvieron informaron de una mejora de las componentes

⁷⁹ A partir de la resolución de problemas contextualizados en la vida real, por parejas de modo colaborativo, se introdujeron los contenidos seleccionados que no habían sido estudiados con anterioridad por los estudiantes. Para esta labor, los estudiantes contaban con distintos recursos como Internet, ciertos software de libre uso y materiales que ellos mismos elaboraron. No obstante, la mayoría de los problemas los resolvieron buscando información por Internet, a partir de la cual los estudiantes realizaron pequeñas investigaciones para las que tuvieron que poner en juego sus competencias matemáticas.

afectiva y comportamental para un gran porcentaje de los estudiantes, no siendo tan significativa la evolución de la componente cognitiva. Respecto a las competencias analizadas⁸⁰, las que experimentaron un desarrollo más homogéneo en los estudiantes fueron Comunicar y Uso de herramientas y recursos, mientras que el desarrollo de competencias tales como Pensar y Razonar, Argumentar, Resolver Problemas y Representar, aunque satisfactorio, no fue tan positivo como en el caso de las dos competencias anteriores, pues no todos los estudiantes experimentaron mejoras visibles. Los resultados obtenidos durante los ciclos 1 y 2, en los que se trabajaron contenidos geométricos de teselaciones del plano con SGD, fueron similares para las actitudes hacia las matemáticas, las actitudes matemáticas y las competencias matemáticas, aunque he de señalar el análisis de datos realizado durante el ciclo 1 fue menos pormenorizado que el correspondiente al ciclo 2. Al contrastar los resultados del ciclo 0 con los de los ciclos 1 y 2, en aquellos aspectos que fueron objeto de estudio durante los tres ciclos, se aprecia concordancia en el ámbito actitudinal y coincidencias y diferencias en los resultados obtenidos para las distintas competencias. A lo largo de los tres ciclos, se han obtenido resultados similares acerca del desarrollo provocado por el uso de TIC en las competencias Uso de Herramientas y Recursos, Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar. Sin embargo, los resultados difieren ligeramente en la competencia Plantear y Resolver Problemas y, sobre todo, se encuentra discrepancia en los resultados obtenidos para las competencias Comunicar y Representar. Para la competencia Comunicar, esta falta de concordancia puede deberse a la diferente caracterización⁸¹ adoptada para tal competencia en el ciclo 0 y en los ciclos 1 y 2, que condujo a diferente interpretación de los resultados y por tanto, dificulta la comparación de los mismos. Para la competencia Representar⁸², que durante el ciclo 0 no experimentó un desarrollo notable homogéneo, durante los ciclos 1 y 2 al trabajar con SGD la situación mejoró notablemente, siendo ésta una de las dos competencias que experimentó una mayor evolución. Por tanto, puede asociarse la mejora de tal competencia al uso de SGD durante los ciclos 1 (C.a.R. y Geogebra) y 2 (Geogebra), cuyos atributos y ventajas sobre métodos de lápiz y papel contribuyeron a mejorar la calidad de las representaciones de los estudiantes.

⁸⁰ Las competencias estudiadas en el ciclo 0 no coincidieron exactamente con las analizadas en los ciclos 1 y 2. Así, la competencia Modelar no fue objeto de análisis durante el ciclo 0, pero sí en los siguientes.

⁸¹ La caracterización de competencias empleada durante el ciclo 0 se revisó tras su puesta en práctica, y ello produjo modificaciones en algunas competencias, entre ellas en la competencia Comunicar. Tras el ciclo 1, la nueva caracterización se mostró más efectiva y acorde a los objetivos de investigación (los cuales también fueron perfilándose a lo largo de los distintos ciclos), empleándose por ello también durante el ciclo 2, con ligeras matizaciones.

⁸² La competencia Representar respondía a la misma caracterización para los tres ciclos, salvo ligeros matices.

Todo lo anterior, me lleva a afirmar que la experiencia de introducir las TIC en las aulas me ha resultado muy enriquecedora y a la vez muy satisfactoria. Además, el tiempo y esfuerzo dedicado al diseño y planificación de esta investigación se ha visto recompensado con la respuesta de los estudiantes, tanto a nivel actitudinal como cognitivo y con el desarrollo profesional y personal que he ido experimentado durante los tres ciclos en los que ésta se ha llevado a cabo.

11.3. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado expongo algunas de las limitaciones de este trabajo de investigación, que se tuvieron en cuenta durante su desarrollo.

En primer lugar, los resultados obtenidos se refieren únicamente a los dos grupos de estudiantes de 3º de ESO con los que se llevó a cabo la experiencia; si bien la elección de este nivel fue intencionada, por considerar más factible el desarrollo de ciertas competencias a un nivel adecuado en estos estudiantes, que ya gozaban de cierta madurez intelectual. Los estudiantes de ambos grupos respondían a distintos perfiles actitudinales y cognitivos, que se consideraron representativos de los que pueden encontrarse en una clase habitual de 3º de ESO, por lo que las conclusiones extraídas podrían en principio extrapolarse a contextos similares.

Coincido con Molina (2006) en que los métodos verbales son usados frecuentemente como herramienta de investigación, siendo valorados en campos como Educación Matemática, pese a reconocerse en ellos ciertas limitaciones. Según Villegas y Castro (2003), una de ellas es que la información obtenida está limitada por la capacidad de los alumnos de expresar de manera escrita y verbal su pensamiento. Se tuvo en cuenta esta limitación y por ello, se optó por el trabajo colaborativo entre pares de estudiantes, que fomentó el diálogo e interacción entre ellos, aumentando así la riqueza de la información registrada en los archivos de audio y la fiabilidad de los posteriores análisis que de esa información se realizaron. Esta decisión metodológica, que resultó muy efectiva, podría considerarse, no obstante, otra limitación de este estudio. El modo de trabajar fue beneficioso para los estudiantes; sin embargo, en algunos casos despertó ciertas interrogantes acerca de si los estudiantes habrían obtenido los mismos resultados de haber trabajado las tareas con Geogebra de modo individual. Es decir, en algunos casos la interacción con la pareja cobró relevancia e influyó en el desarrollo cognitivo de uno de los miembros de la pareja o de ambos, por lo que resultaba más difícil de

diagnosticar las influencias por separado del software y del trabajo colaborativo con su compañero. Al registrar en audio los diálogos de cada pareja, se pudo paliar en cierta medida esta limitación, al diferenciar de un modo más fiable cuándo cada uno de estos factores estaba ejerciendo mayor peso en el desarrollo que cada alumno estaba manifestando.

Por otra parte, el entorno ejerce influencia directa sobre el modo de actuar de los estudiantes, influencia que se tuvo presente para la investigación. Se trató de minimizar la alteración del normal desarrollo de la clase producido por la decisión de recoger en audio y vídeo las actuaciones de los estudiantes. Para ello, se realizaron grabaciones antes de iniciar la experiencia de trabajar con TIC, para que los alumnos se familiarizaran con este modo de registrar su actividad y se expresaran libremente, descartando el efecto en su comportamiento de mis expectativas como profesora-investigadora. Además, se decidió realizar todas las grabaciones de audio por parejas y las de vídeo a nivel grupal, limitando éstas a la puesta en común de cada tarea y a una entrevista con cada grupo al finalizar la experiencia. Las entrevistas, en las que yo no estuve presente, fueron realizadas por mi directora de tesis. Antes de llevar a cabo tales entrevistas, mi directora había asistido a algunas sesiones de clase con cada grupo, para que los estudiantes no se cohibieran por su presencia durante las entrevistas y se mostraran participativos. Aún así, se observó que algunos de los alumnos más tímidos no participaron o lo hicieron en menor grado que otros estudiantes.

Para garantizar la validez de la información recogida y reducir el efecto de las limitaciones expuestas, además de las medidas ya comentadas, se decidió recabar información de diversa índole, combinando actividades por parejas e individuales, que se recogió tanto de modo oral como por escrito.

11.4. APORTACIONES DEL TRABAJO

Esta investigación puede considerarse una alternativa a investigaciones hechas dentro de paradigmas tradicionales, las cuales tienen como propósito producir conocimiento abstracto y generalizable y que, sin embargo, es difícilmente aplicable por los profesores para resolver los problemas que les plantea su práctica diaria. Investigar sobre la propia práctica puede ser útil en este sentido, con vistas a tender puentes entre la teoría y la práctica. Para tal fin, los resultados obtenidos en estas investigaciones deben dejar claro sus implicaciones para la enseñanza, brindando a los docentes la oportunidad de utilizar el conocimiento que de ellas se derivan y adaptarlo a su propia práctica.

En esta línea se encuentra el presente trabajo, pues pretende proporcionar evidencias, estrategias, materiales o simplemente ideas para llevar al aula que sean de utilidad a otros docentes que se decidan a incorporar las TIC en sus clases, ayudando así a reducir la distancia entre su uso potencial y real. Creo que la falta de concordancia entre el uso potencial y real de las TIC en el aula se debe, en gran parte, a una falta de formación del profesorado sobre este tema, que les otorga una visión limitada de las posibilidades que su incorporación llevaría consigo. Como ya expuse coincido con Parsad, Lewis y Farris (2001), en que la mayoría de las oportunidades de desarrollo tecnológico profesional para profesores en servicio se ofrece en forma de talleres de corta duración que se centran en impartir los conocimientos generales sobre un nuevo software educativo, así como las habilidades básicas necesarias para su manejo. Debido a la escasez de tiempo, muchos talleres no cubren la cuestión de cómo integrar este software con éxito en la enseñanza de las matemáticas y, por lo tanto, la transferencia de estas nuevas habilidades a sus aulas se hace más difícil de lo necesario para los profesores. En este sentido, considero que estudiar la forma de integrar las TIC con éxito en nuestras aulas, explorando la potencialidad de estos recursos tecnológicos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en entornos escolares, puede ser de interés para los docentes de Educación Secundaria, sobre todo teniendo en cuenta que actualmente se nos exige a los profesores la integración de tales herramientas como parte de nuestra labor docente.

Me he centrado en el uso en entornos escolares de SGD, en especial de Geogebra, y en el estudio del modo en que sus características y atributos contribuyen a la mejora de determinadas actitudes y competencias matemáticas. Ello ha permitido contrastar en la práctica cotidiana las ventajas que en teoría poseen estos software, considerando estos resultados como una de las aportaciones de este trabajo. De un lado, el contraste entre atributos y ventajas teóricas y reales (que emergieron en la práctica), así como la influencia de cada uno de ellos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, genera un conocimiento de utilidad para la comunidad científica. De otro lado, los resultados de este trabajo, que han evidenciado efectos positivos tanto en las actitudes como en las competencias matemáticas de los estudiantes debido al trabajo con TIC, pueden motivar a otros docentes a repetir esta experiencia en sus aulas o incitarlos a desarrollar y evaluar las suyas propias.

Para analizar las transformaciones producidas por el uso del software en las actitudes y competencias de los escolares, ha sido necesario el diseño, puesta en práctica y evaluación de una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de SGD. Para el diseño, se hizo uso del procedimiento llamado Análisis Didáctico (Gómez y Rico (2002), Gómez (2002, 2004, 2006, 2007), Lupiáñez y Rico (2008)), el cual proporcionó herramientas y técnicas para diseñar la secuencia de tareas que, tras ser implementada en el aula, fue sometida a evaluación (análisis de actuación). Este proceso permitió refinar la secuencia diseñada hasta obtener la versión definitiva, que es la que se encuentra a disposición de otros docentes que deseen ponerla en práctica en el aula usando estas tecnologías en el Anexo K. Este diseño puede considerarse una triple aportación:

- Como secuencia de enseñanza-aprendizaje o unidad didáctica para ser llevada al aula. Dicha secuencia puede ser implementada directamente por otros profesores en sus aulas o servirles de modelo para el diseño de otras secuencias que les sean de interés.
- Como contraste para la herramienta teórica del Análisis Didáctico, al ser implementada en un entorno escolar y en todas sus fases (hasta el momento, ha sido utilizada como instrumento para formación inicial del profesorado). En este sentido, los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción se han mostrado muy efectivos para el diseño y selección de tareas, tal y como ha puesto de relieve el análisis de actuación realizado. Así, el Análisis Didáctico ha resultado un procedimiento adecuado para la planificación y la evaluación de la secuencia didáctica.
- Como modelo de evaluación de contenidos en términos de competencias, de acuerdo con los requerimientos del panorama educativo actual. La LOE exige al profesorado enseñar y evaluar en términos de competencias; sin embargo, no proporciona herramientas para ello. Esta investigación proporciona herramientas útiles para trabajar y evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes:
 - ▶ Se aporta una caracterización de éstas, expuesta en el capítulo 4 (pp. 114-125), atendiendo a los diferentes niveles de complejidad con que pueden desarrollarse, la cual se ha adaptado al ámbito de la Geometría. Dicha caracterización ha tomado como base las definiciones utilizadas en los estudios PISA y se ha completado y remodelado a partir de la revisión de la literatura y de mi visión como profesora de secundaria. Por ello, considero que puede ser útil para otros docentes.

- ▶ Se da a conocer un procedimiento sencillo que permite conectar capacidades asociadas a cada unidad didáctica con el desarrollo de las competencias matemáticas que deben desarrollarse a lo largo de la etapa (educación secundaria): el análisis de instrucción. Este análisis resultó de gran ayuda para el diseño de las parrillas de observación de competencias. Éstas permitieron obtener información durante las sesiones de aula sobre las capacidades que los estudiantes manifestaban en cada tarea y después codificar esta información para evaluar el desarrollo de dichas competencias a lo largo de la secuencia completa o unidad didáctica. Dichas parrillas (Anexo H) se consideran otra aportación, dado que pueden usarse conjuntamente con la secuencia de tareas o tomarse como referencia para la elaboración de unas parrillas propias que permitan la evaluación en términos de competencias de otros contenidos matemáticos.

Las herramientas diseñadas para evaluar las actitudes y las competencias matemáticas en el aula han posibilitado estudiar su evolución como proceso y no sólo a través de la toma de datos en momentos puntuales; esto dota de riqueza y profundidad al estudio. En este punto destaco, por considerarla novedosa, la aportación para el campo de las actitudes matemáticas. Éstas son caracterizadas y estudiadas no sólo en su vertiente declarativa, sino, sobre todo, en su vertiente comportamental y observable, a lo largo de un periodo de tiempo. Son pocos los estudios previos que aportan información en este aspecto, de reconocida importancia para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por lo que este trabajo puede considerarse una aportación al desarrollo de dicho marco teórico. Encuentro que la caracterización de actitudes expuesta en el capítulo 3, tiene valor por varias razones:

- Se dedicó mucho tiempo y esfuerzo a revisar la literatura referente a actitudes, la cual permitió establecer la categorización entre: actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas, así como a caracterizar las primeras. Para el caso de las actitudes matemáticas encontré escasa información, por lo que solicité el apoyo de expertos en dicho tema.
- Una vez obtenida la primera caracterización de ambas categorías, se diseñó una parrilla de observación que fue empleada durante el ciclo 0. Después de analizar su adecuación, se remodeló la caracterización previa y la parrilla, empleándose esta nueva versión durante el ciclo 1. Al mostrar algunas deficiencias, nuevamente fue modificada hasta llegar a la caracterización definitiva (pp. 73-88) y también a la versión final de la

parrilla (p. 186), siendo ambas revisadas por los mismos expertos, lo que les otorga mayor rigor y fiabilidad.

- De la caracterización obtenida, se obtuvo la versión definitiva de la parrilla de observación de actitudes empleada en las sesiones de aula, que ha resultado muy operativa y sencilla de rellenar. Reflexionando acerca de la bondad de su diseño, tras su puesta en práctica y a la luz de los resultados obtenidos, se han realizado pequeños cambios en de la parrilla de observación de actitudes, que conducen a su versión definitiva disponible en el Anexo H. Dicha parrilla puede considerarse una aportación novedosa a disposición de otros profesores que deseen realizar un estudio de las actitudes de los estudiantes durante el trabajo en matemáticas. No obstante, he de decir que la información recogida por otros medios (registros de audio y vídeo) es más rica que la obtenida con las parrillas; si bien es también más inusual emplear estas fuentes de datos en las aulas de secundaria.

Otra cuestión de interés es la metodología seguida, que ya he comentado se enmarca dentro del paradigma de la investigación-acción y se aproxima en su diseño a la metodología de los experimentos de enseñanza transformativos guiados por una conjetura (la cual se encuadra dentro de la investigación de diseño). He expuesto la reconstrucción de la historia de la conjetura, así como de la evolución del comportamiento y del pensamiento matemático de los alumnos a lo largo de la intervención, que se espera sea útil a otros docentes. Al tratarse los experimentos de enseñanza de una metodología emergente, esta investigación puede considerarse una muestra del modo de ponerlos en práctica. Además, los resultados obtenidos han evidenciado que el posicionamiento metodológico adoptado ha resultado efectivo para alcanzar e informar de los objetivos de este trabajo.

Por último, he informado sobre la transformación de mi propia práctica docente a lo largo de los tres ciclos en los que se ha llevado a cabo esta investigación, con la esperanza de que pueda resultar enriquecedor para otros profesores. Es decir, he relatado los cambios que he ido experimentando y cómo éstos han ido afectando a mi práctica docente y a mi visión de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Resumidamente puedo decir que, en lo referente a mi práctica docente, las experiencias de aula me han ayudado a ir mejorando mi competencia a la hora de planificar secuencias de enseñanza-aprendizaje, así como mi competencia digital, pues me han exigido una formación permanente en el uso de distintas herramientas tecnológicas. Además, y como aspecto a destacar por el gran valor que para mí representa, los

positivos resultados extraídos en cada ciclo han confirmado que, mediante determinados cambios en la metodología de aula, es posible mejorar mi proceso de enseñanza y el de aprendizaje de mis estudiantes, lo cual abre un abanico de posibilidades a tener en cuenta para mejorar la realidad educativa a la que nos enfrentamos a diario, que en muchas ocasiones no es todo lo favorable que cabría esperar.

11.5. IMPLICACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Las conclusiones expuestas dejan a la luz una serie de cuestiones que podrían ser objeto de análisis en investigaciones futuras. Así, partiendo de los resultados de este trabajo, algunos posibles puntos de avance pueden ser los siguientes:

- ▶ Sería interesante realizar más investigaciones sobre las posibilidades que pueden ofrecer las nuevas tecnologías para mejorar el proceso de enseñanza del profesorado y, por consiguiente, el proceso de aprendizaje del alumnado, no sólo en matemáticas, sino en las demás áreas que forman parte de los actuales currículos educativos. Respecto a nuestra área, la mayoría de las investigaciones recientes se centran en el campo de la Geometría, siendo menos numerosas las que indagan sobre software algebraicos o estadísticos, que serían de utilidad para comprobar si los resultados obtenidos dependen de los contenidos matemáticos seleccionados o de los propios software elegidos para el estudio de los mismos.
- ▶ Podría avanzarse en investigar la relación de dependencia existente entre mejora de actitudes relacionadas con las matemáticas y desarrollo de competencias matemáticas, relación que se ha analizado y confirmado para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos, pero que convendría analizar sistemáticamente para un muestra significativa de alumnos, que informase con mayor garantía de la correlación entre ambas variables. También, en este trabajo se ha aludido a la estabilidad en el tiempo de algunas de las mejoras producidas por el uso de tecnologías en el aula, y podría explorarse este aspecto en profundidad, para analizar qué mejoras específicas se mantienen y cómo las que se asocian al manejo de tales herramientas podrían mantenerse de forma permanente e independiente de su uso.
- ▶ Sería conveniente extender el estudio a otros centros TIC, para comprobar si en grupos de estudiantes de idiosincrasias parecidas se obtendrían resultados similares.
- ▶ También en este sentido, considero importante profundizar sobre un aspecto fundamental que ha emergido en este trabajo: la influencia del trabajo colaborativo en las mejoras experimentadas por los estudiantes durante su trabajo con TIC. De este

modo, sería necesario tomar en consideración factores tales como la dinámica del trabajo en parejas, las formas de representación y expresión de los conocimientos en el aula, el papel del profesor en la gestión de los procesos de clase, etc.

► Por último, en este estudio se ha puesto de manifiesto la importancia del papel del profesorado como diseñador e implementador de materiales didácticos y experiencias de aula en las que se trabaje con TIC. En este sentido, los asistentes al Simposio⁸³ “Paradigmas en la Educación Matemáticas para el Siglo XXI: Compartiendo experiencias educativas con Asia” consideraron la creación y potenciación de comunidades de profesores como la única forma de impulsar la adopción de métodos eficaces de enseñanza que conduzcan a mejoras relevantes y duraderas. Estudios como éste pueden servir de base para trabajar con otros profesores de forma conjunta, de modo que la conjetura que lo guía pueda ser puesta a prueba en un rango de circunstancias educativas, ampliando de este modo la comunidad de los que encuentren las afirmaciones y los productos de esta investigación significativos, informativos o de alguna ayuda para su propia experiencia.

⁸³ Dicho Simposio, organizado por Manuel de León, Tomás Recio, Bernardo Gómez, Luis Rico y Eva Borreguero, se celebró en Valencia en octubre de 2009, siendo su objetivo conocer, compartir y comparar experiencias sobre la educación matemática en España y Asia. Entre sus asistentes se encontraba una extraordinaria élite de prestigiosos conferenciantes procedentes de Asia, Australia y Europa, de los cuales cabe citar a Celia Hoyles y Jeremy Kilpatrick, medallas Freudenthal y Félix Klein, respectivamente.

Referencias

- Abarca, R. (2005). *Software para el aprendizaje de la geometría plana y espacial en estudiantes de diseño*. Tesis doctoral. Universidad de Chile, Chile. Recuperada el 12 de marzo de 2007 de http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/abarca_r/html/index-frames.html
- Adelman, N., Donnelly, M. B., Dove, T., Tiffany-Morales, J., Wayne, A. y Zucker, A. (2002). *The integrated studies of educational technology: Professional development and teachers' use of technology*. Arlington, VA: SRI International.
- Akey, T. M. (2006). *School context, student attitudes and behavior, and academic achievement: An exploratory analysis*. New York, NY: MDRC. Recuperado el 17 de febrero de 2009 de <http://www.mdrc.org/publications/419/full.pdf>
- Alba, C. (2006). Una educación sin barreras tecnológicas TIC y educación inclusiva. En J. M. Sancho (Ed.), *Tecnologías para transformar la Educación* (pp. 169-198). Madrid: UNIA/Akal.
- Alcántara, J. (1988). *Cómo educar las actitudes*. Barcelona: CEAC.
- Alemán de Sánchez, A. (2002): *La enseñanza de la matemática asistida por computador*. Recuperado el 30 de enero de 2005 de <http://www.scribd.com/doc/7795982/La-Tecnologia-y-La-Mat>
- Allende, J. E. (2004). *Rigor - la esencia del quehacer científico*. Presentado en International Conference on Scientific Electronic Publishing in Developing Country (ICSEP) 2004, Valparaíso, Chile. Recuperado el 7 de febrero de 2006 de <http://tsg.icme11.org/document/get/155>
- Anderson, J. y White, P. (2004). Problem solving in learning and teaching mathematics. En B. Perry, G. Anthony y C. Diezmann (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australasia 2000–2003* (pp. 127-150). Flaxton, Qld.: MERGA.

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Area, M. (2005). Tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Relieve*, 11(1), 3-25.
- Área, M. (2004). *Los medios y las tecnologías en la educación*. Madrid: Pirámide.
- Arias, J. M., Maza, I. y Saenz, C. (2005). *Formación e investigación sobre el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en matemáticas para la ESO y los Bachilleratos [Texto impreso] : proyecto del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Madrid y de la Dirección General de Ordenación Académica de la Comunidad de Madrid*. Madrid: Cyan.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learnings*, 7, 245-274.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Fur Didaktik Der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Atweh, B. (2004). Understanding for changing and changing for understanding. Praxis between practice and theory through action research in mathematics education. En P. Valero y R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of Mathematics Education: Issues of power and methodology*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática- estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición*. Bilbao: Mensajero.
- Balacheff, N. (1988a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Tesis doctoral no publicada. Universidad J. Fourier, Grenoble, Francia.
- Balacheff, N. (1988b). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children*. (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.
- Bandura, A. (1993). Perceived self-efficacy in cognitive development and functioning. *Educational Psychology*, 28(2), 117-148.

- Barberá, E., Mauri, T. y Onrubia, J. (2008). *Cómo valorar la calidad de la enseñanza basada en las TIC. Pautas e instrumentos de análisis*. España: Editorial Graó.
- Barkatsas, A. N., Gialamas, V. y Kasimatis, K. (2008). *Secondary students' attitudes to learning mathematics with technology: Exploring the interrelationship between gender, engagement, confidence and achievement*. Presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education (ICME), México. Recuperado el 15 enero de 2009 de <http://tsg.icme11.org/document/get/155>
- Barroso, R., y Gavilán, J. M. (2003). Resolución de problemas de geometría con Cabri II. *Números*, 54, 23-30.
- Barzel, B. (2007). New technology? New ways of teaching – no time left for that! *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(2), 77-86.
- Battista, M. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment. *Teaching Children Mathematics*, 88(6), 333-339.
- Battista, M. T. (2001). A research-based perspective on teaching school geometry. In J. Brophy (Ed.), *Subject-specific instructional methods and activities* (pp. 145-186). Amsterdam: Elsevier Science.
- Bazán, J. (1997) *Metodología estadística de construcción de pruebas. Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM*. Tesis doctoral no publicada. UNALM, España.
- Bazán, J. L. y Aparicio, A. S. (2006). Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje. *Revista Semestral del Departamento de Educación*, 15(28), 1-12.
- Bazán, J. L. y Sotero, H. (1998). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM. *Anales Científicos UNALM*, 36, 60-72.
- Beeland, J. W. D. (2002). Student engagement, visual learning and technology: Can interactive white-boards help? *Action Research Exchange*, 1(1). Recuperado el 18 de octubre de 2007 de http://chiron.valdosta.edu/are/Artmascript/vol1no1/beeland_ma.pdf
- Beltrán, J. (1985). *Psicología educacional*. Madrid: UNED, 3^a ed.

- Beswick, K. y Muir, T. (2004). Talking and writing about the problem solving process. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Mathematics Education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 95-102). Sydney: MERGA.
- Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2002). Profesionales de las matemáticas y psicopedagogos. Un encuentro necesario. En M^a C. Penalva, G. Torregosa y J. Valls (Coords.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales. Actas del V Simposio de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 121-140). Universidad de Alicante.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modeling - a theory for practice. En B. Clark et al. (Eds.), *Perspectives on learning and teaching Mathematics* (pp. 145-159). Göteborg: Göteborg University.
- Bolívar, A. (1992). *Los contenidos actitudinales en el currículo de la reforma. Problemas y propuestas*. Madrid: Escuela Española.
- Bottino, R. y Chiappini, G. (2002). Technological advances and learning environments. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 757-786). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brandon-Miller, M. y Maguire, P. (2009). Participatory action research: Contributions to the development of practitioner inquiry in education. *Educational Action Research*, 17(1), 79-93.
- Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2, 141-178.
- Burnafor, G., Fischer, J. y Dobson, H. (2001). *Teachers doing research. The Power of action thorough inquiry*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cabero, J. (1999). Definición y clasificación de los medios y materiales de enseñanza. En J. Cabero (Ed.), *Tecnología educativa* (pp. 35-51). Madrid: Síntesis.
- Cabero, J. y Duarte, A. (2000). Evaluación de medios y materiales de enseñanza en soporte multimedia. *Comunicación y Pedagogía*, 166, 15-28.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral*. Tesis doctoral. Universidad

- Autónoma de Barcelona, España. Recuperada el 15 de mayo de 2007 de <http://www.tdx.cat/TDX-1018101-165309>
- Callejo, M. L. (1994). *Un Club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- Calzadilla, M. E. (2001). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y comunicación. *EOI-Revista Iberoamericana de Educación*, 1-10.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Recuperada el 22 de septiembre de 2009 de <http://funes.uniandes.edu.co/282/1/CannadasM07-2850.pdf>
- Carlson, M. P., y Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45-75.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico et al. (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE/Horsori.
- Castro, J. C. (2004). *Análisis de los componentes actitudinales de los docentes hacia la enseñanza de la matemática. Caso: 1ª y 2ª etapas de educación básica. Municipio de San Cristóbal-Estado Táchira*. Tesis doctoral. Universitat Rovira i Virgili, España. Recuperada el 25 de mayo de 2007 de <http://www.tesisenred.net/TDX-0209104-085732>
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their view of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.
- Christensen, R. (2002). Effects of technology integration education on the attitudes of teachers and students. *Journal of Research on Technology in Education*, 34(7), 411-433.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. y Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(3), 339-352.
- Cifuentes, L. y Ozel, S. (2008). Using technologies to support STEM project-based learning. En R. M. Capraro y S. W. Slough (Eds.), *Project-based learning: An integrated Sciences, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) approach* (pp. 117-134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishing.

- Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, 14(1), 61-71.
- Clemens, D. H. (2000a). From exercises and tasks to problems and projects: Unique contributions of computers to innovative mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 9-47.
- Clemens, D. H. (2000b). Viewpoint: We need integrated research and software development. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 22(3-4), 179-183.
- Clemens, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NCTM, Macmillan, P.C.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10, 113-164.
- Codina, A. (2008). El trabajo colaborativo y la evaluación formativa en educación matemática. una experiencia con enseñanza virtual. *Enseñanza De La Matemática*, 17(2), 59-78.
- Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1996). Looking at technology in context: A framework for understanding technology and education. En C. Berliner y R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 807-841). New York: Simon & Schuester Mac Millan.
- Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1997). *The jasper proyect: Lessons in curriculum, instruction, assesment, and professional development*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-52). New York, NY: Cambridge University Press.

- Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-265). New Jersey: Lawrence Erlbaum associates.
- Cook, T.D. y Reichardt, CH.S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en la investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Covington, M.J. y Beery, R.G. (1976). *Self-worth and school learning*. Nueva York: Holt.
- Cretchley, P. y Galbraith, P. (2002). Mathematics or computers? Confidence or motivation? How do these relate to achievement?. *Proceedings 2nd International Conference on the Teaching of Math*. (Undergrad.), CD and online, Wiley, Crete.
- Cretchley, P., Harman, C., Ellerton, N. y Fogarty, G. (2000). MATLAB in early undergraduate mathematics: an investigation into the effects of scientific software on learning. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 219-233.
- Fogarty, G., Cretchley, P., Harman, C., Ellerton, N. y Konki, N. (2001). Validation of a questionnaire to measure mathematics confidence, computer confidence, and attitudes towards the use of technology for learning mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 13(2), 154-160.
- Crowe, D. y Zand, H. (2000). Computers and undergraduate mathematics 3: Internet resources. *Computer and Education*, 35(2), 123-147.
- Cubillo, C. y Ortega, T. (2002). Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 31, 57-72.
- Curtis, K. M. (2006). *Improving student attitudes: A study of a mathematics curriculum innovation*. Tesis doctoral no publicada. Kansas State University, USA.
- D'Amore, B. y Maier, H. (2003). Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Epsilon*, 18(2), 243-262.
- DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquire. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8.
- DCB (Diseño Curricular Base) (1989). Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: MEC.

- De Corte, E., Op't Eynde, P. y Verschaffel, L. (2002). Knowing what to believe: The relevance of students' mathematics beliefs for mathematics education. En B. K. Hofer y P. R. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 297-320). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De la Chica, J. (2010). *Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. Las TIC y la educación*. Almería: Tutorial Formación, S.L.L.
- De la Orden, A. (2007). El nuevo horizonte de la investigación pedagógica. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 9(1) Recuperado el 11 de febrero de 2008 de <http://redie.uabc.mx/vol9no1/contenido-delaorden.html>
- DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131-147.
- Del Rincón, D., Arnal, J., Latorre, A. y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.
- Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2003). El uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado el 18 de febrero de 2008 de <http://www.rieoei.org/deloslectores/393Puerto.pdf>
- Di Martino, P. y Zan, R. (2001). Attitude towards mathematics: Some theoretical issues. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 351-358). Utrecht, Países Bajos: PME.
- Di Martino, P. y Zan, R. (2002). An attempt to describe a 'negative' attitude toward mathematics. En P. Di Martino (Ed.), *Proceedings of the MAVI-XI European Workshop* (pp. 22-29). Pisa, Italia: Università di Pisa Pr
- Di Martino, P. y Zan, R. (2003). What does 'positive' attitude really mean? En N. A. Pateman, B. J. Doherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 451-458). Honolulu, Hawaii: PME.
- Di Martino, P. y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 27-48.

- Doerr, H. M. y Tinto, P. P. (2000). Paradigms for teacher-centered classroom-based research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in Mathematics and Science Education* (pp. 403-427). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Dowson, M. y McInerney, D. M. (2001). Psychological parameters of students' social and work avoidance goals: A qualitative investigation. *Journal of Educational Psychology*, 93, 35-42.
- Dreyfus, T. (1994). Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education. En D. Robitaille, D. Wheeler y C. Kieran (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education (ICME)* (pp. 107-122). Quebec, Canadá: Les Presses de l'Université Laval.
- Drijvers, P. y Trouche, L. (2007). From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. W. Blume y M. K. Heid (Eds.), *Research on Technology and the teaching and learning of Mathematics: Syntheses, cases, and perspectives* (pp. 363-385). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Driscoll, M. P. (2002). *How people learn (and what technology might have to do with it)*. Syracuse, NY: ERIC Clearinghouse on Information and Technology.
- Duval, R. (1989). Langage et representation dans l'apprentissage d'une demarche deductive. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME international conference, 1* (pp. 228-235). Paris, France: PME.
- Duval, R. (1999). *Explicar, argumentar, demostrar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?*. México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME international conference, 2* (pp. 55-69). Ciudad: Hiroshima, Japón: PME.
- Duval, R. (2001). *La geometría desde un punto de vista cognitivo*. PMME-UNISON.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.
- Eagly, A. H. y Chaiken, S. (1998). Attitude structure and function. En D. T. Gilbert, S. T. Fiske y G. Lindzey (Eds.), *The handbook of Social Psychology* (4ª ed., pp. 269-322). Nueva York: McGraw-Hill.

- Eiser, R. (1989). *Psicología social: actitudes, cognición y conducta social*. Madrid: Ediciones Pirámide, S.A.
- Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. y Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(3), 533-556.
- Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(5), 433-463.
- Elliot, J. (1.990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.
- Elliot, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.
- Ennis, R. (1992). Critical thinking: What is it? En H. A. Alexander y Rene V. Arcilla (Eds.), *Proceedings of the Forty-Eighth Annual Meeting of the Philosophy of Education Society*. Denver, Colorado. Recuperado el 28 de marzo de 2005 de http://www.ed.uiuc.edu/PES/92_docs/Ennis.HTM
- Escudero, I., García, M. y Sánchez, V. (2007). Incorporando las tecnologías de la información y la comunicación en la formación inicial de profesores en relación con las matemáticas. En *Experiencia de Innovación Universitaria (II)*, 2 (pp. 119-130). Sevilla: Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla..
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2003). Actitudes y estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Sociedad de Estadística e Investigación Operativa* (pp. 909-920). Lleida: Ediciones de la Universitat de Lleida.
- Estrada, M. A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- European Commission DG Education and Culture (2004). *Study on innovative learning environments in school education*. Recuperado el 11 de Julio de 2008 de http://www.elearningeuropa.info/directory/index.php?page=doc&doc_id=5947&doclng=6

- Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalogue of Selected Documents in Psychology*, 6(1), 31.
- Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 217-226.
- Forgasz, H. J. (2002). Computers for learning mathematics: Gendered beliefs. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 368-375). Norwich, UK: PME.
- Franton, C., Green, K. y Hoffman, E. (2002). Measure development: The children's attitudes toward technology scale (CATS). *Journal of Computing Research*, 26(3), 249-263.
- Fuentes, M. I. (2001). *La evaluación de actitudes en matemáticas*. Memoria de Tercer Ciclo no publicada. Universidad de Almería, España.
- Fuglestad, A. B. (2005). Students' use of ICT tools in mathematics and reasons for their choices. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 1-8). Melbourne, Australia: PME.
- Furinghetti, F. y Morselli, F. (2008). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 71-90.
- Gagatsis, A., Elia, I. y Mougi, A. (2002). The nature of multiple representations in developing mathematical relations. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 39(1), 9-24.
- Gairín, J. (1987). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.
- Galbraith, P. (2006). Students, mathematics, and technology: Assessing the present, challenging the future. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(3), 277-290.
- Galbraith, P. y Haines, C. (2000). *Mathematics-computing Attitudes Scales. Monographs in Continuing Education*. London: City University.

- Galbraith, P. y Haines, C. (1998). Disentangling the nexus: Attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment. *Educational Studies in Mathematics*, 36(3), 275-290.
- García, M. M. y Romero, I. M. (2007). *Influencia de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas*. Almería: Editorial Universidad de Almería.
- Gargallo, B., Suárez, J., Morant, F., Marín, J. M., Martínez, M. y Díaz, I. (2004). *Un primer diagnóstico del uso de Internet en los centros escolares de la comunidad valenciana. Procesos de formación y efectos sobre la calidad de la educación*. Valencia: IVECE (Instituto Valenciano de Evaluación y Calidad Educativa).
- Garofalo, J., Drier, H. S., Harper, S., Timmerman, M. A. y Shockey, T. (2000). Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 1(1), 66–68. Recuperado el 5 mayo 2006 de <http://www.citejournal.org/vol1/iss1/currentissues/mathematics/article1.htm>
- Georgiou, S. N., Stavrinides, P., y Kalavana, T. (2007). Is Victor better than Victoria at maths? *Educational Psychology in Practice*, 23(4), 329-342.
- Gil, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.
- Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, 4(1), 47-72.
- Giménez, J. (1997). Nunca es tarde para mejorar las actitudes: El caso de las fracciones. Uno. *Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 13, 63-80.
- Godino, J. (2001). Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas. Documento presentado en *XVI Reunión del SIIDM -Grupo DMDC, SEIEM*. Huesca, España. Recuperado el 30 de mayo de 2007 de <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huesca/Confrontacion.PDF>
- Goldin, G. A. (1988). Affective representation and mathematical problem solving. En M. J. Behr, C. B. Lacampagne, & M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th Annual Meeting on the Psychology of Mathematics Education (North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education)* (pp. 1-7). DeKalb, IL: Northern Illinois University.

- Gómez, P. (2002a). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.
- Gómez, P. (2002b). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En M. Peñas, A. Moreno, J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación* (pp. 73-95). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas en secundaria*. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. y González, M. J. (2009). Analyzing and selecting tasks for mathematics teaching: A heuristic. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: Studies on John Mason's Contribution to Mathematics Education* (p. 179-188). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado el 29 de junio de 2006 de <http://funes.uniandes.edu.co/376/1/GomezP02-2715.PDF>
- Gómez-Chacón, I. M. (1994). Mathematical education in “deprived” cultural backgrounds pupils. En J. P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 88). Lisboa, Portugal: PME.
- Gómez-Chacón, I. M. (1997). Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid,

- España. Recuperada el 12 de septiembre de 2004 de <http://eprints.ucm.es/tesis/19972000/S/5/S5013101.pdf>
- Gómez-Chacón, I. M. (2000a). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 149-168.
- Gómez-Chacón, I. M. (2000b). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.
- Gómez-Chacón, I. M. (2002). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: una mirada a la práctica docente* (pp. 23-58). Cáceres: Universidad de Extremadura.
- Gómez-Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 225-247.
- Gómez-Chacón, I. M. (2005). Motivar a los Alumnos de Secundaria para hacer Matemáticas. En *Seminario Nacional de Matemáticas: PISA en la práctica*. Madrid: MEC-Universidad Complutense.
- Gómez-Chacón, I. M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(2), 227-240.
- Gómez-Chacón, I. M., Figueras, L. y Marín, M. (2001). *Matemáticas en la red: Internet en el aula de secundaria*. Madrid: Narcea, S.A.
- Gómez-Chacón, I. M. y Haines, C. (2008). Students' attitudes to mathematics and technology. comparative study between the United Kingdom and Spain. En *ICME 11, 11th International Congress on Mathematical Education*. México. Recuperado el 15 de enero de 2009 de <http://tsg.icme11.org/tsg/show/31>
- Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(3), 309-324.
- González, H. (2006). *Pensamiento crítico y el proyecto educativo de la universidad Icesi*, en prensa.

- Gresalfí, M., Martín, T., Hand, V. y Greeno, J. (2008). Constructing competence: An analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 49-70.
- Gross, D., Truesdale, C. y Bielec, S. (2001). Backs to the wall: Supporting teacher professional development with technology. *Educational Research and Evaluation*, 7(2), 161-183.
- Guerrero, B. E. y Blanco, N. L. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana De Educación*, 33(5). Recuperada el 25 de julio de 2004 de http://www.rieoei.org/psi_edu13.htm
- Gutiérrez, A. (2000). Los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas. En A. Martínón (Ed.), *Las Matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos* (pp. 427-430). Universidad de La Laguna: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas: Nívola.
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos de investigación sobre aprendizaje mediante exploración con tecnología. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 27-44). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.
- Hancock, V. y Betts, F. (2002). Back to the future: Preparing learners for academic success in 2004. *Learning & Leading with Technology*, 29(7), 10-13, 27.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5-23.
- Hannula, M. S. (2002). Goal regulation: Needs, beliefs and emotions. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (pp. 73-80). Norwich, UK: PME.
- Hannula, M. S. (2005). Shared cognitive intimacy and self-defence, two socio-emotional processes in problem solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10(1), 25-40.
- Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 165-178.

- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education* (pp. 234-283). Providence, EEUU: American Mathematical Society.
- Hart, L. (1989). Describing the affective Domain: Saying what we mean. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 37-45). New York: Springer Verlag.
- Healy, L. y Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 6, 235-256.
- Hernández, J., Palarea, M. M. y Socas, M. M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. El papel de los materiales didácticos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática II* (pp. 115-124). Universidad de La Laguna: Departamento de Análisis matemático.
- Hernández, J., y Socas, M. M. (1999). Las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. El papel de los materiales didácticos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática I* (pp. 105-114). Universidad de La Laguna: Departamento de Análisis Matemático.
- Hernández, R. P. y Gómez-Chacón, I. M. (1997). Las actitudes en educación matemática. estrategias para el cambio. *Uno. Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 13, 41-61.
- Hjalmarson, M. A. y Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 520-534). London: Routledge.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teachers*, 74(1), 11-18.
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, I., y Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. Documento presentado en el *ICME 11. 11th International Congress on Mathematical Education*, Mexico. Recuperado el 16 de febrero de 2009 de <http://tsg.icme11.org/document/get/666>
- Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.

- Hohenwarter, M. y Preiner, J. (2007). Creating mathlets with open source tools. *The Journal of Online Mathematics and its Applications*, 7, 1-29. Recuperado el 12 de febrero de <http://www.joma.org>
- Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 55-72.
- Hopkins, D. (1995) Towards effective school improvement, *School Effectiveness and School Improvement*, 6, 265-274.
- Hoyles, C. y Healy, L. (1999). Linking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teaching experiments. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME international conference*, 3 (pp. 105-112). Haifa, Israel: PME.
- Hoyles, C. y Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? En A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of Mathematics Education: Part one* (pp. 323-349). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hoyles, C. y Sutherland, R. (1989). *Logo mathematics in the classroom*. Londres y Nueva York: Routledge.
- Ibáñez, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid, España.
- Iglesias, I. (2000). La creatividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de ELE: Caracterización y aplicaciones. En *Nuevas Perspectivas en la enseñanza del Español como Lengua Extranjera: Actas Del X Congreso Internacional de ASELE*, 2 (pp. 941-954). Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Jahnke, H. N. (2005). A genetic approach to proof. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 428-437). Sant Feliu de Guixols, España.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- Jara, O. (1994). *Para sistematizar experiencias*. Guadalajara, Jalisco: Imdec/Alforja.

- Jiménez, J. (1997). ¿Por qué actitudes? *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 13, 5-6.
- Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 283-301.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Kaput, J. J. y Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 676-684.
- Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher*, 32(1), 3-4.
- Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kemmis, S. (1999). Action research. En J. Keeves y G. Lambomski (Eds.), *Issues in Education research* (pp. 150-160). New York: Pergamon.
- Kemmis, S. y Wilkinson, M. (1998). Participatory action research and the study of practice. En B. Atweh, S. Kemmis & P. Weeks (Eds.), *Action research in practice: Partnerships for social justice in Education*. London: Routledge.
- Kirsch, I. D. J., Lafontaine, D., McQueen, J., Mendelovits, J. y Monseur, C. (2002). *Reading for change: Performance and engagement across countries, results from PISA 2000*. París: Organisation for Economic Cooperation and Development.
- Kreis, Y. (2004). *Mathé mat TIC. Intégration de l'outil informatique dans le cours de mathématiques de la classe de 4e*. Luxembourg: MEN.
- Ku, H. Y. y Sullivan, H. J. (2002). Student performance and attitudes using personalized mathematics instruction. *Educational Technology Research and Development*, 50(1), 21-34.
- Küchemann, D. y Hoyles, C. (2006). Influences on students' mathematical reasoning and patterns in its development: Insights from a longitudinal study with particular reference

- to geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 581-608.
- Labatut, E. M. (2004). *Aprendizaje universitario: un enfoque metacognitivo*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperada el 6 de abril de 2007 de <http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t27286.pdf>
- Laborde, C. (1998). Relationship between the spatial and the theoretical in geometry: The role of computer dynamic representations in problem solving. En D. Tinsley y D. Johnson (Eds.), *Information and Communication Technologies in school Mathematics* (pp. 183-194). London, UK: Chapman & Hall.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of Mathematics Education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Labra, P., Montenegro, G., Iturra, C. y Montealba, R. (2005). La investigación-acción como herramienta para lograr coherencia de acción en el proceso de práctica profesional durante la formación inicial docente. *Estudios Pedagógicos*, 31(2), 137-143.
- Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2001). A meta study on IC technologies in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 111-122). Utrecht, Países Bajos: PME.
- Latorre, A. (2004). La investigación acción. En R. Bisquerra (Ed.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 370-394). Madrid: Editorial La Muralla, S.A.
- Lavicza, Z. (2006). Factors influencing the integration of computer algebra systems into university-level mathematics education. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(3), 121-129.
- Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 153-169.

- Lavy, I. y Leron, U. (2004). The emergence of mathematical collaboration in an interactive computer environment. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 9(1), 1-23.
- Lee, H. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing technological pedagogical content knowledge. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(4). Recuperado el 12 de febrero de 2009 de <http://www.citejournal.org/vol8/iss4/mathematics/article1.cfm>
- Leikin, R. y Zazkis, R. (2010). *Learning through teaching mathematics: Development of teachers' knowledge and expertise in practice*. London, New York: Springer Dordrecht Heidelberg.
- León, W. y Gómez-Chacón, I. M. (2007). Usos matemáticos de Internet para la enseñanza secundaria. Una investigación sobre WebQuests de Geometría. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 17-34.
- Lesh, R., Hamilton, E. y Kaput, J. (.). (2007). *Foundations for the future in mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Leuders, T., Barzel, B. y Hußmann, S. (2005). *Computer, internet und co im mathematikunterricht*. Berlín: Cornelsen.
- Leung, F. K. S. (2006). The impact of information and communication technology on our understanding of the nature of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 29-35.
- Llinares, S. y Roig, A. I. (2008). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(3), 505-532.
- López, F. (2006). Las competencias básicas del currículo en la LOE. En A. Jiménez y M. A. Lou (Eds.), *Actas del V Congreso Internacional Educación y Sociedad* (pp. 1-18). Granada, España. Recuperado el 12 de enero de 2007 de <http://congreso.codoli.org/conferencias/Juan-Lopez.pdf>
- Lupiáñez, J. L. (2000). *Nuevos acercamientos a la historia de la Matemática a través de la calculadora TI-92*. Granada: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la*

- investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 225-236). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses y Universidad de Zaragoza.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: Competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)*, 3(1), 35-48.
- Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-americano de Educación Matemática, Oporto, Portugal.
- Macias, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(4) Recuperado el 11 de noviembre de 2008 de <http://www.rieoei.org/deloslectores/1517Macias.pdf>
- Marcelo, C. (2001). El aprendizaje de los profesores en tiempos de cambio. La aportación de las redes profesorado. *Revista de Currículo y Formación del Profesorado*, 5(1). Recuperado el 5 de mayo de 2006 de <http://www.ugr.es/~recfpro/rev51ART2.pdf>
- Marchesi, A., Martín, E., Casas, E., Ibáñez, A., Monguillot, I., Rivière, V., et al. (2003). *Tecnología y aprendizaje. Investigación sobre el impacto del ordenador en el aula*. Madrid: SM.
- Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 25-53.
- Mariotti, M. A. (2006). Proofs and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en el Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.

- Marín, M. (2001). Estudio de los ambientes de enseñanza-aprendizaje generados en redes de ordenadores. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Recuperada el 10 de octubre de 2005 de <http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t25293.pdf>
- Marks, H. M. (2000). Student engagement in instructional activity: Patterns in the elementary, middle, and high school years. *American Educational Research Journal*, 37(1), 153-184.
- Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 87-125.
- Martí, E. (1997). Trabajamos juntos cuando... *Cuadernos de Pedagogía*, 255, 54-58.
- Martínez, A. (1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Martínez, A. y Díaz, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-99.
- Martínez, O. J. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 9(1), 237-256.
- Marqués, P. (2008). *Las competencias digitales de los docentes*. Recuperado el 5 de abril de 2008 de <http://www.peremarques.net/competenciasdigitales.htm#uno>
- Mason, J. (1998). Research from the inside in mathematics education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. New York: Falmer.
- McLeod, D. B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 134-141.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.
- McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 637-647.

- McNiff, J. (1998) *Action research: Principles and practice*. London: McMillan Education Ltd.
- McNiff, J. (2002). *Action research for professional development. Concise advice for new action researchers*. Recuperado el 15 de enero de 2008 de <http://www.jeanmcniff.com/booklet1.html>
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1990). Ley orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de ordenación general del sistema educativo. *BOE*, 238, 36705-36715.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1991). Real decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, 152, 21193-21195.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2002). Ley orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. *BOE*, 307, 45188-45220.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006a). Ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE*, 106, 17158-17207.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006b). Real decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *BOE*, 293, 43053-43102.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006c). Real decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE*, 5, 677-773.
- Mitra, A. (2002). Toward developing questionnaire items to measure effectiveness of computers in teaching. *Journal of Educational Computing Research*, 26(4), 381-394.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Recuperada el 15 de enero de 2007 de <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF>
- Molina, M.; Castro, E.; Molina, J.L. y Castro, E. (en prensa). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, en prensa.

- Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Tesis de Maestría. DME, Cinvestav-IPN, México. Recuperada el 22 de abril de 2006 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/montiel_2002.pdf
- Mora, J. A. y Rodrigo, J. (1993). *Mosaicos I y II. Cuadernos para el aula de matemáticas*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones, SAL.
- Morales, F. (1999). *Psicología social*. Madrid: Mc Graw-Hill.
- Mously, J., Lambdin, D., y Koc, Y. (2003). Mathematics teacher education and technology. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of Mathematics Education* (pp. 395-432). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mousoulides, N. y Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 385-392). Bergen, Norway: PME.
- Muir, T. (2003). *How did you solve it?* Trabajo de Master no publicado. Universidad de Tasmania, Australia.
- Muir, T. y Beswick, K. (2005). Where did I go wrong? Students' success at various stages of the problem-solving process. En P. Clarkson, et al. (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics research group of Australasia)* (pp. 561-568). Sidney: MERGA.
- Muir, T., Beswick, K. y Williamson, J. (2008). "I'm not very good at solving problems": An exploration of students' problem solving behaviours. *Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 228-241.
- Mullis, I., Martin, M., Gonzalez, E., Gregory, K., Garden, R., O'Connor, K., et al. (2000). *TIMSS 1999 International Mathematics Report*. Boston, MA: International Study Center. Lynch School of Education. Boston College.
- Murillo, J. y Marcos, G. (2007). Una metodología para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 157-170). Tenerife: SEIEM.

- National Research Council. Committee on Increasing High School Students' Engagement and Motivation to Learn (2003). *Engaging schools: Fostering high school students' motivation to learn*. Washington, DC: National Academy Press.
- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Autor.
- NCTM (2000a). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- NCTM (2000b). *Executive summary principles and standards for school mathematics*. Recuperado el 22 de junio de 2008 de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Nesher, P. (2000). *Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático en matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. España: Graó.
- Niss, M. (1999). Competencies and subject description. *Uddanneise, 9*
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM proyect*. Roskilde: Roskilde University.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education: Mathematics in the modern world, Mathematics and Didactics, Mathematics and life, Mathematics and society*. (pp. 115-124). Athens: The Hellenic Mathematical Society.
- Noddings, N. (1992). Professionalization and mathematics teaching. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Noss, R. (2002). For a learnable mathematics in the digital culture. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 21-46.
- OCDE (2000). *Measuring student knowledge and skills. The PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy*. París: OCDE.
- OCDE (2001). *Definition and selection of competencies: Theoretical and conceptual foundations (DeSeCo). Background paper*. Recuperado el 30 de abril de 2006 de <http://www.deseco.admin.ch>

- OCDE (2003). *Feasibility study for the PISA ICT literacy assessment*. Recuperado el 12 de abril de 2007 de <http://www.oecd.org/dataoecd/35/13/33699866.pdf>
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. París: OCDE.
- OCDE (2005a). *The definition and selection of key competencies. Executive summary*. Recuperado el 23 de abril de 2006 de <http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070376.pdf>
- OCDE (2005b). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.
- OCDE (2006a). *Are students ready for a technology-rich world? What PISA studies tell us*. París: OCDE Publishing.
- OCDE (2006b). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. París: OCDE.
- O'Daffer, P. G. y Clemens, S. R. (1992). *Geometry: An investigation approach* (2nd ed.). California: Addison-Wesley.
- Ojeda, B., Medina, B. y Peralta, D. M. (2003). ¿Cómo justificar en geometría? *Xixtli*, 52. Recuperado el 11 de septiembre de 2006 de <http://www.unidad094.upn.mx/revista/52/06.html>
- Olea, D. J. (1993). La evolución de la creatividad: revisión y crítica. *Torbiya*, 3.
- Olivero, F. y Robutti, O. (2001). Measure in Cabri as bridge between perception and theory. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 9-16). Utrecht, Países Bajos: PME.
- Olkunn, S., Sinoplu, N. B. y Deryakulu, D. (2005). Geometric explorations with dynamic geometry applications based on Van Hiele levels. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-12. Recuperada el 30 de enero de 2005 de <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>
- Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2003). Junior high students' mathematics-related beliefs systems: An empirical análisis of their internal and external structure. Comunicación

presentada en la *10th Biennial Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction*, Padua, Italia.

Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193-207.

Or, C. M. (2005). *Experimentation, construction, conjecturing and explanation in a dynamic geometry environment*. Trabajo de Master no publicado, Universidad de Hong Kong, China.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2007). Organizadores del currículo como plataforma para el conocimiento didáctico. Una experiencia con futuros profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 21-32.

Ozel, S., Yetkiner, Z. E. y Capraro, R. M. (2008). Technology in K-12 mathematics classrooms. *School Science and Mathematics*, 108(2), 80-85.

Pajares, F. (1996). Self-efficacy beliefs in academic settings. *Review of Educational Research*, 66(4), 543-578.

Pajares, F. (2002). Gender and perceived self-efficacy in self-regulated learning. *Theory into Practice*, 41(2), 116-125.

Pajares, R., Sanz, A. y Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.

Parsad, B., Lewis, L. y Farris, E. (2001). *Teacher preparation and professional development: 2000*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs seeing: Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.

Pedró, F. y Benavides, F. (2007). Políticas educativas sobre nuevas tecnologías en los países iberoamericanos. *Revista Iberoamericana de Educación*, 45, 19-69.

Pellegrino, J. W., Hickey, D., Heath, A., Rewey, K., Vye, N. J. y The Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1991). *Assesment the outcome of an innovative*

- instructional program. The 1990-91 implementation of the "Adventures of Jasper Woodbury"*. Nashville, TN: Vanderbilt Learning Technology Center.
- Pérez, R., Gallego, R. y Torres, L. N. (2005). Las competencias interpretar, argumentar y proponer en química. Un problema pedagógico y didáctico. *Enseñanza de las Ciencias, extra (VII Congreso)*, 1-5. Recuperado el 14 de septiembre de 2007 de [http://www.refworks.com/Refworks/DisplayAttachment.asp?file=LAS%20COMPETENCIAS%20INTERPRETAR%2C%20ARGUMENTAR.pdf&RNUM=2700&TS=74%3F1371%3F17%3E51&sess=ucuuoh%60i%3B535%231Ekagteog%231E%231ETQSGjkctog%231ETc%60qitmu767D%231EShopctuobgb%234346bc%234346Gjkctog%231ETQSGjkctog%231E%60gjuc%231E%60gjuc%231E45%3F46%231Ecu%231E\)TC%40QITMU\)POCQTC%40\(GUV%231E%231Ejc%60r%234%3EGsrnitVtokgt%7F%234E74%3E%234%3F%2346EIJJGRC%2346Jgroh7YAchctgjYEOYGU%2346%234E%2346Vsd_cgt%2346%2346EIJJGRC%2346Jgroh7YAchctgjYEOYGU%2346Bcue%234E%2346SuctTc%60OB%231E%231ETQQCD7650750%3E0%231EUEIVSU%2347vsdkcb%2347vsdkcb%231E%60gjuc%231E%2B7%231E6%231E%60gjuc](http://www.refworks.com/Refworks/DisplayAttachment.asp?file=LAS%20COMPETENCIAS%20INTERPRETAR%2C%20ARGUMENTAR.pdf&RNUM=2700&TS=74%3F1371%3F17%3E51&sess=ucuuoh%60i%3B535%231Ekagteog%231E%231ETQSGjkctog%231ETc%60qitmu767D%231EShopctuobgb%234346bc%234346Gjkctog%231ETQSGjkctog%231E%60gjuc%231E%60gjuc%231E45%3F46%231Ecu%231E)TC%40QITMU)POCQTC%40(GUV%231E%231Ejc%60r%234%3EGsrnitVtokgt%7F%234E74%3E%234%3F%2346EIJJGRC%2346Jgroh7YAchctgjYEOYGU%2346%234E%2346Vsd_cgt%2346%2346EIJJGRC%2346Jgroh7YAchctgjYEOYGU%2346Bcue%234E%2346SuctTc%60OB%231E%231ETQQCD7650750%3E0%231EUEIVSU%2347vsdkcb%2347vsdkcb%231E%60gjuc%231E%2B7%231E6%231E%60gjuc)
- Perrenoud, P. (2000). *Construire des compétences dans l'école*. Paris: ESF.
- Pierce, R. (2001). *An exploration of algebraic insight and effective use of computer algebra systems*. Tesis doctoral. Universidad de Melbourne, Australia. Recuperada el 23 de mayo de 2006 de http://dtl.unimelb.edu.au/R/KVUDL5T9X7AV4L8VSEM6JA8F4P8VTG7DU3XT2H6TCBR6GLXALS-00217?func=dbin-jump-full&object_id=66478&pds_handle=GUEST
- Pierce, R., Stacey, K. y Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computer and Education*, 48, 285-300.
- Pierce, R. y Stacey, K. (2004). A framework for monitoring progress and planning teaching towards the effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, 9, 59-93.
- Pollak, H. O. (1997). Solving problems in the real world. En L. A. Steen (Ed.), *Why numbers count: Quantitative literacy for tomorrow's america*. New York: The College Board.
- Porcar, M. L. (2008). La resolución de problemas y la creatividad. *Mendomatica*, 17, 1-20. Recuperado el 22 de diciembre de 2008 de www.mendomatica.mendoza.edu.ar

- Preiner, J. (2008). *Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of geogebra*. Tesis doctoral. Universidad de Salzburgo, Austria. Recuperada el 17 de febrero de 2009 de <http://www.geogebra.org/publications/jpreiner-dissertation.pdf>
- Prendes, M. P. (2000). Trabajo colaborativo en espacios virtuales. En D. Martín (Ed.), *Medios audiovisuales y nuevas tecnologías para la formación en el S. XXI* (2nd ed., pp. 223-237). Murcia: Edutec.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2(3), 87-107.
- Purkey, W.W. (1970). *Self-concept and school achievement*. Engelwood Cliffs, NJ: Prentice May.
- Ralph, E. y Yang, B. (1993). Beginning teachers utilization of instructional media: A canadian case study. *Educational & Training Technology International*, 304, 299-318.
- Rearick, M.L. (1998). *Action research: The school university connection*. Documento presentado en el Annual Meeting of AERA, San Diego, Estados Unidos.
- Recio, T. (2008). Prólogo. En L. Rico y J. L. Lupiáñez, *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular* (pp. 13-20). Madrid: Alianza.
- Recio, T. (2006). PISA y la evaluación de las matemáticas. *Revista de Educación, extraordinario 1*, 263-273.
- Richards, J. C. y Lockhart, C. (1998). *Estrategias de reflexión sobre la enseñanza de idiomas*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Eds.) (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña: Universidad de A Coruña.

- Rico, L. (2005a). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el proyecto PISA 2003. *INECSE: PISA 2003 pruebas de matemáticas y de solución de problemas* (pp. 11-25). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Rico, L. (2005b). Valores educativos y calidad en la enseñanza de las matemáticas. En J. Asemil (Ed.), *Matemáticas: investigación y educación. Un homenaje a Miguel de Guzmán* (pp. 158-180). Madrid: Anaya.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, extraordinario 1*, 275-294.
- Rico, L. (2007). La Competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rinaudo, M. C. y Donolo, D. (2010). Estudios de diseño. Una perspectiva prometedora en la investigación educativa. *RED – Revista de Educación a Distancia*, 22, 1-29. Recuperado el 20 de junio de 2010 de http://www.um.es/ead/red/22/rinaudo_donolo.pdf
- Roblyer, M. D. (2006). *Integrating educational technology into teaching* (4th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Rodríguez, A. (1991). *Psicología Social*. México: Trillas.
- Romero, I. M. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada: Comares.
- Russell, M., Goldberg, A. y O'Connor, K. (2003). Computer-based testing and validity: A look back into the future. *Assessment in Education*, 10(3), 278-293.
- Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 47-88.
- Sánchez, J. (2001). *Aprendizaje visible, tecnología invisible*. Santiago de Chile: Dolmen Ediciones.
- Sánchez, M. (1992). *Desarrollo de habilidades del pensamiento: Razonamiento verbal y solución de problemas. Libro azul*. México: Editorial Trillas.

- Sancho, J. M. (2006). De tecnologías de la información y la comunicación a recursos educativos. En J. M. Sancho (Ed.), *Tecnologías para transformar la educación* (pp. 15-50). Madrid: UNIA/Akal.
- Sangiaco, A. C. W. (2008). *Estudio de las actitudes y conocimientos numéricos elementales, en la formación del profesor de la especialidad de matemática en la UNSA*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de San Agustín, Perú. Recuperada el 20 de enero de 2009 de <http://www.pdfqueen.com/estudio-de-las-actitudes-y-conocimientos-numericos-elementales,-en-la-formacion-del-profesor-de-la-especialidad-de-matematica-en-la-unsa>.
- Santos-Trigo, M. (2008). On the use of technology to represent and explore mathematical objects or problems dynamically. *Mathematics and Computer Education*, 42(2), 123-139.
- Sawyer, R. K. (2006). The New Science of Learning. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning Sciences* (pp. 1-18). New York, NY: Cambridge University Press.
- Schorr, R. Y. y Goldin, G. A. (2008). Students' expression of affect in an inner-city simcalc classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 131-148.
- Sekerák, J. y Sveda, D. (2008). Is mathematics teaching developing learner's key competences? *The Teaching of Mathematics*, 11(1), 41-52.
- Sepúlveda, M. P. y Calderón, I. (2007). Las TIC y los procesos de enseñanza-aprendizaje: la supremacía de las programaciones, los modelos de enseñanza y las calificaciones ante las demandas de la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, 44(5). Recuperado el 30 de marzo de 2008 de <http://www.rieoei.org/deloslectores/2195Ruiz.pdf>
- Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture and Activity*, 8(1), 42-76.
- Sinclair, K. J., Renshaw, C. E. y Taylor, H. A. (2004). Improving computer-assisted instruction in teaching higher-order thinking skills. *Computer and Education*, 42(2), 169-180.

- Sinclair, M. P. (2005). Peer interactions in a computer lab: Reflections on results of a case study involving web-based dynamic geometry sketches. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(1), 89-107.
- Sinclair, N. y Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 135-150.
- Singh, K., Granville, M. y Dika S. (2002). Mathematics and science achievement: Effects of motivation, interest and academic engagement. *Journal of Educational Research*, 95(6), 323-332.
- Smith, C., Hollebrands, K. F., Iwancio, K. y Kogan, I. (2007). The affects of a dynamic program for geometry on college students' understandings of properties of quadrilaterals in the Poincaré disk model. En D. K. Pugalee, A. Rogerson y A. Schinck (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project: Mathematics education in a global community* (pp. 613-618). Charlotte, USA: The University of North Carolina.
- Sordo, J. M. (2005). *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperada el 30 de enero de 2007 de <http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28911.pdf>
- Steinberg, L. (1996). *Beyond the classroom: Why school reform has failed and what parents need to do*. New York: Simon and Schuster.
- Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata
- Steffe, L. P. y D'Ambrossio, B. S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal For Research in Mathematics Education*, 26(2), 146-159.
- Sträßer, R. (2002). Research on dynamic geometry software (DGS) - an introduction. *ZDM*, 34(3), 65.
- Suh, J. M., Johnston, C. J. y Douds, J. (2008). Enhancing mathematical learning in a technology-rich environment. *Teaching Children Mathematics*, 15(4), 235-241.
- Tabach, M., Hershkowitz, R. y Arcavi, A. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 27(1), 48-63.

- Tapia, M. y Marsh II, G. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly*, 8(2), 1–8.
- Tejada, J. y Sosa, F. (1997). *Las actitudes en el perfil del formador de formación profesional y ocupacional*. Ponencia presentada en el Segundo Congreso CIFO. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Tofaridou, I. (2007). *Learning styles and technology environments in mathematics education*. Tesis doctoral no publicada. City University, London, England.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University Press.
- Underwood, J., Hoadley, C., Lee, H. S., Hollebrands, K. F., DiGiano, C. y Renninger, K. A. (2005). IDEA: Identifying design principles in educational applets. *Educational Technology Research and Development*, 53(2), 99-112.
- Ursini, S., Sanchez, G., Orendain, M. y Butto, C. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 409-424.
- Vale, C. (2001). *Gender and computer-based mathematics in selected secondary classrooms*. Tesis doctoral no publicada. La Trobe University, Victoria, Australia.
- Vale, C. (2003). Computers in mathematics: A super highway to social justice. En L. Burton (Ed.), *Which way social justice in mathematics education?* (pp. 277-301). Westport, CT: Praeger Publishers.
- Vargas, R. (2003). Escala de actitudes hacia la tecnología en el aprendizaje escolar aplicada a niños y niñas de primaria pública en Costa Rica. Análisis de validez y confiabilidad. *Actualidades en Psicología*, 19(106), 29-50.
- Verschaffel, L.; Greer, B. y De Corte, E. (2002) Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. En K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers y L. Verschaffel (Eds.) *Symbolizing, modelling and tool uses in Mathematics Education*. (pp. 257-276) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vidal, M. P. (2006). Investigación de las TIC en la educación. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 5(2), 539-552.
- Villegas, J. L. y Castro, E. (2003). Pensamiento en voz alta en resolución de problemas. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de*

- Investigación en Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática* (pp. 349-354). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.
- Volman, M. y van Eck, E. (2001). Gender equity and information technology in education: The second decade. *Review of Educational Research*, 71(4), 613-634.
- Weaver, G. (2000). An examination of the national educational longitudinal study (NELS: 88) database to probe the correlation between computer use in school and improvement in test scores. *Journal of Science Education and Technology*, 9, 121-133.
- Weigand, H. G. y Weth, T. (2002). *Computer im mathematikunterricht: Neue wege zu alten zielen*. Heidelberg, Berlín: Spektrum.
- Wilson, J. D. (1995). *Cómo valorar la calidad de la enseñanza*. Madrid: Paidós.
- WNCP (Western and Northern Canadian Protocol) (2006). *Common curriculum framework for mathematics*. Recuperado el 25 de junio de 2007 de <http://www.wncp.ca/english/subjectarea/mathematics/ccf.aspx>
- Wolton, D. (2000). *Sobrevivir en Internet. Conversaciones con Olivier Jay*. Barcelona: Gedisa.
- Yang, K. L. y Ling, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.
- Yelland, D. (2001). Girls, mathematics and technology. En W. Atweh, H. Forgasz y B. Nebrez (Eds.). *Socio-cultural foundations of mathematics* (pp. 393 - 409). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Yerushalmy, M. (2005). Functions of interactive visual representations in interactive mathematical textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 217-249.
- Young, D. B. y Ley, K. (2002). Brief report: Self-efficacy of developmental college students. *Journal of College Reading and Learning*, 33(1), 21-31.
- Yu, P. y J.E. Barrett. (2002). Shapes, actions, and relationships: A semiotic investigation of student discourse in a dynamic geometric environment. En D. S. Mewborn, P. Sztajin, D. White, H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Fourth*

Conference of PME-NA (pp. 775-784). Columbus, OH: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education.

Zabalza, M. A. (1989). *Diseño y desarrollo curricular*. Madrid: Narcea.

Zaldívar, C. M. y Pérez, F. A. (1997). Pruebas para caracterizar el desarrollo del pensamiento del escolar mediante el aprendizaje de la Física. En *Libro Resumen Pedagogía '97*, La Habana.

Zan, R., Brown, L., Evans, J. y Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 113-121.

Zbiek, R. M. y Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63(1), 89-112.



Anexos



Anexo A

Ciclo 1 de la investigación

En este anexo se presenta el desarrollo del ciclo 1 de esta investigación-acción (I-A). Este ciclo tiene como precedente al ciclo 0, que se llevó a cabo para obtener la suficiencia investigadora (memoria de DEA, García y Romero (2007)). Por otra parte, constituye el estudio piloto para la experiencia central de la tesis (ciclo 2). Está estructurado según las cuatro fases del esquema de Elliot (en Hopkins, 1995) y Kemmis (1992): planificación, acción, observación y reflexión. De acuerdo con la naturaleza de la I-A, este ciclo parte de las reflexiones del ciclo anterior (Ciclo 0) e incorpora la reformulación consecuente, que constituye la base del ciclo siguiente (ciclo 2), expuesto detalladamente en los bloques II, III y IV de la presente memoria.

A.1. REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El ciclo 1, considerado estudio piloto de esta tesis, partió, como acabo de mencionar, de los resultados obtenidos en el ciclo 0. Dichos resultados mostraron que las TIC mejoraron la motivación y las actitudes hacia las matemáticas, así como la competencia matemática de los estudiantes. Al mismo tiempo, se evidenciaron ciertas limitaciones, abriendo caminos en los que sería interesante profundizar en ciclos de investigación posteriores. Así, los principales cambios realizados para la puesta en práctica del ciclo 1, respondían a las siguientes decisiones metodológicas:

- ✓ Centrar el uso de TIC en el manejo de Software de Geometría Dinámica (SGD), en lugar de incorporar las TIC de un modo más simple (búsqueda de información por Internet).
- ✓ Extender el estudio actitudinal. El ciclo 0 se centró en las “actitudes hacia las matemáticas”, y en esta ocasión, además, se pretendía analizar cómo se transformaron las “actitudes matemáticas”, al trabajar con el mencionado software.

✓ Ampliar el análisis global de las competencias PISA de los estudiantes llevado a cabo en el ciclo 0, a un análisis más exhaustivo de cada una de ellas durante el trabajo con SGD.

La conjetura inicial de investigación se reformuló en consecuencia, quedando como sigue:

Se puede realizar un uso de SGD en el aula para trabajar contenidos geométricos que contribuya a una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas y a un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, siendo su influencia más notable en la transformación de determinadas actitudes y competencias.

Del ciclo 1 interesaba, más que analizar en profundidad los datos que se pudiesen obtener, comprobar si las decisiones tomadas tras la finalización del ciclo anterior se veían respaldadas por la práctica. Se trataba de comprobar la bondad de la planificación del nuevo ciclo, así como de los nuevos instrumentos diseñados, con el fin de refinar el plan de acción para la experiencia definitiva o ciclo 2. Por ello, manteniendo siempre presentes los objetivos generales de investigación, expuestos en el apartado 1.3, para este ciclo 1 éstos fueron menos ambiciosos y pueden enunciarse del siguiente modo:

1. Comprobar la adecuación de los software Geometría dinámica (SGD) elegidos, para la implementación de una secuencia de enseñanza-aprendizaje previamente diseñada, basada en el uso de estos software
2. Diseñar instrumentos de análisis de actitudes y competencias, y comprobar su adecuación para la fase de observación, así como la calidad de la información extraída para la fase de reflexión
3. Describir las transformaciones que la implementación de dicha secuencia provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de secundaria
4. Describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de secundaria, al implementar la secuencia anteriormente descrita.

A.2. FASE DE PLANIFICACIÓN

A.2.1. Contexto de la investigación

Todos los ciclos de esta investigación, en particular, el que ahora se presenta (ciclo 1) fueron llevados a la práctica en el mismo centro (Instituto de Educación Secundaria Murgi ubicado en la localidad de El Ejido) que, como expuse, se caracteriza por ser un centro TIC, en el que

cada pareja de estudiantes dispone, en cada aula, de un equipo informático con conexión a Internet.

Se llevó a cabo con dos grupos de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, que sumaban 42 alumnos y respondían a las siguientes características:

▶ 1º de ESO B, que contaba con 21 estudiantes. Era un grupo bastante heterogéneo y, mientras unos pocos alumnos mostraban interés, la gran mayoría reflejaba apatía o desinterés. El equipo educativo de este grupo, del que yo formaba parte, estaba descontento con su comportamiento y rendimiento, pues se negaban a trabajar en clase y con frecuencia algunos de sus estudiantes se veían envueltos en conductas contrarias a la convivencia del centro. Eran bastante indisciplinados y habladores, y en términos académicos debo decir que no tenían el rendimiento que cabía esperar. Este grupo contaba con bastantes alumnos repetidores totalmente desmotivados, quienes, conscientes de que iban a promocionar a 2º de ESO por imperativo legal, con frecuencia interrumpían el desarrollo de las clases.

▶ 1º de ESO C, que era un grupo de 21 estudiantes. Partían de un comportamiento y rendimiento académico aceptable puesto que, aunque al iniciar el curso se negaban a trabajar en clase y en casa, poco a poco fueron mejorando. Los alumnos eran bastante inquietos y charlatanes, pero en su mayoría trabajadores. Me encontraba más a gusto trabajando con este grupo, que con 1º B, y por ello, inicialmente mis expectativas para este grupo eran mayores que para el otro.

Como durante la experiencia anterior (ciclo 0) había trabajado con niveles superiores, 3º y 4º de ESO y 1º de Bachillerato, se decidió realizar esta experiencia piloto con alumnos de un nivel inferior, con el fin de abarcar los distintos perfiles de estudiantes de Secundaria. La elección de diferentes niveles en cada ciclo fue intencionada, desde la convicción de que la utilidad de las TIC no depende de la edad de los estudiantes, sino que el uso de las mismas puede adaptarse en cada caso, obteniendo resultados similares en las actitudes y competencias de los estudiantes (considerando su situación inicial y la situación final esperada para cada nivel).

En este ciclo, trataba de probar la potencialidad de distintos software de Geometría dinámica para trabajar contenidos geométricos, teniendo en cuenta dos hándicaps añadidos a estos grupos de estudiantes. Por un lado, los escasos conocimientos de los alumnos en el bloque de

Geometría que, según mi propia experiencia, suelen ocasionarles bastantes problemas de asimilación y comprensión. Por otro lado, la falta de madurez y los cortos periodos de atención que manifiestan los alumnos de 1º de ESO, que se tuvieron presentes a la hora de planificar la metodología de aula. Se pretendía analizar la influencia de las TIC cuando eran usadas por estudiantes cuyas competencias matemáticas estaban menos desarrolladas, pero que en su mayoría mostraban ya, a esa edad, actitudes relacionadas con las matemáticas poco positivas.

La secuencia didáctica fue diseñada para ser llevada a la práctica de un modo colaborativo, en el que grupos de dos alumnos trabajasen de forma autónoma en el aula, en actividades que requerían del uso de distintas herramientas TIC que después expondré en detalle.

A.2.2. Recursos empleados y muestra de actividades

Una vez definidos y concretados los objetivos de este ciclo de la investigación, paso a exponer la planificación realizada para el ciclo 1.

Después de múltiples consideraciones sobre las distintas herramientas tecnológicas que se podían usar para alcanzar tales objetivos, se llegó a la conclusión de emplear software de Geometría Dinámica (Regla y Compás (C.a.R.) y Geogebra), la Plataforma Moodle, el cañón virtual y la red Internet, para trabajar los contenidos del bloque de Geometría. En el capítulo 2 se han expuesto las razones por las que se seleccionaron estas herramientas tecnológicas.

A continuación, describo el modo en que se emplearon los mencionados recursos durante la fase de acción, así como los contenidos trabajados, y las actividades a través de las cuales se abordaron esos contenidos usando las TIC:

- ▶ La mayoría de las tareas diseñadas, aunque no todas, fueron realizadas por los estudiantes usando dos software de geometría dinámica: C.a.R. y Geogebra. En principio, me parecieron adecuados ambos software, dada su facilidad de uso y su potencialidad para el estudio de la Geometría. En un primer momento, elegí C.a.R., porque nos ofreció menos problemas, al coordinador TIC del centro y a mí, posibilitar que los estudiantes accediesen a él desde sus ordenadores. Por esta razón, diseñé las tareas para ser realizadas con C.a.R., aunque al implementar la última de ellas, surgieron obstáculos que no pude solventar en aquel momento y decidí emplear Geogebra. Así pues, la última de las tareas fue realizada con ambos software (C.a.R. y Geogebra).

► La plataforma Moodle, en la que creé un espacio específico para trabajar con ambos grupos, se componía de las siguientes secciones:

- Una introducción, que consistía en una exposición de los objetivos perseguidos, metodología a seguir y forma de evaluar
- Cada una de las tareas que debían realizar los estudiantes
- Los cuestionarios “Actitud hacia las mates”, “Me interesa tu opinión” y otros de respuesta abierta sobre los contenidos trabajados
- Foros de Noticias, donde los alumnos y alumnas podían incluir noticias sobre matemáticas
- Sección Cuéntame: buzón de sugerencias, comentarios y opiniones de los alumnos y alumnas sobre el proyecto

Todas estas secciones sólo estaban a disposición del alumnado en el momento de ser trabajadas, de forma que los estudiantes no podían acceder a otras tareas posteriores ni a aquella información cuyo acceso les estaba restringido.

► El cañón virtual me permitió trabajar las tareas iniciales a nivel grupal. Diseñé una presentación de los contenidos iniciales de polígonos con Power Point, que realizada por todo el grupo al mismo tiempo. Usando el cañón virtual, la presentación se iba mostrando en las pantallas de cada pareja de estudiantes, aunque éstos no podían interactuar con ella, pues era yo la que pasaba de una diapositiva a la siguiente cuando así lo encontraba oportuno. La red Internet se empleó, además de para acceder a la plataforma Moodle, para visitar páginas con las que trabajar algunos contenidos de las unidades didácticas de triángulos y cuadriláteros de la página de Descartes (<http://descartes.cnice.mec.es>), que además incluían applets interesantes con los que los alumnos podían interactuar.

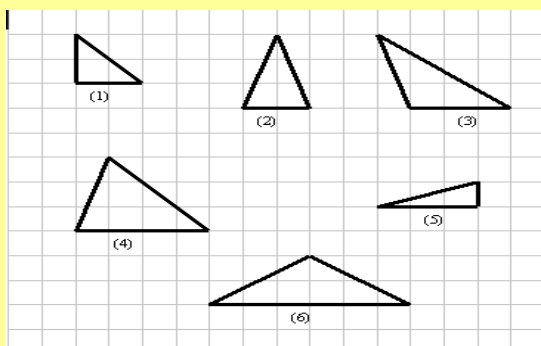
► Se decidió trabajar contenidos de Geometría, para los que el software elegido está destinado, haciendo coincidir la puesta en práctica de la experiencia con la secuenciación de contenidos prevista en la programación de 1º de ESO. Dicha programación fue realizada por el departamento del centro, entre cuyos miembros me encontraba como profesora. Resumiendo los contenidos que se trabajaron, que serán expuestos detalladamente en el apartado dedicado al Plan de Acción, se puede decir que estudiamos contenidos básicos de Geometría sintética y Teselaciones del plano.

Las actividades seleccionadas para trabajar con TIC en este ciclo podían clasificarse en dos tipos, según el contexto en el que estaban situadas: matemático o de la vida cotidiana. Fui intercalando ambos tipos de actividades, porque dada la edad y las características de los

grupos, creía que les resultaría complejo modelar determinadas situaciones de la vida real en términos matemáticos; pero, al mismo tiempo, no quería renunciar a que apreciaran la importancia de las matemáticas en contextos reales. Pretendía, a través de las actividades seleccionadas, además de indagar sobre el desarrollo de las competencias de mis estudiantes, observar las actitudes matemáticas y hacia las matemáticas que evidenciaban durante el trabajo con SGD y analizar la adecuación de los dos software empleados para que los estudiantes realizaran correctamente las tareas.

A modo de ejemplo expongo dos tareas, una de cada tipo, que fueron las que los estudiantes realizaron con SGD en primer y último lugar, respectivamente. La primera tarea “Ejercicios sobre triángulos con C.a.R.” está situada en un contexto matemático y la última tarea “Teselar el plano con polígonos regulares y no regulares” en un contexto real de la vida cotidiana. Ambas tareas se diferencian, además de por el contexto en el que están situadas, por el nivel de competencias exigido y por los software empleados para su resolución, puesto que para la primera de ellas los estudiantes usaron C.a.R. y para la última fue necesario que los escolares trabajaran simultáneamente con C.a.R. y Geogebra.

Fíjate en los triángulos representados en la cuadrícula siguiente y represéntalos en el programa C.a.R. para poder medir lados y ángulos y resolver las siguientes cuestiones:



a) Completa la siguiente tabla indicando los que corresponden a cada casilla.





	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

b) ¿Te ha quedado alguna casilla sin rellenar? Dibuja, si es posible, aquellos que no han aparecido y razona que ocurre en los casos en los que no hay solución

Figura A-1.- Tarea “Ejercicios sobre triángulos con C.a.R.”

Imagina que tienes que embaldosar el suelo de tu habitación usando como baldosas los polígonos que hemos estudiado hasta ahora. Dibuja con el programa C.a.R. como quedaría el suelo con cada uno de esos polígonos y recuerda que para embaldosar el suelo no pueden quedar huecos, ni tampoco pueden colocarse las baldosas unas sobre otras y todas las baldosas deben ser iguales.

Comienza probando a embaldosar con baldosas similares a las siguientes:

- 1.- Usando la macro triángulo regular. ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 2.- Usando un triángulo rectángulo. ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 3.- Usando un triángulo cualquiera. ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 4.- Usando un cuadrilátero regular. ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 5.- Usando un cuadrilátero rectángulo. ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 6.- Usando un cuadrilátero cualquiera. ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 7.- Usando este pentágono  ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 8.- Usando este hexágono:  ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 9.- Usando un pentágono regular:  ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 10.- Usando un hexágono regular:  ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?
- 11.- Usando un heptágono regular: ¿Has podido embaldosar el suelo? ¿por qué?

Después de probar con todos estos polígonos, ¿por qué crees que sólo puedes embaldosar el suelo con algunos de ellos y con otros no es posible embaldosar sin dejar huecos ni solapar baldosas?

Figura A-2.- Tarea “Teselar el plano con polígonos regulares y no regulares”

La primera tarea (Figura A-1) requería de las competencias Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar a un nivel medio (nivel 2), mientras que el resto de las competencias se ajustaban a un nivel bajo o nivel 1 de complejidad: Modelar, Plantear y Resolver Problemas, Representar y Uso de herramientas y Recursos.

En la segunda tarea expuesta como ejemplo (Figura A-2), los alumnos debían construir sus propias teselaciones con los polígonos de los apartados 1-8. Como no habían trabajado isometrías, ni cómo construir polígonos regulares a través de giros, los apartados 9-11 resultaban muy difíciles de representar con C.a.R.. Por ello, decidí usar Geogebra para estos apartados, y construí un archivo con las representaciones de posibles teselaciones hechas con pentágonos, hexágonos y heptágonos regulares, para que los alumnos las decodificaran e identificaran cuáles de ellas respondían a mosaicos. Éstos podían manipular las

construcciones y realizar medidas sobre ellas, por ejemplo, de los ángulos que concurrían en un vértice. Esta actividad requería que los estudiantes movilizaran algunas competencias como Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar a un alto nivel o nivel 3, para poder llegar a justificar sus respuestas en términos matemáticos, más allá de la argumentación visual a partir de los ejemplos que ellos mismos habían construido. Debían decodificar las representaciones y extraer de las mismas la propiedad matemática para teselar (suma de los ángulos concurrentes en un vértice debe de ser 360°). La tarea exigía un nivel medio (nivel 2) de complejidad del resto de las competencias para poder resolverla con éxito.

Los contenidos geométricos trabajados con C.a.R. y con Geogebra, a excepción de la nomenclatura y algunas características de los polígonos más conocidos, no habían sido estudiados anteriormente por los estudiantes. Con las tareas diseñadas pretendía que hiciesen pequeñas investigaciones que les llevaran a descubrir sus propiedades matemáticas, como es el caso de la tarea anterior, así como a dominar en profundidad estos contenidos.

A.2.3. Plan de acción

A diferencia de los ciclos anterior y posterior (ciclos 0 y 2 de investigación), este ciclo no contaba en su diseño y planificación con la realización de actividades adicionales con Lápiz y Papel (tareas LP) para la comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos (Lápiz y Papel y TIC). Al tratarse de un estudio menos ambicioso, únicamente se pretendía comprobar la bondad de los software elegidos, de los instrumentos y tareas diseñados, y de la metodología empleada para alcanzar los objetivos propuestos como metas de la investigación.

Teniendo en cuenta que este proyecto no sólo responde a intereses de la investigación, sino que sirve a intereses docentes simultáneamente, la propuesta didáctica se articuló en torno a las cuatro componentes básicas del currículo: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

1.-Objetivos docentes: siguiendo el Currículo Oficial del área de matemáticas, uno de los objetivos principales del área es: contribuir a desarrollar las capacidades cognitivas de los estudiantes para que puedan aplicar sus conocimientos en situaciones nuevas y usar el lenguaje matemático como instrumento útil en otros ámbitos. Por ello, mis objetivos eran:

- ▶ Mejorar las actitudes relacionadas con las matemáticas y las nuevas tecnologías del alumnado.

► Comprobar si esta metodología de trabajo dirigido optimizaba el aprendizaje de ciertos contenidos del área, logrando mayor maestría en la resolución de problemas que requerían del dominio de las competencias matemáticas consideradas.

2.- Contenidos: trabajamos los siguientes contenidos correspondientes a Geometría:

- Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano.
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos.
- Polígonos regulares: construcción. Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.
- Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones: Teselaciones del plano.
- Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.

Además, fue interesante trabajar las siguientes *actitudes*:

- Valoración positiva de la necesidad de utilizar relaciones matemáticas que ligen las medidas de los lados de un triángulo con las de sus ángulos.
- Valoración positiva de las técnicas y procedimientos usados como método eficaz para obtener e interpretar información y resolver las situaciones planteadas.
- Gusto por la presentación ordenada y argumentada de los trabajos realizados.
- Respeto por el trabajo realizado por otros compañeros y valoración positiva del trabajo colaborativo.

3.- Metodología. La intervención llevada a cabo en el aula de matemáticas se planteó a través de la combinación de técnicas metodológicas diversas, frente a la metodología a la que los alumnos y alumnas están acostumbrados: la clase magistral. Mediante estrategias diferentes a las habituales, intentaríamos mejorar el clima del aula para favorecer con ello el aprendizaje. La metodología seguida durante la realización de las tareas con SGD se caracterizó por:

► No exponer a priori los contenidos matemáticos que se pretendía estudiar y después realizar tareas para consolidarlos, sino comenzar con la realización por parte de los

estudiantes de las actividades seleccionadas. Con ello pretendía fomentar el aprendizaje por descubrimiento y que ellos realizaran investigaciones que les llevaran a adquirir estos contenidos. Una vez finalizadas las tareas, se realizaba la puesta en común de los contenidos trabajados mediante dichas tareas, en la que todos los estudiantes del grupo podían exponer sus resultados y razonamientos y también las dudas y dificultades encontradas. De este modo, se clarificaban y consolidaban los contenidos trabajados en las tareas.

► Proponer actividades para desarrollar las competencias matemáticas seleccionadas, en las que los alumnos, en parejas, realizaran investigaciones y elaboraran informes que apoyasen los resultados obtenidos. Proporcionar a los estudiantes estas actividades, consistiendo mi labor en guiar al alumnado para lograr un desarrollo satisfactorio de los objetivos del proyecto. Como buscaba mejorar las actitudes relacionadas con las matemáticas, la comunicación, el clima del grupo-clase, su motivación, etc. diseñé actividades que implicaban distintas agrupaciones del alumnado:

- Propuestas de trabajo individual. Relaciones de ejercicios de los contenidos geométricos trabajados, para que los estudiantes las resolvieran en casa después de la realización de cada tipo de tareas en el aula. Éstas podían considerarse actividades de consolidación de dichos contenidos. Pretendía que dichas actividades favoreciesen la sensibilidad y gusto por el trabajo sistemático y ordenado y por una adecuada presentación; así pues, incluí actividades de todos los niveles de dificultad que podían ser ejercicios, problemas contextualizados, etc.

- Propuestas de trabajo en el aula por parejas. Las tareas TIC o con SGD sirvieron para introducir y trabajar los contenidos geométricos nuevos integrándolos con los ya existentes, debiendo cada pareja investigar y poner en juego actitudes y competencias matemáticas para resolverlas, que me permitieran comprobar el nivel de matematización de cada estudiante.

- Propuestas de trabajo en el aula a nivel grupal. Tanto las tareas realizadas individualmente en casa, como por parejas en el aula usando SGD, eran trabajadas después a nivel grupal. Es decir, las resolvíamos conjuntamente en la pizarra de más de una forma, recurriendo a las estrategias sugeridas y empleadas por cada estudiante o pareja de estudiantes.

► Reconsiderar mi método de enseñanza tradicional y adaptarlo al entorno tecnológico, es decir, mi actuación en el aula debía fomentar un entorno de aprendizaje guiado, que

motivase a los estudiantes a seguir el ciclo “construir-experimentar-conjeturar-justificar” durante la resolución de problemas.

4.- Evaluación: Para efectuar la evaluación de los contenidos de Geometría trabajados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- ▶ La información recogida de las observaciones de cada sesión de trabajo en clase. Ésta se llevó a cabo a través de parrillas de competencias y actitudes matemáticas, de mis diarios (diarios en los que reflejé el desarrollo actitudinal y de competencias observado en cada grupo de estudiantes, durante la experiencia con SGD). y del diálogo con el alumnado (entrevistas informales, debates, puestas en común, etc.).
- ▶ La valoración de las producciones de los alumnos: protocolos escritos de resolución de las tareas realizadas con SGD por cada pareja, relaciones de ejercicios individuales, exámenes escritos, cuaderno de clase, trabajo en casa...

A.3. FASE DE ACCIÓN

La realización de las actividades con TIC requirió 13 sesiones de una hora con los grupos de 1º de ESO antes mencionados, las cuales transcurrieron entre el 7 de mayo y el 5 de junio de 2005. Después, se necesitaron cinco sesiones adicionales, de las cuales se dedicaron tres a la puesta en común, consolidación y corrección de otras actividades realizadas por los alumnos sobre estos contenidos (relación de ejercicios realizada de manera individual, otras actividades relacionadas con los contenidos trabajados en las que mostraron mayores dificultades...) y las dos sesiones restantes a la realización y posterior corrección de un examen escrito.

La secuencia de enseñanza-aprendizaje fue diseñada para ser implementada en el aula de un modo colaborativo, en el que parejas de estudiantes trabajasen de forma autónoma en la resolución de problemas contextualizados y no contextualizados con SGD. Asimismo, se negociaron ciertas normas de comportamiento de la clase, siguiendo a Romero (1997) y a Romero y Rico (1999), de cara a la construcción del conocimiento en una atmósfera de aprendizaje de apoyo y confianza.

A.4. FASE DE OBSERVACIÓN

La fase de Observación se centró en la recogida de datos a partir de los instrumentos diseñados para tal fin. Expongo a continuación de forma genérica los instrumentos empleados para informar de cada uno de los objetivos de investigación en este ciclo 1 (página 576), que después presentaré de un modo más detallado.

Al igual que para los restantes ciclos de esta investigación, se emplearon dos tipos de técnicas o instrumentos para la evaluación de actitudes y competencias, las técnicas no observacionales y las técnicas basadas en la observación.

TÉCNICAS NO OBSERVACIONALES

Se emplearon cinco instrumentos de este tipo, de los cuales a excepción del primero de ellos (escalas o cuestionarios de actitudes), exclusivo para el análisis actitudinal, los restantes cuatro instrumentos eran adecuados tanto para la evaluación de actitudes como de competencias matemáticas.

Escalas o cuestionarios de actitudes

Empleamos dos escalas de este tipo en este ciclo, como ya expuse en el apartado 6.5.1, una para el análisis de las actitudes hacia las matemáticas y otra para indagar acerca de las actitudes de los alumnos hacia el uso de las TIC como herramienta de trabajo en matemáticas.

Empezando por la escala “Actitud hacia las mates”, los 18 ítems, 9 formulados en sentido positivo y 9 en sentido negativo, fueron adaptados de escalas ya diseñadas y validadas, como la “Escala de Actitud de Carácter Verbal” de Gairín (1987), que pretendía evaluar las actitudes hacia las matemáticas en general, y la de Giménez (1997a), que era una adaptación de la anterior para el caso concreto de las fracciones. De la escala de Giménez adaptamos los ítems 1, 8 y 13, y de la de Gairín seleccionamos y adaptamos el resto de los ítems. Giménez (op. cit.) consideraba tres componentes básicas de las actitudes (cognitiva, afectiva y comportamental), pero añadió las componentes de creencia del entorno y de autoconcepto:

Tabla A-1. Cuestionario “Actitud hacia las mates”

1. Normalmente comprendo lo que se trabaja en clase de mates
2. Cuando hago matemáticas me olvido de mis problemas
3. Las matemáticas no sirven para nada
4. Me gustan las mates
5. Me cuesta trabajo entender las mates
6. Cuando estudio matemáticas, no me doy cuenta de que pasa el tiempo
7. No me interesan las matemáticas
8. La mayoría de las personas usan las mates en su vida cotidiana
9. Apenas dedico tiempo a estudiar matemáticas
10. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de mates
11. Me divierten las clases de matemáticas
12. Me resulta muy pesado estudiar matemáticas
13. Saber matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos
14. Me gusta hacer trabajos y problemas de mates
15. El estudio de las mates es muy importante para mi futuro
16. Me iría de las clases de mates
17. Paso mucho tiempo estudiando mates
18. Me siento mal cuando pienso en las matemáticas

Los estudiantes debían cumplimentar esta escala antes (Pretest) y después (Postest) de realizar las tareas con SGD, con el fin de obtener información que permitiera comprobar si se producían transformaciones en sus actitudes hacia las matemáticas debido al uso del software.

La segunda escala empleada “Me interesa tu opinión” (MIO) de 22 ítems (p. 244), la diseñamos durante el ciclo 0 y se empleó para indagar acerca de las actitudes de los estudiantes hacia el uso de SGD como herramienta de trabajo en matemáticas. Se conservó su diseño original, porque después de usarla durante el ciclo 0 y analizar la información recogida, resultó adecuada y válida para informar de las actitudes hacia las matemáticas de los escolares cuando trabajan con TIC y por ello, se usó nuevamente para este ciclo 1. Mediante esta escala se recoge información acerca de las componentes cognitiva, afectiva y comportamental de dichas actitudes y también sobre la actitud de los

estudiantes hacia el uso de TIC en matemáticas y hacia el trabajo colaborativo. Esta escala debían cumplimentarla únicamente al finalizar las actividades con SGD.

Grabaciones de los estudiantes en audio y vídeo durante las sesiones de clase

A lo largo de las sesiones, fui realizando grabaciones de audio de cada pareja con una grabadora manual, si bien los registros de cada pareja respondían a los momentos en los que yo interaccionaba con ellos y solían tener pocos minutos de duración. Las grabaciones de vídeo fueron realizadas con la colaboración de un observador externo y fundamentalmente registraban cómo los estudiantes resolvían las tareas y las conversaciones que mantuve con mis estudiantes, cuando me consultaban dudas o cuando les pedía que me explicasen cómo habían realizado una tarea o una parte de ella. También recogí en vídeo las puestas en común, realizadas a nivel grupal, de las diferentes estrategias de resolución y respuestas encontradas por nuestros alumnos después de que finalizasen cada tarea.

Informes o protocolos escritos de resolución de cada tarea

Estos informes eran realizados por cada pareja de alumnos para cada una de las tareas realizadas con TIC, y con ellos pretendía recoger sus razonamientos, argumentaciones, representaciones así como cálculos, estrategias y distintos caminos seguidos (descripción de los pasos realizados). Las relaciones de ejercicios que realizaron individualmente, tras finalizar con las actividades propuestas para desarrollar usando el ordenador y los exámenes sobre estos contenidos también nos fueron de utilidad.

Archivos de programa de Regla y Compás y Geogebra

El análisis de los archivos de cada tarea realizada por cada pareja de estudiantes, empleando las herramientas de estos software indicadas para ello, permitían analizar el protocolo de construcción seguido en las tareas.

Buzón de sugerencias

Como en el ciclo 0, reservé este espacio en la plataforma Moodle para que los estudiantes me contaran sus impresiones, opiniones, sugerencias, así como cualquier comentario sobre el trabajo de las matemáticas con TIC y los cambios positivos o negativos que éstas provocaron en sus actitudes relacionadas con las matemáticas.

TÉCNICAS OBSERVACIONALES

Se consideraron dos instrumentos basados en la observación de aula: diarios y escalas o parrillas de observación. Con ellos pretendía recoger información de nuestros dos focos de interés: actitudes y competencias matemáticas.

Diarios de clase

Escribí un diario para cada grupo, en los que anoté, tras finalizar cada sesión, la información relevante para los objetivos de nuestra investigación. Es decir, acerca de las actitudes y competencias observadas en el aula, así como mis impresiones del modo en el que se iba desarrollando la experiencia de trabajar con TIC.

Parrillas de observaciones

Consideré durante cada sesión, el uso de una parrilla de observación con la que recogí información de cada pareja de estudiantes sobre las actitudes y competencias involucradas en la misma y el nivel hasta el que las evidenciaba durante la realización de dicha tarea. La parte de las parrillas relativa a actitudes era invariable, y la de competencias, específica para cada tarea. Rellené estas parrillas durante las sesiones en las que los estudiantes trabajaron con SGD.

A modo de esquema-resumen expongo la siguiente tabla que informa de los distintos instrumentos empleados y con qué fin, es decir, si se usaron para indagar sobre actitudes, competencias o ambos focos de interés:

Tabla A-2. Instrumentos de recogida de datos usados durante el ciclo 1

<i>Instrumentos</i>	<i>Focos de interés</i>	Actitudes	Competencias
Cuestionario “Actitud hacia las mates”		✓	
Cuestionario MIO		✓	
Buzón de sugerencias		✓	✓
Protocolos escritos de resolución de cada tarea			✓
Archivos de C.a.R. y Geogebra			✓
Diarios		✓	✓
Parrillas de observación		✓	✓
Grabaciones de audio y vídeo		✓	✓

Con estos instrumentos recogí información que se usó para valorar, en primer lugar, las decisiones tomadas para esta investigación, y también para proporcionar una calificación a los alumnos sobre los contenidos trabajados. Por otro lado, algunos de estos datos fueron objeto de un análisis posterior, una vez concluido el proceso didáctico, con vistas a realizar cambios y tomar las decisiones oportunas para la experiencia definitiva o ciclo 2.

A.5. FASE DE REFLEXIÓN Y TOMA DE DECISIONES

A.5.1. Análisis de datos y resultados

El análisis de datos llevado a cabo en este ciclo tenía como meta principal dar respuesta a los objetivos para este ciclo, que hacían referencia a la bondad de las herramientas TIC empleadas y de los instrumentos de observación diseñados para testar la conjetura, quedando el análisis de las transformaciones de actitudes y desarrollo de competencias (objetivos 3 y 4 del ciclo 1) en un segundo plano. Por todo ello, el análisis de datos se centró en aquellos aspectos que interesaban, los cuales respondían fundamentalmente a los objetivos 1 y 2 de este ciclo: la adecuación de los software elegidos y de la secuencia de enseñanza diseñada; la utilidad de las parrillas de observación de actitudes y competencias y de las grabaciones de aula, tanto de audio como de vídeo, para describir e informar de las transformaciones actitudinales y del desarrollo de competencias de los estudiantes.

Estructuré los análisis y reflexiones realizadas en este ciclo 1 atendiendo a los objetivos a los que pretendía dar cumplimiento.

Objetivo 1: Comprobar la adecuación de los software de Geometría dinámica (SGD) elegidos para la implementación de una secuencia de enseñanza previamente diseñada, basada en el uso de estos software

Con respecto a este objetivo, debo centrarme en dos aspectos importantes: la adecuación de los SGD elegidos y la adecuación de la secuencia de enseñanza diseñada para ser trabajada con estos programas informáticos. El cumplimiento de este objetivo permitió reflexionar y tomar decisiones al respecto con vistas a la experiencia definitiva de tesis (ciclo 2).

Comienzo abordando las reflexiones que el análisis de los datos realizado permite extraer acerca de la bondad de los SGD empleados para lograr los propósitos de investigación de mejorar las actitudes y competencias matemáticas de mis estudiantes. En primer lugar,

considerando las TIC de modo genérico, se comprueba que en el aula se pusieron de manifiesto muchos de los atributos y ventajas del uso de estos software sobre LP, que nosotras consideramos como marco de referencia para nuestro trabajo (figura 2-1).

Centrándonos en los atributos de los SGD considerados, siguiendo a Sánchez (2001), observamos en el aula, como factores más influyentes para la mejora actitudinal y de competencias, su constructividad, interactividad e interfaz. La constructividad incidió en un mayor trabajo de los estudiantes en el aula y evitó la situación de bloqueo habitual en muchos de ellos cuando trataban de resolver problemas matemáticos. Esto se debió a que el SGD les brindaba la posibilidad de construir de un modo rápido y sencillo configuraciones geométricas dinámicas, formadas por figuras simples (líneas, segmentos, triángulos, mediatrices, etc.), cuya construcción requería que los estudiantes pensasen en el problema en términos de propiedades matemáticas relevantes. La interactividad del software contribuyó a proveer retroalimentación a los estudiantes en tiempo real sobre las mismas, permitiéndoles adaptar o modificar dinámicamente su comportamiento en función de la información recibida. Es decir, usaban estas configuraciones como punto de partida para identificar conjeturas o relaciones matemáticas (Santos-Trigo (2008). Por su parte, la interfaz de los software utilizados, se caracteriza por su sencillez y por una presentación clara de las herramientas disponibles, así como de los procesos que van teniendo lugar cuando el estudiante va interactuando con el programa.

Después de realizar un curso de formación sobre los dos software y practicar las tareas diseñadas con ambos programas antes de llevarlas al aula, decidimos dedicar únicamente una parte de una sesión a realizar una toma de contacto con los software, mostrando a los estudiantes las nociones básicas para su uso y dejándoles experimentar libremente con las distintas herramientas, desde el convencimiento de su sencillez de manejo. La facilidad de uso y rapidez de respuesta de estos software era otra de las características de los SGD que nosotras consideramos un atributo importante, y dado que nos merecía especial atención, lo analizamos. Durante las sesiones en las que los estudiantes trabajaron con estas herramientas tecnológicas, comprobamos que estábamos en lo cierto, pues la mayoría de los estudiantes manifestó manejarlos con soltura para realizar las tareas diseñadas. Recogimos en los diarios información al respecto, de la que seleccionamos los siguientes fragmentos para ilustrar nuestra afirmación anterior:

Sesión 3 (1º C): Se ha puesto de manifiesto, como ya intuía, que son muy hábiles manejando las TIC y podemos decir que muestran una adecuada alfabetización tecnológica.

Sesión 12 (1º B): Su dominio de las herramientas es bastante bueno y manejan con facilidad los programas, siendo necesario en general mostrarles una única vez cómo se realiza cada acción. En este sentido son bastante autónomos y si no saben cómo realizar alguna construcción con el programa, experimentan primero antes de preguntarme.

Respecto a las ventajas del uso de SGD sobre LP, destacamos entre las observadas en el aula, su función motivadora. El gusto por el trabajo con estos software contribuyó a que los alumnos se implicasen más en las tareas, incidiendo esta función en mayor grado en aquellos estudiantes que no solían trabajar en clase, responsabilizándoles de su propio aprendizaje. De las 13 sesiones que necesitamos para la implementación de la secuencia de enseñanza-aprendizaje diseñada para ser trabajada con TIC, en las tres primeras empleamos el cañón virtual, la plataforma Moodle y visitas guiadas por páginas web como Descartes, para iniciar a los estudiantes en el estudio de los polígonos. Dedicamos las diez sesiones restantes (sesiones 4-13) a que los alumnos trabajaran con SGD en las tareas diseñadas de polígonos y teselaciones del plano. Analizando las entradas de los diarios y fijándonos en este aspecto: función motivadora del software, encontramos ciertas diferencias entre ambos grupos de alumnos. Para 1º B, esta ventaja del software fue haciéndose visible gradualmente, así ejerció una influencia menor (solamente para la mitad de los estudiantes de este grupo) durante las primeras cuatro sesiones de trabajo con SGD, mientras que incidió sorprendentemente en las siguientes sesiones (sesiones 8-13, que suponían el 60 % de las sesiones que los escolares trabajaron con SGD), logrando que la mayoría de los estudiantes se implicasen activamente en las tareas y mostrasen interés por las mismas. Para 1º C, esta ventaja del software resultó ser más notoria, pues salvo en la sesión 4 (primera sesión con SGD), se puso de relieve en las restantes (90 % de las sesiones con SGD) para la casi totalidad de los estudiantes de este grupo. Para ejemplificar estas afirmaciones, exponemos un fragmento del diario de cada grupo, que incluye reflexiones más acerca las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes cuyas transformaciones atribuimos al uso del software, pudiendo considerar estos fragmentos representativos de los incluidos en las demás sesiones en las que observamos estas ventajas del SGD (60 % de las sesiones para 1º B y 90 % de las sesiones para 1º C).

Sesión 10 (1º B): Es sorprendente la evolución que están teniendo algunos de los alumnos de este grupo (11 alumnos), que habitualmente no hacen nada o casi nada en clase de mates y desde

hace unas cuantas sesiones están muy interesados en realizar las actividades propuestas y demandan mi atención continuamente para preguntarme dudas y mostrarme sus resultados (empleando un lenguaje matemático correcto, poco usual en ellos hasta ahora). También se muestran contentos de trabajar con los ordenadores y les gusta experimentar. A unos pocos alumnos (4 alumnos), el trabajo con ordenadores y la realización de estas actividades les está costando bastante y trabajan a ritmo muy lento (como lo han venido haciendo el resto del curso). No obstante, estos alumnos muestran interés por el trabajo realizado, que se ha hecho más latente en estas últimas sesiones. Con esto quiero decir que, mientras un gran porcentaje de los estudiantes está mejorando considerablemente gracias al uso de SGD, también observamos que unos pocos estudiantes se mantienen en su línea de trabajo y no han evolucionado del mismo modo que éstos.

Sesión 7 (1º C): Hoy han estado especialmente trabajadores y además han resuelto la tarea rápidamente (era similar a la anterior). No han desperdiciado el tiempo, y muchos de ellos tras concluir la tarea con éxito han mostrado entusiasmo y alegría, sentimientos que no solían manifestar en clase habitualmente. Me han transmitido su gusto por el trabajo con C.a.R..

En esta sesión me he sentido realizada y satisfecha del esfuerzo y tiempo invertido para diseñar e implementar esta experiencia con SGD, porque mis alumnos no solo han trabajado con interés durante toda la sesión, sino que han hecho descubrimientos, han argumentado sus respuestas y además, el ruido de la clase no ha sido elevado. A pesar de estar con gripe y un poco cansada, la clase se me ha pasado en un abrir y cerrar de ojos, y me he quedado con ganas de seguir trabajando con ellos un ratito más. (Reflexión sobre mi experiencia en el aula durante la sesión).

Lo anteriormente expuesto es una muestra de aspectos que contribuyeron a conformar una visión bastante positiva del trabajo realizado con SGD en el aula y a la decisión de continuar trabajando con este software durante el ciclo 2.

El análisis de la experiencia en el aula durante este ciclo 1, nos llevó también a tomar la decisión de cuál de los dos software elegidos para este ciclo sería el que usaríamos para la experiencia definitiva de tesis. A la hora de elegir entre Regla y Compás (C.a.R.) y Geogebra, a priori consideramos ambos programas adecuados para nuestros propósitos, pero por cuestiones técnicas y burocráticas nos resultaba más sencillo tener acceso al software C.a.R.

que Geogebra⁸⁴. Sin embargo, Geogebra contaba con algunas herramientas que C.a.R. no incluía, al menos, con las versiones con las que estábamos trabajando: las herramientas isométricas. Esta carencia de C.a.R., en principio no suponía ningún problema para las tareas diseñadas para el ciclo 1, pues no íbamos a estudiar tales contenidos con los estudiantes por no pertenecer al currículum de 1º de ESO. Sin embargo, para trabajar los contenidos de mosaicos, en concreto la tarea *Teselar el plano con polígonos regulares y no regulares*, (figura 6-2), nos surgieron problemas inesperados con el programa Regla y Compás. La tarea mencionada requería que los estudiantes probasen a teselar con distintos polígonos regulares y no regulares y, al no contar C.a.R. con la herramienta “polígono regular”, decidimos construir tres macros⁸⁵ de pentágonos, hexágonos y heptágonos regulares, e instalarlas en cada ordenador para que los estudiantes pudiesen realizar teselaciones sin tener que construir los polígonos regulares ellos mismos. La razón era que ello presentaba una doble problemática: los alumnos inicialmente no sabían construir polígonos regulares con el software ni con Lápiz y Papel y, además, el proceso para construir cada uno de estos mosaicos construyendo las teselas (polígonos regulares) una a una sería lentísimo (incluso si lo realizábamos nosotros era un proceso lento que se desviaba de los propósitos de la tarea). Esta fue una de las tareas que nos llevó a replantearnos la elección del software C.a.R. para la experiencia definitiva. En efecto, cuando tratamos de construir las tres macros (con la versión que teníamos), tuvimos bastantes dificultades que intentamos resolver solicitando ayuda a los profesores que nos habían asesorado durante el curso de formación realizado. A pesar de ello, no tuvimos éxito, por lo que tuvimos que improvisar un modo de solventar nuestro problema sin prescindir de esta tarea, que considerábamos bastante acertada para nuestros objetivos. En este punto fue donde Geogebra tomó protagonismo, dado que nos permitió construir polígonos regulares a partir de giros de un vértice⁸⁶ y luego recubrir con ellos el plano usando isometrías. De este modo, pudimos mostrar a nuestros estudiantes estas representaciones (unas correspondientes a mosaicos y otras no), para que ellos las manipularan y extrajeran toda la información que necesitaran. Algunas reflexiones más recogidas en los diarios hacen

⁸⁴ Solicitamos permiso a las autoridades educativas para instalar en los ordenadores del centro ambos software y nos respondieron que dichos programas estarían disponibles para el curso siguiente en el menú de aplicaciones matemáticas, tras la actualización que ellos llevarían a cabo tras finalizar el presente curso.

⁸⁵ Una macro es una construcción realizada con el software, que una vez creada, podía emplearse en cualquier nueva construcción simplemente seleccionándola en la barra de herramientas.

⁸⁶ Trabajamos con la versión 2.6 de Geogebra online, sin necesidad de instalarla, que no contaba con la herramienta “Polígono regular”, por eso los construimos usando rotaciones. Versiones posteriores de este software, como la 3.0 ya incorporan esta herramienta.

alusión a esta limitación de C.a.R. y a la potencialidad de Geogebra para solucionar el problema presentado:

Llevo unos días bastante angustiada porque para la última actividad necesito usar macros de pentágonos, hexágonos y heptágonos regulares con C.a.R. y el programa me da error al crearlos, además tengo que construirlos en cada uno de los ordenadores de los alumnos, por lo que el proceso es bastante tedioso y requiere mucho tiempo. He solicitado ayuda a los tutores del curso de formación sobre SGD que he realizado recientemente, pero no he obtenido ninguna solución, así que tendré que buscar otras alternativas para poder llevar esta tarea al aula.

Sesión 10 (1º C): Tras otorgarles un tiempo para que ellos intentaran construir polígonos regulares de más de 4 lados (con ayuda del dragging para arrastrar los vértices) y comprobasen que no es sencillo, ni puede hacerse con exactitud sin un protocolo de construcción que asegure la regularidad, he usado el cañón virtual para mostrarles un pentágono, hexágono y heptágono regular y cómo se teselaría con cada uno de ellos usando el programa Geogebra. Después, cada pareja de estudiantes ha abierto este archivo con Geogebra en su ordenador y han interactuado con estas construcciones realizando muchos de ellos mediciones de los valores de los ángulos para llegar a una argumentación más formal, tal y como se les solicitaba en la última pregunta de la tarea.

La posibilidad de trabajar con software en el ciclo 2 sin problemas técnicos (sin tener que trabajar con las versiones online o live de estos programas, que restaba unos minutos de cada sesión para la instalación de la máquina virtual Java, etc.), así como las ventajas del uso de Geogebra sobre C.a.R. para trabajar contenidos geométricos, nos llevó a la consideración de usar Geogebra durante el ciclo 2 o experiencia definitiva.

Las restantes herramientas tecnológicas empleadas: la plataforma Moodle, el cañón virtual, el programa Power Point, las páginas de Descartes y los applets contenidos en ellas, resultaron efectivas a diversos efectos. Por un lado, nos permitieron ubicar las tareas y cuestionarios. También nos sirvieron para presentar a los estudiantes ciertos contenidos en sus pantallas de un modo estructurado (presentaciones con Power Point o a través de unidades didácticas sobre los contenidos seleccionados ubicadas en la plataforma Descartes), fomentando el debate. Además, les brindaron la oportunidad de manejar y manipular construcciones dinámicas (applets), para comprender ciertas nociones y propiedades matemáticas asociadas a los contenidos trabajados. Estas herramientas ya habían sido utilizadas durante el ciclo 0, y

habíamos comprobado su bondad en dicha investigación previa, por ello, nos centramos en esta ocasión en el análisis de aquellas tecnologías que incluimos como novedades para este ciclo 1.

Respecto a la segunda parte de este objetivo, referente a la adecuación de la secuencia de enseñanza basada en el uso de estos programas informáticos, podemos decir que resultó adecuada para introducir a nuestros estudiantes en el mundo de los polígonos y de las teselaciones. Los estudiantes mostraron las dificultades esperadas en las tareas más complejas, que en su mayoría superaron con las sugerencias que teníamos previstas como ayudas. Las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de las tareas, salvo algún cambio puntual, se ajustaron a las que a priori tuvimos en cuenta para el diseño de las mismas. Creemos que la resolución de las tareas diseñadas contribuyó a que los estudiantes aprendiesen estos contenidos de un modo autónomo y significativo; es decir, logramos que interiorizaran las características y propiedades matemáticas asociadas a los polígonos, llegando muchos estudiantes a razonar y obtener por sí mismos ciertas fórmulas, en lugar de memorizarlas sin comprenderlas.

Consideramos estas tareas adecuadas para 1º de ESO, por trabajar contenidos geométricos muy básicos. Sin embargo, la potencialidad manifiesta de Geogebra nos llevó a considerar la posibilidad de diseñar otras tareas más complejas para niveles superiores, con las que ampliar los contenidos de teselaciones y, a la vez, trabajar los movimientos del plano. Esta reflexión también quedó reflejada en los diarios:

Para la experiencia definitiva, que se llevará a cabo durante el próximo curso, sería interesante que los alumnos trabajaran previamente y en profundidad con Geogebra las isometrías (traslaciones, giros y simetrías), para después ser capaces de construir por sí mismos los polígonos regulares, los mosaicos regulares y otros más complejos, y llegar a construir mosaicos con teselas más originales (deformando cuadriláteros, por ejemplo), así como a reconocer el motivo mínimo de una teselación. Por ello, creemos es conveniente desarrollarla con estudiantes de 3º de ESO, aprovechando que las isometrías y teselaciones se trabajan por primera vez en este nivel, siguiendo el currículo vigente de matemáticas, y también la mayor madurez y desarrollo evolutivo de estos estudiantes. En este caso, al tratarse de grupos de 1º de ESO, sin nociones geométricas previas, y teniendo en cuenta su madurez intelectual, así como el currículo de este nivel, no hemos creído conveniente ampliar los contenidos geométricos básicos trabajados.

Objetivo 2: Diseñar instrumentos de análisis de actitudes y competencias y comprobar su adecuación para la fase de observación así como la bondad de la información extraída para la fase de reflexión

Centraremos el análisis en los instrumentos que empleamos para la recogida de datos que son novedad para este ciclo, pues los diarios, los cuestionarios de actitudes, los buzones de sugerencias y los informes o protocolos escritos de los estudiantes de cada tarea, ya fueron empleados durante el ciclo 0 y resultaron ser muy útiles para nuestros objetivos de investigación (García y Romero, 2007, p.185).

Empezamos por los archivos de programa de C.a.R. y Geogebra de cada tarea, que cada pareja de estudiantes envió tras finalizarla. Hemos comentado anteriormente la adecuación de estos software para su uso en el aula; ahora, queremos añadir que también cuentan con herramientas que nos permiten conocer el modo en que los estudiantes realizaron cada tarea: la herramienta “protocolo de construcción”. Ésta ha sido especialmente útil para comprobar los pasos dados en cada tarea y, de este modo, uniendo esta información con la recogida en los informes escritos y en las grabaciones de audio, poder reconstruir de una manera bastante fiable la estrategia de resolución seguida por cada pareja de estudiantes. Esta forma de evaluar tiene ventajas respecto a la tradicional, en la que se dispone únicamente de la información plasmada en el informe o respuesta escrita de los estudiantes, que no permite conocer en detalle los pasos intermedios, debiendo inferir cómo han llegado a la solución, pues son muchos los estudiantes que sólo escriben su respuesta final y no la estrategia seguida.

Las grabaciones de audio que yo realicé durante algunas sesiones con una grabadora manual, y en las que recogía los razonamientos que las parejas de estudiantes daban como respuesta a mis preguntas referentes a la tarea que estaban realizando, resultaron ser de utilidad para el análisis de las competencias. No obstante, el hecho de que se produjesen sólo en momentos puntuales de cada sesión, conllevaba una pérdida de información que consideramos muy valiosa, dado que no sólo nos permitía informar más detalladamente del desarrollo de las competencias matemáticas, sino también de las actitudes relacionadas con las matemáticas evidenciadas durante cada sesión trabajada con SGD.

Las grabaciones en vídeo de la mayoría de las sesiones, se limitaban a los minutos en los que realizábamos la puesta en común de las distintas estrategias de resolución seguidas por los

estudiantes, y se realizaba colocando la cámara en la parte delantera del aula, de modo que intentábamos captar un plano general de la clase. En las cuatro sesiones que consideramos más interesantes, contamos con la ayuda de un profesor de secundaria, también de matemáticas, que estuvo grabando en vídeo las sesiones completas desplazándose por el aula, tratando de recoger extractos de conversaciones de todas las parejas de estudiantes y de los diálogos que manteníamos cuando éstas interactuaban conmigo. Del análisis de esas grabaciones, extrajimos varias conclusiones. Por una parte, las capturas de vídeo de las pantallas de ordenador no fueron demasiado buenas, pues la imagen de la pantalla parpadeaba; sin embargo, nos pareció que las conversaciones mantenidas entre los estudiantes cuando trabajaban de modo autónomo tenían gran riqueza para dar respuesta a nuestra conjetura de investigación. Por otra parte, en estas sesiones observamos que la presencia de este profesor (agente externo) producía ciertos cambios en algunos estudiantes; es decir, tenía cierto efecto en su comportamiento y actividad durante la sesión. Asimismo, algunos estudiantes interactuaban con el profesor para preguntarle dudas o solicitar su ayuda cuando yo estaba ocupada atendiendo a otras parejas de estudiantes.

Resumiendo, consideramos la triangulación de la información contenida en los archivos de programa (C.a.R. o Geogebra) y la recogida de los diálogos entre estudiantes muy interesante, para informar de las actitudes y competencias que los estudiantes estaban manifestando cuando resolvían cada tarea. Dadas mis limitaciones, pensamos que una forma de acceder a esta información, sin necesidad de solicitar ayuda externa de otras personas para realizar las grabaciones y, a la misma vez, reduciendo el impacto que éstas provocarían en los estudiantes, sería la de proporcionar un auricular con micrófono para cada estudiante y utilizar la grabadora de audio incorporada en cada ordenador. De este modo, podría tener acceso a los diálogos e intervenciones de cada pareja de alumnos mientras trabajan con el programa, para poder analizar qué actitudes y competencias manifiestan durante cada sesión de trabajo con el software. Recogería estos datos en formato comprimido, para evitar que el tamaño de los datos sea excesivo para su almacenamiento durante la experiencia. Al recoger estos diálogos en audio, las grabaciones de vídeo que realizaría se limitarían a las puestas en común de cada tarea, en las que los estudiantes exponen sus estrategias y resultados y éstas son discutidas en gran grupo. También sería interesante que un investigador externo llevase a cabo una entrevista con cada grupo de estudiantes al finalizar la implementación de la secuencia de enseñanza diseñada para ser trabajada con SGD, que sería registrada en vídeo. Esta entrevista sería semiestructurada, para indagar sobre nuestros focos de interés, pero a la

vez, permitir que los estudiantes aporten sus puntos de vista de la experiencia de trabajar Geometría con TIC.

Los instrumentos diseñados para la recogida de información que sufrieron cambios respecto de nuestro trabajo previo fueron las parrillas de observación de actitudes y competencias. Para cada una de las tareas que los estudiantes realizaron durante las 13 sesiones en las que implementamos la secuencia de enseñanza diseñada, contamos con una parrilla de observación que tenía una parte referente a competencias, específica para cada tarea y otra relativa a actitudes matemáticas, actitudes hacia las matemáticas y hacia las TIC, que era la misma para todas las tareas.

Las parrillas nos resultaron muy sencillas de completar, si bien su análisis nos llevó a reflexionar sobre su diseño y la forma de mejorarlo, de modo que aumentase la efectividad de este instrumento de observación. Decidimos que debíamos buscar un modo de dotar de mayor rigor nuestra asignación de indicadores a cada competencia y un modo de lograrlo era realizar un Análisis Didáctico (Gómez, 2002) de los contenidos a trabajar. Este método nos permitiría elaborar una secuencia de enseñanza mejorada, que incluyese los contenidos geométricos antes mencionados (isometrías y teselaciones del plano), adaptada al nivel curricular considerado para la experiencia definitiva (3º ESO), garantizando de este modo el análisis de competencias que pretendíamos hacer durante su implementación en el aula. Fruto del Análisis Didáctico realizado, los indicadores de las parrillas estarían especificados en términos de las capacidades a desarrollar por los estudiantes en cada tarea y contaríamos con un nuevo instrumento para el análisis de competencias: una tabla de asociación capacidades-competencias, contrastada con otros expertos, que proporcionaría mayor validez y fiabilidad a la recogida y posterior análisis de datos. Respecto a las actitudes, y en ausencia de un método paralelo al Análisis Didáctico para el ámbito actitudinal, sería necesaria una nueva revisión documental nos aportase ideas para reconfigurar la parrilla inicial, obteniendo una nueva versión más completa para el ciclo 2, que en capítulo siguiente analizaremos. Al indagar sobre las parrillas de actitudes, nos planteamos algunos cambios respecto al cuestionario de “Actitud hacia las mates” usado durante los ciclos 0 y 1, pues no incorporaba ítems referentes a actitudes matemáticas. También la revisión documental podría arrojar luz en este aspecto, de modo que el cuestionario empleado para el ciclo 2 fuese más adecuado que el empleado hasta ahora.

Recogemos en la siguiente tabla los instrumentos que modificamos después del ciclo 1 y que emplearemos durante el ciclo 2:

Tabla A-3. Esquema-resumen de las modificaciones realizadas, después del ciclo 1, en los instrumentos de recogida de datos que serán empleados en el ciclo 2

Instrumentos ciclo 1	Instrumentos ciclo 2
Cuestionario “Actitud hacia las matemáticas” (sólo actitudes hacia las matemáticas)	→ Cuestionario “Actitud hacia las mates” (actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas)
Parrilla de observación conjunta para actitudes y competencias	→ Parrilla de observación de actitudes relacionadas con las matemáticas (válida para todas las tareas)
	→ Parrillas de observación de competencias matemáticas basadas en el Análisis Didáctico (específicas para cada tarea)

Objetivo 3: Describir las transformaciones que la implementación de dicha secuencia provoca en las actitudes relacionadas con las matemáticas en alumnado de secundaria

Analizamos las respuestas de los cuestionarios con SPSS, revisamos los archivos de programa de las tareas más interesantes y las aportaciones de los estudiantes a los buzones de sugerencias. También analizamos los datos recogidos a través de los diarios, las parrillas de observación de actitudes y algunas de las grabaciones de vídeo y audio. El análisis realizado no ha sido tan minucioso como el que realizaremos en el ciclo 2, aunque sí que nos ha permitido informar de las transformaciones que se produjeron en las actitudes de los estudiantes relacionadas con las matemáticas como parte de nuestra labor evaluadora como docente, más que como investigadora. En lo que sigue exponemos los resultados de la triangulación de los análisis realizados para cada uno de los instrumentos antes mencionados, tratando de exponerlos de la forma clara y concisa.

Comenzamos por las **actitudes matemáticas**, para las que triangulamos la información obtenida de los diarios, las parrillas de observación, los protocolos de construcción de algunas tareas con SGD y las grabaciones de audio y vídeo asociadas a dichas tareas.

Observamos diferencias en la evolución de las distintas actitudes matemáticas objeto de estudio en este ciclo, que mostramos en el siguiente gráfico, en el que hemos asociado a cada

actitud el porcentaje de sesiones con SGD en las que los estudiantes a nivel grupal las evidenciaron:

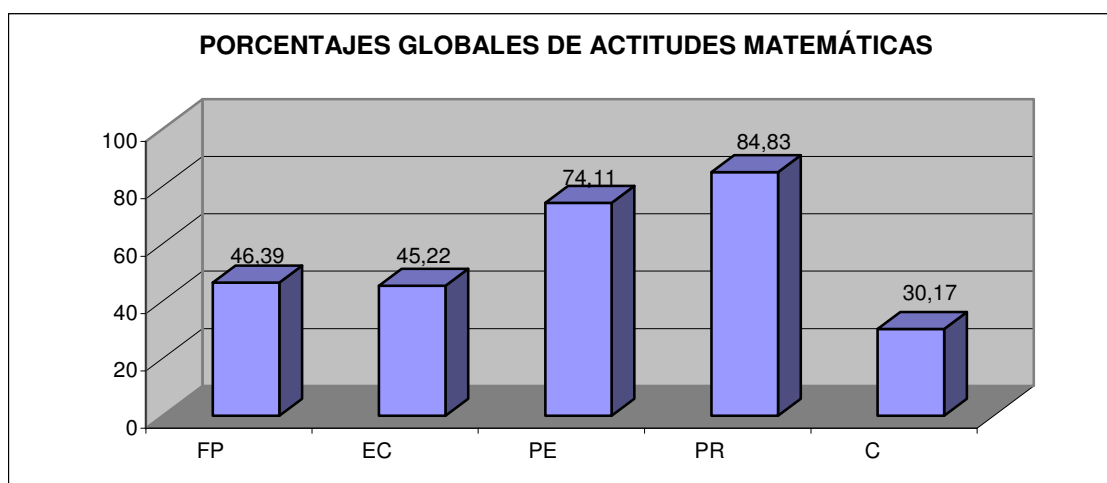


Figura A-3. Porcentajes de sesiones en las que los estudiantes a nivel grupal evidenciaron cada actitud matemática

Los porcentajes anteriores están extraídos del análisis de las parrillas de observación, que rellenamos durante las sesiones en las que trabajamos con SGD, y han sido confirmados por las entradas de los diarios de ambos grupos correspondientes a dichas sesiones. Estas cifras ponen de relieve que durante el trabajo con los software C.a.R. y Geogebra destacaron, las actitudes Precisión y Rigor (PR) y Perseverancia (PE), por encima de las restantes. No eran actitudes que los estudiantes evidenciasen habitualmente cuando trabajábamos la resolución de problemas, y por ello, merecieron nuestra atención. Creemos que los atributos de los programas, que contribuyeron al desarrollo de estas dos actitudes, fueron la constructividad y la facilidad de manejo. La posibilidad de poder “hacer cosas” los mantuvo comprometidos con las tareas durante más tiempo, lo que se tradujo en una mayor Perseverancia a la hora de resolver los problemas. La facilidad de uso de los SGD, contribuyó a que fuesen más rigurosos y precisos al realizar representaciones y cálculos, pues necesitaban menos tiempo que con LP y conseguir cierto grado de Precisión y Rigor no les suponía un esfuerzo adicional, lo que permitió que valorasen más esta actitud.

Las actitudes Flexibilidad de Pensamiento (FP) y Espíritu Crítico (EC), no alcanzaron niveles muy elevados, es decir, no fueron manifestadas por la mayoría de los estudiantes durante todas las sesiones, aunque sí que observamos una transformación de las mismas gracias al trabajo con TIC. Esta transformación fue diferente a la experimentada por las actitudes PR y PE, dado que, mientras que éstas las observamos en la mayoría de los estudiantes desde el

inicio de las tareas con SGD y a lo largo de toda la experiencia, actitudes como FP y EC fueron evolucionando gracias al trabajo continuado con el software (según la información recogida en las parrillas de observación y en los diarios grupales). Es decir, inicialmente eran evidenciadas por un porcentaje reducido de estudiantes, pero a lo largo de las sesiones este porcentaje fue en aumento hasta alcanzar en las 4 últimas sesiones valores en torno al 60 % y 70 %, respectivamente. En el caso de la FP, la constructividad del SGD fue uno de los atributos causantes de la mejora, pues la posibilidad de construir y testar hipótesis de un modo rápido y sencillo, les empujó a buscar distintos caminos o estrategias de resolución. La interactividad de estos programas propició la mejora del Espíritu Crítico de nuestros estudiantes, puesto que el feedback que éstos recibían del software, cada vez que realizaban alguna acción, les permitía ser conscientes de la bondad de su estrategia y de sus cálculos y representaciones, haciéndoles reflexionar sobre los mismos cuando éstos no eran los esperados y apreciaban algún error.

La actitud que menos evolucionó fue la Creatividad (C), puesto que únicamente un porcentaje reducido de los estudiantes la manifestaron a lo largo de las sesiones con SGD. Observamos dos grupos diferenciados: estudiantes que se mostraron creativos siempre o casi siempre y los que no evidenciaron esta actitud nunca o casi nunca. Parece que el uso prolongado del SGD por sí solo no logró modificar esta actitud, como sucediese con las anteriores.

Las entradas de los diarios de 1º B y 1º C durante las sesiones en las que trabajamos con SGD, ofrecen información acerca de las actitudes matemáticas, en la línea de la que a continuación exponemos, que ha sido extraída de la sesión 8 del diario de 1º C, y que ejemplifica las conclusiones anteriores:

En lo referente a actitudes matemáticas, vengo observando un gran avance en algunas parejas de estudiantes, que realizan las tareas rápidamente, demostrando buen dominio de los contenidos y buscando distintos caminos de resolución, derrochando flexibilidad de pensamiento y creatividad (por ejemplo, buscan distintas formas de descomponer los polígonos). Además cuando las concluyen, me solicitan más actividades para continuar trabajando en clase, mientras esperan a que terminen sus compañeros. El resto de los estudiantes de la clase, avanzan más lentamente y aunque no llegan a buscar distintas estrategias de resolución, sí que se preocupan de resolver los problemas de un modo preciso, y cuando detectan alguna anomalía (por ejemplo, a algunos les salía que la suma de los ángulos de un triángulo era 179° , otros obtienen valores distintos para la suma de los ángulos interiores dos polígonos con igual número de lados), conscientes de que se

han equivocado, buscan el error y no cesan hasta llegar a una solución que les convenza, evidenciando espíritu crítico y perseverancia.

Respecto a las **actitudes hacia las matemáticas**, triangulamos la información obtenida de los análisis de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios, los diarios, las parrillas, y sus aportaciones a los buzones de sugerencias.

El análisis del cuestionario “Actitud hacia las mates” con SPSS 15.0, reveló diferencias significativas⁸⁷ entre el Pretest y el Postest en las componentes cognitiva (ítem 5), afectiva (ítems 11, 12, 14 y 18) y comportamental (ítems 3 y 7). Los estudiantes, después del trabajo con SGD, afirmaron tener menos dificultades para entender las matemáticas, divertirse más en clase, resultarles menos pesado estudiar matemáticas, sentir mayor satisfacción al realizar trabajos y problemas de matemáticas, sentir más interés por las matemáticas y tener una visión menos negativa de la utilidad de las mismas en la vida real.

Respecto al cuestionario “Me interesa tu opinión” en el que preguntábamos a los estudiantes acerca de su opinión del trabajo realizado con TIC, los resultados apoyaron los obtenidos en el cuestionario anterior, como ahora veremos. Según las puntuaciones asignadas a los ítems y la codificación realizada, consideramos que una puntuación media superior a 3 respondía a una actitud positiva sobre el trabajo realizado con TIC en el aula. Hallamos las puntuaciones medias obtenidas por cada estudiante en las componentes cognitiva, afectiva y comportamental (hallando la media aritmética de la puntuación obtenida en los ítems que hacían referencia a cada componente) y también para la actitud hacia el trabajo colaborativo y agrupamos en 4 grupos:

⁸⁷ Encontradas al someter a los datos a una prueba de comparación de medias (prueba *t de student* para muestras relacionadas) y a dos pruebas *no paramétricas* para 2 muestras relacionadas (tipos *Wilcoxon* y *signos*)

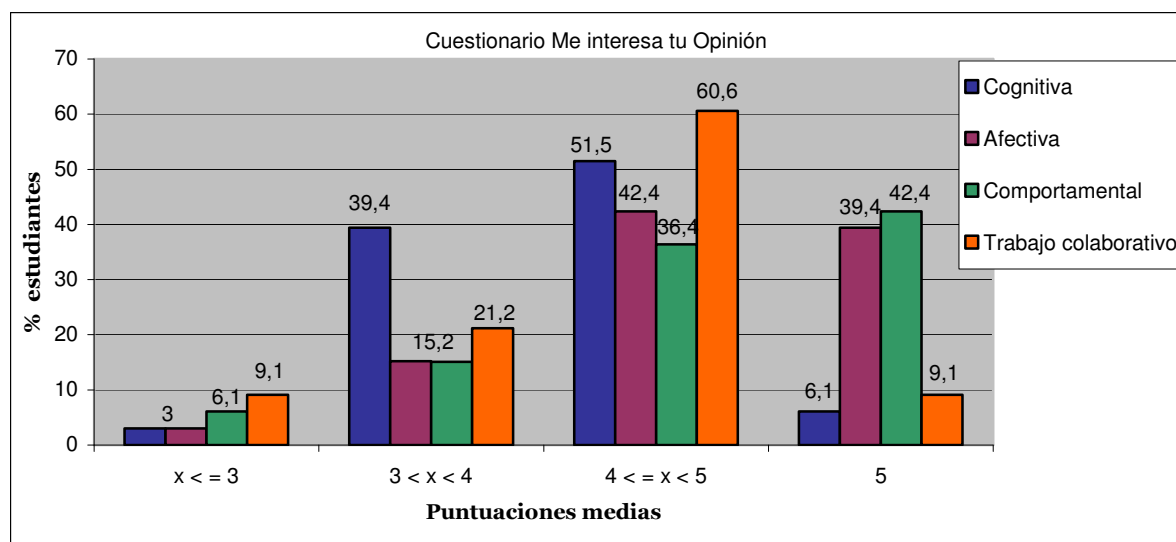


Figura A-4. Porcentajes de estudiantes según puntuaciones medias obtenidas en ítems del cuestionario MIO

Observamos que los porcentajes de estudiantes con una actitud negativa hacia el trabajo realizado con TIC en las distintas componentes fueron bajos, inferiores al 10 %, concordando las respuestas de este cuestionario con las del otro cuestionario analizado. Ambos reflejaron una visión más positiva de los estudiantes durante el trabajo con SGD, tanto de gusto por las matemáticas, como de implicación en las tareas. Además, muchos de ellos esgrimieron tener menos dificultades cognitivas, gracias a la ayuda del software. Otro aspecto que los estudiantes consideraron positivo fue el del trabajo colaborativo, como se aprecia también en la figura A-4.

El análisis mostrado de los cuestionarios concuerda con el análisis de los diarios y con las aportaciones de los estudiantes a los buzones de sugerencias. El 76.32 % de las entradas de los diarios correspondientes a las sesiones en las que trabajamos con TIC, hacen referencia a una actitud hacia las matemáticas y hacia el uso de TIC positiva en la mayoría de los estudiantes de cada grupo, algunas de las cuales ya incluimos como ejemplo en páginas anteriores. El 96.15 %, es decir, 25 de las 26 opiniones recogidas en los buzones de sugerencia de 1º B y 1º C, expresan actitudes positivas hacia las matemáticas y hacia el uso de TIC para trabajar contenidos matemáticos. A continuación mostramos algunas aportaciones de los estudiantes a los buzones de sugerencias:

Me ha gustado mucho, y además, he atendido más desde que hemos estado con los ordenadores. Con los ordenadores he aprendido más. He aprendido mucho con los ejercicios y me lo he pasado muy bien. ¡Me ha encantado! (Buzón de sugerencias de 1º B)

Bueno a mí me ha encantado trabajar con los ordenadores, me ha hecho conocer facetas de las matemáticas que no conocía. La asignatura me ha resultado más fácil, los ordenadores me han facilitado el trabajo, yo creo que ha sido una buena experiencia. (Buzón de sugerencias de 1º B)

Yo quiero decirle que es mejor trabajar con el ordenador por que los alumnos se emplean a fondo. Para el trabajo con el ordenador no les importa lo que piensen los demás y disfrutan trabajando y haciendo ejercicios con los programas. Por eso, opino que es mejor utilizar el ordenador para el bien de los alumnos. Por eso, hablando de mí, esto ha sido una experiencia fabulosa y muy divertida. Por eso, yo te hago esta pregunta. ¿Lo haremos otro año? (Buzón de sugerencias de 1º C)

A modo de síntesis de todo lo anterior, podemos decir que la implementación de la secuencia de enseñanza diseñada basada en el uso del SGD dio sus frutos y observamos transformaciones actitudinales positivas de la mayoría de los estudiantes de ambos grupos, que era y sigue siendo uno de los objetivos de nuestra investigación. Con vistas a la experiencia definitiva o ciclo 2, consideramos pertinente el diseño de otra secuencia de tareas que los estudiantes realizarían con LP sin emplear SGD, para poder contrastar las actitudes iniciales de los estudiantes con las evidenciadas durante el trabajo con las herramientas tecnológicas. De este modo podremos describir, no sólo las transformaciones experimentadas por los estudiantes en sus actitudes relacionadas con las matemáticas durante el trabajo con SGD, sino también cuáles son los factores o características de estos software (atributos, ventajas y limitaciones de la figura 2-1) más relevantes para dicha evolución y las actitudes en las que ejercen una mayor incidencia.

Objetivo 4: Describir el desarrollo de las competencias matemáticas que se produce en los estudiantes de secundaria al implementar la secuencia anteriormente descrita

Del mismo modo que para las actitudes y con la misma finalidad, triangulamos el análisis de la información de las parrillas de observación de competencias con el de los diarios, los informes escritos de las tareas y los archivos de programa de Regla y Compás y Geogebra. Analizamos algunas de las grabaciones de audio y vídeo de algunos estudiantes en particular y también de cada grupo completo (puestas en común de las tareas). Elegimos un par de tareas para las que llevamos a cabo un análisis de competencias más exhaustivo, que fueron la primera tarea y la última que realizaron con SGD. Exponemos a continuación una parte del

análisis que realizamos para esas dos tareas, que nos mostraron el desarrollo de las distintas competencias alcanzado por nuestros estudiantes.

Los estudiantes realizaron la tarea “Ejercicios sobre triángulos con Regla y Compás” (figura A-1) con C.a.R., siendo ésta la primera tarea que realizaron con SGD. De esta sesión destacamos la habilidad de nuestros estudiantes manejando las TIC, que nos llevó a afirmar que mostraban una adecuada alfabetización tecnológica. Fueron necesarias dos sesiones para terminar esta tarea y llevar a cabo la puesta en común, siendo estas sesiones muy prolíficas en cuanto al desarrollo de competencias de algunos de nuestros estudiantes, como muestran los diarios y las transcripciones de audio y vídeo, de los que incluiremos algunos de los fragmentos más interesantes.

La primera parte de la tarea consistía en la construcción de los triángulos de la ficha con C.a.R., para después, aprovechando sus herramientas, hacer las mediciones pertinentes (lados y ángulos) que les permitiesen clasificarlos y responder a las cuestiones de la tarea. Para su correcta realización requería de las siguientes competencias a su nivel de desarrollo más bajo (nivel 1 o reproducción): Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar, Comunicar, Plantear y Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos. La segunda parte de la tarea consistía en argumentar cuáles de los tipos de triángulos que no habían construido, existían, y cómo podían asegurar la existencia o inexistencia de tales polígonos. Debían poner de relieve las competencias Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar a un nivel medio de complejidad (nivel 2 o conexión) pues debían razonar de manera simple, cuestionándose qué podía o no pasar y por qué, y ser capaces de explicar las relaciones que encontrasen. Resumiendo, la tarea requería un nivel 1 de todas las competencias, a excepción de Pensar y Razonar, Argumentar y Comunicar, que exigían un nivel 2 de dominio o desarrollo.

Analizando las parrillas de observaciones de competencias obtuvimos los siguientes resultados, que después corroboramos con la información extraída de las entradas de los diarios de cada grupo y del análisis de las tareas (protocolos escritos de resolución de las tareas junto con los archivos de C.a.R.). De entre las competencias objeto de estudio, durante esta primera tarea con C.a.R., podemos diferenciar dos grupos atendiendo al desarrollo alcanzado por los estudiantes:

① Las competencias Representar y Uso de Herramientas y Recursos, que fueron desarrolladas por el 92.3 % de los estudiantes en el nivel requerido por la tarea.

② Las restantes competencias, que fueron movilizadas por los estudiantes con diferente maestría. Alcanzaron el nivel máximo exigido por la tarea: el 50.28 % de los estudiantes en Plantear y Resolver Problemas, el 30.77 % en la competencia Pensar y Razonar, y el 15.38 % en Argumentar-Demostrar y Comunicar. En el lado opuesto, es decir, estudiantes que se situaron por debajo del nivel mínimo exigido (nivel 1) de las anteriores competencias, se encontraban en torno al 40 % de los alumnos. Contamos, resumidamente, cómo realizaron esta tarea los estudiantes, según el desarrollo de competencias alcanzado:

- Los estudiantes que demostraron un desarrollo adecuado de todas sus competencias, logrando argumentar y comunicar sus hallazgos. Un ejemplo de tal comportamiento es el siguiente extracto de la puesta en común de dicha tarea en el grupo de 1° C, recogido en vídeo, en la que participaron varios estudiantes:

Profesora: ¿Podría un triángulo equilátero ser rectángulo?

Estudiante X: Rectángulo no podría ser porque todos los lados tienen que sumar 180° y entonces, para que sea rectángulo los lados tendrían que ser de 90°

Profesora: ¿Podría un triángulo equilátero ser obtusángulo?

Estudiante Y: No, porque uno tiene que tener más de 90° y si tiene más de 90° no pueden sumar 180° siendo iguales

Profesora: ¿Podría un triángulo equilátero ser acutángulo?

Estudiante Z: Ése sí, porque todos sus ángulos miden menos de 180° , miden 60° y suman 180°

- Los alumnos que ni siquiera llegaron al nivel mínimo de las competencias anteriores, en su mayoría, solamente representaron los triángulos, realizaron las mediciones correctamente y probaron visualmente la existencia o no de los tipos de triángulos solicitados intentando representarlos, pero no llegaron a argumentar por qué no existían algunos de ellos. No lograron hacer razonamientos en términos matemáticos y algunos de ellos no fueron capaces de clasificar los triángulos según sus características.

La otra tarea analizada fue “Teselar el plano con polígonos regulares y no regulares” (figura A-2), que fue la última que los estudiantes realizaron usando SGD, en este caso C.a.R. y Geogebra. Fueron necesarias dos sesiones y media para realizar esta tarea y llevar a cabo la

puesta en común, demostrando la mayoría de los estudiantes a lo largo de estas sesiones un adecuado nivel de desarrollo de sus competencias.

En la primera parte de la tarea, debían construir sus propias teselaciones con los polígonos sugeridos en la ficha de la actividad usando C.a.R.. Después debían usar Geogebra para trabajar con un archivo que incluía las representaciones de posibles teselaciones hechas con pentágonos, hexágonos y heptágonos regulares. De sus propias construcciones y de las que nosotros les facilitamos, tenían que extraer información para responder a las preguntas finales de la tarea. Esta actividad requería que los estudiantes movilizaran las competencias Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar a un alto nivel, y exigía un nivel medio de complejidad del resto de las competencias para poder resolverla con éxito.

Analizando los mismos instrumentos ya mencionados para la otra tarea, extrajimos los siguientes resultados, que nuevamente nos llevaron a diferenciar grupos de competencias atendiendo al desarrollo alcanzado por los estudiantes:

① Las competencias Modelar, Representar y Uso de Herramientas y Recursos, fueron desarrolladas por el 89.74 % de los estudiantes en el nivel requerido por la tarea (nivel 2).

② Las competencias Comunicar y Plantear y Resolver Problemas, fueron movilizadas respectivamente por el 79.49 % y el 61.54 % de los estudiantes en el nivel máximo requerido (nivel medio), mientras que los restantes estudiantes manifestaron un nivel de desarrollo bajo.

③ Las competencias Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar, fueron desarrolladas por los siguientes porcentajes de estudiantes en cada nivel:

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Pensar y Razonar	10.26	33.33	56.41
Argumentar-Demostrar	15.38	30.77	53.85

Tabla A-4. Porcentajes de estudiantes situados en cada nivel

He tratado de recomponer, con extractos de las grabaciones de audio y vídeo y de los diarios, mis observaciones del desarrollo de las competencias de los estudiantes durante las dos sesiones y media en las que trabajaron esta tarea:

Sesión 1ª Tarea: Han comenzado construyendo teselaciones con C.a.R. empleando distintos polígonos, actividad que no exigía grandes razonamientos o argumentaciones, no obstante,

algunos estudiantes me han sorprendido gratamente (una pareja argumentaba que con dos triángulos siempre podemos formar un cuadrilátero y cualquier cuadrilátero tesela, otra pareja tuvo problemas para usar la macro “triángulo regular” para construir mosaicos con estos polígonos, pero en lugar de solicitar mi ayuda consideraron otra alternativa y construyeron la teselación usando tramas de líneas paralelas en lugar de construirla polígono a polígono). Casi todos los alumnos me han comunicado oralmente los polígonos con los que es posible teselar y con los que no. La resolución del problema tendrá lugar en sesiones posteriores, pero durante esta sesión hemos comprobado como todos los estudiantes han modelado la situación planteada por el problema en términos matemáticos. La representación gráfica de distintos polígonos, así como las representaciones de éstos girados o trasladados, necesarias para ir rellenando el plano, no han supuesto dificultad alguna para casi ningún estudiante. En cuanto al manejo de herramientas y recursos, debo decir que estoy sorprendida con algunos grupos, que han usado herramientas no empleadas hasta ahora de C.a.R. por iniciativa propia, para embellecer sus diseños, además de mostrar gran dominio del dragging, pues casi logran obtener los polígonos regulares arrastrando los vértices.

Sesión 2ª Tarea: Tras haber realizado las construcciones de mosaicos, ahora deben responder a las preguntas finales de la tarea, que exigen que argumenten sus respuestas. Aproximadamente la mitad de los alumnos ha demostrado haber evolucionado en su forma de pensar y razonar y también a la hora de argumentar, pues enlazan las representaciones gráficas con las definiciones y con las propiedades geométricas de cada tipo de polígonos, establecen relaciones entre sus elementos y llegan a sus propias conclusiones, que correctas o no, son argumentadas por ellos en términos matemáticos. La otra mitad de los estudiantes, han experimentado las dificultades que yo esperaba llegados a este punto, y tienen dificultades para encontrar la argumentación buscada, lo que ha conducido a muchos de ellos a una situación de bloqueo. He optado por dejarles tiempo para que pensaran y no darles yo la solución, y algunos de ellos, al concluir la sesión ya comenzaban a tener una idea de cómo resolver el problema. En la siguiente sesión les daré las sugerencias planificadas, a modo de ayuda, para superar el bloqueo de aquellos que por sí solos no logren salir.

Sesión 3ª Tarea: Las indicaciones que he dado a la mayoría de los grupos que no habían sido capaces de encontrar por sí solos una estrategia de resolución han sido mínimas (observad un vértice, ¿qué ocurre en los casos en los que no hay huecos? ¿y en los que sí hay? ¿en los que se solapan las teselas?) y han contribuido a que continuasen trabajando en la tarea de modo satisfactorio. No obstante, algunos estudiantes hacían razonamientos incorrectos, que al

discutirlos conmigo, les han llevado a pensar otras respuestas y cuando estaban convencidos de ellas las han argumentado, continuando este proceso hasta que han alcanzado una respuesta acertada. De este modo, a excepción de unos pocos alumnos, el resto de los estudiantes han comprendido y averiguado, manifestando mayor o menor dificultad, cuál es la condición matemática para poder teselar, han argumentando con mayor o menor maestría su respuesta final, logrando así resolver el problema planteado en la tarea. Además, cuestionan las conclusiones o afirmaciones de otros compañeros, y las aceptan o las rebaten con sus propios argumentos; comprenden cuándo se han equivocado y en ese caso, intentan resolver el problema de nuevo. En las restantes competencias, no ha habido grandes diferencias entre los niveles de desarrollo de unos estudiantes y otros, pues como ocurriese en las sesiones anteriores, prácticamente todos han alcanzado el nivel exigido a la hora de Modelar, Representar, y Usar las herramientas y recursos tecnológicos.

Haciendo un análisis de los niveles alcanzados por cada estudiante en la tarea inicial y final con SGD antes analizadas, comprobamos como el 89.74 % de los estudiantes experimentó una mejora en el desarrollo de sus competencias matemáticas, gracias al uso continuado de estas herramientas tecnológicas durante la implementación de la secuencia de enseñanza planificada. La evolución de los estudiantes no fue homogénea; así, en unos casos nos pareció una mejora considerable y en otros sorprendente. No todos los estudiantes alcanzaron el mismo grado de desarrollo de las competencias Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar y Comunicar, pero podemos afirmar que sí que experimentaron mejoría respecto de su situación de partida. Esta evolución nos pareció bastante satisfactoria, dado que a lo largo del curso cuando se trataba de resolver problemas, muchos estudiantes no eran capaces de razonar cómo encontrar una solución, y durante la experiencia, aunque no llegaran a la respuesta correcta por lo menos pensaban, argumentaban y comunicaban lo que ellos consideraban una posible respuesta (podían y querían, pensar por sí mismos y ello les llevaba a argumentar y comunicar sus hallazgos, no siendo este comportamiento frecuente en nuestras clases de matemáticas).

Con el análisis que hemos expuesto de las dos tareas, no pretendíamos aportar datos concluyentes acerca del desarrollo de competencias durante este ciclo, sino más bien describir en unas pinceladas, cómo el uso del SGD contribuyó a que los estudiantes fuesen desarrollando sus competencias; en especial, aquellas que hasta entonces no evidenciaban de ninguna manera, como la necesidad de dar argumentaciones más formales a sus respuestas empleando un lenguaje adecuado. Creemos que la principal aportación del software para que

se produjese este avance en los estudiantes, residió en su constructividad e interactividad, al brindarles la oportunidad de probar distintas ideas y comprobar su bondad, mediante la retroalimentación recibida del programa que les iba guiando hacia la solución correcta. Además, la facilidad de su uso, permitió que empleasen menos tiempo en realizar representaciones y cálculos, lo que les ofreció mayor espacio para la reflexión sobre la estrategia seguida y los resultados obtenidos. Coincidimos con Olkunn, Sinoplu y Deryakulu (2005) en que nuestros alumnos usando SGD participaron más en las actividades y reflexionaron sobre diferentes aproximaciones al mismo problema desde distintos ángulos. Guiados por mí, los estudiantes primero formularon cuestiones, después hicieron conjeturas sobre las posibles respuestas, y entonces intentaron justificar sus conjeturas basándose en sus exploraciones, llegando algunos de estos estudiantes a desarrollar demostraciones matemáticas más formales.

Para concluir este análisis de competencias, señalaremos que, de las 26 opiniones depositadas por los estudiantes de 1º B y 1º C, 15 hacían referencia a la evolución observada en sus competencias y de éstas 14, un 93.33 %, aludían a un desarrollo positivo.

El análisis realizado nos permitió dar respuesta afirmativa a la conjetura expuesta al inicio del ciclo I:

Se puede realizar un uso de SGD en el aula para trabajar contenidos geométricos que contribuya a una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas y a un desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, siendo su influencia más notable en la transformación de determinadas actitudes y competencias.

Las conclusiones que extrajimos en este ciclo nos animaron a seguir indagando durante el ciclo 2 sobre el desarrollo de competencias matemáticas producido por el trabajo con SGD y también acerca de las características o factores de estos software (atributos, ventajas y limitaciones de la figura 2-1) que contribuyen a la mejora de cada una de ellas. De esta forma, podremos informar de la influencia del uso de SGD en la evolución de dichas competencias, ahondando al mismo tiempo en los factores que, en mayor grado, inciden en el desarrollo de cada una de ellas. Estos resultados los consideramos de interés y a tener en cuenta para el diseño de nuevas secuencias de enseñanza-aprendizaje basadas en el uso de estos software.

A.5.2. Revisión del plan general de la investigación

La revisión del plan general de nuestra investigación, la hemos ido realizando a lo largo del epígrafe anterior, en el que hemos expuesto y justificado las decisiones tomadas para el ciclo 2, fruto del análisis de la implementación de nuestra secuencia de enseñanza basada en el uso de SGD durante el ciclo 1. Por ese motivo, en este apartado únicamente las reuniremos todas, a modo de síntesis aclaratoria:

- Decisiones metodológicas respecto al software empleado y al diseño de la secuencia de enseñanza basada en el uso de SGD:

- Nuestra visión positiva del trabajo realizado con SGD en el aula nos llevó a la decisión de continuar trabajando con este software. Las ventajas del uso de Geogebra sobre C.a.R. para trabajar contenidos geométricos nos convencieron de usar únicamente el software Geogebra durante la implementación de la secuencia de enseñanza en el aula en el siguiente ciclo.

- Para la experiencia definitiva, los alumnos trabajarían con Geogebra, en primer lugar las isometrías del plano (traslaciones, giros y simetrías), y después las teselaciones, ampliando así los contenidos de mosaicos estudiados en este ciclo 1, para adaptarlos al currículo de 3º de ESO (nivel escogido para el ciclo 2). No obstante, el análisis se centraría en las tareas de teselaciones del plano con Geogebra o tareas GG. Por tanto, sería imprescindible el diseño de una secuencia de enseñanza basada en el uso de Geogebra para trabajar estos contenidos.

- Para el estudio de las transformaciones de actitudes, sería necesario el diseño de otra secuencia de tareas, las tareas con Lápiz y Papel o tareas LP, que los alumnos realizarían sin usar Geogebra, pero incorporando el resto de cambios metodológicos respecto a la enseñanza tradicional (tareas contextualizadas realizadas por parejas de modo colaborativo, seleccionadas para desarrollar las mismas competencias matemáticas y atendiendo a los mismos niveles de dificultad). Ello nos permitiría contrastar las actitudes previas y las manifestadas durante el trabajo con el software, de modo que se pudiera atribuir principalmente a éste y no a otros factores los cambios que se produjeran. El orden cronológico en que realizaríamos las distintas tareas sería: tareas LP, tareas de isometrías o tareas ISO y tareas GG.

- Para el estudio de la evolución de las competencias, realizaríamos un Análisis Didáctico previo, que nos ayudaría a relacionar las competencias objeto de estudio con las capacidades específicas a desarrollar en nuestros estudiantes y nos facilitaría el análisis de su posible desarrollo. Al mismo tiempo, nos permitiría abordar el diseño de la secuencia de un modo sistemático.
- Decisiones metodológicas respecto a la recogida de datos y los instrumentos diseñados para ello:
 - Para triangular toda la información recogida para cada estudiante optamos por usar el software Atlas.ti, que nos facilitaría la reconstrucción de cada tarea realizada por los alumnos (integrando los archivos de Geogebra, de audio, las observaciones de las parrillas...), considerando este tipo de análisis muy conveniente para informar de las actitudes y competencias que los estudiantes estaban manifestando cuando resolvían cada una de ellas. Por ello, decidimos recoger los diálogos de cada pareja de alumnos durante las sesiones en las que implementásemos la secuencia de enseñanza diseñada (tareas GG) y para ello, un modo sencillo de hacerlo sin necesidad de recurrir a ayuda externa, sería utilizar un auricular con micrófono para cada estudiante y la grabadora de audio incorporada en cada ordenador. Las grabaciones de vídeo se limitarían a la puesta en común de cada tarea y al finalizar la implementación de dicha secuencia de enseñanza, la directora de la tesis, en calidad de investigadora externa, llevaría a cabo una entrevista semiestructurada con cada grupo de estudiantes.
 - La decisión de recoger los diálogos de cada pareja de estudiantes durante la implementación de la secuencia de enseñanza basada en el uso de las TIC, nos devolvería un volumen de datos ingente, cuyo análisis desbordaría las dimensiones de este estudio de tesis. Por esa razón, decidimos que seleccionaríamos una muestra intencionada de estudiantes (cubriendo los distintos perfiles actitudinales y cognitivos de nuestros alumnos) con los que llevar a cabo un estudio de casos. Para estos estudiantes realizaríamos un análisis exhaustivo, triangulando toda la información recogida mediante el software Atlas.ti, mientras que para los restantes estudiantes haríamos un análisis en menor profundidad, sin analizar los archivos de audio (diálogos de los estudiantes durante la realización de las tareas), es decir, triangulando la información recogida con los cuestionarios, diarios, buzones de sugerencias, protocolos de resolución de las tareas y entrevistas grupales.

- Consideramos pertinente rediseñar algunos de los instrumentos empleados para la recogida de información:

- Los cuestionarios de actitudes. El cuestionario “Actitud hacia las matemáticas” usado durante los ciclos 0 y 1, no incorporaba ítems referentes a actitudes matemáticas, de modo que realizaríamos una nueva revisión de la literatura con la esperanza de encontrar algún cuestionario ya validado que indagase sobre ambas categorías actitudinales. El cuestionario “Me interesa tu opinión” nos seguía pareciendo un instrumento adecuado. Con las sucesivas aplicaciones de este cuestionario durante los ciclos 0 y 1, ya contábamos con información suficiente para un análisis de validez. Dicho análisis nos reportó buena consistencia interna de este instrumento (Alfa de Cronbach = 0,856; Alfa de Cronbach en ítems estandarizados = 0,863), de modo que sería empleado también durante la experiencia definitiva de tesis.

- Las parrillas de observación de actitudes y competencias. En primer lugar, consideramos necesario separar las actitudes y competencias en dos parrillas. La parrilla de actitudes sería común para todas las sesiones, y contendría indicadores relativos a actitudes matemáticas, actitudes hacia las matemáticas y hacia el trabajo con Geogebra y también acerca del trabajo colaborativo. Trataríamos de mejorar su diseño haciendo una nueva revisión documental. Un observador externo asistiría a algunas de las sesiones y rellenaría esta parrilla para contrastar sus observaciones con las mías y para aportarnos su opinión de la utilidad y facilidad de manejo de tal parrilla. Esta parrilla se emplearía durante todas las tareas: LP, ISO y GG. Para la observación de las competencias objeto de estudio, diseñaríamos parrillas específicas para cada actividad, siguiendo el Análisis didáctico realizado, que únicamente serían rellenadas para los estudiantes pertenecientes a la muestra seleccionada durante las tareas GG.

Anexo B

Búsqueda de información (Revisión de antecedentes en la literatura)

Se llevó a cabo una búsqueda sistemática de información, con el fin de conocer los estudios anteriores a éste relacionados con los objetivos de la investigación. La búsqueda se centró en tres aspectos: actitudes relacionadas con las matemáticas, competencias matemáticas y uso de TIC en el aula. Por un lado, se exploró bibliografía que permitiera realizar una fundamentación teórica de los dos primeros aspectos y, por otro lado, resultados empíricos de otras investigaciones que informasen del uso real de las tecnologías en el aula: ventajas y limitaciones encontradas por otros autores. Para ello, se consultaron todos los medios y fuentes de información que fue posible, presentando en este anexo las que se consideraron relevantes para este trabajo.

BIBLIOTECAS

Se consultaron las siguientes bibliotecas:

- Biblioteca del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Almería.
- Biblioteca Universitaria Nicolás Salmerón (biblioteca de la Universidad de Almería).
- Biblioteca de la Universidad de Leeds (Inglaterra)

DICCIONARIOS Y ENCICLOPEDIAS

Para la determinación del significado de algunos términos empleados en este trabajo, sobre todo para el campo de las actitudes matemáticas, se recurrió a los siguientes diccionarios y enciclopedias, algunas de ellas a través de Internet:

- Diccionario de la Lengua Española (Real Academia Española, 2005)
- Diccionario del uso del español (Moliner, 2007)
- Diccionario esencial: Matemáticas (Colección Vox 10, 2005)
- Enciclopedia Wikipedia (<http://es.wikipedia.org>)
- Encyclopedia Britannica (www.britannica.com)

BÚSQUEDA EN INTERNET

A lo largo de los años en los que se ha llevado a cabo este trabajo se realizaron incontables búsquedas en Internet, sistemáticas y no sistemáticas, usando el buscador *Google* empleando distintos términos clave. Las búsquedas se centraron en los tres aspectos antes mencionados: actitudes, competencias y uso de las TIC en el aula. La primera búsqueda sistemática se realizó a principios de 2007, siendo necesarios sucesivos refinamientos de los resultados encontrados con la búsqueda inicial, que permitieron reducir el número de entradas a cifras asequibles, de modo que se pudo revisar las referencias encontradas con Google. Se repitió la búsqueda en enero de 2009, limitando la misma a las referencias introducidas en Google durante los años 2007 y 2008, comprobando la relevancia que en los últimos años han adquirido la evaluación por competencias y el uso de las tecnologías en las aulas, pues se obtuvo más referencias en ese periodo que durante la primera batida (desde 1900 hasta diciembre de 2006). Se revisaron también aquellas nuevas referencias, fruto de la segunda exploración, que resultaron de interés, aunque como ya sucediese con los resultados obtenidos en la primera búsqueda, ya se había tenido acceso a la mayoría de ellos por otras fuentes de información.

En la siguiente tabla se exponen, a modo de síntesis, las referencias encontradas en cada una de las dos búsquedas sistemáticas que se llevaron a cabo, atendiendo a los términos clave empleados:

Términos clave	Referencias hasta diciembre 2006	Referencias nuevas en 2007 y 2008
Actitudes matemáticas	608	444
Actitudes matemáticas de estudiantes	608	444
Actitudes matemáticas de estudiantes de secundaria	305	225
Actitudes hacia las matemáticas	2350	1770
Actitudes hacia las matemáticas de estudiantes	809	634
Actitudes hacia las matemáticas de estudiantes de secundaria	305	225
Competencias matemáticas	1210	1620
Competencias matemáticas PISA	112	220
TIC y matemáticas	160	261
Software de Geometría Dinámica (SGD)	47	27

Se usó otro motor de búsqueda más específico sobre contenido científico: *Scirus*, y se repitió la búsqueda atendiendo a los mismos términos clave (en inglés) considerados para Google. Al centrar la exploración en el campo de la Educación Matemática (Mathematics Education) y considerando únicamente las referencias correspondientes a publicaciones hasta fin de 2008 se encontraron las siguientes entradas, para las que la revisión del abstract ayudó a reducir el número de las referencias que finalmente se consideraron de interés:

- Students' mathematical attitudes: 198
- Students' attitudes towards Mathematics: 146
- Mathematical competences: 81
- ICT and Mathematics: 29
- Dynamic Geometry Software: 42

A través de Internet, no sólo se llevaron a cabo búsqueda mediante los motores Google y Scirus, sino que se pudo acceder a numerosos recursos electrónicos, por ejemplo a los ofrecidos por las Universidades de Almería y Leeds y a muchos otros a los que se hace mención en otros apartados de este anexo.

BASES DE DATOS

Se comenzó revisando las bases de datos⁸⁸: MATHDI, ERIC Database y SCOPUS; bases de datos de revisión obligatoria para cualquier investigación. A partir de las entradas que se obtuvieron con los términos clave empleados, se obtuvieron nuevas referencias. En resumen:

Términos clave	MATHDI	ERIC⁸⁹	SCOPUS⁹⁰
Students' Mathematical Attitudes	18	168	31
Students' attitudes towards Mathematics	50	65	21
Mathematical competences	171	35	87
ICT and Mathematics	120	16	5 (mala depuración)
Dynamic Geometry Software	109 ⁹¹	20	79

⁸⁸ Bases a las que como estudiante de la universidad de Almería tenía permitido el acceso a través del catálogo de la Biblioteca Universitaria Nicolás Salmerón (<http://almirez.ual.es>)

⁸⁹ Búsqueda centrada en Educación Secundaria

⁹⁰ Búsqueda centrada en las áreas de Matemáticas y Multidisciplinar y reducida a aparición de los términos clave en título, resumen o palabras clave de las referencias

⁹¹ Se obtuvieron 356 entradas en Dynamic Geometry Software, por ello se redujo la búsqueda a Educación Matemática obteniendo así 109 referencias

También se revisó la base de datos del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (<http://cumbia.ath.cx/pna.htm>) encontrando, entre otras, 25 referencias sobre actitudes matemáticas.

Se realizó una revisión de las bases de datos REDINED y Eurybase a través de la página web del Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE) (<http://www.mec.es/cide>). No obstante, no se encontraron muchas referencias, por ejemplo, en REDINED la búsqueda de “actitudes matemáticas” reportó 8 referencias, si bien algunas de ellas resultaron de interés.

Por último, se consideró muy pertinente revisar bases de datos que almacenasen tesis doctorales como TESEO, Tesis Doctorales en Red (TDR), [Networked Digital Library of Theses and Dissertations](#) (NDLTD). De este modo, se pudo consultar tesis doctorales leídas en las universidades españolas y del resto del mundo, para detectar estudios similares o relacionados con el que en esta memoria se recoge, algunas de las cuales se mencionan en apartados posteriores.

REVISTAS

Después de la revisión de las anteriores fuentes de información, se procedió a la revisión de una serie de revistas especializadas en temas de interés, a las que se accedió principalmente a través de la Biblioteca Universitaria Nicolás Salmerón. Estas revistas fueron la principal fuente de obtención de antecedentes para este trabajo. Se realizó una búsqueda sistemática desde el año indicado hasta la actualidad:

Revistas Nacionales

- SUMA, desde 2000
- Epsilon, desde 2000
- UNO, desde 1997
- Enseñanza de las Ciencias y REEC (su versión electrónica), desde 2002

Revistas Internacionales

- Educational Studies in Mathematics, desde 2000
- Focus on Learning Problems in Mathematics, desde 2004
- For the Learning of Mathematics, desde 2004
- International Journal for Mathematics Teaching and Learning, desde 2004
- International Journal of Computers for Mathematical Learning, desde 2004

- International Journal of Science and Mathematics Education, desde 2003
- Journal for Research in Mathematics Education, desde 2004
- Journal of Mathematical Behaviour, desde 2004
- Journal of Mathematics Teacher Education, desde 2004
- Mathematics and Computer Education, desde 2004
- Mathematics in School, desde 2004
- Mathematics Teacher, desde 2004
- Mathematics Teaching, desde 2004
- Recherches en Didactiques des Mathématiques, desde 2004
- Research in Mathematics Education, desde 2004
- School Science and Mathematics, desde 2004
- The teaching of Mathematics, desde 2004

Se han incluido como referencias aquellos estudios que la revisión de las revistas anteriores puso en nuestro conocimiento y que se consideraron relevantes para este trabajo.

La revisión de las anteriores revistas condujo a su vez a otras referencias, incluidas en otras revistas, que se consultaron por considerar que dichos trabajos podían aportar información valiosa. Estos trabajos se encontraron en revistas como por ejemplo: *RELIEVE: Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* y *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*.

ACTAS DE CONGRESOS Y HANDBOOKS

Se revisaron actas de congresos nacionales e internacionales, que permitieron conocer trabajos relacionados con este estudio, presentados en eventos de gran repercusión en Educación Matemática. Destacaron las siguientes actas de congresos, celebradas anualmente:

- Las actas de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
- Las actas de los seminarios de investigación celebrados por los grupos de investigación de *Pensamiento Numérico y Algebraico* y *Aprendizaje de la Geometría* de la SEIEM.
- Las actas de las Jornadas de Thales de investigación en el aula de matemáticas.
- Las actas de las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

- Las actas del International Congress on Mathematical Education (ICME)
- Las actas del International Meeting for the Psychology of Mathematics Education (PME)

También se consultaron los siguientes handbooks:

- Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future (Gutiérrez y Boero, 2006)
- Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (Kelly and Lesh, 2000)

TESIS DOCTORALES

La revisión de las bases de datos de tesis doctorales antes mencionadas permitió conocer algunos estudios relacionados con éste que captaron nuestra atención.

Respecto al ámbito actitudinal, la tesis de Gómez-Chacón (1997) acerca de las influencias afectivas en el aprendizaje de las matemáticas, sirvió de punto de partida para caracterizar las actitudes de los estudiantes.

Sobre el uso de TIC en el aula se encontraron bastantes tesis, siendo especialmente de interés la de Pierce (2001), sobre la influencia del uso de CAS (software algebraico) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la de Sordo (2006) que diseñó una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría, y la de Preyner (2008) que trataba de identificar aproximaciones efectivas para introducir SGD y para desarrollar materiales de instrucción usando estos software, que mejoraran el desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Educación Secundaria en el uso de estas tecnologías, centrando su investigación en el software Geogebra.

Respecto al procedimiento empleado en este trabajo para la planificación de la secuencia de enseñanza basada en el uso de SGD: el Análisis Didáctico, resultó de gran interés la tesis de Gómez (2007), que trata el desarrollo del contenidos didácticos con profesores de matemáticas en formación y aborda sistemáticamente cómo debe emplearse el análisis didáctico para el diseño de unidades didácticas en nuestra asignatura.

Anexo C

Efecto de la investigación en mi desarrollo profesional docente

En lo que sigue, expongo la repercusión que esta investigación ha tenido en mi desarrollo profesional y personal, así como la contribución de este desarrollo a la mejora de mi práctica docente. Para ello, describiré brevemente mi experiencia durante los ciclos 0 y 1, para centrarme en el ciclo 2, que corresponde al trabajo de investigación presentado en esta memoria de tesis.

El trabajo de investigación realizado para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados (García y Romero, 2007), como he comentado en reiteradas ocasiones constituyó el ciclo 0 de esta investigación. Esta primera experimentación de aula confirmó mi conjetura de que la motivación y el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas mejorarían globalmente con la incorporación de los ordenadores al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Pero no sólo me permitió contrastar esa conjetura, sino que pude comprobar que el cambio de una metodología expositiva a una basada en el aprendizaje por descubrimiento guiado tuvo un efecto positivo en los escolares, fomentando el desarrollo de ciertas actitudes y competencias. Esta mejora me hizo comprender que, independientemente de trabajar con TIC o sin ellas, este nuevo enfoque del aprendizaje de las matemáticas resultaba más adecuado para fomentar un aprendizaje significativo de los contenidos trabajados con los estudiantes, aumentando su efectividad al incorporar las herramientas tecnológicas. El uso de TIC se centró en este ciclo en la búsqueda de información por Internet y, aunque con este uso de las tecnologías, las actitudes y las competencias mejoraron, también advertí que no estaba utilizando toda la potencialidad de este recurso, lo que me llevó a plantearme cambios en el planteamiento de la investigación para sucesivos ciclos.

Durante el ciclo 1 (Anexo A), empujada por los buenos resultados del ciclo 0 y teniendo presente también las limitaciones detectadas, recurrí nuevamente al uso de TIC como recurso para mejorar las actitudes y competencias de los estudiantes en matemáticas, pero esta vez puse la mira en el SGD, que me pareció sencillo de manejar y a la vez con muchas

posibilidades para trabajar contenidos geométricos de una forma más visual y amena. Los estudiantes confirmaron también mi intuición de que trabajando con estos software mejorarían tanto sus actitudes matemáticas como sus actitudes hacia las matemáticas y desarrollarían determinadas competencias matemáticas que, de haber empleado únicamente lápiz y papel, no habría sido posible. En los grupos con los que trabajé con este SGD, cuyos conocimientos geométricos eran casi nulos, observé un aumento de interés por las tareas realizadas en el aula, que se tradujo en un mejor comportamiento del grupo y en una implicación muy superior en las mismas a la que era habitual en ellos. Sin duda, este cambio ya era suficiente para mí como profesora que buscaba aumentar la motivación de los estudiantes, pues conseguí llegar a esa meta; no obstante, esta mejora en muchos de los estudiantes vino acompañada de un desarrollo de ciertas competencias matemáticas (en general, a distintos niveles de complejidad), siendo éste mi otro gran objetivo. Estos resultados compensaron el esfuerzo y tiempo invertido en la planificación de este ciclo (diseño de tareas adaptado a estos software, diseño de instrumentos de recogida de datos, adecuación de los equipos informáticos a mis necesidades, etc.) y en mi formación en el uso de los software seleccionados.

Para el ciclo 2, animada por el sentimiento de haber mejorado mi práctica docente gracias a las experimentaciones previas, decidí continuar indagando sobre cómo introducir las TIC en el aula de matemáticas para que el resultado fuese aún más significativo para el proceso de aprendizaje de los estudiantes, lo que además derivaría en una mejora de mi proceso de enseñanza. La planificación de la experiencia fue más concienzuda si cabe que en ciclos anteriores, pero este esfuerzo nuevamente se vio recompensado por la respuesta de los estudiantes. Me extenderé un poco más en las repercusiones de este tercer ciclo de investigación tanto para mi desarrollo profesional como personal.

En lo referente a mi desarrollo profesional, las experiencias de aula me han ayudado a ir mejorando como profesora y como investigadora, incidiendo en distintas problemáticas.

En el plano docente, la necesidad de realizar una planificación cuidada de la experiencia me ha hecho ser más sistemática tanto en la búsqueda de información, ganando autonomía en dicha búsqueda y siendo más operativa cada vez. Asimismo, he progresado en la planificación y el diseño de las unidades didácticas, gracias a la potencialidad del procedimiento empleado: el Análisis Didáctico. Este procedimiento me ha resultado muy útil para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje adecuadas a las capacidades y

competencias que pretendía desarrollar en los estudiantes durante su puesta en práctica en el aula. En este sentido, me ha ayudado a solventar el problema de caracterizar el currículo en términos de competencias, al permitirme conectar las capacidades específicas de cada unidad didáctica con las competencias matemáticas comunes a todas ellas, facilitando al mismo tiempo su evaluación. De este modo, he ido mejorando mi forma de planificar mi labor docente, repercutiendo esta mejora en mi práctica presente y futura. Por otra parte, introducir SGD en las aulas ha requerido de una formación previa por mi parte, no solamente en el uso de estos software, sino también en el manejo de otras herramientas como plataformas educativas, red Internet, etc. Además, para llevar a cabo el análisis de datos he empleado software de edición de audio y vídeo y de análisis de datos cuantitativo y cualitativo (SPSS y Atlas.ti, respectivamente) y para ello también he necesitado un aprendizaje previo para optimizar su uso. Todo ello ha contribuido a un reciclaje o formación permanente, siendo éste muy deseable en todos los docentes, para no quedarnos anclados en prácticas desconectadas de la realidad actual de cada momento.

En lo que respecta al trabajo investigador realizado, debo decir que me resultó satisfactorio, pero no por ello menos duro, pues exigió mucho tiempo y dedicación por mi parte. En efecto, la labor que he llevado a cabo desde que comenzó este estudio ha sido muy exigente, pues ha requerido muchas horas de dedicación diaria durante un periodo de tiempo muy prolongado, tanto para la revisión de la literatura que me ayudó a consolidar el marco teórico como para el diseño de la experiencia (planificación y diseño de tareas e instrumentos). Además, una vez concluidas las fases de acción y observación (durante las cuales se recogieron los datos) llegó el momento del análisis de datos, que resultó ser una actividad bastante compleja y para la que necesité el asesoramiento de diferentes expertos. Ciertamente, el duro trabajo realizado desde mi labor investigadora no ha sido sencillo, si bien ha contribuido a mejorar mi condición previa y me ha hecho más sistemática y operativa con vistas a futuras investigaciones.

En lo que se refiere a mi desarrollo personal durante el ciclo 2, no todos los momentos vividos fueron agradables y reconfortantes. Así, a lo largo de la experiencia hubo momentos en los que me sentí angustiada por diversas razones: problemas técnicos (imposibilidad de actualizar la versión instalada de los software o necesidad de material específico para la recogida de datos), pérdida de información valiosa en varias sesiones para algunos estudiantes (archivos de audio que no se grabaron correctamente) o retrasos inesperados en la

planificación (debido a la realización de actividades extraescolares de los estudiantes no contempladas). Sin embargo, en todos esos momentos, el apoyo que me brindaron mis compañeros de departamento, la ayuda del coordinador TIC del centro y la colaboración del equipo directivo, contribuyeron a difuminar tales sentimientos negativos. Respecto a los buenos momentos en los que disfruté de la experiencia de trabajar con Geogebra, casi todos tenían un denominador común: la buena respuesta de los alumnos no sólo a nivel actitudinal sino cognitivo. Una muestra de ellos son los muchos comentarios incluidos en mis diarios que reflejaban mi satisfacción y que me llevan a hacer un balance positivo de este ciclo. Un ejemplo de ellos es el siguiente:

Sesión 7 TIC 3º A: Me encuentro más relajada en cada sesión y soy más operativa observando, después de reducir el número de estudiantes a observar a los doce estudiantes de la muestra. Estoy contenta con el interés y trabajo mostrado por los estudiantes, aunque puntualmente les llame la atención. Algunos alumnos me tienen gratamente sorprendida por el cambio que están experimentando tanto actitudinalmente como en su rendimiento en matemáticas. Estoy empezando a disfrutar de la experiencia, una vez superada la presión e incertidumbre inicial y los problemas técnicos de las primeras sesiones.

De tratarse de una experiencia de aula, fuera del ámbito de la investigación, es decir, llevando una recogida de datos menos formal y rigurosa como solemos hacer los docentes a diario, la carga para el profesor sería más liviana y estos sentimientos negativos antes expuestos seguramente no habrían emergido. Por esta razón, considero que desde mi perspectiva como docente resultó una experiencia muy gratificante y, con ello, pretendo animar a otros profesores a desarrollar experiencias de este tipo en sus aulas.

Otro aspecto a destacar es que, a lo largo de los tres ciclos, he hallado respuesta a una de las preguntas que desde que empecé a impartir clase vengo haciéndome: *¿es posible desarrollar estrategias que mejoren el clima de aula en grupos en los que la mayoría de los estudiantes se han desenganchado del carro de las matemáticas?* Siempre me he resistido a creer que esta pregunta no admitiese respuestas positivas y he huido de los sentimientos de desánimo que me transmitían muchos escolares y algunos compañeros. En este sentido, este trabajo me ha confirmado que siempre se puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, aunque no existen reglas mágicas y lo que con unos estudiantes es efectivo con otros puede no funcionar, pero abre un camino de esperanza para cualquier realidad de aula, por negativa que a priori se presente. En concreto, las experiencias de aula han confirmado la bondad del aprendizaje por descubrimiento guiado y del trabajo colaborativo con TIC, para satisfacer mis

objetivos de transformar positivamente las actitudes y desarrollar las competencias matemáticas de los escolares. Aunque había puesto en práctica este modo de trabajar en ocasiones anteriores, no he obtenido los resultados esperados hasta probar la conjunción del aprendizaje por descubrimiento guiado de modo colaborativo, con el trabajo en entornos tecnológicos. Sin duda, una de las lecciones que he aprendido con esta investigación es que cuando nos enfrentamos a una realidad de aula insatisfactoria, hay que intentar mejorarla poniendo en práctica aquellas estrategias que consideremos que pueden transformarla y para ello, nada mejor que mantenerse actualizada y atenta a las innovaciones en materia educativa que puedan contribuir en este sentido.

Como reflexión final y a modo de resumen de lo anteriormente expuesto, diré que de retroceder en el tiempo, conociendo el esfuerzo exigido para realizar este trabajo de investigación, volvería a llevarlo a la práctica sin dudarle un segundo, porque los buenos resultados obtenidos por los estudiantes y el propio desarrollo profesional y personal experimentado, compensaron las horas dedicadas al diseño, puesta en práctica y evaluación de las experiencias llevadas a cabo en el aula durante los tres ciclos de investigación.

Anexo D

Revisión fenomenológica de los contenidos de teselaciones del plano

A continuación, se establecen lazos entre los contenidos de mosaicos trabajados durante las tareas GG, y el arte, industria, arquitectura, urbanismo,...extraídos, en su mayoría, del libro Mosaicos I de J.A. Mora y J. Rodrigo (1993).

LOS MOSAICOS EN EL ARTE ISLÁMICO

El arte islámico ha prestado especial atención a la geometría y a los mosaicos en la ornamentación de sus objetos y construcciones durante los siglos VIII y IX, constituyendo este arte primitivo el llamado periodo clásico. Se manifiesta en todo el imperio musulmán, desde Córdoba a Bujara y es la base sobre la que se asientan todas las manifestaciones artísticas posteriores.

Los árabes desarrollan técnicas como el mosaico, los estucos o la cerámica, y a través de ellas, encuentran los medios para que la decoración de la superficie sea independiente del monumento. Es su forma de conseguir que un edificio de barro y ladrillo se convierta en un palacio. Esta cultura elabora un “arte de ilusión” que podía hacer que las cosas parecieran distintas de lo que eran. Podríamos decir que el Islam centró sus energías creativas en lo ornamental. La variedad de motivos utilizados responde a un número casi infinito de variantes, introduciendo sucesivamente nuevos gustos o ideas. En un primer grupo mas amplio incluiríamos elementos vegetales (palmetas, hojas de vid, racimos de uvas y rosetas,...). En el segundo, podemos agrupar todos aquellos motivos geométricos, que pueden llegar a componer diseños como los mosaicos. La característica principal del diseño geométrico es la tensión entre una unidad completa y otra rota (intentan que la unidad no sea visible). En general, los diseños geométricos están subordinados a unos principios abstractos:

1. Los objetos (por ejemplo muros) se recubren totalmente, es el llamado “horror al vacío”.
2. Se produce una relación entre las formas más que una suma de formas.

3. El impacto de la geometría: las composiciones alcanzan un alto grado de complejidad a partir de un pequeño motivo. La aplicación de los movimientos tiene una parte de mecánica y una gran parte de imaginación visual.
4. La posibilidad de crecimiento infinito. EL diseño puede extenderse en cualquier dirección dependiendo de la voluntad del decorador, al mismo tiempo que el observador tiene libertad de elegir desde dónde admirarlo.
5. La arbitrariedad, en el sentido de que ni el tamaño ni las formas de las figuras están dictadas por leyes o cánones sino por la libertad del decorador que, sin ataduras, puede dedicar su esfuerzo a investigar el mosaico.

No podemos dejar esta introducción al arte islámico sin plantearnos la pregunta: ¿por qué se da esa importancia a los motivos ornamentales no figurativos, y especialmente geométricos, cuando el cristianismo desarrolla simultáneamente formas tan diferentes?. La respuesta se ha querido encontrar en prohibiciones religiosas, pero lo cierto es que no existe en el Corán una prohibición escrita. Las investigaciones actuales se han encaminado en otra dirección: en la cultura islámica se va desarrollando una actitud de rechazo a la representación de seres vivos. Esta “iconofobia” les lleva a buscar un sistema de representaciones nuevo que no coincide con el cristiano, ni siquiera con el preislámico, pero que les permite mostrar una identidad propia como pueblo, en unas circunstancias históricas en las que se estaba formando el Islam. Frente al mundo cristiano, el Islam decide rechazar cualquier sistema visual comprensible, aparte de la escritura y los objetos inanimados, para así evitar la confusión con culturas extrañas.

El desarrollo del mosaico y la ornamentación islámica alcanzó cualidades notorias. O. Grabbar (1988) resalta algunas de sus características:

-Su abstracción no es, como una fórmula química, la simbolización simplificada de una realidad, sino que, como ciertas abstracciones matemáticas, es una realidad en sí misma, una invención artificial que adquirió un conjunto de normas propio.

-La ornamentación es un ejercicio práctico y una meditación intelectual. Es un ejercicio en el siguiente sentido: en su mayor parte se compone de fórmulas que se pueden aislar, pero también es una meditación porque siempre hay en ella más de lo que salta a la vista. Pero la meditación que sugiere no está en ella, sino en la mente del observador.

Pero no solo cabe destacar el arte islámico, sino que podemos hacer un breve recorrido de la historia de los mosaicos (extraído: <http://www.gaudiallengaudi.com/EDc02Mosaic.htm>):

- Antigüedad: Los primeros antecedentes conocidos de mosaico se sitúan en Turquía en la región de Anatolia en los alrededores del siglo VII a.C. y son pavimentos de guijarros. En el siglo IV a.C. en Pella - Macedonia, Grecia - se realizan pavimentos coloreados y con sombras por dar volumen a las figuras. Posteriormente, en el siglo II a.C. en la ciudad de Pérgamo ya encontramos mosaicos hechos con piedras cortadas que corresponden a una concepción parecida a la actual. Otras excavaciones en áreas de la Mesopotámia (Ur y Uruk) y en Grecia y Roma han permitido conocer otros mosaicos de estos tiempos tan remotos, incluso se conoce el nombre de artistas mosaicistas de la antigüedad como Hefestión autor de los mosaicos del Palacio del rey Eumenes que ya utilizó fragmentos de vidrio combinados con piedra natural y Sosos de la ciudad de Pérgamo de quien se conserva una copia romana de uno de sus trabajos. A partir del siglo I a.C. la técnica de los mosaicos se implanta con fuerza, pero siempre son utilizados como pavimento. Marco Vitruvio y Plinio el Viejo ya nos describen con detalle las técnicas. A medida que se va implantando el cristianismo, los mosaicos pasan también a embellecer las paredes, llenan las bóvedas y las cúpulas de las iglesias. Pero, no sólo las iglesias se adornan con mosaicos, también el mosaico vuelve a sus orígenes en el Oriente medio, donde numerosas mezquitas - la Meca, Medina y Damasco - presentan unas maravillosas decoraciones de mosaico.
- Renacimiento: en Europa, nuevamente en Italia y en el siglo XV, en la Florencia de los Médicis renace con fuerza el mosaico, de lo que tenemos un impresionante ejemplo en la Anunciación de Ghirlandaio. Más tarde la decoración de la Basílica de San Pedro en Roma permitió consolidar el importante renacimiento de esta técnica.

LOS MOSAICOS EN LA NATURALEZA

La utilización del mosaico regular de hexágonos, por parte de las abejas, ha sido objeto de estudio por los matemáticos de todas las épocas. Las interpretaciones consiguientes han ido evolucionando a través del tiempo. Las posiciones iniciales en las que se pensaba que las abejas utilizaban ciegamente las más elevadas matemáticas por orden y guía divina, han ido dando paso a las explicaciones científicas.

Pappus de Alejandría toma en consideración principios de optimización y economía. De los tres polígonos regulares que llenan el plano sin dejar huecos (el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular), es éste último el que permite mayor capacidad para la miel que los otros dos, para un determinado perímetro. Posteriormente, E. Bartholin en el siglo

XVIII aporta nuevas hipótesis que buscan la explicación en la interacción de las fuerzas físicas: el hexágono es resultado de presiones iguales, ya que cada abeja trata que su círculo sea lo más grande posible, lo que viene confirmado por las celdillas de la parte exterior, que son más redondeadas.

Las interpretaciones también se han adaptado con los tiempos, Darwin sustituye la guía divina por explicaciones científicas, como la selección natural, cuando habla de la arquitectura de las abejas como “el más maravilloso de los instintos conocidos, la selección natural no puede ir más lejos de este estado de perfección, por lo que vemos, los panales de las colmenas absolutamente perfectos en el ahorro de trabajo y cera”.

En los panales, también ha sido objeto de estudio la forma de unir los extremos de la celdilla. Kepler ya sospechaba que estas uniones debían realizarse formando rombododecaedros, ya que este poliedro proporciona la solución a la utilización de la menor cantidad de cera en la construcción de las paredes para contener una determinada cantidad de miel en su interior. Haciendo un estudio más exhaustivo sobre este último tema, destacamos la información encontrada en la página de Joseph M. Albaigés:

<http://www.albaiges.com/matematicas/geometria%5Crombododecaedrooctaedrotruncado.htm>

“Bueno, pues uno de los pocos candidatos a llenar en espacio es el rombododecaedro, cuerpo formado por doce rombos iguales dispuestos según la figura. El cuerpo es inscriptible en una esfera, y de hecho es el resultado de la expansión de doce esferas de igual radio tangentes a ella. Esto requiere una breve explicación. Es sabido que alrededor de una esfera pueden llegar a colocarse hasta doce del mismo radio y tangentes, pero éstas no pueden “llenar” todo el entorno de la esfera mediante tangencias entre sí, al modo como, en el plano, seis círculos pueden ser tangentes a uno dado y entre sí. Al pasar a tres dimensiones, las doce esferas tangentes a una dada pueden ser agrupadas en grupos de tres tangentes entre sí, cada “racimo” dispuesto según los vértices de un tetraedro concéntrico con la esfera de partida.

Obsérvese que en el rombododecaedro hay dos clases de vértices: en 8 de ellos concurren cuatro aristas, y en los otros 4, tres aristas; éstos serían los centros de los grupitos de 3 esferas. El cálculo muestra que se cumple en los ángulos de los rombos que $\cos \alpha = 1/3$, es decir, $\alpha = 70,5288^\circ$, y su suplementario, $109,4712^\circ$. Curiosamente, ambos valores están en una relación muy cercana a la armónica. Si esta forma de visualizar el rombododecaedro es poco grata a la intuición, puede éste también imaginarse como

generado por un serie de planos que contienen cada uno la arista de un cubo, formando ángulos de 45° con las caras concurrentes en ésta. Esto, de paso, nos da otras cualidades métricas del rombododecaedro, pues, al formar dada cara ángulos de 45° con las del cubo, resulta de inmediato que las diagonales de los rombos están en la relación de $\sqrt{2}$.

El rombododecaedro cumple multitud de propiedades métricas. Por ejemplo, el ángulo que forman los radios del tetraedro son iguales que los de los rombos del rombododecaedro; el rombododecaedro se puede descomponer en cuatro rombohexaedros; y los rombohexaedros se pueden dividir en dos partes iguales. Resulta de las propiedades antedichas que el rombododecaedro es, entre las figuras limitadas por caras planas que llenan el espacio, una de las de menor área posible para un volumen determinado. Esto la pone en relación inmediata con el antiguo y delicioso problema de las abejas, cuyos panales hexagonales han llamado la atención de los matemáticos desde los tiempos de Pappus. Desde el primer momento se había constatado el hecho de que la forma hexagonal de sus celdillas constituía un aprovechamiento de espacio máximo con un volumen de material mínimo, pero, ¿qué ocurría con las juntas entre unas y otras celdillas? El avispero presenta la forma de la figura, conque resulta intuitivo que si los tabiques de contacto de las dos filas de celdillas son terminados en forma “puntiaguda”, se encerrará un volumen máximo con un mínimo de gasto de cera.

El astrónomo Maraldi, cautivado por este hecho, planteó al matemático König el siguiente problema: “Cerrar un prisma hexagonal con un ‘techo’ formado por tres planos de forma que el volumen encerrado sea máximo con un mínimo de gasto de material”. König dedujo que el cierre adecuado era el antes visto ángulo triedro del rombododecaedro, y Maraldi constató, con agrado, que los ángulos que había calculado el matemático eran los que utilizaban las abejas para la construcción de su panal.

Por cierto que este apasionante problema se vio entreverado desde el primer momento con una serie de pintorescas leyendas. La más importante de ellas dice que Maraldi había medido el ángulo de las abejas obteniendo como, obteniendo un ángulo de $70,5^\circ$, resultado ligeramente distinto de los $70,3^\circ$ que obtuvo König... ¡por culpa de un error en la tabla de logaritmos que utilizó! El valor exacto, que sería el practicado por las abejas, es el ángulo de $70,5288^\circ$ antes visto. Durante muchos años ha sido motivo de admiración por los incondicionales de la “sabiduría” de la naturaleza la precisión con que los himenópteros eran capaces de construir su panal. En realidad, es claro que Maraldi no pudo de ningún modo medir el ángulo de las abejas con una precisión de un minuto: la

técnica no daba para tanto en su tiempo. Pero, además, ni el ángulo de las abejas es siempre exacto, ni en todo caso lo permitirían los gruesos de las paredes, que no es uniforme, ni el vértice es un perfecto ángulo triedro, pues está siempre redondeado por cera. Efectuadas mediciones con el mayor rigor hoy posible, se han alcanzado valores promedios de $70,3^\circ$, lo que desde luego es una magnífica aproximación, aunque sin llegar a los valores casi místicos que la leyenda había forjado en torno a las industriosas abejas. Hasta aquí los hechos, pero subsiste la pregunta: ¿Realmente el cierre de las celdillas mediante rombododecaedros es el más económico posible? ¡Pues no! Como hemos dicho antes, gana la partida el tetracaidecaedro, bien es verdad que por un margen de solamente unas décimas por ciento. Queden tranquilos, pues, los adoradores de la perfección natural.”

LOS MOSAICOS EN LA ARQUITECTURA

La distribución del espacio en nuestros edificios tiene una representación en el plano en forma de mosaico compuesto normalmente por rectángulos (paralelepípedos en el espacio), de distintos tamaños y que encajan perfectamente sin dejar huecos ni solaparse. Otros arquitectos como Rafael Leoz han investigado nuevas formas de estructurar el espacio. A él pertenece un proyecto para la embajada española en Brasilia, en el que utiliza la composición de módulos hexagonales de distintos tamaños.

LOS MOSAICOS Y LA PLANIFICACIÓN DEL ESPACIO URBANO

Las ciudades actuales se enfrentan a problemas cada vez más complejos, para los que no siempre los urbanistas encuentran soluciones. El tráfico, la localización de los centros comerciales y las áreas industriales o la instalación de servicios son decisiones que necesitan de una planificación encaminada a una racionalización del espacio. Algunas propuestas de ordenación del espacio tienen que ver con el tema que nos ocupa, los mosaicos.

El urbanista A. Christaller parte de una situación ideal (un folio en blanco) para crear un modelo de distribución de los núcleos urbanos. Ciudades, pueblos y aldeas tienen un área de influencia que varía de tamaño según la categoría, pero siempre con forma de hexágono regular como los paneles de abejas. Alrededor de un pueblo se sitúan sus aldeas en los vértices de un hexágono regular. Podemos repetir este proceso con seis ciudades rodeando a una metrópoli. Lo interesante de este modelo no será tanto su aplicación práctica, por tomar como punto de partida una situación totalmente ideal (un plano). Su importancia proviene de ser un intento de planificar el espacio terrestre, que toma en consideración las distintas

interconexiones entre núcleos de población. Otro de los problemas del urbanista es decidir cuánto espacio libre (zona no ocupada por edificios) ha de haber en un suelo y cómo compartirlo. Esto tiene relación con la expansión de un mosaico y dependerá de la forma en que queramos distribuir ese espacio libre, es decir, la función que demos a esos huecos de acuerdo con las necesidades planteadas.

Estos son algunos ejemplos de situaciones de la vida real en las que podemos encontrar mosaicos, pero a poco que nos paremos a pensar podemos obtener una infinidad de ejemplos más, actividad que propondremos a los estudiantes para que ellos se involucren en su búsqueda, que les reportará sin duda, una mayor comprensión y percepción de su utilidad, belleza e importancia.

Anexo E

Análisis para validación del cuestionario “Me Interesa tu Opinión”

El cuestionario “Me Interesa tu Opinión” (MIO), de diseño propio, ha sido validado efectuando con el software SPSS 15.0 un análisis de fiabilidad y consistencia y un análisis factorial a las respuestas de 162 estudiantes. Dichos análisis confirmaron que este instrumento tenía buena fiabilidad o consistencia interna (Alfa de Cronbach > 0.86) y era adecuado para someterse a un análisis factorial (Test de Esfericidad de Barlett: $\chi^2 = 1392.257$, $p=0.000$; Índice KMO de Kaiser-Meyer-Olkin= 0.845, que indica que la matriz es adecuada para someterse a un análisis factorial). En este anexo se presentan los resultados del análisis factorial realizado que no se han incluido en el apartado 9.1.2.1 de la memoria:

ANÁLISIS FACTORIAL CON SPSS 15.0

FACTOR

```

/VARIABLES I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8 I9 I10 I11 I12 I13 I14 I15 I16 I17 I18
I19 I20 I21 I22 /MISSING LISTWISE /ANALYSIS I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8 I9 I10
I11 I12 I13 I14 I15 I16 I17 I18 I19 I20 I21 I22
/PRINT INITIAL KMO EXTRACTION ROTATION FSCORE
/FORMAT SORT BLANK(.10)
/CRITERIA MINEIGEN(1) ITERATE(25)
/EXTRACTION PC
/CRITERIA ITERATE(25)
/ROTATION VARIMAX
/METHOD=CORRELATION.
    
```

Estadísticos descriptivos

	Media	Desviación típica	N del análisis
I1	4,07	,896	162
I2	3,96	1,009	162
I3	3,45	1,246	162
I4	3,78	1,178	162
I5	3,61	1,041	162
I6	3,86	1,097	162
I7	3,81	,960	162
I8	4,18	1,168	162

I9	3,83	,921	162
I10	3,54	1,281	162
I11	3,72	1,078	162
I12	3,91	1,050	162
I13	3,52	1,132	162
I14	3,81	1,273	162
I15	2,96	1,168	162
I16	3,78	1,148	162
I17	4,14	1,000	162
I18	4,27	,817	162
I19	3,60	1,134	162
I20	4,12	,840	162
I21	3,74	1,019	162
I22	4,06	1,143	162

KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		,845
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	1392,257
	gl	231
	Sig.	,000

Comunalidades

	Inicial	Extracción
I1	1,000	,550
I2	1,000	,571
I3	1,000	,438
I4	1,000	,526
I5	1,000	,418
I6	1,000	,564
I7	1,000	,592
I8	1,000	,450
I9	1,000	,580
I10	1,000	,457
I11	1,000	,702
I12	1,000	,636
I13	1,000	,480
I14	1,000	,378
I15	1,000	,671
I16	1,000	,539
I17	1,000	,638
I18	1,000	,534
I19	1,000	,626
I20	1,000	,641
I21	1,000	,613
I22	1,000	,678

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Componente	Varianza total explicada								
	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	6,473	29,423	29,423	6,473	29,423	29,423	4,089	18,585	18,585
2	2,323	10,560	39,983	2,323	10,560	39,983	3,440	15,637	34,221
3	1,975	8,978	48,961	1,975	8,978	48,961	2,704	12,291	46,513
4	1,514	6,880	55,841	1,514	6,880	55,841	2,052	9,328	55,841
5	,980	4,453	60,294						
6	,930	4,228	64,522						
7	,893	4,059	68,581						
8	,801	3,640	72,221						
9	,730	3,320	75,540						
10	,663	3,011	78,552						
11	,618	2,807	81,359						
12	,581	2,642	84,001						
13	,502	2,281	86,281						
14	,467	2,124	88,405						
15	,441	2,005	90,410						
16	,380	1,728	92,139						
17	,337	1,533	93,671						
18	,317	1,443	95,114						
19	,293	1,330	96,444						
20	,276	1,254	97,698						
21	,264	1,202	98,900						
22	,242	1,100	100,000						

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

	Matriz de componentes ^a			
	Componente			
	1	2	3	4
I1	,655		-,103	,330
I2	,750			
I3	,551	,143	-,159	,299
I4	,292	,110	,508	,413
I5	,467	-,410		-,169
I6	,644	,154	-,148	,322
I7	,731	-,193		-,101

I8		,533	,362	,174
I9	,648	-,298		-,259
I10	,579	,264		,212
I11	,784	-,268	-,118	
I12	,362	,543	,114	-,443
I13	,523	,227	-,134	,371
I14	,196	-,304	,444	-,224
I15	,614	,318	-,380	-,221
I16	,536	-,401	-,100	,285
I17	,292	,504	,545	
I18	,389	-,385	,441	-,202
I19	,616	,378	-,133	-,293
I20	,695	-,393		
I21	,540	,340		-,453
I22	,235	-,170	,768	

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

a. 4 componentes extraídos

Matriz de componentes rotados^a

	Componente			
	1	2	3	4
I1	,706	,195		
I2	,587	,388	,275	
I3	,644		,137	
I4	,312		-,138	,632
I5	,198	,583		-,187
I6	,722		,167	
I7	,466	,541	,270	
I8	,102	-,289	,195	,564
I9	,245	,672	,260	
I10	,547		,254	,294
I11	,534	,598	,215	-,119
I12			,765	,224
I13	,670		,126	,118
I14	-,177	,532		,254
I15	,461		,640	-,210
I16	,540	,448	-,195	
I17			,397	,689
I18		,686		,251
I19	,347	,130	,699	
I20	,407	,684		

I21	,150	,208	,737	
I22		,460	-,128	,668

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

a. La rotación ha convergido en 21 iteraciones.

Matriz de transformación de las componentes

Componente	1	2	3	4
1	,712	,547	,423	,119
2	,121	-,702	,605	,355
3	-,319	,304	-,106	,891
4	,613	-,339	-,666	,256

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

Matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes

	Componente			
	1	2	3	4
I1	,224	-,043	-,089	,026
I2	,114	,048	,023	-,013
I3	,215	-,088	-,050	,011
I4	,123	-,023	-,161	,321
I5	-,029	,192	,001	-,110
I6	,233	-,087	-,052	,023
I7	,045	,128	,047	-,076
I8	,047	-,139	,047	,276
I9	-,060	,213	,075	-,047
I10	,149	-,065	,008	,126
I11	,072	,140	,009	-,088
I12	-,130	-,017	,354	,066
I13	,241	-,128	-,062	,047
I14	-,157	,227	,008	,120
I15	,056	-,053	,241	-,149
I16	,170	,087	-,189	-,048
I17	-,046	-,035	,139	,322
I18	-,130	,262	-,010	,113
I19	-,010	-,017	,275	-,041
I20	,031	,194	-,040	-,035
I21	-,106	,043	,324	-,017
I22	-,081	,175	-,099	,336

Matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes

	Componente			
	1	2	3	4
I1	,224	-,043	-,089	,026
I2	,114	,048	,023	-,013
I3	,215	-,088	-,050	,011
I4	,123	-,023	-,161	,321
I5	-,029	,192	,001	-,110
I6	,233	-,087	-,052	,023
I7	,045	,128	,047	-,076
I8	,047	-,139	,047	,276
I9	-,060	,213	,075	-,047
I10	,149	-,065	,008	,126
I11	,072	,140	,009	-,088
I12	-,130	-,017	,354	,066
I13	,241	-,128	-,062	,047
I14	-,157	,227	,008	,120
I15	,056	-,053	,241	-,149
I16	,170	,087	-,189	-,048
I17	-,046	-,035	,139	,322
I18	-,130	,262	-,010	,113
I19	-,010	-,017	,275	-,041
I20	,031	,194	-,040	-,035
I21	-,106	,043	,324	-,017
I22	-,081	,175	-,099	,336

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

Puntuaciones de componentes.

Matriz de covarianza de las puntuaciones de las componentes

Componente	1	2	3	4
1	1,000	,000	,000	,000
2	,000	1,000	,000	,000
3	,000	,000	1,000	,000
4	,000	,000	,000	1,000

Método de extracción: Análisis de componentes principales.

Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

Puntuaciones de componentes.

Anexo F

Guión de las entrevistas grupales

La directora de esta tesis llevó a cabo dos entrevistas grupales semiestructuradas, una con los estudiantes de 3º A y otra con los de 3º B, que fueron grabadas en vídeo. A continuación, expongo el guión que tomó como referencia para dichas entrevistas:

3º A

Isabel (I): Me gustaría que me dierais vuestras opiniones de la experiencia de trabajar con Geogebra, porque estamos haciendo un estudio sobre la influencia del uso de los ordenadores en el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, me gustaría saber qué os ha parecido y también conocer vuestra opinión sobre algunos aspectos en mayor profundidad. ¿Qué podríais vosotros destacar como más importante, significativo de este trabajo con ordenadores? Por favor, hablad de uno en uno respetando los turnos.

I: (Los alumnos afirman que se hace más amena con ordenadores), ¿por qué es más amena con ordenadores?

I: ¿Por qué lo entiendes mejor con el ordenador?

I: Es más divertido, ¿por qué es más divertido con ordenador?

I: ¿Haces más cosas de las que harías con lápiz y papel?

I: El hecho de tener más facilidad para el dibujo, porque se hace más rápido, ¿creéis que os libera para entender? ¿Cómo os libera para entender?

I: Más ideas que queráis sacar sobre las que os queréis expresar, o las mismas que queráis explicarlas de otra forma...

I: Estábamos con dos ideas: si el hecho de ser más rápido para construir los dibujos aporta algo a la hora de entender y comprender y el otro tema es el de la comunicación con el compañero, ¿queréis aportar algo más?

I: ¿Pensáis que es positivo que el ordenador nos ayude con las construcciones para aprender mejor?, ¿el hecho de que sea más fácil con ordenador hace que aprendáis más o menos?

I: ¿Prestáis más atención con el ordenador o no?

I: ¿Qué más cosas podéis comentar de la experiencia que puedan sernos útiles?

I: ¿Cómo es la comunicación con el compañero cuando trabajáis con el ordenador? ¿Es distinta que con lápiz y papel? ¿Qué valoración hacéis de ella?

I: ¿Os ha gustado trabajar con el compañero? ¿Por qué?

I: ¿Habéis hecho más cosas de las que solíais hacer con LP? ¿Habéis probado más cuando no sabíais una cosa? ¿Habéis hecho cosas en matemáticas que antes no hacíais?

I: Por el hecho de trabajar con el ordenador, ¿qué cosas habéis aprendido? ¿Habéis aprendido algunos procedimientos o alguna forma de hacer las cosas en geometría con el ordenador?

I: ¿A quién le gustó la parte de mosaicos? (Responden que se sintieron más creativos al construir mosaicos) ¿Alguna otra vez os habéis sentido creativos en matemáticas? Antes de usar el ordenador, ¿pensabais que en matemáticas se puede ser creativo? ¿Cómo habéis mostrado la creatividad?

I: ¿Y los errores? Por ejemplo, cuándo os equivocabais o teníais alguna dificultad, ¿el ordenador aporta algo o ayuda a identificar y resolver los errores o es igual que cuando trabajabais con LP? ¿Cómo sabes cuándo algo no es correcto con el ordenador?

I: ¿Cómo trabajáis con más autonomía con ordenadores o con LP? ¿Necesitáis más o menos a la profesora cuando trabajáis con ordenadores? ¿Necesitáis a la profesora de la misma forma o de forma distinta a cuando trabajáis con LP? ¿Es el mismo tipo de preguntas las que hacéis a la profesora cuando trabajáis con ordenadores? ¿Preguntáis más que con LP?

I: ¿Os gustaría dar más temas con ordenador o creéis que son adecuados solamente para Geometría? ¿Cómo os gusta más la geometría con ordenador o con LP? ¿Por qué? ¿Qué cosas aprendéis en geometría?

I: Si no se os ocurre nada más que comentar, os voy a preguntar a cada uno acerca de algún aspecto del trabajo con ordenador en geometría, ¿preferís que os haga la misma pregunta a todos o que haga una pregunta diferente a cada uno? (eligen a todos la misma pregunta par irla pensando) ¿qué es lo más importante que habéis aprendido en este trabajo con Geometría y ordenadores? Comentad aquello que destacaríais, lo más valioso para vosotros de esta experiencia.

I: ¿Por qué os resulta valioso el aprendizaje de la geometría con el ordenador?

I: ¿Tú crees que comprendes mejor las matemáticas cuando trabajas con el compañero que cuando trabajas sólo o simplemente es más divertido trabajar en parejas?, es decir, ¿el compañero te aporta algo para que sea más fácil comprender las cosas?

I: ¿Creéis que ha sido más divertido trabajar con el ordenador por la novedad de trabajar con esta herramienta? ¿Creéis que decaería el interés si trabajarais todos los temas de

matemáticas con el ordenador? ¿Creéis que sería mejor alternar unos temas con ordenador y otros con LP?

I: ¿Y la evaluación? ¿Evaluar el trabajo con ordenadores os ha parecido igual que con LP? ¿Os parece más justa esta forma de evaluar?

I: El objetivo de la profesora era motivaros para trabajar en matemáticas y que de este modo aprendierais más, y pensaba que podría lograrlo usando el ordenador para resolver las tareas ¿creéis que lo ha logrado? Es decir ¿el trabajo con Geogebra ha conseguido motivaros para trabajar más en matemáticas?

3º B

I: Estamos haciendo un estudio acerca de la influencia del uso de los ordenadores en el aprendizaje de las matemáticas, por ello, me gustaría que me contaseis lo que os ha parecido más interesante e importante de la experiencia. Vamos a intentar que habléis ordenadamente por turno.

I: ¿Qué es lo más importante que habéis aprendido o lo que más os ha llamado la atención de la experiencia que habéis tenido con los ordenadores aprendiendo matemáticas? ¿Qué sería lo más destacable de esta experiencia? pueden ser aspectos positivos o negativos

I: (Una alumna destaca el trabajo colaborativo) ¿cómo aprendes más que haciéndolo tú sola? ¿Creéis que el trabajo con ordenadores propicia el trabajo en equipo? ¿Es diferente el trabajo en equipo con LP?

I: ¿En qué detalles notas las mejoras de trabajar con ordenador? ¿Por qué creéis que es mejor trabajar la geometría con los ordenadores?

I: (Un alumno afirma que es más difícil equivocarse con el ordenador) ¿por qué es más difícil equivocarse con el ordenador?

I: ¿Se comprende mejor la geometría con los ordenadores? (Es más fácil) ¿por qué es más fácil?

I: (Los estudiantes afirman estar más motivados con los ordenadores) ¿al estar más motivado se comprende mejor?

I: ¿Qué aspectos nos podríais aportar para mejorar la experiencia de trabajar con ordenadores? ¿Os gustaría trabajar otros temas con ordenadores?

I: ¿Trabajando con el ordenador tenéis más autonomía que con LP? ¿Necesitáis más a la profesora o menos?

I: Para saber si os habéis equivocado, ¿qué diferencias hay entre trabajar con el ordenador y con LP? ¿Eres más consciente de si lo haces bien con ordenador que con LP?

I: ¿Cómo se evalúa cuando uno aprende con ordenador? ¿Os parece más justo evaluar actividad por actividad que cuando se hace a través de un examen final del tema? ¿Es más fácil obtener una evaluación positiva trabajando con el ordenador?

I: ¿El hecho de trabajar con ordenadores os ha hecho sentir que tenéis más capacidad en matemáticas?

I: Decidme ventajas e inconvenientes del trabajo en parejas. ¿Las discusiones en pareja conducen a mejorar o no?

I: Otra de las cosas que nos gustaría saber es si los ordenadores hacen que insistáis más, que seáis más perseverantes a la hora de resolver una tarea que cuando trabajáis con LP. Es decir, ¿os ha ayudado a insistir más, a no abandonar a la primera?

I: Partiendo de vuestra experiencia, ¿qué es lo más significativo que nos podéis contar acerca de esta experiencia?, ¿qué os ha aportado el trabajo con ordenadores?, ¿qué ventajas tiene el ordenador respecto al LP? ¿En qué nos podéis ayudar o qué podéis aportar a nuestro estudio de forma que esta experiencia pueda ser útil a otros profesores o alumnos? ¿Cómo se podría mejorar?

I: ¿El ordenador ayuda a trabajar de forma colaborativa? ¿Creéis que el ordenador fomenta las interacciones entre compañeros? ¿Qué diferencias encontráis en la forma de comunicaros con el compañero cuando trabajáis con el ordenador y con LP?

I: ¿Creéis que habéis aprendido más con el ordenador?, ¿qué cosas? ¿Y os ha gustado esa forma de aprender?

Anexo G

Fichas de trabajo para las tareas con lápiz y papel y con Geogebra

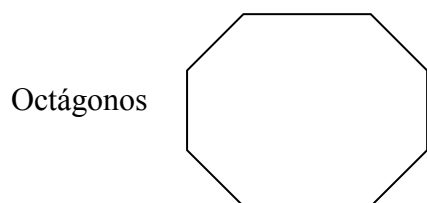
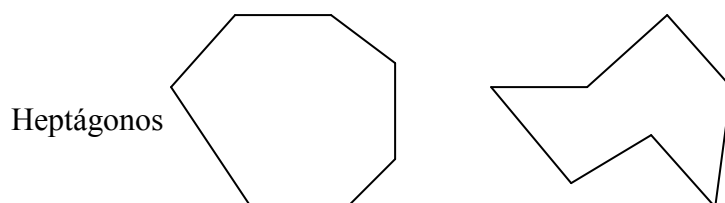
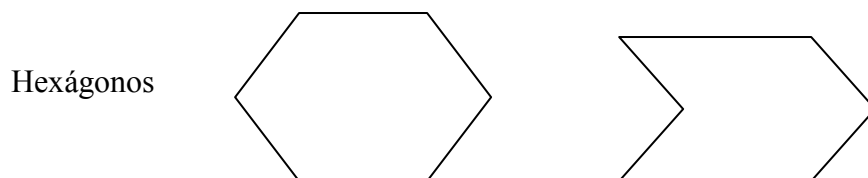
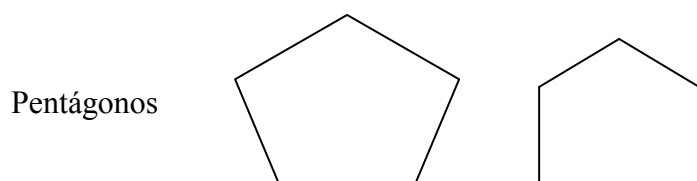
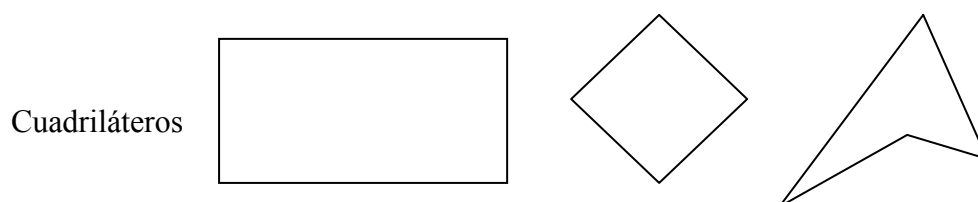
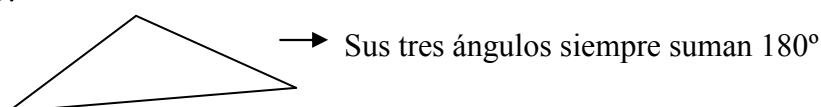
En este anexo incluyo las fichas de trabajo diseñadas para las tareas con lápiz y papel (una muestra de ellas) y con Geogebra, que proporcioné a los estudiantes cuando las trabajaron en el aula.

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON LÁPIZ Y PAPEL

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO REGULAR

Marta y Pablo juegan con piezas como las siguientes y se preguntan cuánto sumarán los ángulos interiores de cada una de ellas. No disponen de ningún utensilio para medir los ángulos, pero saben que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es de 180° ¿Se te ocurre cómo puedes hallar la suma de los ángulos interiores sin necesidad de medir primero cada ángulo?



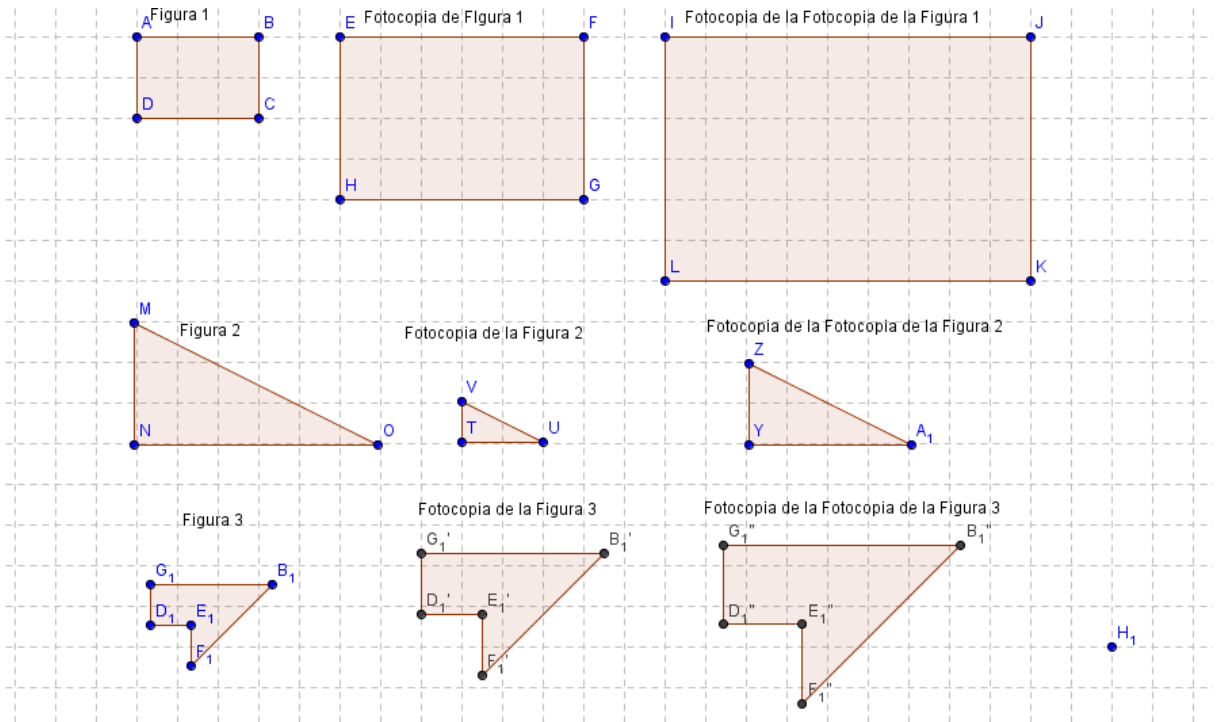
¿Puedes obtener una **fórmula** que te permita calcular la **suma de los ángulos de cualquier polígono conociendo únicamente el número de lados?**

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON LÁPIZ Y PAPEL

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

FIGURAS SEMEJANTES

Vamos a ampliar y reducir las tres figuras en la fotocopidora. Fíjate en las figuras originales, anota sus medidas y haz lo mismo con las fotocopias.



1.- Para las figuras 1 y 2, compara las medidas de cada figura original con la de la primera fotocopia y las de ésta con las de la segunda fotocopia. ¿Qué observas? Escribe los cálculos y tu respuesta.

2.- Para las figuras 2 y 3, mide también los ángulos y anota las medidas. Compara los ángulos de las figuras originales con los de la primera fotocopia y con los de la segunda fotocopia. ¿Qué observas? Escribe tu respuesta.

A los objetos que son ampliación o reducción de otros los llamaremos objetos semejantes, ¿cómo deben ser los lados y los ángulos de figuras semejantes? Explicalo con tus palabras.

3.- Si comparamos la figura 1 y su primera fotocopia vemos que la razón entre los lados es $\frac{EF}{AB} = 2$, al cociente que se obtiene al dividir lados homólogos de dos figuras semejantes se le llama **razón de semejanza**. Halla las razones de semejanza de cada figura y de su primera fotocopia y calcula también el perímetro de todas ellas. Anota todos los cálculos y resultados en la siguiente tabla:

	Figura 1 y su primera fotocopia	Figura 2 y su primera fotocopia	Figura 3 y su primera fotocopia
Perímetro			
Razón de Semejanza =			
$\frac{\text{Lado}_{\text{fotocopia}}}{\text{Lado}_{\text{figura}}}$	$\frac{EF}{AB} = 2$	$\frac{VU}{MO} =$	$\frac{G1' B1'}{G1 B1} =$
Razón entre Perímetros =			
$\frac{\text{Perímetro}_{\text{fotocopia}}}{\text{Perímetro}_{\text{figura}}}$			

¿Observas alguna relación entre la razón de semejanza y la razón entre perímetro de cada figura y su fotocopia?

4.- Halla las áreas de cada una de las figuras que aparecen en la tabla siguiente y complétala. Anota los cálculos que hagas para hallar las áreas:

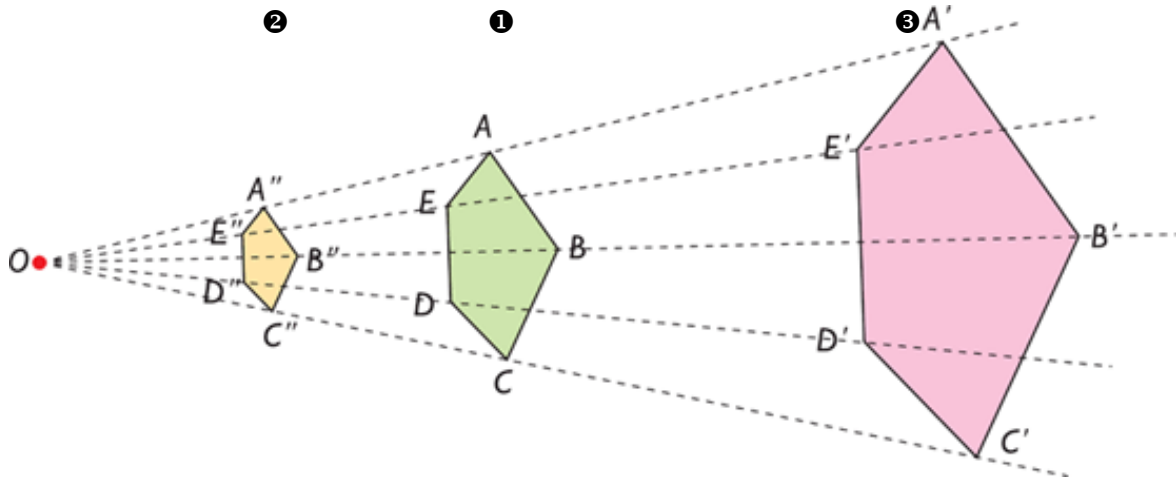
	Figura 1 y su segunda fotocopia	Figura 2 y su primera fotocopia	Figura 3 y su segunda fotocopia
ÁREA			
Razón de Semejanza =			
$\frac{\text{Lado}_{\text{fotocopia}}}{\text{Lado}_{\text{figura}}}$	$\frac{IJ}{AB} =$	$\frac{VU}{MO} =$	$\frac{G1'' B1''}{G1 B1} =$
Razón entre áreas =			
$\frac{\text{Área}_{\text{fotocopia}}}{\text{Área}_{\text{figura}}}$			

¿Observas alguna relación entre la razón de semejanza y la razón entre áreas de cada figura y su fotocopia?

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON LÁPIZ Y PAPEL

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

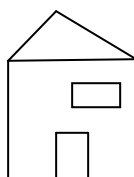
MÉTODO DE LA PROYECCIÓN PARA CONSTRUIR FIGURAS SEMEJANTES



1.- Halla la razón de semejanza entre la figura ② y la original (figura ①). Halla la razón entre las distancias OA'' y OA . ¿Qué observas? (Ayuda: mide los lados de cada figura y divídelos para hallar la razón de semejanza; mide las distancias OA'' y OA y divídelas).

2.- Halla la razón de semejanza entre la figura ③ y la original (figura ①). Halla la razón entre las distancias OA' y OA . ¿Qué observas? (Igual que el ejercicio anterior)

3.- Dibuja, usando el método de la proyección, una figura semejante a la siguiente aumentada tres veces y otra también semejante pero reducida a la mitad. (El punto **O** lo puedes colocar donde quieras).

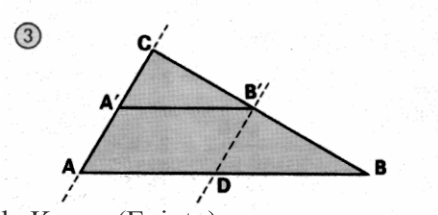
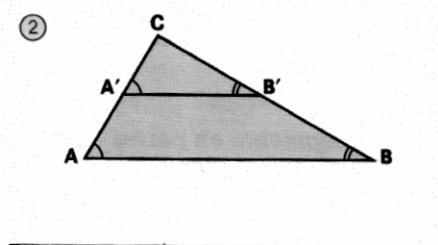
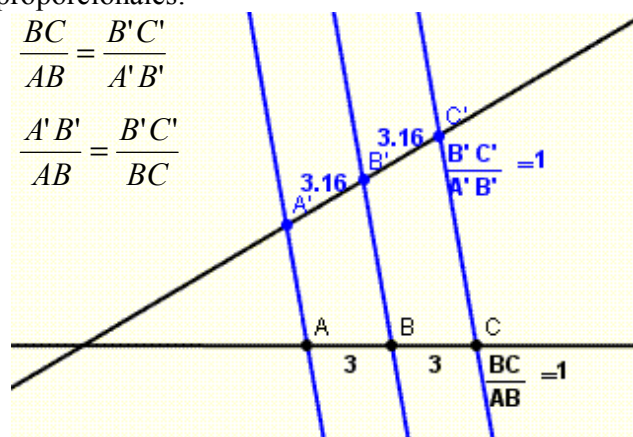


FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON LÁPIZ Y PAPEL

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo...

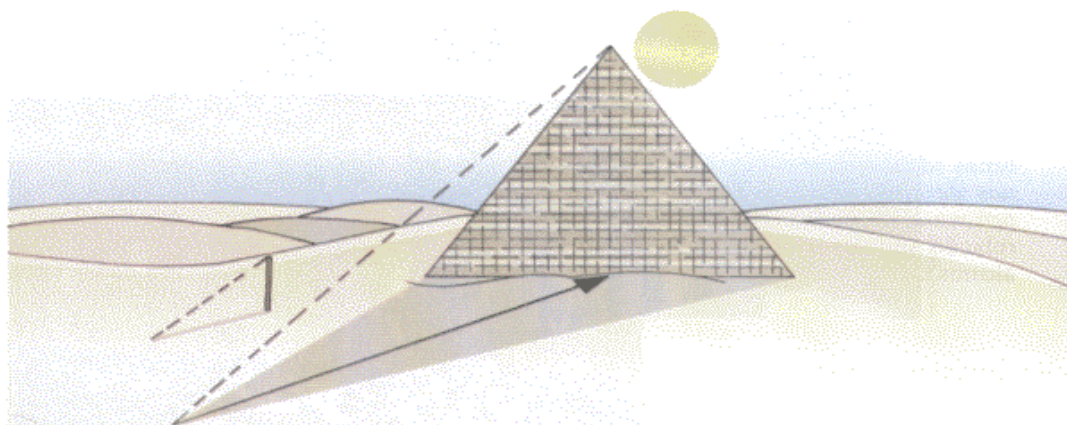
THALES DE MILETO

Nació alrededor del año 640 AC en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía) y falleció alrededor 560 AC en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía). Thales era un hombre esencialmente práctico: comerciante, hábil en ingeniería, astrónomo, geómetra, estadista. Se le incluye por tradición entre los *Siete Sabios*. Como comerciante se cuenta de él que un año, previniendo una gran producción de aceitunas, monopolizó todos los lagares para hacer el aceite, con lo cual obtuvo una espléndida ganancia. Como lo que ahora llamaríamos ingeniero, estuvo dirigiendo obras hidráulicas y se dice que desvió el curso del río Halis mediante la construcción de diques. Como astrónomo fue más célebre, predijo el eclipse total de sol visible en Asia Menor, como asimismo se cree que descubrió la constelación de la Osa Menor y que consideraba a la Luna 700 veces menor que el sol. También se cree que conoció la carrera del sol de un trópico a otro. Explicó los eclipses de sol y de luna. Finalmente creía que el año tenía 365 días. Su famoso TEOREMA dice que si dos rectas que se cortan son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que se forman son proporcionales:



Tales de Mileto lo usó para hallar la altura de la Pirámide de Keops (Egipto):

ABC y A'B'C en posición de Thales	→	$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$
---	---	---



Observando la imagen, ¿se te ocurre como lo hizo? Pista: él conocía cuánto medía el palo, sabía que el ángulo con el que inciden los rayos solares en la Tierra a la misma hora es el mismo y midió la sombra del palo y la de la pirámide a la misma hora.

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON LÁPIZ Y PAPEL

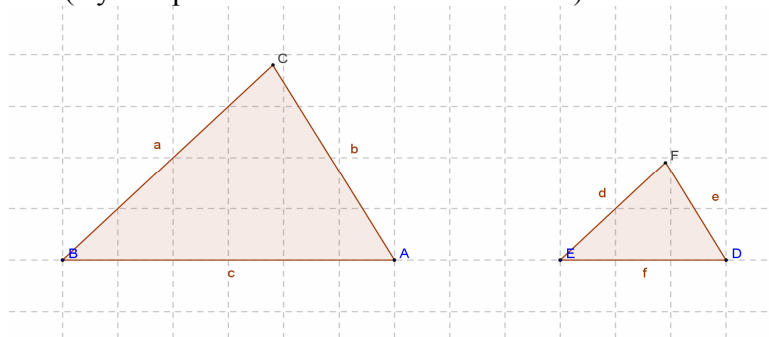
Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo...

CRITERIOS DE SEMEJANZA

El Teorema de Tales afirma que dos triángulos en posición de Tales son semejantes, pero aunque dos triángulos no estén en posición de Tales no es necesario comprobar que se cumple que todos los ángulos son iguales y todos los lados homólogos proporcionales para afirmar que son semejantes. Vamos a ver que será suficiente que se cumplan solamente algunas de esas condiciones para que dos triángulos cualesquiera sean semejantes. Esas condiciones que si se cumplen, nos dan la seguridad de que los triángulos son semejantes y se conocen como **Criterios de Semejanza**.

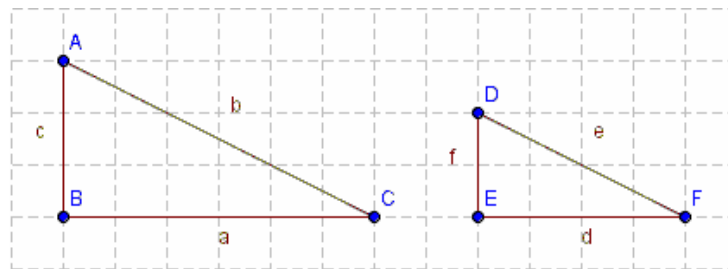
PRIMER CRITERIO DE SEMEJANZA

Imagínate que tienes dos triángulos como los siguientes, en los que puedes medir los ángulos pero no dispones de ningún medio para medir los lados. ¿Cómo podrías saber si son semejantes a partir de los ángulos? (Ayuda: puedes usar el Teorema de Tales)



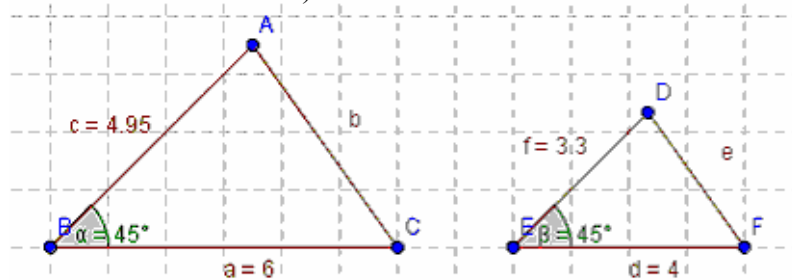
SEGUNDO CRITERIO DE SEMEJANZA

Supongamos ahora que no conoces la medida de ninguno de sus ángulos, pero si puedes obtener las medidas de sus lados. ¿Cómo podrías saber si son semejantes conociendo sólo sus lados? (Ayuda: puedes usar el Teorema de Tales)



TERCER CRITERIO DE SEMEJANZA

En este caso, tenemos dos triángulos que tienen uno de sus ángulos iguales y la medida de los lados que los forman. ¿Cómo podemos saber si son semejantes solamente con estos datos? (Ayuda: puedes usar el Teorema de Tales)



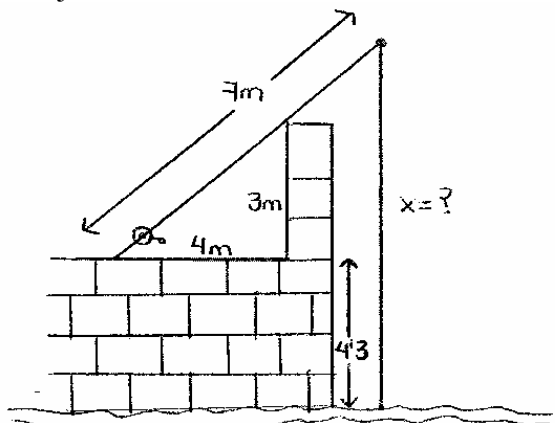
Escribe con tus palabras como queda el enunciado de cada uno de los tres criterios de semejanza.

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON *LÁPIZ Y PAPEL*

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE TALES Y DE PITÁGORAS

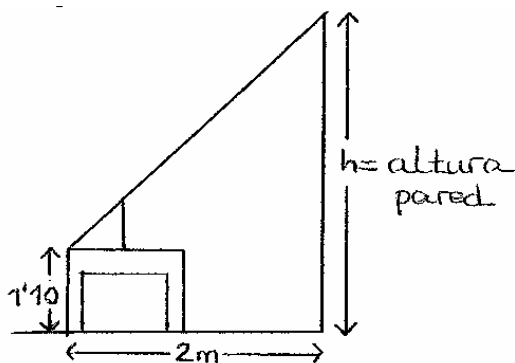
1.- Pepe y Blanca quieren ir a pescar el domingo al muelle de San Sebastián, pero no tienen caña de pescar, cuando van a la tienda a comprarla se dan cuenta de que el precio varía según el carrete que lleve la caña, es decir, cuantos más metros de hilo de pescar lleve la caña mayor es el precio de la caña. Como no quieren gastarse mucho dinero, deciden ir al muelle a comprobar cuál será la cantidad mínima de hilo de pescar que necesitarán para poder pescar. La situación del muelle se corresponde con el siguiente dibujo:



¿Qué caña deben elegir para poder pescar y gastarse la menor cantidad de dinero posible si los precios de las cañas son los siguientes: Caña con 7 metros de hilo = 29,95 €
 Caña con 10 metros de hilo = 49,95 €
 Caña con 12 metros de hilo = 60 € ? ¿Por qué?

2.- Vamos a usar un cartabón y una cinta métrica para hallar alturas que no conocemos:

-Queremos hallar la altura de una habitación de nuestra casa para ello sólo necesitamos el cartabón, el metro y una mesa o un mueble en el que podamos apoyar el cartabón y que podamos mover fácilmente. Primero apoyamos el cartabón en la mesa y lo sujetamos con libros, miramos a través del cartabón y tenemos que conseguir que la visual de la hipotenusa termine en el punto más alto de la pared, sino vemos ese punto movemos la mesa hasta que lo veamos. Ahora tenemos esta situación:



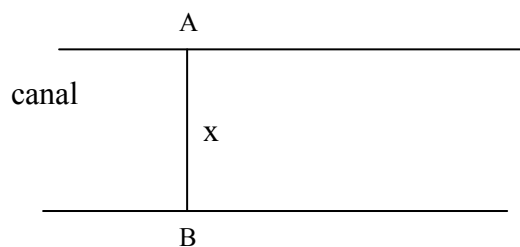
Usamos la cinta métrica para medir la altura de la mesa: 1,10 metros y la distancia de la mesa a la pared: 2 metros, ¿sabrías hallar la altura de la pared? (Dato: cada cateto del cartabón miden 30 cm.). Explica cómo lo haces.

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON LÁPIZ Y PAPEL

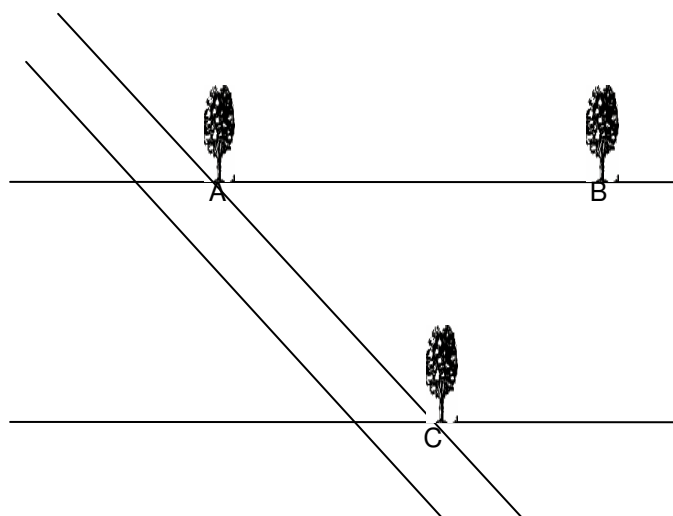
Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE TALES Y DE PITÁGORAS (2)

3.- Estamos en la orilla de un canal y queremos medir cuál es la anchura del canal pero no podemos cruzar al otro lado. Tenemos el mismo cartabón (30 cm cada cateto) de la actividad anterior y también la cinta métrica, ¿se te ocurre cómo hallar la anchura “x” del canal? Explica cómo lo harías.



4.- Una persona situada junto al árbol C sabe que la distancia entre los árboles A y C es de 30 metros (longitud del puente) y quiere calcular la distancia que hay entre A y B sin cruzar el río. ¿Cómo le ayudarías a obtener esa distancia? La persona puede desplazarse y cuenta con un metro para medir cuánto se desplaza. Explica cómo lo haces.



FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON **GEOGEBRA**

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

MOSAICOS

En el año 1060 un visir del gran rey bereber Inb Habus levantó en una colina de Granada una residencia que posteriormente se reconstruyó y amplió hasta ser uno de los monumentos característicos de la presencia árabe en España: La Alhambra. En sus palacios se pueden ver las características fundamentales del arte islámico, como son las colecciones de mosaicos.

Un mosaico es una composición de losetas que reproduce u paisaje o figura, en el que las losetas no pueden solaparse ni dejar huecos entre ellas. Cuando las losetas llenan el plano basándose en simetrías, traslaciones y giros, estamos ante un mosaico geométrico.



Los árabes fueron unos excelentes creadores de mosaicos geométricos. En la cultura islámica se fue desarrollando una actitud de rechazo a la representación de seres vivos, que les llevó a buscar un sistema de representaciones nuevo que no coincidía con el cristiano (que dibujaba personas y animales), pero que les permitía mostrar una identidad propia como pueblo. Por ello, el islam decidió rechazar cualquier representación de seres vivos, para evitar así la confusión con otras culturas, y su creatividad se decantó hacia la caligrafía y los dibujos geométricos, en los que alcanzaron cotas de belleza y complejidad difícilmente superables. Además, dados los conocimientos matemáticos de su época sobre mosaicos, resulta impactante comprobar que conocían todos y cada uno de los tipos de mosaicos existentes. (17 grupos de cristalógrafos planos).

Tarea 1: Supongamos que eres un/a decorador/a árabe y que el gran visir te encarga embaldosar los suelos de la Alhambra con dos condiciones: debes emplear losetas iguales en cada habitación, pero los diseños de las losetas deben ser diferentes en cada sala (puedes emplear todas las formas de losetas que se te ocurran). Debes mostrarle al visir todas aquellas formas de losetas que sirven para embaldosar sus habitaciones, para que él pueda decidir cuál le gusta más para cada suelo o pared. Haz todas las pruebas que necesites para poder complacer al visir, ya que de ello depende tu sueldo y tu reputación como decorador/a. **¿Qué formas pueden tener las losetas?**

¿Vale cualquiera de esas formas o polígonos para embaldosar un suelo o pared? Explica en qué casos has podido embaldosar y en cuales no y por qué.

¿Qué debe pasar para poder embaldosar una superficie con un tipo de losetas?

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON *GEOGEBRA*

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

Tarea 2: ¿Qué técnicas has empleado para construir cada mosaico: dibujar sobre vértices de la cuadrícula con el ratón, usar traslaciones, giros, simetrías...?

¿Eres capaz de repetir algunos de los mosaicos que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes? (Elige un tipo de loseta e intenta construir el mismo mosaico usando al menos de tres técnicas diferentes, repite este ejercicio con tres tipos de losetas).

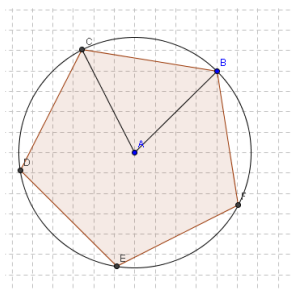
Tarea 3: Supongo que a estas alturas, después de probar con distintas losetas, ya sabrás que cualquier triángulo y cuadrilátero sirve para enlosar una superficie, pero **¿eres capaz de explicar por qué?**

(Te sugiero que primero pruebes con distintos tipos de triángulos, empezando por aquellos con los que te resulte más sencillo construir mosaicos, y cuando obtengas una respuesta, lo intentes con diferentes cuadriláteros, comenzando también con los que te resulte más sencillo embaldosar).

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON *GEOGEBRA*

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

Tarea 4: Ahora nos vamos a centrar en aquellas losetas que tienen todos los lados iguales, es decir, en losetas que son polígonos regulares, ¿eres capaz de construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7... lados? ¿Cómo lo haces?



Tarea 5: El visir te sugiere que para embaldosar el suelo de la “Sala de los Abencerrajes” (esta sala es alcoba del sultán.) emplees losetas con todos los lados y ángulos iguales, para ahorrar dinero (estas losetas son más baratas que las que tienen formas irregulares). **¿Qué formas pueden tener estas losetas?** (Sugerencia: estudia con cuáles de los polígonos regulares que has dibujado en la tarea anterior es posible construir un mosaico y analiza qué tienen en común los ángulos de los polígonos con los que has podido embaldosar)

¿Puedes obtener más mosaicos usando losetas regulares de mayor número de lados? Justifica tus respuestas.

Sugerencia: Quizás pueda serte útil hallar los valores de los ángulos interiores de cada polígono regular, como te indico en la siguiente tabla:

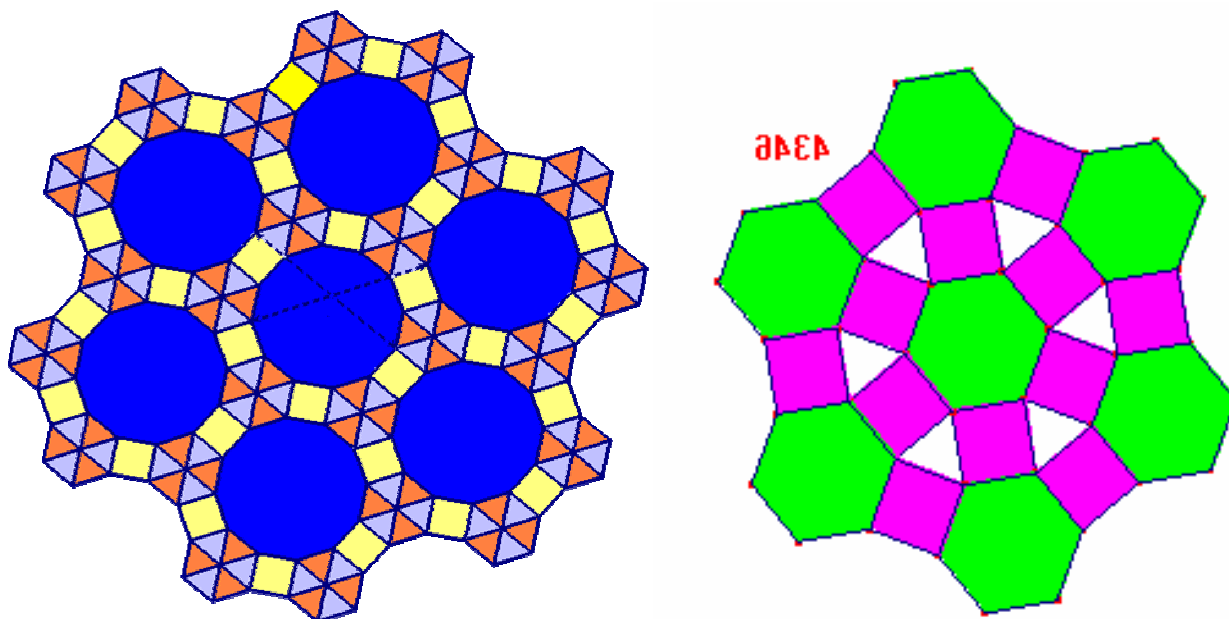
Nº lados polígono	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Valor ángulo interior										

Tarea 6: ¿Qué técnicas has empleado para construir cada mosaico: dibujar sobre vértices de la cuadrícula con el ratón, usar traslaciones, giros, simetrías...? **¿Eres capaz de repetir los 3 mosaicos regulares que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes?**

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON GEOGEBRA

Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

Tarea 7: “El gran visir no ha quedado muy satisfecho con los mosaicos que le has presentado para embaldosar los suelos, porque cree que no son estéticamente atractivos y por ello, te sugiere que **con tus conocimientos sobre mosaicos y empleando como teselas polígonos con los lados iguales para ahorrar dinero** (prueba con cualquier polígono regular, no solamente con los 3 que teselan el plano) **realices otros diseños más interesantes**. Puedes mezclar distintos tipos de polígonos y usar distintos colores.



Los dos mosaicos anteriores son ejemplos de “*Mosaicos Semirregulares*”, pues se obtienen empleando varias clases de polígonos, con la condición de que los distintos polígonos tengan los lados de la misma longitud.

Tarea 8: Entre los dos mosaicos de la tarea anterior, hay una pequeña diferencia y es que en el mosaico de la derecha se cumple que en todos los vértices del mosaico se encuentran los mismos polígonos y en el mismo orden (colocados de la misma manera). A los polígonos que cumplen esta condición se les llama “*Mosaicos Semirregulares Congruentes*”.

“El gran visir, siempre con su afán de facilitar el trabajo a los obreros, te sugiere que le presentes diseños de mosaicos semirregulares congruentes para que pueda elegir uno para enlosar las paredes del Salón de Comares o Salón de los Embajadores (es la sala más amplia y elevada de todo el palacio. En ella se celebran las audiencias privadas del sultán con otras personas que se sientan en los huecos que hay en las paredes. Además aquí encontramos el trono del sultán). **¡Ánimo sólo hay 8 posibles diseños! Intenta encontrarlos**”.

FICHAS DE TRABAJO PARA LAS TAREAS CON **GEOGEBRA**

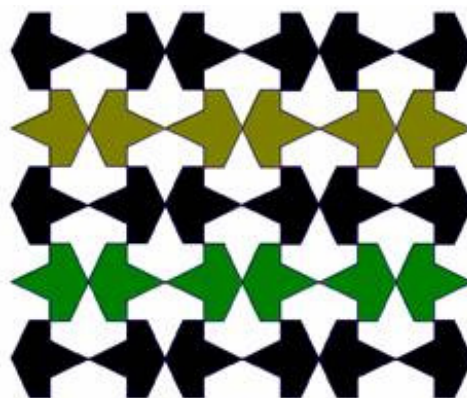
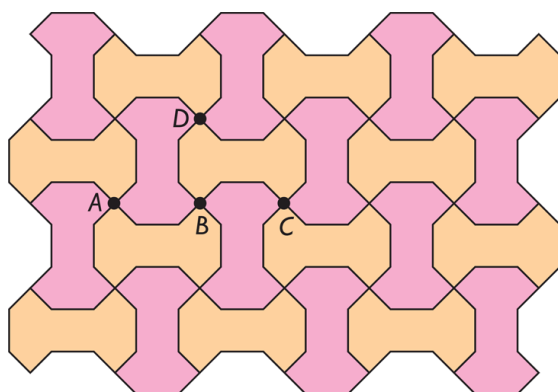
Nombre.....Fecha.....Sesión.....Grupo.....

Tarea 9: Vamos a estudiar algunas transformaciones que podemos hacerles a los polígonos que teselan el plano, para conseguir losetas más originales que siguen valiendo para embaldosar cualquier superficie.

Una forma muy sencilla de conseguir **mosaicos** es deformar un polígono regular, eliminando una parte del mismo y añadirla mediante una *traslación* o un *giro* a otro lado. Para ello, usando Geogebra debemos dibujar un polígono sobre uno o varios lados (deformar uno o varios lados) y después podemos:

- 1.- Trasladar esta deformación a otro lado del polígono.
- 2.- Girar esta deformación sobre otro lado usando algún vértice del polígono.

Te propongo ahora el trabajo inverso al que has estado haciendo hasta ahora: en lugar de pedirte que busques diseños de losetas que sirvan para hacer mosaicos, te doy dos diseños de mosaicos muy famosos que se encuentran en la Alhambra, para que partiendo de un cuadrado, consigas dibujarlos usando Geogebra. (Deberás usar traslaciones, giros o simetrías). El mosaico de la izquierda se llama Mosaico del Hueso y el de la derecha Mosaico del Avión.



Tarea 10: Dejamos a un lado nuestra faceta como decorador/a de la Alhambra, para regresar a nuestros tiempos. Vamos a transformarnos ahora en uno de los más famosos pintores holandeses del siglo pasado Maurits Cornelius Escher, quien utilizó para sus pinturas sus conocimientos matemáticos sobre traslaciones, giros y simetrías. Una vez que has podido conocer parte de su obra, me gustaría que hicieses algunos mosaicos usando como tesela base un triángulo equilátero y un hexágono regular y que deformes sus lados mediante traslaciones y giros. Después de obtener el mosaico puedes embellecerlo usando diferentes colores o añadiendo dibujos en el interior de las teselas. **¡Ánimo, se lo más creativo posible y usa tu imaginación junto con tus conocimientos de matemáticas!** (Una vez que todos hayáis obtenido vuestros mosaicos elegiremos por votación el mejor de cada tipo y lo añadiremos a nuestras páginas de Helvia, Moodle, para que todo el mundo pueda verlo).

Anexo H

Parrillas de observación de actitudes y competencias

VERSIÓN DEFINITIVA DE LA PARRILLA DE ACTITUDES

Reflexionando acerca de del diseño de la parrilla y a la luz de los resultados obtenidos, se ha considerado pertinente cambiar la redacción del indicador correspondiente a la componente cognitiva de las actitudes hacia las matemáticas, que ahora está formulado en sentido positivo, en consonancia con los de las restantes componentes. Por otra parte, es pertinente reflexionar sobre la adecuación del indicador FP2 de la actitudes Flexibilidad de Pensamiento: *“Se interesa por la/s forma/s en que otros compañeros resuelven problemas diferentes a la suya”* dado que resultó poco útil en la práctica. Considero conveniente incluir este indicador en la parrilla cuando la metodología de trabajo en el aula y todas las tareas se seleccionen de modo que permitan que los estudiantes encuentren diferentes estrategias de resolución, en caso contrario, sería más adecuado suprimirlo para que la parrilla sea lo más operativa posible.

La parrilla podría mejorarse homogeneizando la escala usada para las distintas actitudes, es decir, incluyendo más indicadores para graduar aquellas actitudes que en la versión presentada responden a una naturaleza binaria (0 = ausencia y 1 = evidencia de la actitud). De este modo, la parrilla aportaría información aún más detallada acerca de las actitudes de cada estudiante. No obstante, debo recordar que nuestro propósito era el de diseñar un instrumento de recogida de información de fácil manejo y, a la vez, lo suficientemente detallado como para que pudiera ser utilizado por otros docentes interesados en obtener información sobre la evolución de las actitudes de sus alumnos en situaciones de aula, que no tienen por qué responder a una investigación como la que en esta memoria se presenta, y para este fin, la parrilla se ha mostrado muy adecuada y por ello, queda a su disposición.

ACTITUDES MATEMÁTICAS	FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO	FP1 Resuelve los problemas de más de una forma.	
		FP2 (Opcional) Se interesa por la/s forma/s en que otros compañeros resuelven los problemas diferentes a la suya	
		FP3 Cambia de opinión en base a argumentos convincentes.	
	ESPÍRITU CRÍTICO	EC4 Analiza la solución obtenida y reflexiona sobre su bondad.	
		EC5 Aunque no es capaz de hallar una solución correcta, revisa los pasos para comprobar que todo es correcto o encontrar errores.	
		EC6 Se da cuenta de que no llega a la solución o de que ésta no es válida, pero no se preocupa de averiguar el por qué o de seguir intentándolo.	
	PERSEVERANCIA	PE7 Ante un problema, se da por vencido fácilmente sin llegar a ninguna respuesta	
		PE8 Cuando fracasa en el intento de resolver un problema, no lo intenta otra vez, se conforma con una respuesta incorrecta.	
		PE9 No abandona el problema hasta que llega a una solución.	
	PRECISIÓN Y RIGOR	PR10 No le gusta equivocarse, realiza los cálculos con cuidado.	
		PR11 Cree que un error de cálculo no es importante.	
		PR12 Se contenta con soluciones aproximadas. No es muy riguroso	
	CREATIVIDAD	C13 Le gusta inventar nuevas estrategias o problemas	
		C14 No investiga distintas o nuevas estrategias	
	AUTONOMÍA	AU15 Prefiere no pensar por sí mismo y pregunta al profesor o a los compañeros qué debe hacer.	
AU16 Trabaja de modo autónomo.			
SISTEMATIZACIÓN	SS17 Cuando trabaja actúa sabiendo dónde quiere llegar		
	SS18 Actúa por inercia: no sabe para qué sirve lo que está haciendo		
	SS19 Es capaz de sintetizar sus cálculos y resultados		
ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS	COGNITIVA	CO20 Confía en poder resolver el problema por sí solo.	
	AFECTIVA	GM21 Disfruta con la tarea que está realizando.	
	COMPORTAMENTAL	TR22 Trabaja durante la sesión mostrando interés por el trabajo.	
		TR23 Se niega a trabajar en clase o trabaja poco	
ACTITUD TIC	TIC24 Interés y gusto por el trabajo con ordenadores		

PARRILLAS DE OBSERVACIÓN DE **COMPETENCIAS**

Las siguientes parrillas de competencias de diseño propio, usadas durante la experiencia recogida en esta memoria, resultaron útiles para evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes. Para facilitar la recogida de datos de cada competencia, los indicadores de las parrillas se correspondían con las capacidades asociadas a cada una de ellas, que era necesario que los estudiantes pusieran de manifiesto en cada tarea de mosaicos (tareas GG) para su resolución. La correspondencia capacidades-competencias, que permite analizar cada competencia por separado, se encuentra en la tabla 6-4 (p. 163). A continuación expongo las parrillas de las diez tareas GG, las cuales quedan a disposición de quien desee usarlas:

<i>Tarea 1</i>		<i>Alumnos</i>
CG1	Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)	
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
	<i>CG2.1</i> Se expresa oralmente con sus palabras	
	<i>CG2.2</i> Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
	<i>CG2.3</i> Se expresa por escrito con sus palabras	
	<i>CG2.4</i> Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1 Manejar distintos tipos de polígonos y distintos movimientos para crear mosaicos		
	<i>C1.1.</i> Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos, representando un mismo polígono girado, trasladado, reflejado	
	<i>C1.2.</i> Explora distintos mosaicos con distintas formas poligonales de n lados: regulares, irregulares	
C2	Distingue representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías	
C3	Crea mosaicos sencillos dibujando la tesela a partir de sus vértices, sin isometrías	
C4	Crear mosaicos sencillos usando un tipo de isometría	
C6	Argumenta la condición matemática para poder teselar (generalizar)	
CG3	Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)	
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
	<i>CG4.1</i> Dibuja los polígonos y los coloca correctamente para teselar	
	<i>CG4.2</i> Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 2		Alumnos
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
CG2.1	Se expresa oralmente con sus palabras	
CG2.2	Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
CG2.3	Se expresa por escrito con sus palabras	
CG2.4	Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1.1. Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos, representando un mismo polígono girado, trasladado, reflejado		
C2 Distingue representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías		
C5 Crear un mismo mosaico sencillo por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido		
C5.1	Prueba con diferentes isometrías o combinaciones de ellas	
C5.2	Prueba distintas representaciones con elementos distintos para una misma isometría	
CG3 Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)		
CG4.2 Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar		

Tarea 3		Alumnos
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
CG2.1	Se expresa oralmente con sus palabras	
CG2.2	Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
CG2.3	Se expresa por escrito con sus palabras	
CG2.4	Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1 Manejar distintos tipos de polígonos y distintos movimientos para crear mosaicos		
CI.1.	Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos, representando un mismo polígono girado, trasladado, reflejado	
CI.2.	Explora distintos mosaicos con distintas formas poligonales de n lados: regulares, irregulares	
C3 Crea mosaicos sencillos dibujando la tesela a partir de sus vértices, sin isometrías		
C4 Crear mosaicos sencillos usando un tipo o varias isometrías		
C6 Argumenta la condición matemática para poder teselar con triángulos y cuadriláteros		
C6.1	Sólo argumenta visualmente a través de ejemplos concretos elegidos sin criterio	
C6.2	Argumenta a partir de un ejemplo lo menos particular posible, seleccionado cuidadosamente	
C6.3	Generaliza el resultado para cualquier triángulo y cuadrilátero	
CG3 Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)		
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
CG4.1	Dibuja los polígonos y los coloca correctamente para teselar	
CG4.2	Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 4		Alumnos
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
CG2.1	Se expresa oralmente con sus palabras	
CG2.2	Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
CG2.3	Se expresa por escrito con sus palabras	
CG2.4	Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1 Construir polígonos regulares usando giros		
CI.1.	Averigua el ángulo de giro de cada polígono regular	
CI.2.	Dibuja polígonos regulares girando un vértice	
CG3 Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)		
CG4.2 Emplea correctamente las distintas herramientas (giro o ángulo amplitud dada) para construir polígonos regulares		

Tarea 5		Alumnos
CG1 Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)		
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
CG2.1	Se expresa oralmente con sus palabras	
CG2.2	Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
CG2.3	Se expresa por escrito con sus palabras	
CG2.4	Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C2 Distingue representaciones de mosaicos regulares dibujando y usando isometrías		
C3 Crea mosaicos regulares usando un tipo de isometría		
C5 Identifica la igualdad de los ángulos que concurren en un vértice		
C6 Argumenta por qué sólo existen 3 tipos de mosaicos regulares		
C6.1	Sólo argumenta visualmente a través de ejemplos concretos elegidos sin criterio	
C6.2	Obtiene la condición para teselar con polígonos regulares (ángulo=divisor 360°)	
C6.3	Argumenta la unicidad de 3 mosaicos regulares (no hay más divisores de 360° posibles)	
C6.4	No argumenta ni demuestra de ninguna manera	
CG3 Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)		
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
CG4.1	Dibuja los polígonos regulares	
CG4.2	Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 6		Alumnos
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
	CG2.1 Se expresa oralmente con sus palabras	
	CG2.2 Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
	CG2.3 Se expresa por escrito con sus palabras	
	CG2.4 Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C2 Distingue representaciones de mosaicos regulares dibujando y usando isometrías		
C4 Crea un mismo mosaico regular por distintos métodos, explicando el procedimiento seguido		
	C4.1 Prueba con diferentes isometrías o combinaciones de ellas	
	C4.2 Prueba con elementos distintos para una misma isometría (ej. distintos vectores de una traslación)	
C5 Identifica la igualdad de los ángulos que concurren en un vértice		
CG3 Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)		
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
	CG4.1 Dibuja los polígonos regulares	
	CG4.2 Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 7		Alumnos
CG1 Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)		
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
	CG2.1 Se expresa oralmente con sus palabras	
	CG2.2 Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
	CG2.3 Se expresa por escrito con sus palabras	
	CG2.4 Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1 Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos		
	C1.1. Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos, representando un mismo polígono girado, trasladado, reflejado	
	C1.2. Explora y representa distintas combinaciones de polígonos	
C2 Distingue representaciones de mosaicos semirregulares dibujando y usando isometrías		
C3 Crea mosaicos semirregulares sencillos		
C4 Obtiene condición matemática para poder teselar		
C5 Crea mosaicos semirregulares complejos usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido		
	C5.1 No se plantea una estrategia: busca combinaciones por ensayo-error	
	C5.2 Sigue una estrategia: halla el ángulo interior y obtiene combinaciones que sumen 360°	
CG3 Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)		
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
	CG4.1 Dibuja los polígonos y los coloca correctamente para teselar	
	CG4.2 Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 8		Alumnos
CG1	Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)	
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
	CG2.1 Se expresa oralmente con sus palabras	
	CG2.2 Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
	CG2.3 Se expresa por escrito con sus palabras	
	CG2.4 Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1 Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos		
	CI.1. Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos, representando un mismo polígono girado, trasladado, reflejado	
	CI.2. Explora y representa distintas combinaciones de polígonos	
C2	Distingue representaciones de mosaicos semirregulares dibujando y usando isometrías	
C3	Crea mosaicos semirregulares sencillos	
C4	Obtiene condición matemática para poder teselar	
C5	Crea mosaicos semirregulares complejos usando isometrías y/o dibujando polígonos regulares, explicando el procedimiento seguido	
C6 Obtiene los ocho mosaicos semirregulares congruentes		
	C6.1 No se plantea una estrategia: busca combinaciones por ensayo-error (PR, RP)	
	C6.2 Sigue una estrategia: halla el ángulo interior y obtiene combinaciones que sumen 360°	
C7 Argumenta la obtención de los ocho mosaicos semirregulares congruentes		
	C7.1 Sólo argumenta visualmente a través de ejemplos elegidos sin criterio, sin llegar a obtener todos los mosaicos	
	C7.2 Deduce la solución (8 mosaicos o algunos de ellos) obteniendo la suma de los ángulos que concurren en un vértice, no sólo visualmente	
	C7.3 No argumenta de ninguna manera	
CG3	Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)	
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
	CG4.1 Dibuja los polígonos y los coloca correctamente para teselar	
	CG4.2 Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 9		Alumnos
CG1	Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)	
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
	<i>CG2.1</i> Se expresa oralmente con sus palabras	
	<i>CG2.2</i> Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
	<i>CG2.3</i> Se expresa por escrito con sus palabras	
	<i>CG2.4</i> Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1	Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos	
C2	Distingue representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías	
C3	Identifica y explica la obtención del motivo mínimo de un mosaico dada su representación contextualizada	
C5	Crea teselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero o hexágono regular, explicando el procedimiento seguido	
C6 Crea mosaicos a partir de polígonos deformados con distintas isometrías o con combinaciones de ellas, explicando el procedimiento seguido		
	<i>C6.1</i> No se plantea una estrategia: busca combinaciones por ensayo-error (PR, RP)	
	<i>C6.2</i> Razona qué isometría debe aplicar identificando sus elementos: vector, centro, ángulo, eje	
C7	Argumenta cómo obtiene las teselas y los mosaicos (vectores y ángulos de giro)	
CG3	Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)	
CG4.2	Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Tarea 10		Alumnos
CG1	Interpreta el enunciado del problema contextualizado en términos matemáticos (pasar del contexto de la tarea al matemático)	
CG2 Expresa oralmente y por escrito estrategias seguidas y resultados		
	<i>CG2.1</i> Se expresa oralmente con sus palabras	
	<i>CG2.2</i> Se expresa oralmente con vocabulario matemático adecuado	
	<i>CG2.3</i> Se expresa por escrito con sus palabras	
	<i>CG2.4</i> Se expresa por escrito con vocabulario matemático adecuado	
C1	Maneja distintas representaciones de polígonos para crear mosaicos	
C2	Distingue representaciones de mosaicos dibujando y usando isometrías	
C5	Crea teselas deformando por giros y/o traslaciones los lados de un triángulo, cuadrilátero o hexágono regular, explicando el procedimiento seguido	
C6 Crea mosaicos a partir de polígonos deformados con distintas isometrías o con combinaciones de ellas, explicando el procedimiento seguido		
	<i>C6.1</i> No se plantea una estrategia: busca combinaciones por ensayo-error (PR, RP)	
	<i>C6.2</i> Razona qué isometría debe aplicar identificando sus elementos: vector, centro, ángulo, eje	
C7	Argumenta cómo obtiene las teselas y los mosaicos (vectores y ángulos de giro)	
CG3	Comprende razonamientos y argumentaciones de otros (compañeros y/o profesor)	
CG4 Maneja correctamente el programa Geogebra		
	<i>CG4.1</i> Dibuja los polígonos regulares	
	<i>CG4.2</i> Emplea correctamente las distintas herramientas isométricas del programa para teselar	

Anexo I

Análisis individualizado de los estudiantes de la muestra no pertenecientes al estudio de casos

I.1. ANÁLISIS DE LAS TRANSFORMACIONES ACTITUDINALES

Para ilustrar la evolución individual de los siete estudiantes (A1, A2, A4, A5, A6, A11 y A12), pertenecientes a la muestra seleccionada pero que no formaron parte del estudio de casos realizado, se informa del perfil actitudinal previo de cada alumno y se presentan los gráficos correspondientes al análisis de las parrillas observación de actitudes. Tras triangular estos resultados con los obtenidos del análisis de los cuestionarios, los diarios individuales escritos por la profesora para cada estudiante y buzones de sugerencias, se consideró que resumen adecuadamente y de modo simplificado la transformación sufrida por cada uno de ellos respecto de su situación inicial, permitiendo responder de forma individualizada al objetivo 2 de investigación. Respecto a las características de Geogebra que ejercieron mayor influencia en la evolución de cada una de las actitudes de los estudiantes (objetivo 3), al coincidir éstas con las encontradas para los restantes estudiantes del estudio de casos, presentadas en el segundo epígrafe del capítulo 9, no incidiré en este aspecto nuevamente para no extenderme en exceso en el análisis.

Recuerdo la nomenclatura empleada en el análisis, tanto en los gráficos como en la prosa, a través de la siguiente tabla:

Tabla I-1. Abreviaturas empleadas para el análisis actitudinal

Actitudes Matemáticas	FP __ Flexibilidad de Pensamiento EC __ Espíritu Crítico PE __ Perseverancia PR __ Precisión y Rigor C __ Creatividad AU __ Autonomía SS __ Sistematización
Actitudes hacia las Matemáticas	TR __ Trabajo e Implicación de los alumnos GM __ Gusto por las tareas realizadas CO __ Autoconfianza en matemáticas

I.1.1. Alumno 1 (A1)

A1 era un alumno bastante trabajador en matemáticas, porque buscaba una calificación positiva en la asignatura. Sin embargo, no manifestaba agrado por la actividad matemática desarrollada en clase, en especial por la resolución de problemas. Sólo se exigía a sí mismo el esfuerzo necesario para obtener la calificación deseada, demostrando pocas actitudes matemáticas en el resto de las situaciones.

Actitudes hacia las matemáticas

Como se aprecia en el siguiente gráfico, experimentó una adecuada transformación de las tres componentes de estas actitudes:

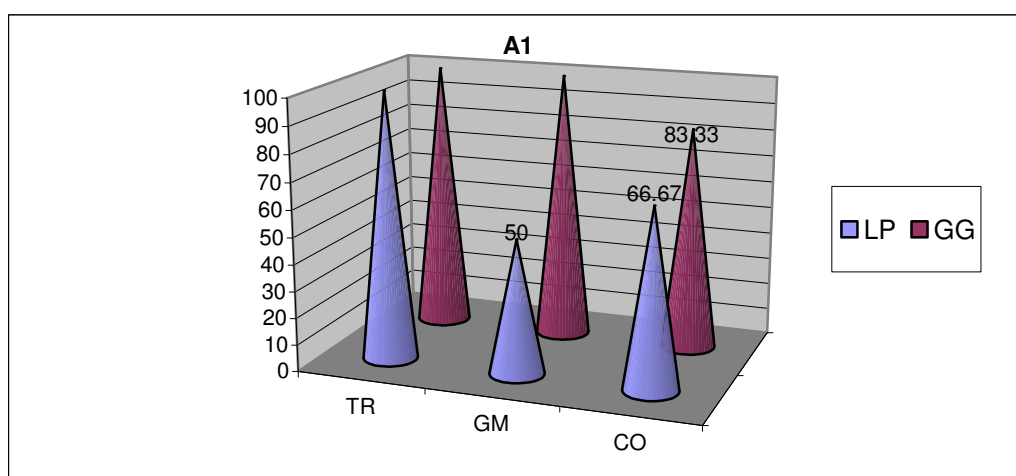


Figura I-1. Porcentajes obtenidos por A1 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Con Geogebra valoró y le gustó más el trabajo en matemáticas (GM), mostrando además mayor confianza en sí mismo (CO) y en su capacidad para resolver los problemas que le planteamos. El interés y trabajo realizado por este estudiante en matemáticas (TR) se mantuvo al máximo nivel durante la experiencia de trabajo con el software.

Actitudes matemáticas

Su perfil actitudinal obtenido durante la observación de las tareas LP y GG, se muestra en el siguiente gráfico:

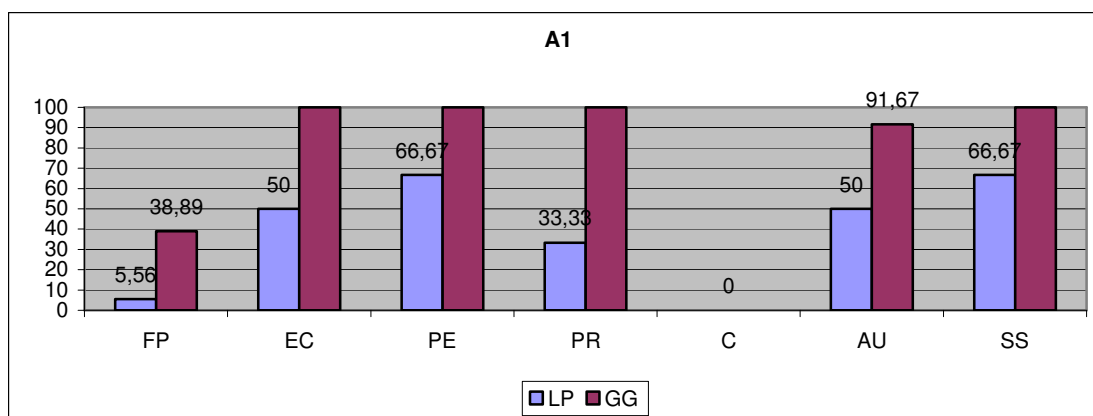


Figura I-2. Porcentajes obtenidos por A1 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

Antes del trabajo con Geogebra se observó que, a excepción de actitudes como Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad, no visibles en él normalmente, y Precisión y Rigor, cuyo nivel era insuficiente, el resto de sus actitudes matemáticas eran aceptables. Se comprobó cómo estas actitudes evolucionaron positivamente durante el trabajo con Geogebra.

I.1.2. Alumno 2 (A2)

Las actitudes matemáticas de A2 eran similares a las de A1, sin embargo, su implicación en el trabajo matemático en el aula y en casa, era bastante inferior al de éste. Denotaba falta de motivación por el modo de trabajar en clase y un ritmo poco constante de trabajo. En ocasiones mostraba interés por superar la asignatura, pero se desanimaba rápidamente, experimentando un comportamiento bastante variable que, en parte, dependía de la dificultad de las tareas realizadas: si se consideraba capaz de realizarlas con éxito, invertía algún tiempo en ellas y manifestaba algunas actitudes matemáticas, pero si creía que eran complejas, se desmotivaba rápidamente y las abandonaba.

Actitudes hacia las Matemáticas

A2 también evolucionó bastante en sus actitudes hacia las matemáticas, sobre todo en Gusto por las matemáticas y Autoconfianza, como puede comprobarse en el siguiente gráfico:

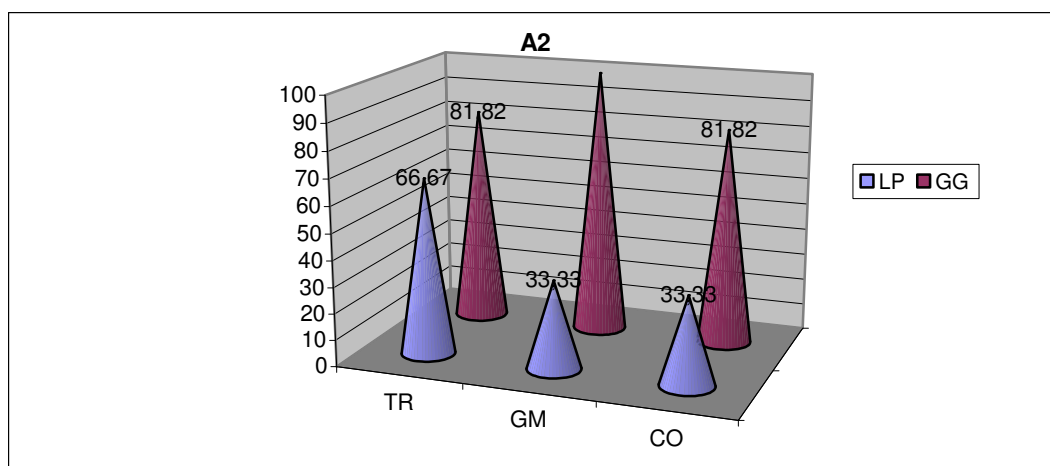


Figura I-3. Porcentajes obtenidos por A2 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Se observa que el gusto por el uso de Geogebra, que manifestó A2 a lo largo de las tareas GG y que él me comunicó de muy diversas formas y en repetidas ocasiones a lo largo de la experiencia, contribuyó a que estuviese más motivado por el trabajo en matemáticas, que confiase más en sus posibilidades y se implicase más en las tareas.

Actitudes matemáticas

Su perfil actitudinal obtenido durante la observación de las tareas LP y GG, se muestra en el siguiente gráfico:

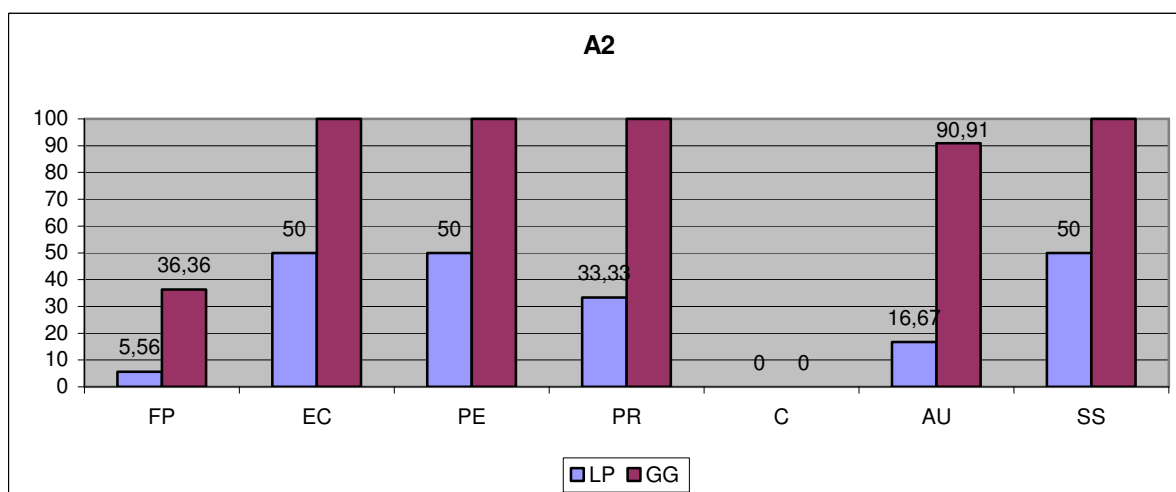


Figura I-4. Porcentajes obtenidos por A2 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

Antes de la experiencia con Geogebra, pude observar cómo algunas de las actitudes matemáticas alcanzaron un nivel medio: Espíritu Crítico, Perseverancia y Sistematización, mientras que el resto no llegaron a niveles que pudieran considerarse adecuados. Durante las tareas GG, sin embargo, evidenció una mejoría bastante notable en todas sus actitudes

matemáticas, a excepción de Creatividad, sin cambios respecto a las tareas LP, y Flexibilidad de Pensamiento, que evolucionó pero no alcanzó un nivel adecuado.

I.1.3. Alumno 4 (A4)

Este estudiante respondía a un perfil de estudiante radicalmente diferente al resto de los once estudiantes seleccionados para la muestra. A lo largo del curso había evidenciado actitudes matemáticas y hacia las matemáticas inmejorables y se decidió incluirlo en la muestra para comprobar qué efecto podía tener en él el uso de las tecnologías. A continuación incluyo los gráficos de las actitudes evidenciadas durante las tareas LP y GG, el primero referente a actitudes hacia las matemáticas y el segundo referente a actitudes matemáticas:

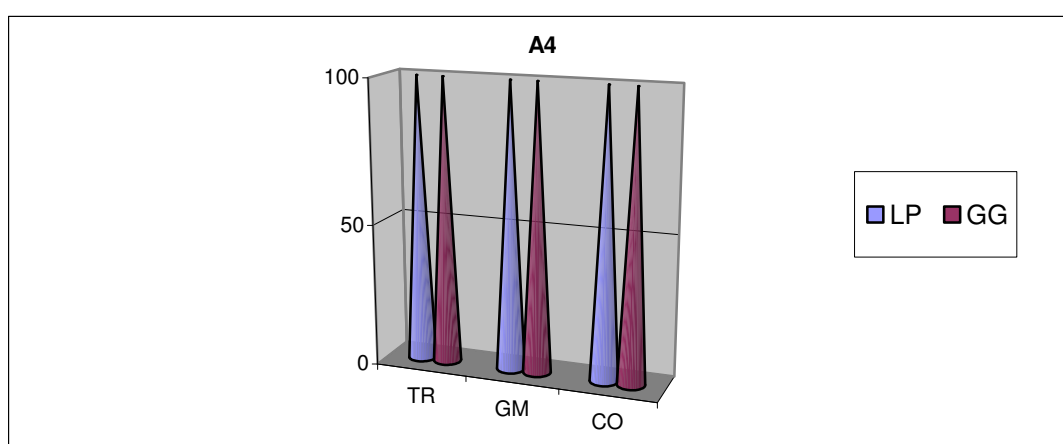


Figura I-5. Porcentajes obtenidos por A4 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Pude comprobar cómo el uso del software no tuvo ningún efecto negativo en él, ya que tanto durante las tareas LP como GG se mostró trabajador, confiado e ilusionado por las tareas que realizábamos en clase, especialmente por aquellas más complejas que le exigían pensar, razonar y argumentar a un alto nivel.

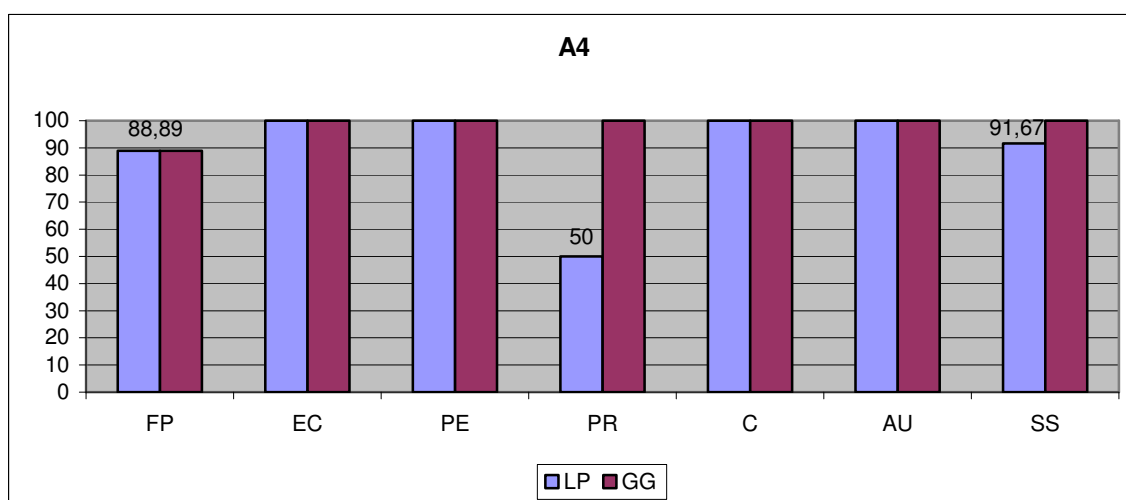


Figura I-6. Porcentajes obtenidos por A4 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

A4 experimentó cierta evolución en actitudes como Sistematización, aunque la única actitud que realmente experimentó una mejora que merece la pena reseñar fue Precisión y Rigor. Si durante las tareas LP se mostró riguroso y preciso en el 50 % de las ocasiones, con la ayuda de Geogebra evidenció siempre esta actitud. Este alumno demostraba ser altamente competente en matemáticas, pero en ocasiones, cuando la actividad no le suponía un reto, parecía aburrirse y era poco riguroso y preciso, porque no le dedicaba el tiempo necesario para serlo. Sin embargo, manejando Geogebra disfrutaba siendo totalmente preciso y riguroso, porque el esfuerzo que debía hacer para serlo era el mismo que para no serlo.

I.1.4. Alumno 5 (A5)

Este estudiante estaba motivado por superar nuestra signatura y las demás, por lo que solía poner interés en las tareas realizadas en el aula y en casa. Evidenciaba bastantes dificultades cognitivas, que le llevaban a comportarse de un modo poco autónomo, solicitando ayuda externa continuamente y demostrando bajo autoconcepto en matemáticas. No manifestaba gusto por la asignatura, sobre todo por las tareas que le resultaban complejas y requerían de un tiempo y esfuerzo adicional al de las tareas rutinarias. Como consecuencia de ello, en la mayoría de las ocasiones en las que no lograba resolver una actividad rápidamente solía abandonarla.

Actitudes hacia las matemáticas

A5 experimentó una importante evolución en sus actitudes hacia las matemáticas, como refleja el siguiente gráfico:

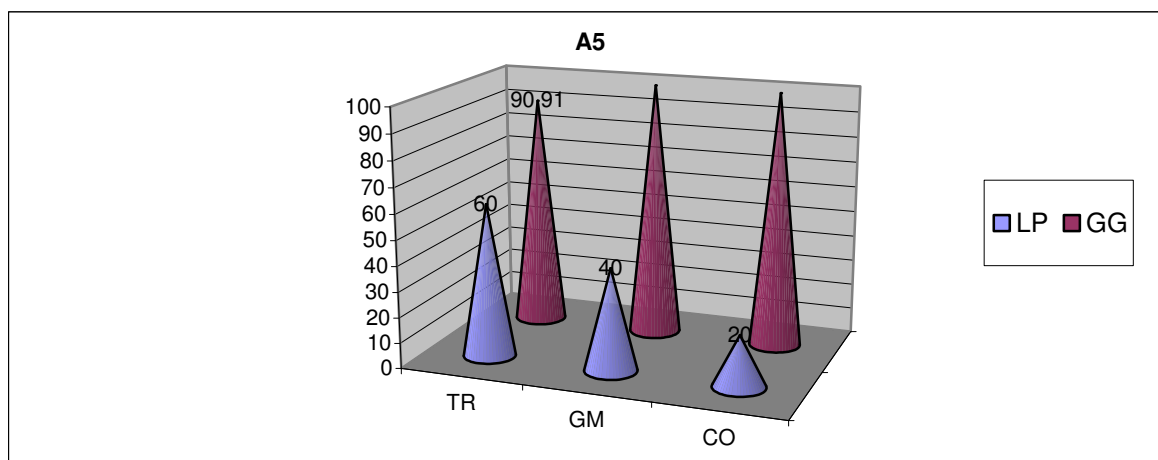


Figura I-7. Porcentajes obtenidos por A5 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

El progreso más considerable correspondió a su Autoconfianza, seguida de Gusto por las matemáticas y de Trabajo en clase. A este alumno, el hecho de sentirse más motivado y confiado, le llevó a trabajar más concienzudamente.

Actitudes matemáticas

En el siguiente gráfico puede observarse su perfil actitudinal durante las tareas LP y GG:

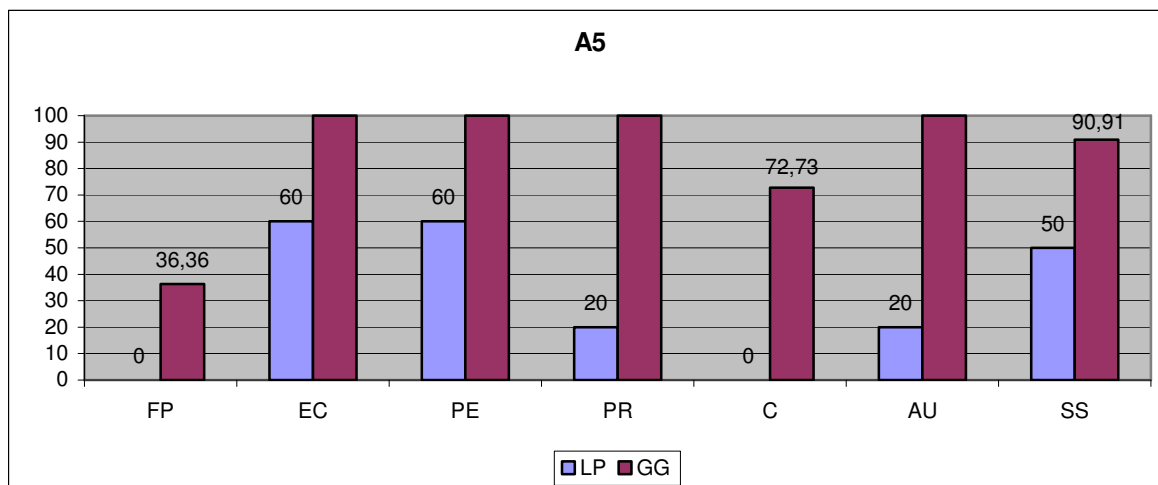


Figura I-8. Porcentajes obtenidos por A5 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

A5, manifestó niveles aceptables durante las tareas LP en Espíritu Crítico, Perseverancia y Sistematización, mientras que en las tareas GG, todas las actitudes alcanzaron valores adecuados, a excepción de Flexibilidad de Pensamiento.

I.1.5. Alumna 6 (A6)

A6 respondía a un perfil actitudinal similar al de A2 en cuanto a actitudes matemáticas, sin embargo, sus actitudes hacia las matemáticas previas no podían ser más negativas. Se interesaba por el trabajo matemático realizado en el aula, lo justo y necesario para obtener una calificación de 5 en la evaluación, y lo mismo sucedía con las tareas de casa. Denotaba falta total de motivación por el modo de trabajar en clase y cierto desagrado por nuestra asignatura (y también por las restantes).

Actitudes hacia las matemáticas

Ésta fue la estudiante cuya situación de partida era más negativa, ya que no manifestaba ninguna de estas actitudes. Al trabajar con Geogebra, la situación cambió radicalmente, alcanzando valores totalmente opuestos, por encima del 90 %, lo cual me sorprendió gratamente. Estos cambios quedan reflejados en el siguiente gráfico:

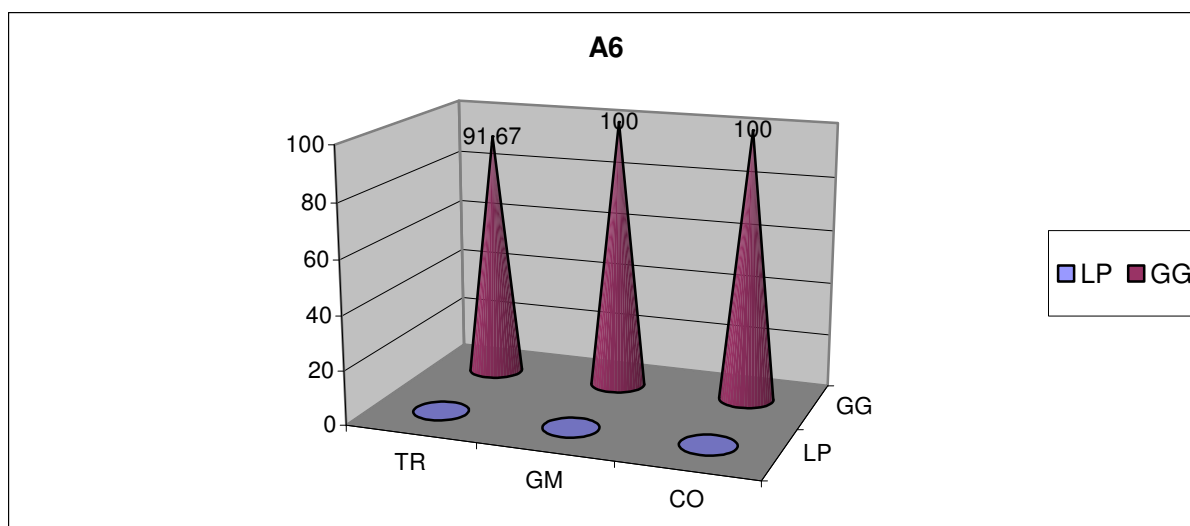


Figura I-9. Porcentajes obtenidos por A6 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Actitudes matemáticas

Su perfil actitudinal obtenido durante la observación de las tareas LP y GG, se muestra en el siguiente gráfico:

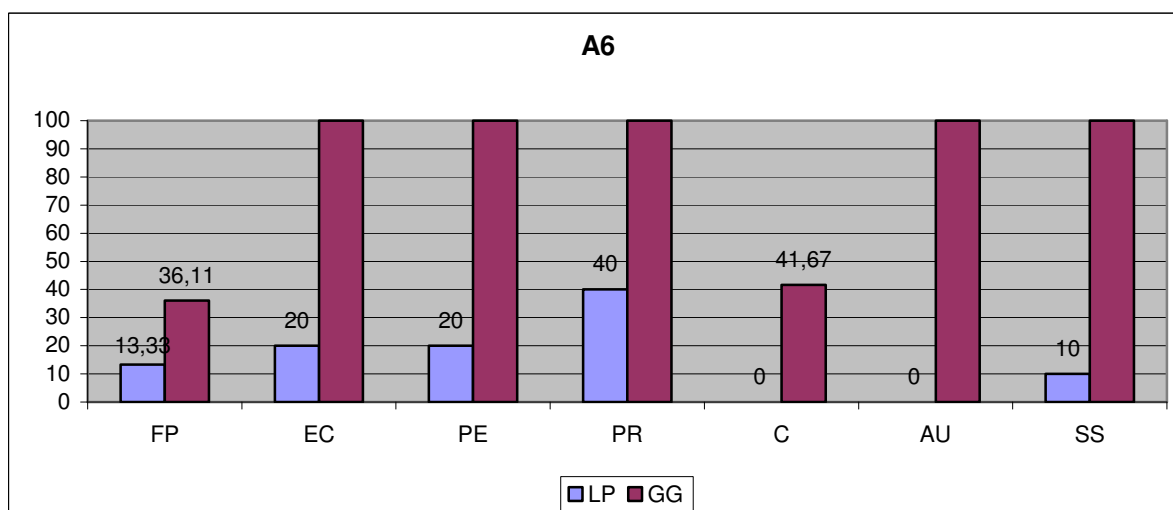


Figura I-10. Porcentajes obtenidos por A6 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

Se puede comprobar como durante las tareas LP ninguna de las actitudes alcanzó un nivel suficiente, mientras que durante las tareas GG la mayoría de ellas, a excepción de Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad, llegaron al nivel máximo.

I.1.6. Alumna 11 (A11)

A11 no respondía al perfil típico de un estudiante de 3º de ESO, pues exhibía serias dificultades cognitivas arrastradas de cursos anteriores, que difícilmente podía superar sin una atención individualizada. Sus actitudes matemáticas eran casi nulas, en consonancia con las deficiencias mostradas, y tampoco manifestaba gusto por la asignatura ni confianza en sus

posibilidades de éxito en la misma. La única actitud que esta estudiante evidenciaba, en muchas de las sesiones, era interés e implicación en el trabajo desarrollado en el aula, que obedecía a su deseo de obtener una calificación positiva en matemáticas.

Actitudes hacia las matemáticas

Durante las tareas LP mostró interés por algunas de las tareas más sencillas, aunque éste fue disminuyendo conforme la dificultad aumentaba, pues en estos casos sus deficiencias cognitivas actuaban en su contra y se bloqueaba con facilidad. Al sentirse incapaz de resolver las tareas por sí sola, se sentía poco atraída por los contenidos que se trabajaban en el aula y además su déficit de autoconfianza se hacía más latente aún. Con la ayuda de Geogebra, la situación mejoró bastante, alcanzando valores adecuados en TR y GM, es decir, se implicó más en las tareas y demostró mayor gusto por ellas, aunque la confianza en sus posibilidades apenas aumentó. Estos cambios quedan reflejados en el siguiente gráfico:

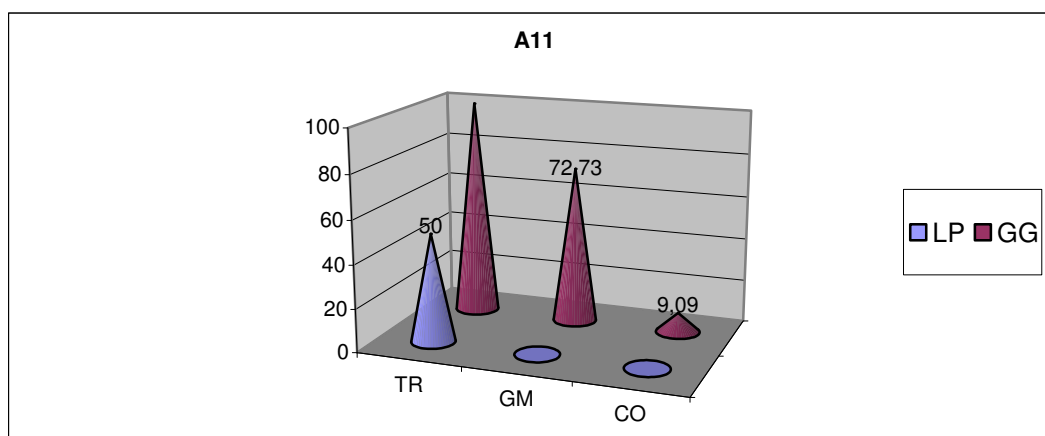


Figura I-11. Porcentajes obtenidos por A11 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Actitudes matemáticas

Su perfil actitudinal obtenido durante la observación de las tareas LP y GG es el siguiente:

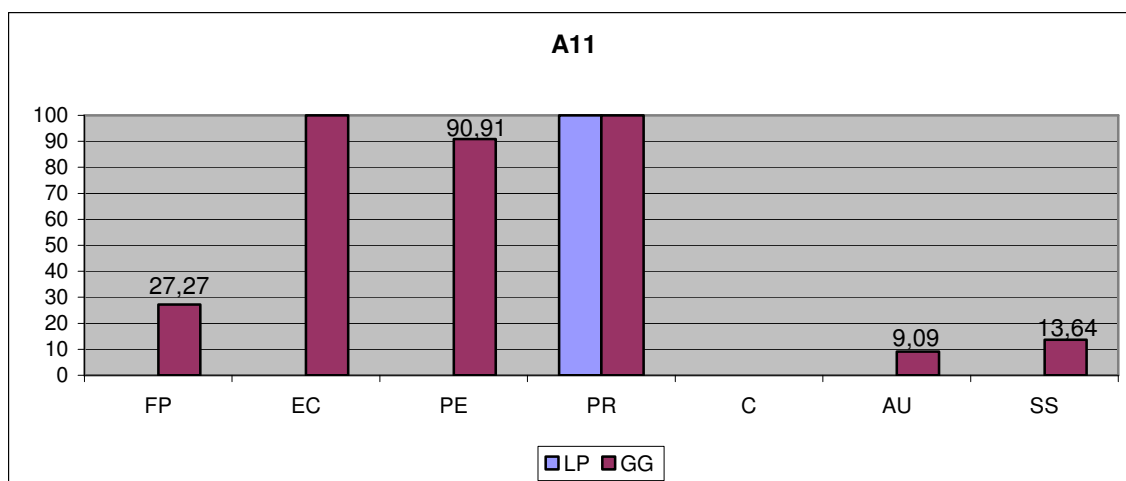


Figura I-12. Porcentajes obtenidos por A11 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG. Sus actitudes antes de la experiencia con Geogebra eran nulas, a excepción de Precisión y Rigor, que manifestó en todo momento. Durante las tareas GG, sin embargo, evidenció una evolución bastante asombrosa y satisfactoria en Espíritu Crítico y Perseverancia.

I.1.7. Alumno 12 (A12)

Este estudiante se conformaba con llegar al aprobado y trabajaba lo justo para conseguirlo, no demostrando gusto por la asignatura ni por la actividad matemática, aunque sí motivación por obtener una evaluación positiva en la misma. Tenía un autoconcepto bastante positivo de sí mismo, que le llevaba a confiar en sus posibilidades cuando se proponía una meta. Solía ser bastante autónomo y cuando se implicaba en una tarea se mostraba sistemático y manifestaba gusto por el rigor y precisión matemática.

Actitudes hacia las matemáticas

Observando el siguiente gráfico, puede comprobarse cómo el gusto por el trabajo con TIC contribuyó a que disfrutase trabajando en las tareas como no lo hiciese con LP:

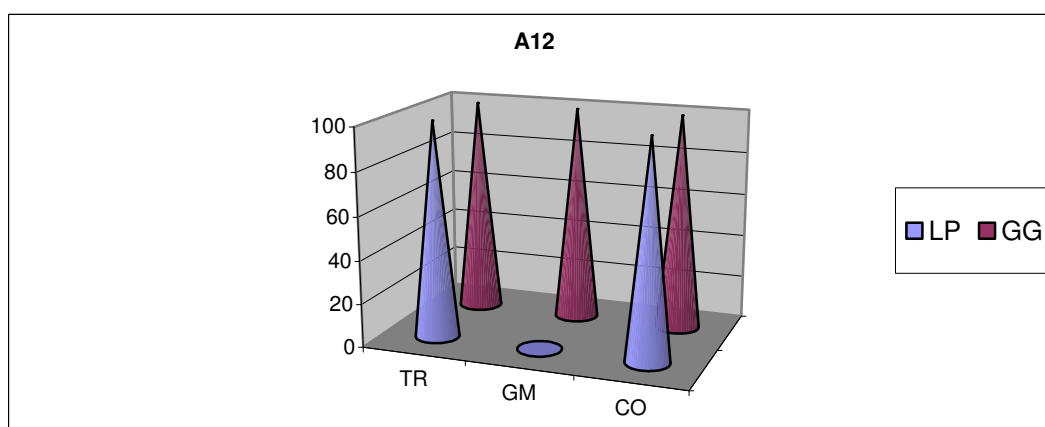


Figura I-13. Porcentajes obtenidos por A12 en las actitudes hacia las matemáticas en tareas LP y GG

Las cifras no parecen evidenciar grandes cambios, dado que aunque sus “actitudes hacia” durante las tareas GG fueron magníficas, su situación de partida no era tan negativa como la de otros compañeros ya analizados. Sin embargo, debo añadir que mis observaciones de los diarios hacen referencia a que mostró más interés y se implicó aún más en las tareas; a pesar de que durante las tareas LP también mostrase interés y trabajase en ellas. Usando Geogebra pareció disfrutar al mismo tiempo, algo inhabitual en él, quedando estas afirmaciones además confirmadas por su contribución al buzón de sugerencias y por sus respuestas a los cuestionarios (puntuaciones medias del Pretest = 2.45; Postest= 3.42 y MIO = 4.09).

Actitudes matemáticas

Su perfil actitudinal obtenido durante la observación de las tareas LP y GG es el siguiente:

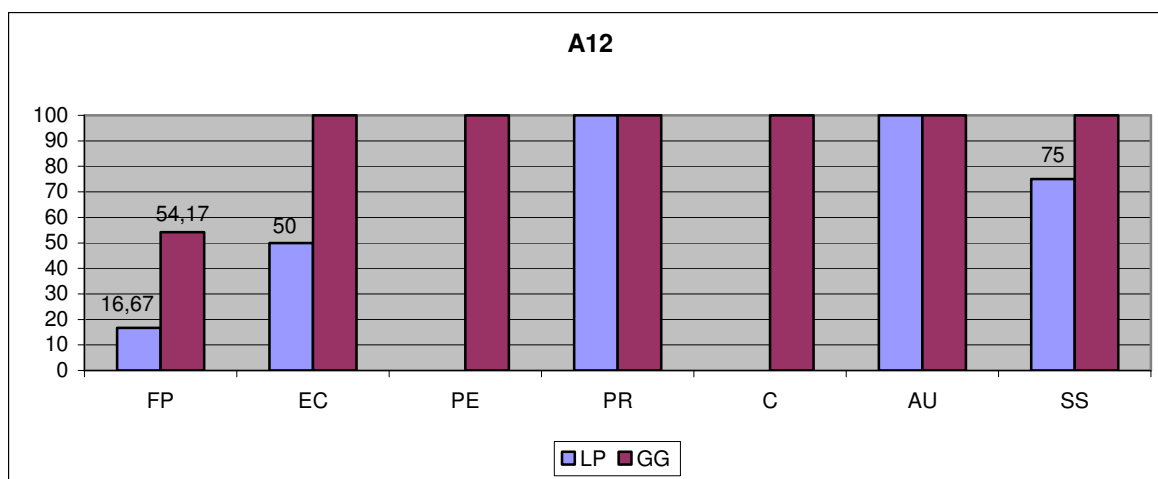


Figura I-14. Porcentajes obtenidos por A12 en las actitudes matemáticas durante las tareas LP y GG

A12, durante las tareas LP, manifestó siempre actitudes como Precisión y Rigor, Autonomía y Sistematización, sin embargo, Perseverancia y Creatividad fueron las grandes ausentes y tampoco Flexibilidad de Pensamiento apareció en la mayoría de las sesiones. Durante el trabajo con Geogebra, la situación mejoró y alcanzó niveles adecuados en todas las actitudes, a excepción de Creatividad, que siguió sin demostrarla en ninguna ocasión.

El análisis presentado refleja que, aunque los siete estudiantes respondían a perfiles actitudinales diferentes, la evolución experimentada por algunos de ellos fue similar. En lo que sigue, sintetizaré dicho análisis, a modo de respuesta global al objetivo 2.

En lo referente a actitudes hacia las matemáticas, el uso del software tuvo su efecto en las tres componentes analizadas, destacando su mayor potencialidad para mejorar la componente afectiva, puesto que durante todas las tareas GG, todos los estudiantes manifestaron agrado

por las tareas realizadas en matemáticas. La componente comportamental fue la segunda en mejoría, al evidenciar todos los estudiantes interés y mayor implicación en las tareas al menos en el 80 % de las sesiones con Geogebra. Por último, la componente cognitiva fue la que, en conjunto, experimentó menos evolución sobre todo para algunos estudiantes, tal y como cabía esperar.

Centrándome en la transformación experimentada por cada estudiante, se puede distinguir entre los alumnos que se comportaron según mis pronósticos y aquellos que superaron mis expectativas previas. El primer grupo incluye a los estudiantes: A1, A4, A11 y A12 y el segundo grupo a A2, A5 y A6. Los alumnos A1, A4 y A12 habían manifestado interés e implicación (componente comportamental) en todas las tareas LP y lo siguieron haciendo durante las tareas GG. Para A1 fue considerable su evolución en la componente cognitiva y bastante remarcable en la afectiva. A4 mantuvo sus ya óptimas actitudes hacia las matemáticas durante el trabajo con el software y de A12 me asombró el gusto mostrado por las tareas realizadas, siendo su comportamiento previo habitual el de expresar desagrado por las mismas. A11, mejoró en las componentes afectiva y comportamental, tal y como de ella esperaba, mostrando entusiasmo y mucho interés por resolver las tareas, pero sus deficiencias cognitivas le llevaron a no mostrar autoconfianza en sus posibilidades de éxito en matemáticas. Entre los estudiantes que rebasaron mis pronósticos, se pueden hacer dos subgrupos: uno formado por A2 y A5, y el otro compuesto por A6. A2 y A5 solían implicarse en las tareas en dos de cada tres ocasiones, mejorando esta frecuencia durante las tareas GG. No obstante, las componentes que experimentaron mayor evolución fueron la afectiva y la cognitiva, que eran las que tenían menos desarrolladas antes del trabajo con Geogebra. El caso de A6 me sorprendió, porque sus actitudes hacia las matemáticas iniciales no podían ser más negativas y durante las tareas GG se mostró totalmente motivada e implicada en la resolución de las mismas, con confianza en sí misma y demostrando agrado por las tareas realizadas.

En cuanto a las actitudes matemáticas de estos escolares cuando trabajaron con Geogebra, demostraron siempre Espíritu Crítico, Precisión y Rigor y Perseverancia (salvo A11, quien se mostró perseverante el 90.91 % de las tareas GG), actitudes que durante las tareas LP no había observado nunca o únicamente en contadas ocasiones para algunos de ellos. Estas tres actitudes fueron las que se vieron más favorecidas por la incorporación del software, no obstante, hubo otras que también sufrieron transformaciones positivas reseñables, es el caso

de Sistematización y Autonomía, que a excepción de la estudiante A11, los restantes manifestaron en más del 90 % de las sesiones GG. Las dos actitudes que experimentaron menos evolución fueron Flexibilidad de Pensamiento y Creatividad. La herramienta contribuyó a que los estudiantes cambiaran de opinión en base a argumentos convincentes, pero no afectó a la búsqueda e interés por otras estrategias de resolución.

Se mantiene la agrupación de estudiantes realizada para el caso de las actitudes hacia las matemáticas: A1, A4, A11 y A12 en un grupo y A2, A5 y A6 en otro, según el grado en que mis expectativas sobre su evolución en estas actitudes se vieron cubiertas. A1, al igual que A12, había manifestado algunas actitudes matemáticas durante las tareas LP, contribuyendo la herramienta a que éstas alcanzasen su nivel óptimo y a la mejora de las restantes actitudes, que hasta entonces no habían evidenciado regularmente. Los estudiantes A4 y A11, ya comenté que respondían a perfiles especiales y se comportaron según esperaba: A4 siguió manifestando sus inmejorables actitudes, mientras que A11 solamente logró desarrollar su Espíritu Crítico, Perseverancia y Precisión y Rigor gracias al uso de Geogebra. En el segundo grupo se encontraban los estudiantes A2, A5 y A6, quienes me impresionaron con su transformación actitudinal. Esperaba en ellos ciertas mejoras, pero no hasta el nivel alcanzado, ni en todas las actitudes matemáticas. De A2 y A5 me sorprendió su total Autonomía y Precisión durante las tareas GG, teniendo en cuenta su forma de trabajar durante las tareas LP, y para el caso de este último, también la Creatividad manifestada al resolver los problemas de mosaicos. A6, fue una de las estudiantes que mayor transformación actitudinal experimentó, de ahí mi asombro, y destacó su evolución en Autonomía, Sistematización, Espíritu Crítico y Perseverancia; además demostró que cuando se lo proponía era bastante Creativa (el 41.67 % de las sesiones GG).

Se ha comprobado que los siete estudiantes experimentaron una transformación positiva en todas o algunas de sus actitudes relacionadas con las matemáticas, ajustándose en algunos alumnos a mis expectativas y superándolas en otras. En todos los casos, salvo para A4, el software con sus atributos y ventajas respecto al uso de LP, fue el responsable de gran parte de esta evolución observada en los escolares.

I.2. ANÁLISIS DE COMPETENCIAS

Describiré cómo evolucionaron las competencias de los siete estudiantes de la muestra no pertenecientes al estudio de casos durante el trabajo con Geogebra. Para ello, informaré del perfil cognitivo previo de cada uno de ellos y expondré, mediante una tabla resumen, el análisis de las parrillas observación de competencias. Tras triangular estos resultados con los obtenidos del análisis del diario que escribí para cada estudiante, de sus protocolos escritos de resolución de cada tarea GG y de sus archivos de Geogebra, se consideró que sintetizan adecuadamente el desarrollo experimentado por cada uno de ellos en sus competencias matemáticas y responden de forma individualizada al objetivo 4 de investigación. Al igual que para el análisis de actitudes presentado, no abordaré cuáles características del software se asociaron al desarrollo de cada competencia (objetivo 5), porque en el segundo epígrafe del capítulo 10 se dio respuesta debidamente a este objetivo para todos los estudiantes.

I.2.1. Alumno 1 (A1)

A1 no manifestaba dificultades cognitivas y su rendimiento era adecuado en matemáticas. Al trabajar el bloque de Números, observé que generalmente comprendía con rapidez destrezas y procedimientos rutinarios, y solía aplicarlos satisfactoriamente (obtuvo una calificación de 8). Durante las tareas LP, al tener que aplicar los contenidos geométricos ya trabajados, en contextos que no le eran muy familiares, evidenció ciertas dificultades a la hora de razonar o argumentar, obteniendo en este caso una calificación de 6.5.

La experiencia con Geogebra le permitió alcanzar un nivel medio-alto en las competencias que más dificultades presentaba como Pensar y Razonar, Argumentar o Comunicar, mientras que se mostró altamente competente en la Resolución de problemas, Representación y Uso de herramientas y recursos. Esta situación supuso una evolución respecto de su situación previa (obtuvo una calificación de 9 en la unidad de Teselaciones del plano) y la influencia de Geogebra radicó fundamentalmente en que permitió que A1 trabajase de un modo más efectivo, al reducir el tiempo que invertía en realizar representaciones gráficas o cálculos, permitiéndole de este modo centrarse en testar diferentes hipótesis y razonar sobre su adecuación así como sobre la forma de argumentar sus respuestas de un modo más riguroso y empleando un lenguaje más adecuado. Expongo la tabla resumen de los niveles⁹² alcanzados por este alumno durante las tareas GG:

⁹² Nivel bajo=1, nivel Medio=2 y nivel Alto=3

Tabla I-2. Niveles de competencias de A1

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	2-3
Argumentar-Demostrar	2-3
Comunicar	2-3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

La evolución experimentada por A1 estaba en consonancia con la que de él esperaba, puesto que consideraba que a este alumno la interactividad con el software y la posibilidad de generar multitud de ejemplos sobre los que reflexionar, contribuirían a que mejorase en las competencias que hasta entonces tenía desarrolladas a más bajo nivel.

I.2.2. Alumno 2 (A2)

A2 tenía un bajo rendimiento que respondía en gran medida a una falta de interés por la asignatura, más que a deficiencias o limitaciones cognitivas. Habitualmente no trabajaba en clase y solamente cuando se aproximaba alguna prueba escrita o debía entregar a la profesora algunas actividades, era cuando mostraba interés, pero en muchos casos ya era tarde para obtener la evaluación positiva que él esperaba, pero a la que no estaba dispuesto a dedicarle mucho esfuerzo (obtuvo una calificación de 2 en el bloque de Números y de 3 en la unidad de Geometría del plano trabajada mediante las tareas LP). Los contenidos trabajados en nuestra asignatura, y nos consta que en la mayoría de las restantes, no le motivaban lo suficiente como para implicarse activamente en su aprendizaje. Por ello, la evolución de sus competencias fue tan impresionante si la comparamos con su situación previa, pues Geogebra lo motivó para trabajar en las tareas y de este modo, evidenció sus capacidades (mejoró sus calificaciones anteriores obteniendo un 7 en la unidad de Teselaciones del plano). Aunque a veces, A2 y su compañero A1, que eran pareja de trabajo en el aula, no sabían como resolver una tarea, uno de los dos proponía una estrategia y tras llevarla a la práctica con Geogebra, razonaban por dónde debían continuar. A2 llegó a hacer Argumentaciones de un nivel medio y mejoró su forma de Comunicarse tanto oralmente como por escrito, aunque en ocasiones seguía usando un vocabulario impreciso. Dado el reducido tiempo que era capaz de mantener

la atención en una misma actividad, la efectividad de la herramienta fue uno de los factores que le ayudaron a no abandonar las tareas precipitadamente y de este modo, siguió pensando en ellas hasta llegar a Resolver, con mayor o menor maestría todas las tareas. Sus Representaciones ahora eran totalmente rigurosas y precisas pues no le suponían un esfuerzo adicional y, además, el gusto por el trabajo con TIC le mantenía activo durante más tiempo. Expongo la tabla resumen de los niveles alcanzados durante las tareas GG:

Tabla I-3. Niveles de competencias de A2

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	2-3
Argumentar-Demostrar	2-3
Comunicar	2-3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

En el caso de A2 mis expectativas se vieron superadas, pues consideraba que el trabajo con el software le motivaría lo suficiente como para mejorar sus actitudes y competencias iniciales, pero que no superaría el nivel medio de desarrollo de las mismas. Sin embargo, rebasó este nivel y demostró que las deficiencias cognitivas que había mostrado con anterioridad, respondían a su falta de motivación por el trabajo realizado en matemáticas, contribuyendo el gusto y la confianza depositada en la herramienta a una mejora en este sentido, que a su vez propició el desarrollo de sus competencias matemáticas. Entre ellas, destacó la evolución experimentada en su forma de Pensar y Razonar y Argumentar-Demostrar.

I.2.3. Alumno 4 (A4)

Como he comentado en reiteradas ocasiones, A4 mostraba una excepcional dotación intelectual que le llevaba a aburrirse en clase cuando las tareas eran sencillas o rutinarias, de hecho dedicaba su tiempo libre a devorar libros cuyo nivel de conocimientos era superior al que correspondía a su edad. Le encantaban las matemáticas y también la informática y demostraba conocimientos de programación que había adquirido de un modo autodidacta, que le llevaban a diseñar algoritmos (por ejemplo, el algoritmo para obtener la raíz cuadrada con decimales de un número). Las tareas LP y GG, incluso las más complejas no supusieron

dificultad alguna para él y logró hacer razonamientos y argumentaciones formales propias de un alumno de Bachillerato. Como suponía, este estudiante demostraría un alto nivel en todas las competencias y así fue. Expongo la tabla resumen de los niveles alcanzados durante las tareas GG:

Tabla I-4. Niveles de competencias de A4

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	3
Argumentar-Demostrar	3
Comunicar	3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

I.2.4. Alumno 5 (A5)

Este alumno tenía un rendimiento en la asignatura que podía calificarse de insuficiente, debido a deficiencias cognitivas. Éstas se veían agravadas por su falta de constancia, ya que a veces trabajaba durante toda la sesión sin descanso y otras se distraía con facilidad. Igual que le ocurría a A2, cuando se aproximaba alguna prueba escrita o debía entregar a la profesora algunas actividades, era cuando mostraba mayor interés y se esforzaba para intentar obtener una calificación positiva, que en ocasiones alcanzaba. Los contenidos trabajados en nuestra asignatura le resultaban difíciles de comprender y además no demostraba gusto por aprender la mayoría de ellos (obtuvo una nota de 4.5 en los contenidos del Bloque de Números y también en los de Geometría del Plano trabajados mediante las tareas LP). Obtenía mejores resultados en otras materias en las que debía memorizar más que razonar.

Geogebra lo motivó para trabajar en las tareas de un modo constante y no puntual, y ello contribuyó a mejorar sus competencias, que hasta el momento solo tenía desarrolladas a su más bajo nivel, lo que llevó a obtener una calificación de 7 para estos contenidos. Si antes era incapaz de hacer razonamientos fundados y pensar con claridad como resolver una tarea, y por ello solicitaba ayuda externa, durante las tareas GG la situación cambió y antes de pedir ayuda siempre intentaba resolverla de modo autónomo, lo que fue haciéndole más competente. A excepción de Representar y Uso de Herramientas y Recursos en las que se mostró altamente competente usando Geogebra, las restantes competencias evolucionaron

hasta un grado medio, lo cual ya fue un gran avance para él. Logró hacer Argumentaciones formales en algunas tareas, aunque en la mayoría de ellas argumentó con ayuda de ejemplos contruidos con la herramienta. Mejoró en su habilidad Comunicativa al demostrar comprender mejor los razonamientos de terceros, aunque su expresión matemática seguía siendo perfectible. Expongo la tabla resumen de los niveles alcanzados durante las tareas GG:

Tabla I-5. Niveles de competencias de A5

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	2-3
Argumentar-Demostrar	2-3
Comunicar	2-3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	2-3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

Para este estudiante mis pronósticos se cumplieron, pues intuía que el trabajo con el software lo motivaría lo suficiente como para mejorar sus actitudes y competencias iniciales y así fue. El uso del software contribuyó a que se implicase más en el trabajo realizado en clase y también le ayudó a lograr un nivel de desarrollo medio-alto en todas sus competencias, que era el que yo creía que este alumno podía alcanzar si se lo proponía.

I.2.5. Alumna 6 (A6)

El rendimiento de A6 en matemáticas, que podía considerarse insuficiente, respondía en gran parte a una falta de interés y motivación por la asignatura más que a deficiencias o limitaciones cognitivas. Se comportaba como A2, es decir, habitualmente no trabajaba en clase y solo mostraba interés cuando se aproximaba alguna prueba escrita, bastándole en muchas ocasiones este trabajo temporal para obtener una calificación positiva en dichas pruebas (obtuvo una calificación de 5.5 en los contenidos del Bloque de Números y de 4.5 para los de Geometría del Plano trabajados mediante las tareas LP). Esta situación ponía de manifiesto que si dedicase un poco más de tiempo a estudiar los contenidos que se trabajaban en matemáticas, o simplemente participando más en las tareas de clase, sus competencias matemáticas mejorarían.

El gusto y confianza en el uso de Geogebra en matemáticas logró motivarla para implicarse activamente en las tareas y, de este modo, evidenció un nivel medio-alto de Razonamiento en todas las tareas, llegando a Argumentar a un nivel medio, pues no logró realizar demostraciones formales (lo que llevó a obtener una calificación de 8 para estos contenidos). Manifestó comprender los razonamientos de sus compañeros y de la profesora y se comunicaba oralmente de modo correcto, aunque al hacerlo por escrito, a veces no empleaba los términos matemáticos precisos. A6 Modeló y Resolvió todas las tareas, aunque no siempre al más alto nivel, pues como ya he comentado, en algunas tareas sus demostraciones fueron empíricas, realizadas con ayuda de ejemplos. Geogebra le ayudó a hacer Representaciones precisas, a interaccionar con ellas y a ser capaz de extraer información matemática de las mismas, mejorando además con la práctica sus representaciones mentales. La constructividad del software permitió que intentara varios caminos de resolución, actuando por ensayo-error cuando no tenía una estrategia clara; de este modo, evitó las situaciones de bloqueo inicial que generalmente la llevaban a abandonar las tareas. Expongo la tabla resumen de los niveles alcanzados durante las tareas GG:

Tabla I-6. Niveles de competencias de A6

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	2-3
Argumentar-Demostrar	2-3
Comunicar	2-3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	2-3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

Para esta estudiante, como también sucedió para A2, mis expectativas se vieron superadas, pues a priori creía que el trabajo con el software la motivaría lo suficiente como para mejorar sus actitudes y competencias iniciales, pero que no llegaría a desarrollarlas al nivel alcanzado. Es decir, yo era consciente de que el rendimiento de esta estudiante estaba limitado por su falta de motivación y sus negativas actitudes y, por ello, esperaba que el trabajo con Geogebra lograra motivarla para transformarlas positivamente y la condujesen a demostrar todo su potencial real, pero resultó que éste era mayor del que yo había estimado. El cambio experimentado por A6, como el de otros estudiantes ya analizados, confirmó mi

sospecha de que es posible mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de nuestros estudiantes, incidiendo en los factores o aspectos que los condicionan, en este caso, la falta de motivación e interés por la asignatura.

I.2.6. Alumna 11 (A11)

El caso de A11, junto con el de A4, podían considerarse especiales, aunque opuestos, porque ambos estudiantes no respondían a los perfiles habituales de alumnos de una clase típica de 3º de ESO. En el caso de A11, las deficiencias cognitivas que manifestaba en matemáticas a estas alturas ya eran casi insalvables sin una atención individualizada constante y permanente, lo que era bastante difícil de conseguir dentro de un grupo de 30 estudiantes. Sus competencias matemáticas durante el primer trimestre y las sesiones LP fueron nulas, y no confiaba en grandes cambios con el uso de Geogebra. Sin embargo, me impresionó que el gusto y confianza en el trabajo con esta herramienta le llevase a implicarse más en las tareas mostrando, a veces excesiva perseverancia y precisión, que le condujeron a hacer pequeños avances. Aunque trabajó a un ritmo más lento que el de sus compañeros y necesitando de un mayor número de sesiones para cada tarea, no pasaba a la siguiente tarea hasta haber resuelto la anterior. No tuvo mucha ayuda de su pareja de trabajo, ya que éste no asistió a varias sesiones y además, él también tenía ciertas dificultades cognitivas, aunque no tan serias como las de A11. No dudó en solicitar mi ayuda cuando estaba/n atascados, algo inhabitual antes del trabajo con Geogebra, y con mucho tesón logró realizar Razonamientos y Argumentaciones, generalmente visuales y apoyándose en ejemplos, que le hicieron alcanzar al menos el nivel mínimo en estas competencias. A la hora de Comunicar, a pesar de sus dificultades, ella quería siempre escribir las respuestas en las fichas y así lo hacía, empleando términos matemáticos, a pesar de que a veces necesitaba la ayuda de su compañero. Esto le llevó también a llegar al nivel 1 en esta competencia, aunque le seguía costando entender los razonamientos de terceros. Consiguió Resolver las tareas más sencillas y algunas de las más complejas a su modo, además de realizar construcciones de mosaicos usando isometrías. El Manejo de Geogebra que con el tiempo fue siendo adecuado, y la posibilidad de realizar numerosas Representaciones de mosaicos por ensayo-error, le ayudó a permanecer activa y a ir comprendiendo un poco mejor los contenidos de Movimientos del plano. Sus competencias pueden resumirse del siguiente modo:

Tabla I-7. Niveles de competencias de A11

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	1
Argumentar-Demostrar	1
Comunicar	1
Modelar	1
Plantear y Resolver Problemas	1-2
Representar	1-2
Uso de Herramientas y Recursos	1-2

Aunque la evolución cognitiva no fuese tan considerable como la de otros estudiantes, en su caso, fue más superior a la que yo aguardaba.

I.2.7. Alumno 12 (A12)

A12 tenía un rendimiento suficiente en matemáticas, como demostró al trabajar el bloque de Números, en el que obtuvo una calificación de 5. Generalmente comprendía con rapidez destrezas y procedimientos, y solía aplicarlos satisfactoriamente. No obstante, cuando una tarea le suponía un mayor esfuerzo, se quejaba, y no siempre le dedicaba el tiempo necesario para resolverla adecuadamente. Durante las tareas LP, manifestó poco gusto por las tareas y ello le llevó a no esforzarse demasiado, evidenciando ciertas dificultades para razonar y argumentar (obtuvo una calificación de 4).

El trabajo con Geogebra le motivó lo suficiente como para trabajar en cada tarea, no sólo hasta encontrar una respuesta, sino que le mantuvo en la búsqueda de más de una estrategia de resolución (obtuvo una calificación de 8). Este superávit de motivación, producido por la herramienta, le llevó a mejorar sus actitudes matemáticas y a demostrar que era capaz de Razonar y Argumentar a un alto nivel, si se lo proponía. Por otra parte, se mostró más Comunicativo con sus compañeros y con la profesora, evidenciando un nivel alto tanto al *hablar de matemáticas* como al *hablar matemáticamente*. Su perfecto Manejo de Geogebra y su eficiencia a la hora de realizar las Representaciones gráficas de los mosaicos, le obsequió con más tiempo para testar diferentes hipótesis. Por otro lado, la posibilidad de interactuar y deformar dinámicamente las representaciones obtenidas le ayudó a extraer propiedades matemáticas, que le condujeron a realizar Demostraciones más formales. Expongo la tabla resumen de los niveles alcanzados durante las tareas GG:

Tabla I-8. Niveles de competencias de A12

<i>COMPETENCIAS</i>	<i>NIVEL</i>
Pensar y Razonar	3
Argumentar-Demostrar	3
Comunicar	3
Modelar	2-3
Plantear y Resolver Problemas	3
Representar	3
Uso de Herramientas y Recursos	3

También A12 fue uno de los estudiantes cuya evolución me asombró, pues esperaba que alcanzase niveles medios en todas las competencias, sin embargo, llegó a demostrar todas ellas al máximo nivel exigido durante las tareas GG. La descarga de motivación que le produjo el trabajo con el software y la potencialidad de Geogebra para visualizar propiedades geométricas fueron responsables de su evolución.

Del mismo modo que hiciera para las actitudes, voy a hacer un balance del análisis de competencias expuesto, para informar de las transformaciones experimentadas durante las tareas GG por estos siete estudiantes, dando así respuesta al objetivo 4 de investigación.

En cuanto al desarrollo o nivel alcanzado en cada competencia por estos escolares, se pueden diferenciar tres grupos: el grupo formado por A11, el compuesto por A4 y A12, y el formado por A1, A2, A5 y A6. A11 fue la estudiante que alcanzó un grado de desarrollo más bajo de sus competencias, aunque demostró durante la experiencia con el software mayor pericia a la hora de Resolver Problemas, Representar y usar las Herramientas y Recursos, lo cual ya fue un avance más que considerable para ella, dado su perfil cognitivo. Los estudiantes A4 y A12 se situaron en el extremo opuesto a A11, pues alcanzaron un nivel de desarrollo óptimo de todas sus competencias. El tercer grupo es el que ocupa la posición intermedia, pues aunque obtuvieron niveles altos en las competencias Representar y Uso de Herramientas y Recursos, las restantes competencias Pensar y Razonar, Argumentar-Demostrar, Comunicar y Modelar las desarrollaron a un nivel medio-alto. De estos datos se deduce que las competencias que alcanzaron globalmente un nivel de desarrollo mayor durante el trabajo con Geogebra fueron Representar y Uso de Herramientas y Recursos. No obstante, no se puede obviar la mejora experimentada en las restantes competencias, que con anterioridad los estudiantes

manifestaban a un nivel nulo o bajo y que sin embargo, durante las tareas GG todos, a excepción de A11, desarrollaron al menos a nivel medio-alto.

Teniendo en cuenta la transformación experimentada por cada estudiante, se puede distinguir entre los alumnos que se comportaron según mis pronósticos y aquellos que superaron mis expectativas previas. El primer grupo lo forman A1, A4, A5. Los alumnos A1 y A4, tenían un rendimiento adecuado en matemáticas y continuaron de este modo, contribuyendo el trabajo con Geogebra al desarrollo en A1 de las competencias que hasta entonces tenía menos desarrolladas, mientras que para A4 no supuso ninguna evolución, porque su rendimiento anterior ya era inmejorable. A5 manifestaba muchas de sus competencias a nivel bajo y otras a nivel medio, por lo que su evolución estuvo en consonancia con la pronosticada y durante el trabajo con el software desarrolló estas competencias a nivel medio-alto. El segundo grupo lo componían A2, A6, A11 y A12, quienes me asombraron con su evolución durante las tareas GG. Esperaba en ellos ciertas mejoras, pero no hasta el nivel alcanzado, ni en todas las competencias matemáticas. A2 y A6 confirmaron mi intuición de que su desarrollo cognitivo estaba limitado por su falta de motivación y sus negativas actitudes; no obstante, me sorprendió el desarrollo que experimentaron en algunas competencias como Pensar y Razonar, Comunicar, Resolver Problemas y Representar. A11 la incluyo en este grupo porque, a pesar de que no alcanzó niveles aceptables en ninguna de las competencias, logró mejorar en todas ellas manifestando cierta maestría en Resolver Problemas, Representar y Uso de Herramientas y Recursos. A12 fue el estudiante, de entre los siete analizados en este apartado, que mayor evolución experimentó si se considera su situación inicial, desarrollando a un nivel alto competencias como Pensar y Razonar o Argumentar-Demostrar, que hasta entonces había evidenciado a un nivel bajo, de ahí mi desconcierto y satisfacción. Me encantó que este estudiante no se ajustase a mis pronósticos y confirmase mi conjetura de investigación, como también lo hicieran muchos de sus compañeros. Es decir, nuevamente quedó patente que es posible diseñar secuencias de enseñanza-aprendizaje cuya puesta en práctica mejore el desarrollo de actitudes y competencias de los estudiantes.

El análisis presentado ha mostrado que los siete estudiantes experimentaron una transformación positiva en todas o algunas de sus competencias matemáticas, ajustándose la evolución de algunos de ellos a mis expectativas y superándolas en otros. En todos los casos, salvo para A4, el software con sus atributos y ventajas respecto al uso de LP, fue responsable de gran parte de esta evolución observada en los escolares.

Anexo J

Análisis realizados con SPSS a las respuestas del cuestionario “Actitud hacia las mates”

Se realizaron mediante SPSS 15.0 distintas pruebas de comparación de medias: prueba t de student para muestras relacionadas y dos pruebas no paramétricas para dos muestras relacionadas tipos Wilcoxon y signos a las respuestas de los estudiantes a este cuestionario antes (Pretest) y después (Postest) de realizar las tareas con Geogebra en el aula. En primer lugar expongo los resultados de tales análisis para el total de estudiantes (46) y después para el grupo de 3º B (22 estudiantes)⁹³:

ANÁLISIS PARA TOTAL DE ESTUDIANTES

T-TEST

```
PAIRS=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19
P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7
Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23
Q24 Q25 Q26 Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)
/CRITERIA=CI(.9500)
/MISSING=ANALYSIS.
```

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación tıp.	Error tıp. de la media
Par 1	P1	3,43	46	,935	,138
	Q1	3,33	46	1,097	,162
Par 2	P2	4,40	45	,618	,092
	Q2	4,33	45	,739	,110
Par 3	P3	2,87	46	1,258	,185
	Q3	2,87	46	1,327	,196
Par 4	P4	3,11	45	1,133	,169
	Q4	3,42	45	1,158	,173
Par 5	P5	3,41	46	1,222	,180
	Q5	3,63	46	1,218	,180
Par 6	P6	4,09	45	1,125	,168

⁹³ No se incluyen los análisis del grupo 3º A (24 estudiantes) porque no se encontraron diferencias significativas en ningún ítem al realizar las distintas pruebas.

	Q6	4,20	45	1,036	,154
Par 7	P7	2,58	45	1,252	,187
	Q7	2,53	45	1,236	,184
Par 8	P8	3,33	46	1,175	,173
	Q8	3,15	46	1,316	,194
Par 9	P9	2,49	45	1,100	,164
	Q9	2,56	45	1,235	,184
Par 10	P10	3,80	46	,934	,138
	Q10	3,89	46	1,038	,153
Par 11	P11	3,09	46	1,132	,167
	Q11	3,30	46	1,030	,152
Par 12	P12	2,96	46	1,173	,173
	Q12	3,35	46	1,178	,174
Par 13	P13	2,20	45	1,392	,207
	Q13	2,11	45	1,229	,183
Par 14	P14	3,54	46	1,361	,201
	Q14	3,09	46	1,532	,226
Par 15	P15	3,09	46	1,330	,196
	Q15	3,13	46	1,185	,175
Par 16	P16	3,17	46	,973	,143
	Q16	3,35	46	,994	,147
Par 17	P17	2,73	45	1,355	,202
	Q17	2,42	45	1,234	,184
Par 18	P18	4,11	45	1,049	,156
	Q18	4,09	45	1,019	,152
Par 19	P19	2,96	45	1,107	,165
	Q19	3,29	45	1,058	,158
Par 20	P20	3,95	44	1,275	,192
	Q20	3,77	44	1,236	,186
Par 21	P21	3,09	46	1,396	,206
	Q21	3,02	46	1,374	,203
Par 22	P22	3,28	46	1,186	,175
	Q22	3,33	46	1,317	,194
Par 23	P23	2,65	46	1,100	,162
	Q23	2,61	46	1,201	,177
Par 24	P24	3,09	46	1,208	,178
	Q24	3,30	46	1,227	,181
Par 25	P25	4,33	45	1,022	,152
	Q25	4,56	45	,693	,103
Par 26	P26	3,96	46	1,010	,149
	Q26	3,89	46	1,100	,162
Par 27	P27	4,20	46	,833	,123
	Q27	4,20	46	,934	,138

Par 28	P28	3,43	46	1,205	,178
	Q28	3,50	46	1,188	,175
Par 29	P29	3,83	46	1,338	,197
	Q29	3,74	46	1,437	,212
Par 30	P30	2,83	46	1,322	,195
	Q30	2,59	46	1,240	,183
Par 31	P31	2,89	46	1,233	,182
	Q31	2,72	46	1,361	,201

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	P1 y Q1	46	,206	,171
Par 2	P2 y Q2	45	,349	,019
Par 3	P3 y Q3	46	,642	,000
Par 4	P4 y Q4	45	,639	,000
Par 5	P5 y Q5	46	,389	,008
Par 6	P6 y Q6	45	,706	,000
Par 7	P7 y Q7	45	,751	,000
Par 8	P8 y Q8	46	,585	,000
Par 9	P9 y Q9	45	,415	,005
Par 10	P10 y Q10	46	,276	,064
Par 11	P11 y Q11	46	,358	,015
Par 12	P12 y Q12	46	,445	,002
Par 13	P13 y Q13	45	,704	,000
Par 14	P14 y Q14	46	,531	,000
Par 15	P15 y Q15	46	,754	,000
Par 16	P16 y Q16	46	,488	,001
Par 17	P17 y Q17	45	,463	,001
Par 18	P18 y Q18	45	,692	,000
Par 19	P19 y Q19	45	,535	,000
Par 20	P20 y Q20	44	,687	,000
Par 21	P21 y Q21	46	,497	,000
Par 22	P22 y Q22	46	,508	,000
Par 23	P23 y Q23	46	,483	,001
Par 24	P24 y Q24	46	,552	,000
Par 25	P25 y Q25	45	,342	,021
Par 26	P26 y Q26	46	,736	,000
Par 27	P27 y Q27	46	,321	,030
Par 28	P28 y Q28	46	,575	,000
Par 29	P29 y Q29	46	,669	,000
Par 30	P30 y Q30	46	,593	,000
Par 31	P31 y Q31	46	,484	,001

Prueba de muestras relacionadas									
		Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
					Inferior	Superior			
Par 1	P1 - Q1	,109	1,286	,190	-,273	,491	,573	45	,569
Par 2	P2 - Q2	,067	,780	,116	-,168	,301	,573	44	,570
Par 3	P3 - Q3	,000	1,095	,162	-,325	,325	,000	45	1,000
Par 4	P4 - Q4	-,311	,973	,145	-,603	-,019	-2,145	44	,037
Par 5	P5 - Q5	-,217	1,348	,199	-,618	,183	-1,093	45	,280
Par 6	P6 - Q6	-,111	,832	,124	-,361	,139	-,896	44	,375
Par 7	P7 - Q7	,044	,878	,131	-,219	,308	,340	44	,736
Par 8	P8 - Q8	,174	1,141	,168	-,165	,513	1,034	45	,307
Par 9	P9 - Q9	-,067	1,268	,189	-,448	,314	-,353	44	,726
Par 10	P10 - Q10	-,087	1,189	,175	-,440	,266	-,496	45	,622
Par 11	P11 - Q11	-,217	1,228	,181	-,582	,147	-1,201	45	,236
Par 12	P12 - Q12	-,391	1,238	,183	-,759	-,024	-2,144	45	,037
Par 13	P13 - Q13	,089	1,019	,152	-,217	,395	,585	44	,561
Par 14	P14 - Q14	,457	1,410	,208	,038	,875	2,197	45	,033
Par 15	P15 - Q15	-,043	,893	,132	-,309	,222	-,330	45	,743
Par 16	P16 - Q16	-,174	,996	,147	-,470	,122	-1,185	45	,242
Par 17	P17 - Q17	,311	1,345	,201	-,093	,715	1,551	44	,128
Par 18	P18 - Q18	,022	,812	,121	-,222	,266	,184	44	,855
Par 19	P19 - Q19	-,333	1,044	,156	-,647	-,020	-2,141	44	,038
Par 20	P20 - Q20	,182	,995	,150	-,121	,484	1,212	43	,232
Par 21	P21 - Q21	,065	1,389	,205	-,347	,478	,318	45	,752
Par 22	P22 - Q22	-,043	1,246	,184	-,414	,327	-,237	45	,814
Par 23	P23 - Q23	,043	1,173	,173	-,305	,392	,251	45	,803
Par 24	P24 - Q24	-,217	1,153	,170	-,560	,125	-1,279	45	,208
Par 25	P25 - Q25	-,222	1,020	,152	-,529	,084	-1,461	44	,151
Par 26	P26 - Q26	,065	,772	,114	-,164	,294	,573	45	,569
Par 27	P27 - Q27	,000	1,033	,152	-,307	,307	,000	45	1,000
Par 28	P28 - Q28	-,065	1,104	,163	-,393	,263	-,401	45	,690
Par 29	P29 - Q29	,087	1,132	,167	-,249	,423	,521	45	,605
Par 30	P30 - Q30	,239	1,158	,171	-,105	,583	1,400	45	,168
Par 31	P31 - Q31	,174	1,322	,195	-,219	,566	,892	45	,377

PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

NPART TESTS

/WILCOXON=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19 P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7 Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26 Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)

/SIGN=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19 P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7 Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26 Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)

/MCNEMAR=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19 P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7 Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26 Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)

/MISSING ANALYSIS.

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

		Rangos		
		N	Rango promedio	Suma de rangos
Q1 - P1	Rangos negativos	17 ^a	18,68	317,50
	Rangos positivos	17 ^b	16,32	277,50
	Empates	12 ^c		
	Total	46		
Q2 - P2	Rangos negativos	10 ^d	10,45	104,50
	Rangos positivos	9 ^e	9,50	85,50
	Empates	26 ^f		
	Total	45		
Q3 - P3	Rangos negativos	10 ^g	14,85	148,50
	Rangos positivos	15 ^h	11,77	176,50
	Empates	21 ⁱ		
	Total	46		
Q4 - P4	Rangos negativos	9 ^j	9,50	85,50
	Rangos positivos	16 ^k	14,97	239,50
	Empates	20 ^l		
	Total	45		
Q5 - P5	Rangos negativos	9 ^m	9,72	87,50
	Rangos positivos	12 ⁿ	11,96	143,50
	Empates	25 ^o		
	Total	46		
Q6 - P6	Rangos negativos	7 ^p	8,64	60,50
	Rangos positivos	10 ^q	9,25	92,50
	Empates	28 ^r		
	Total	45		
Q7 - P7	Rangos negativos	10 ^s	8,60	86,00
	Rangos positivos	7 ^t	9,57	67,00
	Empates	28 ^u		
	Total	45		
Q8 - P8	Rangos negativos	16 ^v	15,34	245,50
	Rangos positivos	12 ^w	13,38	160,50

	Empates	18 ^x		
	Total	46		
Q9 - P9	Rangos negativos	9 ^y	10,83	97,50
	Rangos positivos	11 ^z	10,23	112,50
	Empates	25 ^{aa}		
	Total	45		
Q10 - P10	Rangos negativos	9 ^{ab}	17,11	154,00
	Rangos positivos	17 ^{ac}	11,59	197,00
	Empates	20 ^{ad}		
	Total	46		
Q11 - P11	Rangos negativos	12 ^{ae}	15,83	190,00
	Rangos positivos	19 ^{af}	16,11	306,00
	Empates	15 ^{ag}		
	Total	46		
Q12 - P12	Rangos negativos	9 ^{ah}	10,17	91,50
	Rangos positivos	16 ^{ai}	14,59	233,50
	Empates	21 ^{aj}		
	Total	46		
Q13 - P13	Rangos negativos	9 ^{ak}	10,72	96,50
	Rangos positivos	9 ^{al}	8,28	74,50
	Empates	27 ^{am}		
	Total	45		
Q14 - P14	Rangos negativos	18 ^{an}	15,36	276,50
	Rangos positivos	9 ^{ao}	11,28	101,50
	Empates	19 ^{ap}		
	Total	46		
Q15 - P15	Rangos negativos	9 ^{aq}	10,00	90,00
	Rangos positivos	10 ^{ar}	10,00	100,00
	Empates	27 ^{as}		
	Total	46		
Q16 - P16	Rangos negativos	11 ^{at}	12,14	133,50
	Rangos positivos	15 ^{au}	14,50	217,50
	Empates	20 ^{av}		
	Total	46		
Q17 - P17	Rangos negativos	17 ^{aw}	13,50	229,50
	Rangos positivos	9 ^{ax}	13,50	121,50
	Empates	19 ^{ay}		
	Total	45		
Q18 - P18	Rangos negativos	10 ^{az}	9,35	93,50
	Rangos positivos	8 ^{ba}	9,69	77,50

	Empates	27 ^{bb}		
	Total	45		
Q19 - P19	Rangos negativos	7 ^{bc}	13,29	93,00
	Rangos positivos	18 ^{bd}	12,89	232,00
	Empates	20 ^{be}		
	Total	45		
Q20 - P20	Rangos negativos	12 ^{bf}	9,17	110,00
	Rangos positivos	5 ^{bg}	8,60	43,00
	Empates	27 ^{bh}		
	Total	44		
Q21 - P21	Rangos negativos	17 ^{bi}	13,68	232,50
	Rangos positivos	12 ^{bj}	16,88	202,50
	Empates	17 ^{bk}		
	Total	46		
Q22 - P22	Rangos negativos	14 ^{bl}	10,25	143,50
	Rangos positivos	10 ^{bm}	15,65	156,50
	Empates	22 ^{bn}		
	Total	46		
Q23 - P23	Rangos negativos	12 ^{bo}	10,46	125,50
	Rangos positivos	9 ^{bp}	11,72	105,50
	Empates	25 ^{bq}		
	Total	46		
Q24 - P24	Rangos negativos	11 ^{br}	10,00	110,00
	Rangos positivos	13 ^{bs}	14,62	190,00
	Empates	22 ^{bt}		
	Total	46		
Q25 - P25	Rangos negativos	8 ^{bu}	8,00	64,00
	Rangos positivos	11 ^{bv}	11,45	126,00
	Empates	26 ^{bw}		
	Total	45		
Q26 - P26	Rangos negativos	11 ^{bx}	11,91	131,00
	Rangos positivos	10 ^{by}	10,00	100,00
	Empates	25 ^{bz}		
	Total	46		
Q27 - P27	Rangos negativos	9 ^{ca}	9,50	85,50
	Rangos positivos	9 ^{cb}	9,50	85,50
	Empates	28 ^{cc}		
	Total	46		
Q28 - P28	Rangos negativos	10 ^{cd}	13,90	139,00
	Rangos positivos	15 ^{ce}	12,40	186,00

	Empates	21 ^{cf}		
	Total	46		
Q29 - P29	Rangos negativos	13 ^{cg}	13,46	175,00
	Rangos positivos	12 ^{ch}	12,50	150,00
	Empates	21 ^{ci}		
	Total	46		
Q30 - P30	Rangos negativos	16 ^{ci}	11,25	180,00
	Rangos positivos	7 ^{ck}	13,71	96,00
	Empates	23 ^{cl}		
	Total	46		
Q31 - P31	Rangos negativos	13 ^{cm}	12,27	159,50
	Rangos positivos	9 ^{cn}	10,39	93,50
	Empates	24 ^{co}		
	Total	46		

	Q1 - P1	Q2 - P2	Q3 - P3	Q4 - P4	Q5 - P5	Q6 - P6	Q7 - P7	Q8 - P8	Q9 - P9	Q10 - P10	Q11 - P11
Z	-,362 ^a	-,426 ^a	-,406 ^b	-2,175 ^b	-,989 ^b	-,811 ^b	-,475 ^a	-1,009 ^a	-,288 ^b	-,574 ^b	-1,197 ^b
Sig. asintót. (bilateral)	,717	,670	,685	,030	,323	,417	,635	,313	,774	,566	,231

	Q12 - P12	Q13 - P13	Q14 - P14	Q15 - P15	Q16 - P16	Q17 - P17	Q18 - P18	Q19 - P19	Q20 - P20	Q21 - P21	Q22 - P22
Z	-1,986 ^b	-,497 ^a	-2,140 ^a	-,214 ^b	-1,140 ^b	-1,429 ^a	-,380 ^a	-1,976 ^b	-1,656 ^a	-,340 ^a	-,193 ^b
Sig. asintót. (bilateral)	,047	,619	,032	,831	,254	,153	,704	,048	,098	,734	,847

	Q23 - P23	Q24 - P24	Q25 - P25	Q26 - P26	Q27 - P27	Q28 - P28	Q29 - P29	Q30 - P30	Q31 - P31
Z	-,359 ^a	-1,195 ^b	-1,325 ^b	-,592 ^a	,000 ^c	-,668 ^b	-,353 ^a	-1,312 ^a	-1,106 ^a
Sig. asintót. (bilateral)	,720	,232	,185	,554	1,000	,504	,724	,190	,269

Prueba de los signos

Frecuencias		N
Q1 - P1	Diferencias negativas	17
	Diferencias positivas	17
	Empates	12
	Total	46
Q2 - P2	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	9

	Empates	26
	Total	45
Q3 - P3	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	15
	Empates	21
	Total	46
Q4 - P4	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	16
	Empates	20
	Total	45
Q5 - P5	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	12
	Empates	25
	Total	46
Q6 - P6	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	10
	Empates	28
	Total	45
Q7 - P7	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	7
	Empates	28
	Total	45
Q8 - P8	Diferencias negativas	16
	Diferencias positivas	12
	Empates	18
	Total	46
Q9 - P9	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	11
	Empates	25
	Total	45
Q10 - P10	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	17
	Empates	20
	Total	46
Q11 - P11	Diferencias negativas	12
	Diferencias positivas	19
	Empates	15
	Total	46
Q12 - P12	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	16

	Empates	21
	Total	46
Q13 - P13	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	9
	Empates	27
	Total	45
Q14 - P14	Diferencias negativas	18
	Diferencias positivas	9
	Empates	19
	Total	46
Q15 - P15	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	10
	Empates	27
	Total	46
Q16 - P16	Diferencias negativas	11
	Diferencias positivas	15
	Empates	20
	Total	46
Q17 - P17	Diferencias negativas	17
	Diferencias positivas	9
	Empates	19
	Total	45
Q18 - P18	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	8
	Empates	27
	Total	45
Q19 - P19	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	18
	Empates	20
	Total	45
Q20 - P20	Diferencias negativas	12
	Diferencias positivas	5
	Empates	27
	Total	44
Q21 - P21	Diferencias negativas	17
	Diferencias positivas	12
	Empates	17
	Total	46
Q22 - P22	Diferencias negativas	14
	Diferencias positivas	10

	Empates	22
	Total	46
Q23 - P23	Diferencias negativas	12
	Diferencias positivas	9
	Empates	25
	Total	46
Q24 - P24	Diferencias negativas	11
	Diferencias positivas	13
	Empates	22
	Total	46
Q25 - P25	Diferencias negativas	8
	Diferencias positivas	11
	Empates	26
	Total	45
Q26 - P26	Diferencias negativas	11
	Diferencias positivas	10
	Empates	25
	Total	46
Q27 - P27	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	9
	Empates	28
	Total	46
Q28 - P28	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	15
	Empates	21
	Total	46
Q29 - P29	Diferencias negativas	13
	Diferencias positivas	12
	Empates	21
	Total	46
Q30 - P30	Diferencias negativas	16
	Diferencias positivas	7
	Empates	23
	Total	46
Q31 - P31	Diferencias negativas	13
	Diferencias positivas	9
	Empates	24
	Total	46

**Estadísticos de
contraste^b**

	Q1 - P1	Q2 - P2	Q3 - P3	Q4 - P4	Q5 - P5	Q6 - P6	Q7 - P7	Q8 - P8	Q9 - P9	Q10 - P10	Q11 - P11
Z	,000							-,567		-1,373	-1,078
Sig. asintót. (bilateral)	1,000							,571		,170	,281
Sig. exacta (bilateral)		1,000 ^a	,424 ^a	,230 ^a	,664 ^a	,629 ^a	,629 ^a		,824 ^a		

a. Se ha usado la
distribución binomial.

b. Prueba de los signos

	Q12 - P12	Q13 - P13	Q14 - P14	Q15 - P15	Q16 - P16	Q17 - P17	Q18 - P18	Q19 - P19	Q20 - P20	Q21 - P21	Q22 - P22
Z			-1,540		-,588	-1,373				-,743	
Sig. asintót. (bilateral)			,124		,556	,170				,458	
Sig. exacta (bilateral)	,230 ^a	1,000 ^a		1,000 ^a			,815 ^a	,043 ^a	,143 ^a		,541 ^a

	Q23 - P23	Q24 - P24	Q25 - P25	Q26 - P26	Q27 - P27	Q28 - P28	Q29 - P29	Q30 - P30	Q31 - P31
Z									
Sig. asintót. (bilateral)									
Sig. exacta (bilateral)	,664 ^a	,839 ^a	,648 ^a	1,000 ^a	1,000 ^a	,424 ^a	1,000 ^a	,093 ^a	,523 ^a

ANÁLISIS PARA 3º B

T-TEST

```

PAIRS=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19
P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7
Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26
Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)
/CRITERIA=CI(.9500)
/MISSING=ANALYSIS.
    
```

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	P1	3,32	22	,894	,191
	Q1	3,18	22	1,140	,243
Par 2	P2	4,36	22	,581	,124
	Q2	4,27	22	,703	,150
Par 3	P3	2,82	22	1,053	,224
	Q3	2,77	22	1,378	,294
Par 4	P4	3,14	22	1,207	,257
	Q4	3,50	22	1,185	,253
Par 5	P5	3,55	22	1,224	,261
	Q5	4,09	22	,750	,160
Par 6	P6	3,95	22	1,174	,250
	Q6	3,91	22	1,231	,262
Par 7	P7	2,52	21	1,289	,281
	Q7	2,52	21	1,289	,281
Par 8	P8	3,41	22	1,221	,260
	Q8	2,95	22	1,397	,298
Par 9	P9	2,59	22	1,054	,225
	Q9	2,64	22	1,177	,251
Par 10	P10	3,77	22	,973	,207
	Q10	3,86	22	1,037	,221
Par 11	P11	3,18	22	1,259	,268
	Q11	3,41	22	,959	,204
Par 12	P12	3,00	22	1,155	,246
	Q12	3,45	22	1,057	,225
Par 13	P13	2,05	21	1,431	,312
	Q13	2,14	21	1,276	,278
Par 14	P14	3,36	22	1,529	,326
	Q14	3,00	22	1,543	,329
Par 15	P15	2,91	22	1,342	,286
	Q15	3,14	22	1,037	,221
Par 16	P16	3,18	22	,958	,204
	Q16	3,32	22	1,041	,222
Par 17	P17	2,86	21	1,276	,278

	Q17	2,38	21	1,117	,244
Par 18	P18	3,95	21	1,117	,244
	Q18	3,90	21	1,044	,228
Par 19	P19	2,86	21	1,062	,232
	Q19	3,24	21	1,179	,257
Par 20	P20	4,10	20	1,165	,261
	Q20	3,95	20	1,276	,285
Par 21	P21	3,05	22	1,463	,312
	Q21	2,91	22	1,444	,308
Par 22	P22	3,50	22	1,185	,253
	Q22	3,41	22	1,297	,276
Par 23	P23	2,55	22	1,184	,252
	Q23	2,41	22	1,054	,225
Par 24	P24	3,09	22	1,019	,217
	Q24	3,45	22	1,184	,252
Par 25	P25	4,62	21	,805	,176
	Q25	4,57	21	,598	,130
Par 26	P26	3,86	22	1,082	,231
	Q26	3,59	22	1,054	,225
Par 27	P27	4,27	22	,703	,150
	Q27	4,23	22	,869	,185
Par 28	P28	3,41	22	1,098	,234
	Q28	3,59	22	1,141	,243
Par 29	P29	3,77	22	1,307	,279
	Q29	3,73	22	1,316	,281
Par 30	P30	2,77	22	1,307	,279
	Q30	2,32	22	1,249	,266
Par 31	P31	2,91	22	1,151	,245
	Q31	2,59	22	1,221	,260

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	P1 y Q1	22	-,060	,793
Par 2	P2 y Q2	22	,562	,006
Par 3	P3 y Q3	22	,791	,000
Par 4	P4 y Q4	22	,649	,001
Par 5	P5 y Q5	22	-,212	,343
Par 6	P6 y Q6	22	,821	,000
Par 7	P7 y Q7	21	,699	,000
Par 8	P8 y Q8	22	,709	,000
Par 9	P9 y Q9	22	,373	,087
Par 10	P10 y Q10	22	,251	,260
Par 11	P11 y Q11	22	,093	,680

Par 12	P12 y Q12	22	,312	,157
Par 13	P13 y Q13	21	,708	,000
Par 14	P14 y Q14	22	,444	,038
Par 15	P15 y Q15	22	,625	,002
Par 16	P16 y Q16	22	,369	,091
Par 17	P17 y Q17	21	,391	,080
Par 18	P18 y Q18	21	,596	,004
Par 19	P19 y Q19	21	,507	,019
Par 20	P20 y Q20	20	,853	,000
Par 21	P21 y Q21	22	,543	,009
Par 22	P22 y Q22	22	,356	,104
Par 23	P23 y Q23	22	,538	,010
Par 24	P24 y Q24	22	,319	,148
Par 25	P25 y Q25	21	-,045	,848
Par 26	P26 y Q26	22	,784	,000
Par 27	P27 y Q27	22	,752	,000
Par 28	P28 y Q28	22	,558	,007
Par 29	P29 y Q29	22	,738	,000
Par 30	P30 y Q30	22	,659	,001
Par 31	P31 y Q31	22	,277	,212

Prueba de muestras relacionadas

	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)	
	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia					
				Inferior	Superior				
Par 1	P1 - Q1	,136	1,490	,318	-,524	,797	,429	21	,672
Par 2	P2 - Q2	,091	,610	,130	-,180	,361	,699	21	,492
Par 3	P3 - Q3	,045	,844	,180	-,329	,420	,253	21	,803
Par 4	P4 - Q4	-,364	1,002	,214	-,808	,081	-1,702	21	,104
Par 5	P5 - Q5	-,545	1,565	,334	-1,239	,149	-1,634	21	,117
Par 6	P6 - Q6	,045	,722	,154	-,275	,366	,295	21	,771
Par 7	P7 - Q7	,000	1,000	,218	-,455	,455	,000	20	1,000
Par 8	P8 - Q8	,455	1,011	,215	,006	,903	2,109	21	,047
Par 9	P9 - Q9	-,045	1,253	,267	-,601	,510	-,170	21	,866
Par 10	P10 - Q10	-,091	1,231	,262	-,637	,455	-,346	21	,732
Par 11	P11 - Q11	-,227	1,510	,322	-,897	,442	-,706	21	,488
Par 12	P12 - Q12	-,455	1,299	,277	-1,031	,122	-1,641	21	,116
Par 13	P13 - Q13	-,095	1,044	,228	-,571	,380	-,418	20	,680
Par 14	P14 - Q14	,364	1,620	,345	-,354	1,082	1,053	21	,304
Par 15	P15 - Q15	-,227	1,066	,227	-,700	,245	-1,000	21	,329
Par 16	P16 - Q16	-,136	1,125	,240	-,635	,363	-,568	21	,576
Par 17	P17 - Q17	,476	1,327	,290	-,128	1,080	1,644	20	,116

Par 18	P18 - Q18	,048	,973	,212	-,395	,491	,224	20	,825
Par 19	P19 - Q19	-,381	1,117	,244	-,889	,127	-1,563	20	,134
Par 20	P20 - Q20	,150	,671	,150	-,164	,464	1,000	19	,330
Par 21	P21 - Q21	,136	1,390	,296	-,480	,753	,460	21	,650
Par 22	P22 - Q22	,091	1,411	,301	-,535	,717	,302	21	,765
Par 23	P23 - Q23	,136	1,082	,231	-,343	,616	,591	21	,561
Par 24	P24 - Q24	-,364	1,293	,276	-,937	,210	-1,319	21	,201
Par 25	P25 - Q25	,048	1,024	,223	-,418	,514	,213	20	,833
Par 26	P26 - Q26	,273	,703	,150	-,039	,584	1,821	21	,083
Par 27	P27 - Q27	,045	,575	,123	-,210	,301	,370	21	,715
Par 28	P28 - Q28	-,182	1,053	,224	-,649	,285	-,810	21	,427
Par 29	P29 - Q29	,045	,950	,203	-,376	,467	,224	21	,825
Par 30	P30 - Q30	,455	1,057	,225	-,014	,923	2,017	21	,057
Par 31	P31 - Q31	,318	1,427	,304	-,315	,951	1,046	21	,308

Pruebas no paramétricas

NPAR TESTS

/WILCOXON=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19 P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7 Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26 Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)

/SIGN=P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 P16 P17 P18 P19 P20 P21 P22 P23 P24 P25 P26 P27 P28 P29 P30 P31 WITH Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6 Q7 Q8 Q9 Q10 Q11 Q12 Q13 Q14 Q15 Q16 Q17 Q18 Q19 Q20 Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26 Q27 Q28 Q29 Q30 Q31 (PAIRED)

/MISSING ANALYSIS.

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

		Rangos		
		N	Rango promedio	Suma de rangos
Q1 - P1	Rangos negativos	7 ^a	9,00	63,00
	Rangos positivos	8 ^b	7,13	57,00
	Empates	7 ^c		
	Total	22		
Q2 - P2	Rangos negativos	5 ^d	4,50	22,50
	Rangos positivos	3 ^e	4,50	13,50
	Empates	14 ^f		
	Total	22		
Q3 - P3	Rangos negativos	6 ^g	7,00	42,00
	Rangos positivos	6 ^h	6,00	36,00
	Empates	10 ⁱ		
	Total	22		
Q4 - P4	Rangos negativos	4 ^j	4,50	18,00
	Rangos positivos	8 ^k	7,50	60,00
	Empates	10 ^l		
	Total	22		
Q5 - P5	Rangos negativos	3 ^m	4,00	12,00
	Rangos positivos	7 ⁿ	6,14	43,00

	Empates	12 ^o		
	Total	22		
Q6 - P6	Rangos negativos	4 ^p	5,00	20,00
	Rangos positivos	4 ^q	4,00	16,00
	Empates	14 ^r		
	Total	22		
Q7 - P7	Rangos negativos	6 ^s	4,00	24,00
	Rangos positivos	3 ^t	7,00	21,00
	Empates	12 ^u		
	Total	21		
Q8 - P8	Rangos negativos	10 ^v	6,25	62,50
	Rangos positivos	2 ^w	7,75	15,50
	Empates	10 ^x		
	Total	22		
Q9 - P9	Rangos negativos	4 ^y	4,13	16,50
	Rangos positivos	4 ^z	4,88	19,50
	Empates	14 ^{aa}		
	Total	22		
Q10 - P10	Rangos negativos	5 ^{ab}	7,30	36,50
	Rangos positivos	7 ^{ac}	5,93	41,50
	Empates	10 ^{ad}		
	Total	22		
Q11 - P11	Rangos negativos	7 ^{ae}	7,79	54,50
	Rangos positivos	9 ^{af}	9,06	81,50
	Empates	6 ^{ag}		
	Total	22		
Q12 - P12	Rangos negativos	6 ^{ah}	5,50	33,00
	Rangos positivos	9 ^{ai}	9,67	87,00
	Empates	7 ^{aj}		
	Total	22		
Q13 - P13	Rangos negativos	3 ^{ak}	4,67	14,00
	Rangos positivos	5 ^{al}	4,40	22,00
	Empates	13 ^{am}		
	Total	21		
Q14 - P14	Rangos negativos	8 ^{an}	8,75	70,00
	Rangos positivos	6 ^{ao}	5,83	35,00
	Empates	8 ^{ap}		
	Total	22		
Q15 - P15	Rangos negativos	4 ^{aq}	5,75	23,00
	Rangos positivos	7 ^{ar}	6,14	43,00

	Empates	11 ^{as}		
	Total	22		
Q16 - P16	Rangos negativos	7 ^{at}	7,07	49,50
	Rangos positivos	8 ^{au}	8,81	70,50
	Empates	7 ^{av}		
	Total	22		
Q17 - P17	Rangos negativos	9 ^{aw}	8,33	75,00
	Rangos positivos	5 ^{ax}	6,00	30,00
	Empates	7 ^{ay}		
	Total	21		
Q18 - P18	Rangos negativos	5 ^{az}	4,20	21,00
	Rangos positivos	3 ^{ba}	5,00	15,00
	Empates	13 ^{bb}		
	Total	21		
Q19 - P19	Rangos negativos	4 ^{bc}	7,63	30,50
	Rangos positivos	10 ^{bd}	7,45	74,50
	Empates	7 ^{be}		
	Total	21		
Q20 - P20	Rangos negativos	4 ^{bf}	3,75	15,00
	Rangos positivos	2 ^{bg}	3,00	6,00
	Empates	14 ^{bh}		
	Total	20		
Q21 - P21	Rangos negativos	9 ^{bi}	8,06	72,50
	Rangos positivos	6 ^{bj}	7,92	47,50
	Empates	7 ^{bk}		
	Total	22		
Q22 - P22	Rangos negativos	10 ^{bl}	5,55	55,50
	Rangos positivos	3 ^{bm}	11,83	35,50
	Empates	9 ^{bn}		
	Total	22		
Q23 - P23	Rangos negativos	6 ^{bo}	6,42	38,50
	Rangos positivos	5 ^{bp}	5,50	27,50
	Empates	11 ^{bq}		
	Total	22		
Q24 - P24	Rangos negativos	5 ^{br}	6,80	34,00
	Rangos positivos	9 ^{bs}	7,89	71,00
	Empates	8 ^{bt}		
	Total	22		
Q25 - P25	Rangos negativos	7 ^{bu}	4,50	31,50
	Rangos positivos	3 ^{bv}	7,83	23,50

	Empates	11 ^{bw}		
	Total	21		
Q26 - P26	Rangos negativos	7 ^{bx}	5,14	36,00
	Rangos positivos	2 ^{by}	4,50	9,00
	Empates	13 ^{bz}		
	Total	22		
Q27 - P27	Rangos negativos	4 ^{ca}	4,00	16,00
	Rangos positivos	3 ^{cb}	4,00	12,00
	Empates	15 ^{cc}		
	Total	22		
Q28 - P28	Rangos negativos	4 ^{cd}	7,50	30,00
	Rangos positivos	8 ^{ce}	6,00	48,00
	Empates	10 ^{cf}		
	Total	22		
Q29 - P29	Rangos negativos	7 ^{cg}	6,93	48,50
	Rangos positivos	6 ^{ch}	7,08	42,50
	Empates	9 ^{ci}		
	Total	22		
Q30 - P30	Rangos negativos	8 ^{cj}	6,75	54,00
	Rangos positivos	3 ^{ck}	4,00	12,00
	Empates	11 ^{cl}		
	Total	22		
Q31 - P31	Rangos negativos	8 ^{cm}	7,63	61,00
	Rangos positivos	5 ^{cn}	6,00	30,00
	Empates	9 ^{co}		
	Total	22		

	Q1 - P1	Q2 - P2	Q3 - P3	Q4 - P4	Q5 - P5	Q6 - P6	Q7 - P7	Q8 - P8	Q9 - P9	Q10 - P10	Q11 - P11
Z	-,177 ^a	-,707 ^a	-,258 ^a	-1,710 ^b	-1,592 ^b	-,302 ^a	-,187 ^a	-1,936 ^a	-,212 ^b	-,201 ^b	-,719 ^b
Sig. asintót. (bilateral)	,860	,480	,796	,087	,111	,763	,852	,053	,832	,840	,472

	Q12 - P12	Q13 - P13	Q14 - P14	Q15 - P15	Q16 - P16	Q17 - P17	Q18 - P18	Q19 - P19	Q20 - P20	Q21 - P21	Q22 - P22
Z	-1,589 ^b	-,575 ^b	-1,114 ^a	-,929 ^b	-,626 ^b	-1,496 ^a	-,439 ^a	-1,463 ^b	-1,000 ^a	-,755 ^a	-,726 ^a
Sig. asintót. (bilateral)	,112	,565	,265	,353	,531	,135	,660	,143	,317	,450	,468

	Q23 - P23	Q24 - P24	Q25 - P25	Q26 - P26	Q27 - P27	Q28 - P28	Q29 - P29	Q30 - P30	Q31 - P31
Z	-,511 ^a	-1,213 ^b	-,432 ^a	-1,732 ^a	-,378 ^a	-,733 ^b	-,225 ^a	-1,925 ^a	-1,114 ^a
Sig. asintót. (bilateral)	,609	,225	,666	,083	,705	,464	,822	,054	,265

Prueba de los signos

Frecuencias		N
Q1 - P1	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	8
	Empates	7
	Total	22
Q2 - P2	Diferencias negativas	5
	Diferencias positivas	3
	Empates	14
	Total	22
Q3 - P3	Diferencias negativas	6
	Diferencias positivas	6
	Empates	10
	Total	22
Q4 - P4	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	8
	Empates	10
	Total	22
Q5 - P5	Diferencias negativas	3
	Diferencias positivas	7
	Empates	12
	Total	22
Q6 - P6	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	4
	Empates	14
	Total	22
Q7 - P7	Diferencias negativas	6
	Diferencias positivas	3
	Empates	12
	Total	21
Q8 - P8	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	2
	Empates	10
	Total	22

Q9 - P9	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	4
	Empates	14
	Total	22
Q10 - P10	Diferencias negativas	5
	Diferencias positivas	7
	Empates	10
	Total	22
Q11 - P11	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	9
	Empates	6
	Total	22
Q12 - P12	Diferencias negativas	6
	Diferencias positivas	9
	Empates	7
	Total	22
Q13 - P13	Diferencias negativas	3
	Diferencias positivas	5
	Empates	13
	Total	21
Q14 - P14	Diferencias negativas	8
	Diferencias positivas	6
	Empates	8
	Total	22
Q15 - P15	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	7
	Empates	11
	Total	22
Q16 - P16	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	8
	Empates	7
	Total	22
Q17 - P17	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	5
	Empates	7
	Total	21
Q18 - P18	Diferencias negativas	5
	Diferencias positivas	3
	Empates	13
	Total	21

Q19 - P19	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	10
	Empates	7
	Total	21
Q20 - P20	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	2
	Empates	14
	Total	20
Q21 - P21	Diferencias negativas	9
	Diferencias positivas	6
	Empates	7
	Total	22
Q22 - P22	Diferencias negativas	10
	Diferencias positivas	3
	Empates	9
	Total	22
Q23 - P23	Diferencias negativas	6
	Diferencias positivas	5
	Empates	11
	Total	22
Q24 - P24	Diferencias negativas	5
	Diferencias positivas	9
	Empates	8
	Total	22
Q25 - P25	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	3
	Empates	11
	Total	21
Q26 - P26	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	2
	Empates	13
	Total	22
Q27 - P27	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	3
	Empates	15
	Total	22
Q28 - P28	Diferencias negativas	4
	Diferencias positivas	8
	Empates	10
	Total	22

Q29 - P29	Diferencias negativas	7
	Diferencias positivas	6
	Empates	9
	Total	22
Q30 - P30	Diferencias negativas	8
	Diferencias positivas	3
	Empates	11
	Total	22
Q31 - P31	Diferencias negativas	8
	Diferencias positivas	5
	Empates	9
	Total	22

	Q1 - P1	Q2 - P2	Q3 - P3	Q4 - P4	Q5 - P5	Q6 - P6	Q7 - P7	Q8 - P8	Q9 - P9	Q10 - P10	Q11 - P11
Sig. exacta (bilateral)	1,000 ^a	,727 ^a	1,000 ^a	,388 ^a	,344 ^a	1,000 ^a	,508 ^a	,039 ^a	1,000 ^a	,774 ^a	,804 ^a

	Q12 - P12	Q13 - P13	Q14 - P14	Q15 - P15	Q16 - P16	Q17 - P17	Q18 - P18	Q19 - P19	Q20 - P20	Q21 - P21	Q22 - P22
Sig. exacta (bilateral)	,607 ^a	,727 ^a	,791 ^a	,549 ^a	1,000 ^a	,424 ^a	,727 ^a	,180 ^a	,687 ^a	,607 ^a	,092 ^a

	Q23 - P23	Q24 - P24	Q25 - P25	Q26 - P26	Q27 - P27	Q28 - P28	Q29 - P29	Q30 - P30	Q31 - P31
Sig. exacta (bilateral)	1,000 ^a	,424 ^a	,344 ^a	,180 ^a	1,000 ^a	,388 ^a	1,000 ^a	,227 ^a	,581 ^a

Anexo K

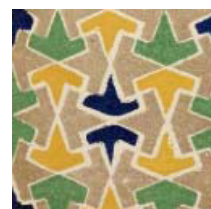
Secuencia definitiva de tareas de mosaicos con Geogebra

Foco 1: Mosaicos (teselas cualesquiera)

Con las tareas de este foco, se pretende introducir a los estudiantes en el trabajo con mosaicos sencillos, de modo que, mediante la creación de sus propios mosaicos, lleguen a comprender con qué polígonos es posible teselar y por qué (justificación de sus respuestas).

Tarea 1: En el año 1060 un visir del gran rey bereber Inb Habus levantó en una colina de Granada una residencia que posteriormente se reconstruyó y amplió hasta ser uno de los monumentos característicos de la presencia árabe en España: La Alhambra. En sus palacios se pueden ver las características fundamentales del arte islámico, como son las colecciones de mosaicos.

Un mosaico es una composición de losetas que reproduce un paisaje o figura, en el que las losetas no pueden solaparse ni dejar huecos entre ellas. Cuando las losetas llenan el plano basándose en simetrías, traslaciones y giros, estamos ante un mosaico geométrico.



Los árabes fueron unos excelentes creadores de mosaicos geométricos. En la cultura islámica se fue desarrollando una actitud de rechazo a la representación de seres vivos, que les llevó a buscar un sistema de representaciones nuevo que no coincidía con el cristiano (que dibujaba personas y animales), pero que les permitía mostrar una identidad propia como pueblo. Por ello, el Islam decidió rechazar cualquier representación de seres vivos, para evitar así la confusión con otras culturas, y su creatividad se decantó hacia la caligrafía y los dibujos geométricos, en los que alcanzaron cotas de belleza y complejidad difícilmente superables. Además, dados los conocimientos matemáticos de su época sobre mosaicos, resulta impactante comprobar que conocían todos y cada uno de los tipos de mosaicos existentes. (17 grupos de cristalógrafos planos).

Supongamos que eres un/a decorador/a árabe y que el gran visir te encarga embaldosar los suelos de la Alhambra con dos condiciones: debes emplear losetas iguales en cada habitación, pero los

diseños de las losetas deben ser diferentes en cada sala (puedes emplear todas las formas de losetas que se te ocurran). Debes mostrarle al visir todas aquellas formas de losetas que sirven para embaldosar sus habitaciones, para que él pueda decidir cuál le gusta más para cada suelo o pared. *¿Qué formas pueden tener las losetas? ¿Vale cualquiera de esas formas o polígonos para embaldosar un suelo o pared? Explica en qué casos has podido embaldosar y en cuales no y por qué. ¿Qué debe pasar para poder embaldosar una superficie con un tipo de losetas? Haz todas las pruebas que necesites para poder complacer al visir, ya que de ello depende tu sueldo y tu reputación como decorador/a.*

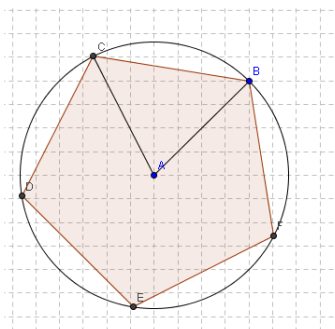
Tarea 2: *¿Qué técnicas has empleado para construir cada mosaico: dibujar sobre vértices de la grilla con el ratón, usar traslaciones, giros, simetrías...? ¿Eres capaz de repetir algunos de los mosaicos que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes? (Elige un tipo de loseta e intenta construir el mismo mosaico usando al menos de tres técnicas diferentes, repite este ejercicio con tres tipos de losetas).*

Tarea 3: Supongo que a estas alturas, después de probar con distintas losetas, ya sabrás que cualquier triángulo y cuadrilátero sirve para enlosar una superficie, pero *¿eres capaz de explicar por qué?* (Te sugiero que primero pruebes con distintos tipos de triángulos, empezando por aquellos con los que te resulte más sencillo construir mosaicos, y cuando obtengas una respuesta, lo intentes con diferentes cuadriláteros, comenzando también con los que te resulte más sencillo embaldosar).

Foco 2: Mosaicos regulares

Con las tareas de este foco se busca que los estudiantes construyan (empleando diferentes movimientos del plano o combinaciones de ellos) los tres mosaicos regulares, e investiguen y justifiquen su unicidad.

Tarea 4: Ahora nos vamos a centrar en aquellas losetas que tienen todos los lados y ángulos iguales, es decir, en losetas que son polígonos regulares, *¿eres capaz de construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7... lados? ¿Cómo lo haces?.*



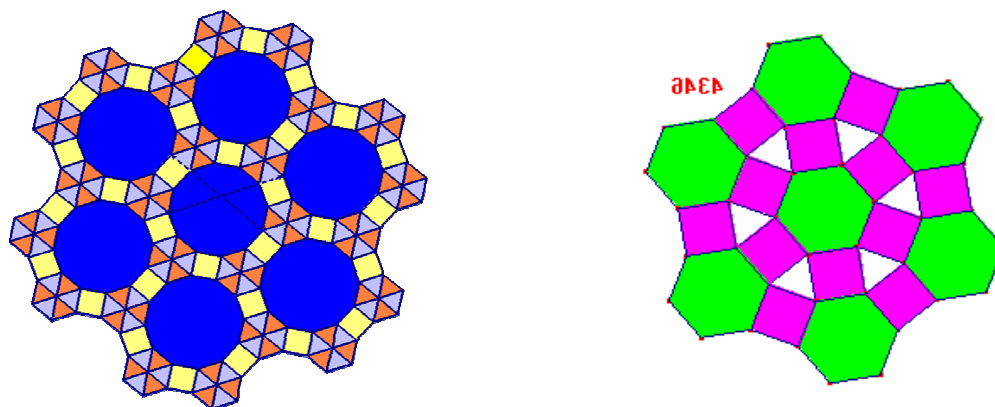
Tarea 5: El visir te sugiere que para embaldosar el suelo de la “Sala de los Abencerrajes” (esta sala es alcoba del sultán.) emplees losetas con todos los lados y ángulos iguales, para ahorrar dinero (estas losetas son más baratas que las que tienen formas irregulares). *¿Qué formas pueden tener estas losetas?* (Sugerencia: estudia con cuáles de los polígonos regulares que has dibujado en la tarea anterior es posible construir un mosaico y analiza qué tienen en común los ángulos de los polígonos con los que has podido embaldosar) *¿Puedes obtener más mosaicos usando losetas regulares de mayor número de lados? Justifica tus respuestas.*

Tarea 6: *¿Qué técnicas has empleado para construir cada mosaico: dibujar sobre vértices de la cuadrícula con el ratón, usar traslaciones, giros, simetrías...? ¿Eres capaz de repetir los 3 mosaicos regulares que ya dibujaste usando otra técnica diferente a la que habías utilizado antes?*

Foco 3: Mosaicos Semirregulares

Con estas tareas se introduce a los estudiantes en la construcción de mosaicos semirregulares, mostrándoles la diferencia entre mosaicos congruentes y no congruentes. No se pretende que lleguen a comprender por qué no hay más casos, pero sí que hagan una investigación sobre los posibles valores que deben tener los ángulos interiores de los polígonos regulares para construir este tipo de mosaicos y encuentren cuáles son los ocho mosaicos semirregulares congruentes. Para ello, deben tener presentes los cálculos y resultados obtenidos en tareas anteriores.

Tarea 7: “El gran visir no ha quedado muy satisfecho con los mosaicos que le has presentado para embaldosar los suelos, porque cree que no son estéticamente atractivos y por ello, te sugiere que *con tus conocimientos sobre mosaicos y empleando como teselas polígonos con los lados y ángulos iguales para ahorrar dinero (prueba con cualquier polígono regular, no solamente con los 3 que teselan el plano) realices otros diseños más interesantes. Puedes mezclar distintos tipos de polígonos y usar distintos colores.*



Los dos mosaicos anteriores son ejemplos de “Mosaicos Semirregulares”, pues se obtienen empleando varias clases de polígonos, con la condición de que los distintos polígonos tengan los lados y ángulos de la misma longitud.

Tarea 8: Entre los dos mosaicos de la tarea anterior, hay una pequeña diferencia y es que en el mosaico de la derecha se cumple que en todos los vértices del mosaico se encuentran los mismos polígonos y en el mismo orden (colocados de la misma manera). A los polígonos que cumplen esta condición se les llama “Mosaicos Semirregulares Congruentes”.

“El gran visir, siempre con su afán de facilitar el trabajo a los obreros, te sugiere que le presentes diseños de mosaicos semirregulares congruentes para que pueda elegir uno para enlosar las paredes del Salón de Comares o Salón de los Embajadores (es la sala más amplia y elevada de todo el palacio. En ella se celebran las audiencias privadas del sultán con otras personas que se sientan en los huecos que hay en las paredes. Además aquí encontramos el trono del sultán). *¡Ánimo sólo hay 8 posibles diseños! Intenta encontrarlos y construye dos de ellos con Geogebra en clase. Los seis restantes diseños debes construirlos en casa con Geogebra o con lápiz y papel, en caso de que no dispongas de ordenador*”.

Foco 4: Mosaicos de Escher

Mediante estas tareas se dan a conocer a los estudiantes las reglas de las posibles transformaciones de polígonos regulares, propuestas por Escher. En primer lugar, deben visitar alguna de las páginas siguientes, siendo la primera de ellas la más recomendable en caso de visitar una única web:

<http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/index.htm#javascript>

<http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/geoweb/mosa5.htm>

<http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/geoweb/mosa8.htm>, para obtener teselas originales y

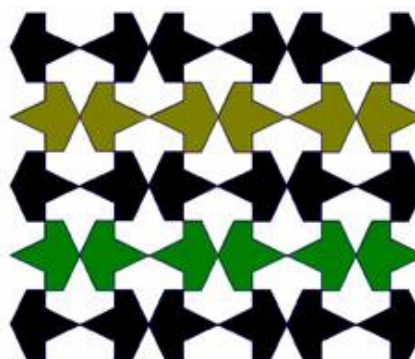
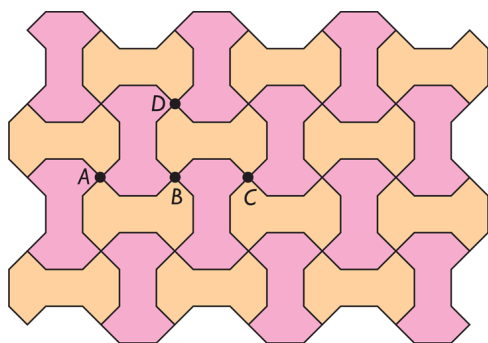
Después, partiendo de polígonos regulares, deben aplicar dichas reglas para crear teselas y mosaicos originales usando el programa Geogebra. De este modo, también se pone de manifiesto, no solo la utilidad de los mosaicos, sino su belleza y cómo las matemáticas ayudan a conseguir esas teselas con las que decorar.

Tarea 9: Vamos a estudiar algunas transformaciones que podemos hacerles a los polígonos que teselan el plano, para conseguir losetas más originales que siguen valiendo para embaldosar cualquier superficie.

Una forma muy sencilla de conseguir mosaicos es deformar un polígono regular, eliminando una parte del mismo y añadirla mediante una traslación o un giro a otro lado. Para ello, usando Geogebra debemos dibujar un polígono sobre uno o varios lados (deformar uno o varios lados) y después podemos:

- 1.- Trasladar esta deformación a otro lado del polígono.
- 2.- Girar esta deformación sobre otro lado usando algún vértice del polígono

Te propongo ahora el trabajo inverso al que has estado haciendo hasta ahora: en lugar de pedirte que busques diseños de losetas que sirvan para hacer mosaicos, te doy dos diseños de mosaicos muy famosos que se encuentran en la Alhambra, para que partiendo de un cuadrado, consigas dibujarlos usando Geogebra. (Deberás usar traslaciones, giros o simetrías). El mosaico de la izquierda se llama Mosaico del Hueso y el de la derecha Mosaico del Avión.



Tarea 10: Dejamos a un lado nuestra faceta como decorador/a de la Alhambra, para regresar a nuestros tiempos. Vamos a transformarnos ahora en uno de los más famosos pintores holandeses del siglo pasado Maurits Cornelius Escher, quien utilizó para sus pinturas sus conocimientos matemáticos sobre traslaciones, giros y simetrías. *Una vez que has podido conocer parte de su obra, me gustaría que hicieses algunos mosaicos usando como tesela base un triángulo equilátero y un hexágono regular y que deformes sus lados mediante traslaciones y giros. Después de obtener el mosaico puedes embellecerlo usando diferentes colores o añadiendo dibujos en el interior de las teselas. ¡Ánimo, se lo más creativo posible y usa tu imaginación junto con tus conocimientos de matemáticas!* (Una vez que todos hayáis obtenido vuestros mosaicos elegiremos por votación el mejor de cada tipo).

Anexo L

Resumen y conclusiones en inglés

1. INTRODUCTION

The present work is an action-research that is born of my need, as a Secondary Mathematics teacher, to increase students' motivation towards the subject matter, as well as to improve their learning. From my first contact with the secondary students in 2002 and during the following years, in which I have been teaching at all levels of Secondary school, I have observed in most of the students a severe lack of motivation, joined to a distorted image of this matter. It leads them to consider Maths as something boring, difficult and disconnected of the real world; it reverberates heavily in their interest to learn it and in the results that they get.

On the other hand, in the last decades, and especially in recent years, many teachers and researchers have studied the influence of the Information and Communication Technology (ICT) in different aspects of Mathematics Education (León & Gómez-Chacón (2007), Murillo & Marcos (2007), Sanchez (2001)). The results of these investigations have highlighted the potential of using ICT to improve motivation and student learning in mathematics. Therefore, I decided to study the influence of ICT in the students' motivation and interest and in their learning of mathematics, taking advantage of my professional status as a teacher with a fixed destination since 2004 in "IES Murgi" (ICT center in El Ejido).

Thus, three lines of interest converged in my investigation from the beginning: ICT, motivation and learning in mathematics in Secondary education.

As regards ICT, many authors have reported the benefits of Dynamic Geometry Systems (DGS) to improve students' learning (Laborde, Kynigos, Hollebrand & Straesser (2006), Smith, Hollebrand, Iwancio & Kogan (2007)). Among the various SGD (Geogebra, Cabri, C.a.R., Dr. Geo, etc.), I chose to work with Geogebra for being freeware and for its potential for the teaching and learning of geometry, supported by recent research (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis & Lavicza (2008); Preiner (2008)). I agree with Preiner that Geogebra

has the potential to foster active and student centred learning by allowing mathematical experiments, interactive explorations, and learning by discovery.

In relation to the motivational aspects on which we must point out, the literature review emphasized the importance of fostering students' inner motivation, being necessary for it to affect their emotions, attitudes and beliefs about mathematics, which are considered descriptors of the affective domain. Due to the importance granted in the curriculum of such attitudinal factors in teaching and learning of mathematics (MEC, 2002, 2006a,c), the present project focuses on the study of attitudes related to Mathematics, seeking their positive transformation that will reverse in a major students' motivation in Mathematics.

As to the students' learning, it focused on the development of mathematical competence that, following the PISA studies (OECD, 2005), constitutes the aim of the teaching of Mathematics. This is consistent with the characterization of the curriculum in terms of basic competencies, proposed for Secondary education from the current educational legislation (Organic Law of Education (MEC, 2006)).

Next, I summarize the theoretical framework of the investigation, the methodology employed, the development of the experience and the conclusions extracted from the analysis of the collected data.

2. THEORETICAL FRAMEWORK

2.1. Geogebra

The multi-platform software Geogebra (Hohenwarter & Preiner, 2007) attempts to combine the usability of a dynamic geometry software with versatile possibilities of algebraic software. It provides two representations of each object that can be modified by users, the geometric one by dragging the mouse and the algebraic one by using the keyboard, so that on having modified one of these representations the other one is dynamically updated. Geogebra's use to work geometric contents is justified in the recent literature by several authors (Sánchez (2001), Santos-Trigo (2008)). They point out the attributes and benefits of this software as reasons for introducing it as a working tool in the classroom. As consequence of the review of the literature, I have elaborated a framework in which I summarize the attributes, advantages and limitations attributed to DGS, which has served as a basis for analyzing Geogebra's influence in students' attitudes and competencies development:

<i>Attributes</i>
<ol style="list-style-type: none">1. Construction: ability to build and create microworlds that allow us to hypothesis (ability to act by trial and error).2. Navigability: ability to explore freely and flexibly..3. Interactivity: immediate and effective feedback that allows awareness and conciliation of past mistakes.4. Interface: way to capture the learner's attention and action.5. Usability and speed of response: encourage students to search for different solution strategies.6. Accuracy: user's actions executed with accuracy and rigour.
<i>Advantages</i>
<ol style="list-style-type: none">7. Global training function: they help to transmit educational values and attitudes, cooperation, emotional involvement, intensity of effort required, etc...8. Motivating function: a taste for working with the software.9. They allow reflection and analysis of results to occupy first place, because it takes less time to make representations and calculations.10. They enhance the student's self-management, matching the pace of work to their personal situation, at the same time they help the teamwork.11. They require thinking and reasoning the problems in terms of mathematical properties.12. They motivate students to search for proofs and facilitates this process by enabling the generation of a number of examples to think and argue about, in a fast and easy way.13. They offer the possibility to test ideas, receive feedback or manipulate objects (representations manipulated by dragging or executables) that are considered necessary as early support for problem solving.14. They improve the learning of geometric content: they improve viewing (mental representations and the connections between different forms of representation) and the contextualization of the properties of concepts and mathematical processes.
<i>Hazards or limitations</i>
<ol style="list-style-type: none">15. Technological dependence: the mistake of attributing to technologies more importance than they have, as they are just resources that must serve the educational process, but not vice versa. In order to avoid this dependence, we must promote the appropriate use of them.16. Confusing mathematical knowledge with manipulation, typical of a mathematic learning by rote, consisting of the storage of algorithms, definitions and theorems, rather than construction of mathematics to solve problems.17. Difficulty in managing time during class sessions, in case of the occurrence of technical problems.

Figure L-1. Attributes, advantages and limitations attributed to the use of DGS

2.2. Attitudes related to Mathematics

According to Di Martino and Zan (2010), although there are a lot of studies on attitudes, they do not provide a clear definition of the construct itself. Often, the attitude is defined implicitly and ex post through instruments used to measure it (Di Martino and Zan, 2001, 2002, 2003). Furthermore, studies that give an explicit definition of attitude do not share a single definition. From the point of view of these authors, the variety of definitions of attitude is not limiting but enriching the researchers, because different research problems may require different definitions. I share their opinion and, therefore, this project presents a characterization of attitudes in mathematics from other characterizations found in the literature, but with the perspective of my own goals.

Therefore, to carry out this research I have adopted the categorization proposed by Gómez-Chacón (1994, 1997, 2000b), who distinguishes between attitudes toward mathematics and mathematical attitudes⁹⁴. This categorization is shared by NCTM (1991) and Callejo (1994)), and adopted by other authors, such as Guerrero and Blanco (2004), Martínez (2008) and Sangiacomo (2008). Next, I describe both types of attitudes in depth, characterizing each of them.

2.2.1. Attitudes towards Mathematics

The definition of attitudes towards mathematics proposed by Hernández and Gómez-Chacón (1997) state that attitudes which comprise this group can refer to any of the following aspects:

- Attitude toward Mathematics and mathematicians (social aspects of Mathematics).
- Interest for mathematical and scientific work.
- Attitude towards Mathematics as a subject.
- Attitude to certain parts of Mathematics.
- Attitude toward teaching methods.

From the above aspects, in this work, the attitude towards mathematics as a subject and the attitude towards teaching methods are considered. The attitude toward the social aspects of mathematics is tangentially addressed in questionnaires, at par with the other two aspects. On the other hand, I consider that interest in the mathematical work and attitude towards certain parts of mathematics can be included within the attitude towards mathematics as a subject,

⁹⁴ I use the term "attitudes related to mathematics" to refer jointly to two categories: attitudes towards mathematics and mathematical attitudes.

which is already under study.

In this research, the attitude towards teaching methods is focused on students' attitudes towards the use of ICT to work mathematical content, since it is the consequence of this form of teaching and learning that is under research and, therefore, students' attitudes in this regard are considered relevant.

In order to characterize the attitudes towards Mathematics as a subject and toward the use of ICT as a teaching-learning method, I have considered the work of Rodríguez (1991), Auzmendi (1992), Gil (1999), Gómez Chacón (2000), Estrada, Batanero and Fortuny (2003), Castro (2004) and Martínez (2008). From them, attitudes towards mathematics teaching are structured in three components: cognitive, affective or emotional, and behavioural. In what follows, I show the characterization of these components that has served as the basis for collecting information during the experience. Then, I examine the two aspects mentioned above (attitude towards mathematics as a subject and to methods of instruction):

Cognitive Component: Students' beliefs

Following Castro, I consider this component includes the mastery of facts, opinions, beliefs, thoughts, knowledge and expectations (especially with an evaluative character) towards the object of the attitude. Also, I agree with Rodríguez (1991) that, in order for an attitude to exist, there must be a cognitive representation of the object, too, in this case mathematics. Thus, this component is formed by perceptions and beliefs towards mathematics, as well as the information we have on them (social consideration and perception of its importance).

Given the above, within this component, I try to inquire about students' beliefs about their own possibilities and limitations. That is, confidence in one's own mathematical ability (self-confidence) and students' perceptions about their own ability (knowledge) and intellectual skills in math (whether they trust they can study more difficult Maths, whether they consider that they have difficulties in studying them, etc.). I also try to find out their beliefs about the role of the teaching methods (in my case, learning with Geogebra and collaborative work), and whether they affect the attitudes mentioned above.

Affective Component : A taste for Mathematics

For Martínez (2008) this component is revealed through the emotions and feelings of acceptance or rejection that the individual motivationally activates in the presence of the object, person or situation that creates such an attitude. It also refers to the taxable value attributed to them. According to Castro, this component includes the processes that support or contradict the bases of our beliefs, expressed in evaluative feelings and preferences, moods and emotions that are evident (physical and/or emotionally) to the object of the attitude (tense, anxious, happy, concerned, dedicated, embarrassed, etc.).

Following these considerations, I base the study of this component in trying to understand the positive and negative feelings and reflecting the students' like or dislike for the subject: taste/rejection for the subject and the contents worked in Maths, a taste for the different types of activities worked, a like for the working methodology (in particular, for the use of ICT and collaborative work, etc.).

Behavioral Component: Work and Involvement in Mathematics

Castro believes that this component shows evidence of action for or against the object or situation of the attitude. Martínez believes that it is expressed by the individuals through their voluntary tendency to perform an action and it constitutes the observable behaviour itself, conceived as a set of behaviours. In the same line, Rodríguez regards it as the tendency to react towards mathematics in a certain way and characterizes it as the active component of the attitude.

Given the above definitions, I choose to focus on the observable behaviour or conduct of pupils during the class sessions. My intention is to describe students' behaviour in reference to problem solving situations: whether they work and engage in the tasks during the session, showing interest, or whether they refuse to work in class or they hardly work. At the same time, I intend to report about possible reactions of anxiety towards the subject (feelings of discomfort, anxiety, insecurity, blockage, etc.).

2.2.2. Mathematical Attitudes

Mathematical attitudes can be said to straddle between the attitudinal and the cognitive; that is, these attitudes may be considered desirable for a student to have at any time, and, at the same time, they can be considered as basic skills that contribute to a correct mathematical

literacy. They are therefore considered as attitudes that are closely related to cognitive development in mathematics.

In the absence of a theoretical framework about which are the basic mathematical attitudes that are desirable to have, an own categorization of such attitudes has been established, derived from the review of the curricula and of the few studies that address this issue (Hernández & Gómez-Chacón (1997), Hoyles & Sutherland (1989); Yelland (2001); Ursini, Sanchez, Orendain & Butto (2004)). In order to accomplish this task, we have selected the attitudes identified in all of the above mentioned works, because they have been considered as the basic attitudes which are desirable in any student. Thus, we have investigated in this project on the following seven mathematical attitudes: flexibility of thought, critical thinking, perseverance, precision and rigour, creativity, autonomy and systematization.

In what follows, the mathematical attitudes selected are characterized. To get to this characterization, I have made use of the information extracted from the research literature review, and I've used encyclopaedic dictionaries and monographs found on the web. I have also considered my perceptions about each attitude, emerged throughout my teaching experience.

Flexibility of Thought (FT)

Paz (1990), quoted by Olea (1993), defines flexibility of thought as the quality characterized by the search for new ways to solve problems, to solve the same problem through various ways, and to be able to change the direction of one's mental processes.

According to Zaldivar and Pérez (1997), to be flexible is not to change the way, the method, the route, how to act, etc. when it is not convenient for an external condition, but to do so when necessary or when it is the result of a conscious development process, a level reached when the student is determined to explore all the possible ways, because it is productive for his or her personal development.

My concept of flexibility of thought includes the fact that the student does not just try to solve the problems in various ways, but he or she cares about the ways in which other mates have solved the task, as well as his or her ability to change the direction of mental processes, provided that this change is well justified and argued. This is not to change his or her mind without being convinced of it, just because the teacher or another mate suggests it, but the

shift occurs because the student feels the need to do it and understands this is the right way.

My teaching experience leads me to recognize this attitude as unusual for most students when they work on solving problems, since they do not feel the need to find different strategies to solve or take into account those ways used by other mates. They also tend to take arbitrary decisions, often without stopping to think about them. Therefore, to ascertain whether they do this mathematical activity while working with DGS deserves my special attention.

Critical Spirit (CS)

For Gonzalez (2006), Critical Thinking is a way of thinking with responsibility and it's connected with the ability to make good judgments. It is a way of thinking undertaken by someone who is genuinely interested in getting knowledge and seeking truth and not simply in emerging victorious when arguing.

According to explicit consensus on the Delphi Report⁹⁵, critical thinking is an intellectual process that in a determined manner, regulated and self-regulated, seeks to reach a fair trial. This is characterized by: 1) be the product of an effort of interpretation, analysis, evaluation and inference from the evidence, and 2) can be explained or justified by evident considerations, conceptual and contextual criteria, on which it is based .

Another definition I have had in mind is that of Ennis (1992) that characterizes it as reflective and reasoned thinking focused on deciding what to believe or do.

We can then transfer this concept to solving problems, saying that students show critical spirit if they obtain a solution or answer to a task or even not being able to get a solution it deems appropriate, analyze its validity, review the process followed in order to find possible mistakes that lead to the solution they are looking for. That is, not satisfied with having responded to the task, but they want to do it properly, so they are critical to their mode of action and check that both the procedure and the solution are correct and conform to the requirements of the task. By contrast, a student who has not obtained a correct solution and although he is aware of it, does not care to check or find out why he has not found the answer he expected, he is seen as uncritical.

⁹⁵ Delphi Project: <http://www.insightassessment.com/dex.html>

In general, the students feel more than happy to give an answer to a problem, often raised in his goodness and appropriateness. I think that the possibility of working with dynamic geometry software can improve their attitude and therefore, it is under investigation.

Perseverance (PE)

The definition of the Royal Spanish Academy (RAE) of Perseverance leads to the (Del lat. Endure)

1. intr. To keep constant in the pursuit of what was begun in an attitude or an opinion.
2. intr. To last permanently or for a long time.

Perseverance is the attitude to maintain constancy in carrying out an activity or fulfill a set goal. A persevering person goes on with his project despite the obstacles and hardships encountered on his way. The persevering person displays a positive attitude and has the strength to continue with the processes that he began, he still does nothing in parts and, as far as possible, and he tries to achieve all his dreams and aspirations⁹⁶.

I understand that a student shows perseverance when working on a task until he gets the correct solution, or at least, which he/she believes to be correct (he does not notice he is wrong or no one tells him about it.) On the opposite side we find the students that when they approach a task and fail to resolve it immediately, rather than keeping trying, give up without getting a response and those who manage to reach a solution, but when they realize that it is not correct, either on their own or because another person lets him know, instead of continuing with the task (discussing the used strategy for flaws or trying a new strategy) drop out and are satisfied with the response.

The time dedicated by students in secondary education, stage in which I am teaching, to solve a mathematical problem is quite small. A considerable percentage of them often tend to give up their tasks before getting a response and for this reason, it is interesting to investigate whether the use of ICT can improve the situation.

Precision and Rigour (PR)

These two terms, whose meaning is different, always appear as an inseparable duo when considering a mathematical approach, in fact to define one of them, the other is used. Dictionaries of the Spanish Royal Academy and Maria Moliner provide, respectively, these

⁹⁶ Retrieved http://www.miportal.edu.sv/Home/Estudiantes_y_Docentes/la_perseverancia.htm

results:

Accuracy. (Del lat. Praecisio,-onis).

1. f. Essential obligation or necessity which forces you to do something.
2. f. Determination, accuracy, punctuality, conciseness.
3. f. Rigorous conciseness and accuracy in language, style, etc.
4. f. Phil. Mental abstraction or separation that makes the understanding of two things actually identified, under which they are seen as distinct from one another.

Rigour. (Del lat. Rigour,-oris).

1. m. Attitude of the person who does not tolerate faults in the individuals to his authority: "He treats staff rigorously". Hardness, severity.
2. Accuracy and precision in a calculation or measurement. Accuracy of a story or history. Quality of rigorous or strict: "They could not withstand the cold rigours. The discipline rigour". Thoroughness.
3. Abruptness of character

It is not easy to find a precise and rigorous definition that refers to these terms as a mathematical approach. A web search leads us to the following definition of Rigour, rigour has different meanings, depending on the context where you apply it: in the religious sphere, they talk about rigour in the practice of a devotee, referring to legal subjects it applies to the observation of the law precisely, literally as we would say. In the intellectual sphere, it is sometimes synonymous with consistent, systematic. This is similar to the application in science, something harsh is something that has been done according to established procedures, with precision, leaving nothing to chance⁹⁷.

Allende (2004) proposes a definition of rigour, including the accuracy, comprising:

The disciplined application of reason to matters of knowledge and/or communication. The rigour comprises many things. Is dissatisfaction with the uncertainty, with the inaccurate responses, with not very precise measurements with the extent of more and less. Rigour is also methodical attachment to the experimental procedure, requiring the control of all parameters that can affect the outcome of our tests. But rigour is also fondness for truth, is to get rid of our prejudices and enthusiasms when interpreting our

⁹⁷ Retrieved <http://tuspreguntas.misrespuestas.com/preg.php?idPregunta=9713>

results, to look for all the possible explanations for what we observe, is to accept a result that shows the fallacy of our most cherished assumptions. (p. 1)

In this project I have adopted the following observations regarding this attitude. A student shows himself thorough and accurate when, if the result he has got does not meet his expectations, he undoes and/or repeats his calculations and representations until he feels satisfied with them, and when it is not just a lack of precision in the calculations and representations obtained, but possibly they are not accurate because he has not been rigorous in his reasoning, so he goes on working on the task until he is successful. By contrast, a student is not precise enough when making calculations not too carefully, considering that a small miscalculation is not important. I also believe a lack of rigour and precision when the strategy is not entirely correct and therefore the solution obtained is not accurate but approximate, but instead of changing or adjusting it, he complies with it, even acknowledging that the solution could be improved if he were more stringent.

The definition adopted is suitable for pencil and paper and technological environments because, although the use of mathematical software can help calculate and render more quickly, their accuracy depends on the actions and reasoning of the student. Both with pencil and paper as with ICT, if a student is not rigorous in finding the solution to a problem, the results will not be accurate but approximate. For this reason, my view of this mathematical approach is independent of the tools used to solve problems.

Throughout the history of mathematics and beginning with Euclid, many mathematicians have been concerned to ensure the accuracy and thoroughness of the results, linking the concept of rigour to that of mathematical proof. However, I have watched how, for many students, this attitude is not of vital importance, i.e., they do not feel the need to be accurate at all times, nor to provide a certain rigour for their answers and arguments at the level they should. Working with DGS may help awake these needs in the students, taking into account some of the advantages mentioned in this regard in the previous chapter.

Creativity (C)

The General Direction of Dominican Republic in Free Schools offers the following definition: Creativity, also known as inventive, original thought, constructive imagination, divergent thinking or creative thinking is the generation of new ideas or concepts, or of new

associations between known ideas and concepts, which usually produce original solutions⁹⁸.

Another definition found in the web is:

The ability to associate, select, restructure, organize and transform their living experiences or the information received in unique combinations that result in different, new and valuable productions. Creativity is also considered as a human quality that can be seen as an aptitude and as an attitude:

- As an aptitude because it is the skill or ability of the human being to develop a new product.
- As an attitude because it is the way to face life and the person from his experiences generates his own alternatives to solve his problems⁹⁹.

To sum up, the creativity can be understood as the procedure of communicating new ideas, based on a prior knowledge, which will help students to think and experience in different ways, take different points of view and select the most appropriate alternatives. I believe that students show themselves creative when working on a task they like to try different strategies or paths (even out of the instructions given by the teacher), exploit their imagination and, besides, they like to follow different paths from those followed by most of their peers. Students are also creative when, having solved a task, they are interested in looking for other ways to resolve it. I can state that a student shows himself/herself little or no creative at all when he/she solves tasks in just one way (generally the one used by most of his peers or suggested by the teacher, if that is the case) and does not feel the need to seek for other strategies or explore new paths.

Autonomy (AU)

Autonomy, from the Greek auto (oneself) and nomos (rules), in general, can be understood as an individual's ability to make decisions without help from another or the condition of whom, to do certain things, does not need the help of anyone. Referring to the learning process, Autonomy refers to the ability of learners to make their own decisions in the educational process, regulating it in the goal he/she wants to achieve or the knowledge he/she wants to integrate. In short, the concept of "intellectual autonomy" is closely related to "learning to learn", so important in our times and which allows students to continue learning throughout

⁹⁸ Retrieved <http://creatividadlibre.blogspot.com/2009/02/siete.html>

⁹⁹ Retrieved <http://fisn.zoomblog.com/>

their lives. The student will gradually be able to control his/her own activities in the educational process, making any changes he/she deems appropriate to achieve the foreseen target¹⁰⁰.

Autonomy is also closely linked to learning through discovery, understanding it as one in which students construct their knowledge independently, assuming a protagonist attitude, without the constant help of the teacher, who may, however, guide the process and facilitate the media.

A non-autonomous student, when facing a task, does not think about what strategy to follow, does not consider how to act but instead, ask other students or the teacher for help. To move forward in his/her task he/she needs external help. We should distinguish between two situations, to refer to the lack of the learner's autonomy, but which have a different interpretation:

-A student works independently until he/she reaches an impasse from which he/she does not know how to leave from on his/her own, despite his/her efforts, and then asks for help to continue.

-A student who prefers not to think for him/herself before he/she acts and always asks for help, does not make an effort and is not independent.

A student who performs his/her task by working on his/her own or with his/her partner and when he/she has got a problem, seeks the ways to solve by him/herself is considered autonomous. The same applies for someone working on their own and in a stalemate, despite trying other strategies that help him/her to continue, he/she still finds difficulty to keep up with his/her homework, and finally he/she has to ask for external help. On the contrary, it is considered a lack of autonomy that student found in the second situation above, i.e., when to work in a task, he/she needs and requests aid.

I consider essential to cultivate this attitude in students to give them freedom in their learning to learn. I believe that the use of technological tools enhances the student's independent work, and I intend with this project to compare this view, that is to say, whether this theoretical advantage is highlighted in the classroom practice

¹⁰⁰ Retrieved <http://www.eumed.net/rev/ced/03/sl.htm>

Systematization (SS)

Research such as that of Sánchez (1992) quoted by Porcelli (2008), concerning the difficulties associated with solving Maths problems, shows that people can not solve problems if they fail to get the mental or internal representation of them. This requires understanding the problem statement and display data relationships, the expected result and operators can move from the initial state to the final state, i.e., to the solution through a systematic process of reasoning. That is, being systematic supports this activity so usual and important as it is solving Maths problems.

Following Jara (1994), systematization is that critical interpretation of one or several experiences that, from its management and reconstruction, discovers or explains the logic of the experienced process, the factors involved in this process, how they have related to each other and why they have done it that way. Thus, when a systematic student is working on a task he/she feels confident about how to act at all times, which should be the next step, and where he/she wants to get to, in other words, he/she has set a strategy. Furthermore, at each stage he/she knows what he has achieved and has no problem to synthesize and communicate his/her responses (calculations, strategies, etc.). He/she has followed a strategy and is able to explain the different steps he/she has been giving and the decisions that he/she has been taking to get the answer he/she expected. By contrast, an unsystematic student does not normally take time to analyze the problem or look for an appropriate strategy, but tends to shift the strategy of trial and error. However, as he/she does not know how to start or even where to get to, he/she starts trying to see if that helps him/her understand what he/she should do and sometimes he/she is lucky and finds the solution.

In general, this attitude is very important in solving mathematical problems and, it is for this reason that it is under investigation. I have often observed that the least capable students in this activity, implement any strategy for resolution or perform calculations and representations, without stopping to think if they will take them to the sought answer, so later they manifest difficulties in communicating their findings. Working with interactive software can help develop this attitude by providing real-time feedback and help redirect students' strategies, who in the beginning act by trial and error.

Once submitted, the characterization of the attitudes that will be studied in this project, I would like to point out that, although the issue of attitudes has got well-known importance

within the process of teaching and learning of mathematics (Gómez-Chacón, 2002), there are not many previous studies that provide information about methodological strategies to promote the transformation of attitudes related to mathematics in students and the way in which it occurs. Most of the previous literature, shows interest in the students' attitudes towards Mathematics, i.e. by its affective nature, being the Maths attitudes, of cognitive character, marginalized or relegated to a secondary level. However, both the educational and the scientific communities accept that these attitudes affect the learning process of students (Gómez-Chacón, 2002, OECD, 2005b), hence the value of their study in this investigation. Another aim is to describe the evolution of such mathematic attitudes as a process through the observation of behaviours, while up to now, most studies are done through data collection declaratively and punctual. I agree with Gómez-Chacón (2010) that when it comes to measure attitudes, it is not enough the information collected from students through questionnaires, but their statements need to be confirmed by observing their behavior when solving mathematical tasks. Therefore, when analyzing the attitudes of students, it triangulates the information collected through questionnaires and other non-observational techniques with the information collected through observation in the classroom context, when students solve tasks interacting with his/her peers and the teacher. Categorization and characterization of the attitudes previously presented have facilitated the selection and design of instruments for data collection during the implementation of this experience (assessment questionnaires and attitude observation grids).

2.3. Mathematical Competencies

At present there is a strong concern to establish the goals and aims of education in terms of the competencies which students should develop during their training, both in the commitment period and during higher education (Lupiáñez & Rico, 2008). This research aims to analyze in depth the development of mathematical competencies which are necessary in school and how to work with Geogebra can contribute to this development. The way this analysis has been carried out within the framework of the Didactic Analysis (Gómez, 2002, 2004, 2006, 2007), provides a method for the assessment based on competencies in the secondary classroom. The education authorities (LOE) ask teachers to evaluate this way, however, we have no clear guidelines on how it should be done, which is a concern for many of us. In this sense, the procedure used in this study may be useful for other teachers, as a guide or framework.

The PISA 2003 and 2006 project (OECD 2004, 2005b, 2006b) has been adopted as a framework for the study of the Mathematical competence. The OECD (2004) notes that "an individual who must successfully participate in the mathematization¹⁰¹ in a variety of situations, intra and extramathematic contexts and main ideas, should have a sufficient number of mathematical competencies, which together, can be regarded as a comprehensive mathematical competence. Each of these competencies can be mastered at different levels "(p. 40). To assess these competencies, the OECD/PISA project decided to use, basing on the proposal of Niss (2002) eight math competencies. Likewise, Lupiáñez & Rico take stock of the treatment given to the mathematical competence in Spanish curriculum documents, finding a set of generic competencies, significantly associated with the basic math competence, "which are almost coincident with the eight competencies of PISA "(p. 239). Given their importance, in this investigation seven from the eight mathematical competencies selected for the PISA¹⁰² studies have been considered under study, including those highlighted by other authors, too (NCTM (2003); Sekerak & Sveda (2008)). These seven competencies (think and reason, argue, demonstrate, communicate, model, pose and solve problems, representing and using tools and resources), are independent of the block of contents that are being worked at each time in the classroom, given as evident that in studying any math content the competencies are developed gradually. In addition, PISA describes three levels or groups of competencies (reproduction, connection and reflection) from the types of cognitive requirements needed to solve various mathematical problems. Thus, it is possible to understand each level of mathematical competence in relation to the skill with which the student performs the proposed mathematical tasks, i.e., shows his mathematical activity (OECD, 2004).

Based on these three levels of complexity, and considering that for this study geometric contents have been selected to be worked with Geogebra, learning indicators used by PISA (OECD, 2004, pp. 42-47) have been adapted and blended for each of the math competencies:

¹⁰¹ Mathematization is identified in the PISA Project with problem solving.

¹⁰² The competence "Using symbolic, formal and technical language and operations" includes decoding and interpreting symbolic and formal language, as well as understanding their relationship with the natural language; translating natural language into symbolic/formal language, manipulating propositions and expressions containing symbols and formulas; using variables, solving equations and making calculations. This competence has been ruled out, considering that the information in this competence is included in the representation competence, which it's closely related (Rico y Lupiáñez, 2008) and for the peculiarities of this work (study of geometric contents on Tessellations of the Plane) which does not contemplate the managing of formulas and equations.

Thinking and Reasoning (TR)

Traditional curricula of primary and secondary education focus on the necessity for students to learn a list of definitions and properties of shapes. Instead of memorizing properties and definitions, students should develop personally meaningful geometric concepts and ways of thinking that enable them to analyze problems and special situations carefully (Battista, 2001). I share this point of view and I think that the study of geometry should be approached from this perspective. In addition, Olkunn, Sinoplu & Deryakulu (2005) suggest that the use of dynamic geometry software supports and encourages students to develop and understand the systems of concepts based on properties used in geometry to analyse shapes and achieve higher levels of geometric thinking instead of memorizing a list of properties of figures. So, I consider relevant the use of dynamic geometry software (DGS) to promote the development of this competence.

Thinking and Reasoning Competence Indicators that have been used are:

Level 1 or Group of Reproduction: To recognize geometric shapes and bodies, their characteristics and essential properties. To make the simplest questions (“How many...”, “How much is...”) and understand the resulting response types ('many', 'so much'); to distinguish between definitions and assertions, to understand and use mathematical concepts in the same context in which first introduced or have been practised subsequently.

Level 2 or Group of Connection: To describe and classify geometric objects according to their properties. To ask questions (“how do we find...”, “Which mathematic treatment do we give to...”) and understand the resulting responses (reflected in charts, graphs, algebra, figures, etc.) To distinguish between definitions and statements and between different types of them, to understand and use mathematical concepts in contexts that differ slightly from those which were introduced for the first time or those which have been practised later.

Level 3 or Group of Reflection: To describe geometric objects, classify them according to their properties and relationships between them. To understand the systems of concepts based on properties used in geometry to analyze shapes. To ask questions (“how do we find...”, “Which mathematical treatment do we give to...”, “What are the essential aspects of the problem or situation and understand the resulting responses...”) (reflected in charts, graphs, algebra, figures, specification of key points, etc.) to distinguish between definitions, theorems, conjectures, hypotheses and statements about special cases and actively articulate

or think about these distinctions, to understand and use mathematical concepts in new or complex contexts; to understand and deal with the extent and limits of the given mathematical concepts and generalize the results.

Argumentation-Proof (AP)

In the last decades has become increasingly relevant the discussion on the difference between argumentation and mathematical proof, and Duval (1989.1999) holds a clear distinction between both terms. Argument can be considered as a process in which the discourse is developed with the specific aim to make change the speaker the epistemic value given to a particular statement. In short, the argumentation is when those rhetorical means are used to convince someone of the truth or falseness of a particular statement.. On the contrary, proof consists in a logical sequence of implications that lead to the theoretical validity of a statement. Mariotti (2006) points out that many studies which do not deny this dispute, have attempted to clarify the relationship between both processes or skills based on the idea of a possible continuity between them rather than a break, finding that "when the phase of producing a conjecture has shown a rich diversity of arguments in order to support or reject a statement, it was possible to recognize an essential continuity between these arguments and the final proof "(p. 183). I share this point of view of continuity between the initial argumentation and the final demonstration, and therefore, we study two processes or skills, checking the quality of the arguments and demonstrations of students.

Several researchers have looked at the ways to solve demonstration problems of students from different levels of education and have come to make some ratings, being the most successful and most frequently used at present, those defined in Balacheff (1988a,b) and Harel & Sowder (1998). Later on, other research conducted in Spain have analyzed the applicability of these classifications and other classifications have been developed to deepen the former (Ibanez, 2001; Marrades & Gutierrez, 2000, Martinez 1999, Martinez & Diaz, 2001). Gutierrez (2005) defines a new classification of demonstrations which contains and develops the former ones, and this is the one I have adopted as a framework for this research:

- Empiric demonstration :
 - ✓ Naive experiment: Students select a number of examples without any specific criteria. In some cases, verification of ownership is tactile or visual (such as

"perceptive") and in other cases it is made by looking at properties or mathematical elements of the example ("inductive" type).

- ✓ Crucial experiment: Students are aware of the necessity for generalization and resolve it through a careful selection of an example "as less particular as possible", convinced that if the result is valid in this example, it will always be so, even if it never loses its specific character. The crucial experiments can be "modelling" when the demonstration is only to show the existence of such a crucial example, "constructive" when the demonstration falls in the way of obtaining the example, "analytical" when the demonstration is based on mathematical properties empirically observed, and "intellectual" when the demonstration tries to separate from the empirical observations and it is based on accepted mathematical properties and deductive relationships between elements of the example.
- ✓ Generic Example: Students, aware of the necessity for generalization, select an example and characterize them as representative of its class. The demonstration consists of abstract reasoning related to general elements and properties of the class but obtained from operations or referred to properties made with the example. In the generic examples the same types, as those in crucial experiments, are distinguished (modelling, constructive, analytical and intellectual), but in this case the demonstration not only reflect the empirical activity, but the references become abstract properties of the kind of the example and deductive reasoning which link them.
- Deductive demonstrations:
 - ✓ Experiment: The demonstration even being deductive and abstract, is organized with the help of an example, and this is sometimes recognised because the demonstration has a temporary development. There are two types of mental experiments, the "transformative" when the demonstration is based on a transformation of the statement or in an equivalent initial conjecture, and the "axiomatic" when the demonstration is a chain of logical implications based on definitions, axioms or accepted properties. The sample helps, respectively to foresee the most suitable transformations and organize the chain of implications.
 - ✓ Formal Proof: This is the kind of demonstration formed by chains of logical and formal deductions without the help of examples, usual in the mathematicians of

professional jobs. And now you can also find the above two types of demonstration (transformative and structural), with the difference that in the formal proofs we do not use any examples to help. (p. 90)

It is a widely held point of view that the dynamic geometry environments have opened new frontiers, linking informal argumentation with formal proof (Hoyles & Healy, 1999; Olivero & Robutti, 2001) and that encourage exploration and demonstration because they facilitate the approach and verification of conjectures (Hanna, 2000). Therefore, I believe that the use of Geogebra for the study of geometry is particularly suited to promote argumentation and demonstration of the students.

The argumentation-proof competence indicators, have been taken from the levels considered by PISA for the argumentation and from the levels outlined above of Gutiérrez's demonstration (2005):

Level 1 or Group of reproduction: To follow and justify the standard quantitative processes, including the calculation process, as the statements and the results. To classify geometric objects by their attributes. To make empirical demonstrations such as naive empiricism, i.e., the verification of the geometric property is done visually or by observing properties or mathematical elements of the example.

Level 2 or Group of connection: simple mathematical reasoning without distinguishing between evidence and wider forms of argumentation and reasoning, to monitor and evaluate the chain of mathematical arguments of different types, to make sense of heuristics (eg., "what may or may not happen and why", "what do we know and what do we want to get"). To classify geometric objects attending to their attributes and to present informal arguments by using different representations of them. To demonstrate geometric properties and geometric relationships empirically, through a crucial example, or going a little farther with a generic example.

Level 3 or Group of reflection: To reason mathematically in a simple way, distinguishing between evidence and wider forms of argument and reasoning, to monitor, evaluate and elaborate chains of mathematical arguments of different types, to use heuristics (eg., "What may or may not happen and why", "what do we know and what do we get", "what are the essential properties", "How are the different objects related"). To draw generalizations and

rules from several examples and to give complete deductive arguments. To identify inconsistencies in the given arguments and to recognize consistencies, differences and similarities, through the contrast of features or properties of geometric objects. To demonstrate deductively: as a mental experiment, the geometric constructions built as an example help, respectively, foresee the most suitable transformations and organize the chain of implications.

Communication (C)

The importance of the language in the learning of Mathematics, as well as the ability to communicate mathematically, is a topic of particular relevance, the focus of research (Duval, 2001; Godino, 2001; Nesher, 2000; Niss, 1999). In recent years, it has been emphasized the importance not only of the written discourse, but the need of an analysis of the oral discourse to understand how learning occurs. From this necessity studies have emerged to explore the importance and the impact of the type of discourse used by the teacher in the meaningful learning for students.

When analyzing the way students communicate orally, we consider two actions following Nesher: speak mathematically and talk about Maths. With the term mathematically speaking he refers to the use of the mathematical language applying it to different contexts, but taking into account its own syntax. With the expression to talk about mathematics, he refers to the act of using natural language as a metalanguage for expressing ideas. I think this communicative form promotes the development of the communicative competence as it encourages interaction, exchange and reflection.

The indicators of the communicative competence that have been used are:

Level 1 or Group of reproduction: To understand and be able to express orally and in writing simple Maths questions, such as telling the names and basic properties of well-known geometric objects, mentioning calculations and results, usually only in one way. To speak mathematically and discuss about Maths at a basic level, with certain limitations.

Level 2 or Group of Connection: To understand and be able to express orally and in writing mathematical questions which cover everything from how to reproduce the names and basic properties of well-known geometric objects or how to explain the calculations and their results (usually in more than one way) to explain issues involving relationships. It also entails

understanding others' oral or written statements on such matters. Speaking mathematically, and talking about Maths properly, but loosely.

Level 3 or Group of Reflection: To understand and be able to express orally and in writing mathematical issues ranging from how to reproduce the names and basic properties of well-known geometric objects or explain calculations and results (usually in more than one way) to explain matters involving complex relationships, including logical relationships. It also entails understanding others' oral or written statements on such matters. Speaking mathematically, and talking about Maths with great precision and rigour: interpreting geometric information presented in different formats, to name, define and communicate geometric information in a clear and orderly way, using natural language and the appropriate symbolic.

Modelling (M)

Ortiz, Rico & Castro (2007) describe the modelling process into two phases. The first one, the horizontal modelling, is to translate the problems from the real world to the world of Mathematics. The relevant data of the problem are selected and then you have to determine what mathematical structures and substructures can respond, by studying this data, the first question. The second phase is the vertical modelling where the student may ask questions using concepts and mathematical skills and solve the problem within Maths with all the tools it provides. The subsequent step would be to think about the whole process of modelling and its results which should be interpreted with a critical attitude and interpreting the mathematical solution in terms of the original problem, thus validating the whole process. The modelling process, is quite similar to that described by the OECD as a mathematization, which is closely related to Problem Solving.

An overview of mathematical modelling is provided by Pollak (1997). This author believes that every application of mathematics using mathematics to evaluate or understand or predict something that belongs to the non-mathematical world and that mathematical modelling is characterized by going from the problem outside the mathematical world to the mathematical formulation leading to a final explicit reconciliation between mathematics and the real-world situation. Through the modelling process attention is paid to the external world and the mathematician and the results must be mathematically correct and reasonable in the context

of the real world.

Indicators of this competence, taken from PISA, are:

Level 1 or Group of Reproduction: To recognize, collect, select and use well-structured familiar patterns related to certain geometric concepts and be able to make a reproduction from the proposed models, passing on the different models (and results) to reality and vice versa to achieve a performance; communicate the model results in an elementary way..

Level 2 or Group of Connection: To structure the geometric situation to create the model, to translate the "reality" into geometric structures in contexts that are not too complex but which are different from those the students are accustomed to. It also involves knowing how to interpret alternate models (and results) and the reality, and knowing also how to communicate the results of the model.

Level 3 or Reflection Group: Structuring the geometric situation to create the model, translating the reality into geometric structures in complex context or very different from those which the students are used to and move alternatively from the different models (and their results) to the "reality", including here aspects of communication of the model results: gathering information and data, monitoring the process of building models and validating the resulting model. To make copies of proposed geometric models based on geometric properties and geometric relationships. It also entails analyzing reflection, criticism and by conducting a more complex communication about models and their construction.

Posing and Problem Solving (PS)

Problem solving is a backbone of the Mathematics curriculum. I think the rest of the Maths competencies help be competent in solving problems. PISA adds to this competence the students' abilities to state and pose problems in different situations and with different criteria.

Authors such as Dewey, Polya, and Schoenfeld have inquired about the various stages of problem solving experienced by students, and all contributions are behind the same sequence: analysis, planning, implementation and evaluation. I think the use of technological tools, in this case Geogebra, can help the development of this competence, mainly in the phases of implementation and evaluation, to meet the principles that some researchers (Underwood et al., 2005; Yerushalmy, 2005) suggest as necessary to support students when they face with

mathematical problem solving, among others: possibility to test ideas, receive feedback or manipulate objects.

According to Cañadas (2007), a situation is considered to be a problem when an individual or a solver does not know a priori algorithms or methods to obtain the solution immediately. Similarly, Puig (1996) believes that the resolution of the problem is everything that posing from the approach to the solution. From these assumptions, I have considered the following indicators of the competence pose and solve problems that have been used to assess students, drawn from PISA:

Level 1 or Group of Reproduction: Using geometry to explain phenomena, facts or concepts and solving problems within and outside mathematics. To expose and formulate geometrical problems recognizing and reproducing pure and applied practiced problems; to solve problems using standard approaches and procedures, usually in a unique way.

Level 2 or Group of Connection: Using geometry to explain phenomena, facts or concepts and to solve problems within and outside mathematics. To pose and formulate geometric problems beyond the reproduction of practiced problems, to solve such problems using standard application and procedures but also more independent problem solving procedures involving connections between different areas of mathematics and different forms of representation and communication (diagrams, charts, graphs, words and illustrations).

Level 3 or Group of Reflection: Using geometry to explain phenomena, facts or concepts and to solve problems within and outside mathematics. To expose and develop geometric problems beyond the reproduction of the problems already practised, to solve such problems through the use of standard application and procedures and also through more original resolution of problems involving connections between different mathematical areas and forms of representation and communication (diagrams, charts, graphs, words and illustrations). It also involves reflecting on the strategies and solutions and assessing the suitability of different ways to solve the posed problems.

Representation (R)

Lupiáñez (2000) defines mathematical representations as the, "symbolic or graphical notations or verbal representations, used to express through the concepts and procedures of a discipline as well as their characteristics and more relevant properties" (p.40). According to

him, the traditional analytical representations have been widely complemented and enriched by these technologies, and they have removed the static character they usually presented. Referring to the representations that the calculator provides, the term executable representations is included (Lupiáñez & Moreno, 2001), defining them as carrying the potential to simulate cognitive actions regardless of who the user is. Within the dynamic geometry environment, I think the executable representations are particularly relevant, as they become manipulable; that is, they allow acting directly upon them making it possible to display certain properties of mathematical objects, being this a clear advantage over the static representations.

Another important aspect to be considered is the ability to convert the different representations of the same mathematical object or situation that Duval (2002) considers as a fundamental process for understanding the particular situation. NCTM also stresses the importance of using multiple representations in learning mathematics. Research such as those of Mousoulides & Gagatsis (2004) and Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis (2007) highlight the difficulties that students have when they are solving problems that require connections and relationships among different representations of an object or situation. In this sense, working with SGD is very helpful, providing different representations of the same object and allow to represent a great deal of physical manipulations which, by hand, would take much time, thus helping the exploration, examination, comparison, manipulation and verification of speculation during the resolution of problems.

The indicators of the competence Representation that have been used are:

Level 1 or Group of Reproduction: to make a geometric construction given in a base of oral, written or graphic data. To represent the mental things through external visual forms (objects, shapes and geometric constructions.) Decode, encode and interpret representations of geometric objects previously known in a standard way that have already been practiced (to perceive examples visually and identify geometric shapes and properties, interacting with representations (manipulative or executables) of these objects, using software tools). The transition from one representation to another is only required when this step itself is an established part of the reproduction.

Level 2 or Group of Connection: To make a geometric construction on the basis of given data in an oral, written or graphical way. To represent the mental things through external visual

forms (objects, shapes and geometric constructions) and to be able to represent visual objects in the mind, real or not (internal representations). Decode, encode and interpret forms of more or less familiar representation of geometric objects (identify shapes, properties and geometric relationships, interacting with representations (manipulative or executables) of these objects, using software tools)); select and switch between different forms of representation of mathematical objects and situations, and translate and differentiate between different forms of representation.

Level 3 or Group of Reflection: Making a geometric construction on the basis of given data in an oral, written or graphical way. To represent the mental things through external visual forms (objects, shapes and geometric constructions) and to be able to represent visual objects in the mind real or not (internal representations). To decode, encode and interpret forms of more or less familiar representation of geometric objects (identify shapes, properties and geometric relationships, interacting with representations (manipulative or executables) of these objects, using software tools, to reproduce geometric models based on properties and geometric relations), to select and switch between different forms of representation of mathematical objects and situations and translate and differentiate between them. It also involves combining representations in a creative way and invent new ones.

Using Tools and Resources (UTR)

It is important to make students develop the ability to manage various resources and technological tools to ensure an appropriate mathematical and, at the same time, technological literacy. The existing resources must be adapted to students, and it's worthless to use a powerful tool to solve geometric problems, if it does not help the development of mathematical competence. It has been previously justified the choice of Geogebra to work with students in the classroom, I just want to add that its user-friendliness was one of the determining factors for making this decision. My intention was not to spend time training students to use the software, but to make a brief presentation of the program management and the various possibilities it offers and allow students to investigate by themselves the best way to take advantage, i.e. to encourage the free exploration of the various software tools.

Indicators of the competence Use of Tools and Resources that have been used are:

Level 1 or Group of Reproduction: To know and be able to use the various tools of Dynamic Geometry software in contexts, situations and procedures similar to those already known and

practiced throughout the learning, proving to be capable to make simple dynamic constructions.

Level 2 or Group of Connection: To know and be able to use the various tools of Dynamic Geometry software in contexts, situations and different ways to those already introduced and practiced during the learning. To show knowledge of the operations necessary to activate each function or software utility, and be able to perform dynamic constructions based on geometric properties, which guide or assist in solving the problems.

Level 3 or Group of Reflection: Knowing and being able to use the various tools of Dynamic Geometry software in contexts, situations and ways quite different from those already introduced and practiced. To show knowledge of the necessary operations to activate each function or software utility, and be able to perform dynamic constructions based on geometric properties. To demonstrate good use of technology to apply its profits, including the "dragging" or "drag" to argue, demonstrate the findings and resolve the set tasks and at the same time be able to recognize their limitations.

This characterization was the basis for the design of the tasks proposed for the pupils (didactic analysis) and for some of the data collection instruments (observation competencies grids). Besides to characterize the different levels of competence that can be achieved depending on the complexity of the performed task, it provides a useful framework for evaluating the competence-based learning, in my case to evaluate the students' geometric content learning.

3. METHODOLOGY

Given my status as a professor of secondary education, the research work carried out within the paradigm of Action Research (AR), as part of my interest, as a teacher, is to transform my own practice. In my case, the unsatisfactory reality of some classes marked by a lack of motivation in the students, their performance deficiencies and the limited use of technologies in an environment specifically created for this purpose.

I started from the conviction that the research carried out by teachers plays an important role, both for their professional development, and for the generation of knowledge through realistic sceneries and it can also be significant for other education professionals. However,

action research is a collaborative matter. It is an investigation "with others" and involves the collaboration between those involved and/or between them and external staff. Within this collaborative aspect of action research, this study falls within the collaborative experiences of primary and secondary teachers with university professors who have developed experience in the process of action research and have a broader understanding of the research on the problem area of interest (Romero, 1997; Rearick, 1998; Fuentes, 2001).

The AR process, according to Kemmis (1992), is based on the notion of a spiral of self-reflection: a spiral of planning, action, observation and reflection cycles:

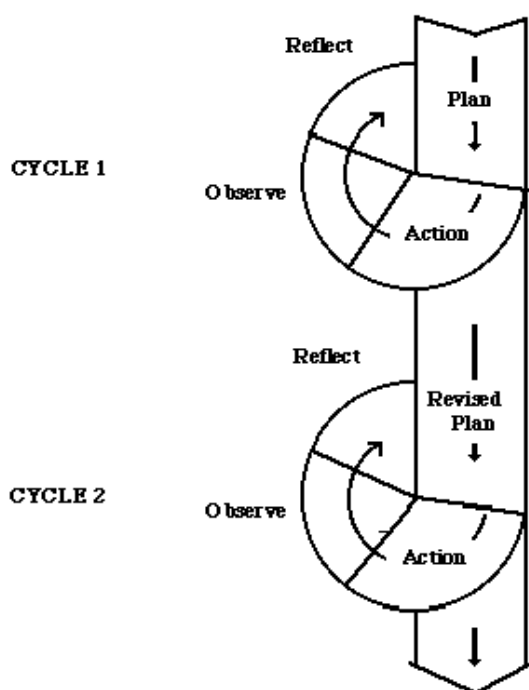


Figure L-2.- Diagram of spiral AR

In this research work they have been carried out in three cycles, following the four phases of AR for each cycle (Figure L-2). The first cycle or cycle 0 was the investigation performed to obtain sufficient research (DEA). The second cycle or cycle 1 was the pilot cycle for this thesis research, with which we implemented the teaching-learning sequence based on the use of SGD (C.a.R. and Geogebra). During the Reflection phase of the cycle 1, the analysis led us to revise the general plan of research, taking major decisions for the ultimate experience: the use of the software Geogebra and the geometric expansion of the contents worked, with the consequent adjustment of the teaching-learning sequence designed. The third cycle, or cycle 2, has been the most important and the one which is presented in the PhD dissertation.

Within action research, no guidelines are provided regarding the specific design of the experience. While there is a tradition of using ethnographic and qualitative methods, quantitative methods are not incompatible with this paradigm. Thus, there are different versions, serving the purpose of the study in question, the role of each participant in this study, data collection and analysis processes, and the way of presenting the results (Doerr & Tinto, 2000).

To undertake the design of this research, attending the basis of a systematic and rigorous commitment it has been taken as a reference a model of design that uses both theory and the conditions of common classes to create and explore new teaching strategies. It is transformative teaching experiments and conjecture driven (Molina, 2006), which lies within the experimental design (Confrey & Lachance, 2000). These experiments were developed in the classroom and focus on researching new teaching strategies, being its fundamental characteristic the conjecture that defines it and acts as a guide in the research process. In this type of research the conjecture undergoes progressive refinement, the result of the recurring cycle composed by the same formulation, experimentation in the classroom and subsequent reconstruction.

4. CONJECTURE AND OBJECTIVES

The three cycles of this research have been guided by a conjecture, which has been revised after the implementation of each of them. Thus, the initial conjecture "It's possible to find different ways to increase the motivation of secondary students towards mathematics and to improve, their learning at the same time" has been refined after each cycle as a result of the information from the successive phases of reflection and the ongoing review of the literature performed. The formulation of the conjecture for the third cycle of research, which forms the core of this thesis, was as follows:

"You can design, implement and evaluate a teaching sequence based on the use of Geogebra to promote positive change of attitudes related to mathematics and mathematics competencies development for high school students. Using Geogebra will boost certain attitudes and competencies at a higher level. Certain characteristics and attributes of the software will be directly related to the changes wrought in certain students' attitudes and competencies."

The research objectives that allow making operative such conjecture, were profiled at the same time, being the final formulation as follows:

1. To design, implement and evaluate a teaching-learning sequence based on the use of software Geogebra.
2. To analyze the changes that the implementation of this sequence has in attitudes related to mathematics in secondary students.
3. To identify the features of Geogebra that may influence the processing of certain math-related attitudes.
4. To describe the development of math competencies that occurs in secondary school students by implementing the sequence described above.
5. To identify what factors of Geogebra are involved in the development of certain mathematical competencies.

5. DEVELOPMENT OF THE EXPERIENCE

Here I summarize the four stages of the third cycle of research, which is to be found in the PhD dissertation.

5.1. Planning Phase

It was decided that students would work collaboratively in pairs the solution of application problems of geometry with Pencil and Paper (PP tasks) and with Geogebra (GG tasks), being the only variable that differentiates both types of tasks the use of ICT in order to analyze if there was an improvement in attitudes due to the use of software¹⁰³. For the design of the teaching-learning sequence based on the use of Geogebra and planning of classroom experience, it was adopted the Didactic Analysis (Gómez (2002, 2004, 2007); Lupiáñez, Rico, Gómez & Marín (2005)). This analysis provided a useful procedure to describe the way in which specific skills of the selected topic contribute to the development of mathematical competencies, as well as the potential degree of their development. It also contributed to the design of schedules as well as observation competencies, one for each task in the sequence, used to collect information on the development of competencies under study. Below I show

¹⁰³ The methodology of classroom work before the experience was focused on the students' individual work and the study of the contents was often carried out in expository mode on my part. By opting for a guided discovery learning and deciding students would work collaboratively with Geogebra, it was necessary to design two tasks sequences, one to be done with pencil and paper and one with Geogebra, whose only difference was the use of the software.

one of the grids made.

5.2. Action Phase

I carried out the experience in my workplace (IES Murgi, El Ejido) with 46 students, belonging to two groups of 3º ESO. During the PP tasks, we worked contents of plane geometry and were required 13 sessions of one hour. With Geogebra, we studied the contents of Tessellations of the plane for 12 sessions (Tasks GG).

5.3. Observation Phase

The information obtained during the observation of the PP tasks (using the observation grid attitudes shown below), allowed me to get a fairly accurate idea of my students attitudes towards mathematics. Based on this information, we chose a representative sample of 12 students, 6 students from each group, whose attitudes and cognitive profiles covered all possible combinations of attitudes (inadequate-adequate-good) with outcome (insufficient-sufficient, good). The data from the students in the sample were analyzed in greater depth. For data collection experience various observational (O) and non-observational (NO) instruments were used, I explain them briefly in the following table:

Table L-1. Observational and No Observational Instruments

<i>O and NO Instruments</i>		<i>Attitudes</i>	<i>Compe- tencies</i>	<i>For whom?</i>	<i>When?</i>
Questionnaire “Actitud hacia las mates”	<i>NO</i>	✓		All	Beginning and end of the experience
Questionnaire MIO	<i>NO</i>	✓		All	End of the experience
Semi-structured group interviews	<i>NO</i>	✓	✓	All	End of the experience
Audio recordings of each student	<i>NO</i>	✓	✓	Sample	During GG tasks
Video recordings of each group	<i>NO</i>	✓	✓	All	Some PP and GG tasks
Geogebra files of each task	<i>NO</i>	✓	✓	All	During GG tasks
Written resolution protocols for each task	<i>NO</i>		✓	All	During PP and GG tasks
Suggestion Boxes	<i>NO</i>	✓	✓	All	End of the experience
Attitudes observation grids	<i>O</i>	✓		All	During PP tasks
	<i>O</i>	✓		Sample	During PP and GG tasks
Competencias observation grids	<i>O</i>		✓	Sample	During GG tasks
Teacher’s diaries of each group	<i>O</i>	✓	✓	All	During PP and GG tasks
Individual teacher’s diaries	<i>O</i>	✓	✓	Sample	During GG tasks

Below I expose some of these instruments of own design, which can be considered one of the contributions of this work. First, I present the attitudes observation grid designed from the characterization given above, which was used during sessions with pencil and paper and GeoGebra:

MATHEMATICAL ATTITUDES	FLEXIBILITY OF THOUGHT	1 He/she solves the problem in more than one way.
		2 He/she is interested in his/her mates' solution to problems that are different from his/her own.
		3 He/she changes his/her opinion on the bases of convincing arguments.
	CRITICAL SPIRIT	4 He/she analyzes the obtained solution and reflects on it appropriately.
		5 Even though he/she is not able to get to the final solution, he/she revises the given steps to check whether everything is right or he/she can find any error.
		6 He/she is aware that he/she can't find the solution, or that the solution is not valid, but he/she doesn't care for trying again or guessing why the solution is wrong.
	PERSEVERANCE	7 He/she doesn't like to be wrong. He/she makes the calculations carefully.
		8 When he/she fails in solving a problem, he/she doesn't try again; he/she is fine with an incorrect answer.
		9 When facing a problem, he/she gives up easily, without giving any response.
	ACCURACY AND RIGOUR	10 He/she doesn't like to be wrong; he/she does the calculations carefully.
		11 He/she thinks that a mistake in calculations is not important.
		12 He/she is satisfied with approximate solutions. He/she doesn't care about accuracy.
	CREATIVITY	13 He/she likes to invent new strategies or problems.
		14 He/she doesn't inquiries about different or new strategies.
	AUTONOMY	15 He/she works in an autonomous way.
16 He/she doesn't like to think by him/herself, and prefers to ask to the teacher or to other mates what he/she needs to do.		
SISTEMATIZATION	17 When he/she is working on a problem, he/she keeps in mind where he/she wants to get.	
	18 He/she is able to synthesize his/her calculations and results.	
	19 He/she acts out of habit, without finding meaning to what he/she is doing.	
ACTITUDES TOWARDS MATHEMATICS	BEHAVIORAL	20 He works during the session showing interest in the work.
		21 He doesn't work in class or he works little.
	AFFECTIVE	22 He prefers doing exercises that he doesn't have to think.
	COGNITIVE	23 He trusts in being able to solve the problem alone.
ATTITUD TOWARD ICT	24 Interest and enjoyment in working with computers	

Figure L-3.- Attitudes observation grid

Regarding the observation competencies grids, also with its own design, these were used during the work with Geogebra and unlike the previous single format grid, these ones were specific to each task. I expose the task 5 and the corresponding grid as a sample of them:

Task 5: The Vizier suggests that you tile the floor of the “Chamber of Abencerrajes” (this room is the sultan bedroom in the Alhambra of Granada) using tiles with all equal sides, in order to save money (these tiles are cheaper than those with irregular shapes). What shapes can these tiles have? (Hint: study with which of the regular polygon that you have drawn in the previous task is possible to construct a mosaic and analyze what do the angles of the polygons with which you could tile the floor have in common) Can you obtain more regular mosaic using regular tiles with more sides? Justify your answers.

Task 5: Regular Mosaics		Competencies¹⁰⁴	Level
A1 He/she interprets the formulation of the real life problem in mathematical terms		TR, M, R	3
A2 He/she expresses the strategies employed and the results obtained, orally and in writing			
A.2.1.	He/she expresses him/herself orally with his/her own words	C, PS	1
A.2.2.	He/she expresses him/herself orally with proper mathematical vocabulary	C, PS	2
A.2.3.	He/she expresses him/herself in writing with his/her own words	C, PS	1
A.2.4.	He/she expresses him/herself in writing with proper mathematical vocabulary	C, PS	2
A3 He/she distinguishes representations of regular tessellations, drawing and using isometries		TR, M, PS, R	2
A4 He/she creates regular tessellations by using one type of isometry		TR, AP, M, PS, UTR	3
A5 He/she identifies equal angles that exist at a vertex		TR, AP, R	2
A6 He/she argues why there are only 3 regular tessellations of the plane			
A.6.1.	He/she uses only visual arguments, presenting concrete examples chosen without criterion	TR, AP, M, PS	1
A.6.2.	He/she obtains the condition for tessellating the plane with regular polygons (angle=divisor of 360°)	TR, AP, M, PS	3
A.6.3.	He/she argues the uniqueness or the 3 regular tessellations (there aren't more divisors of 360°)	TR, AP, M, PS	3
A.6.4.	He/she doesn't show any kind of argument	TR, AP, M, PS	0
A7 He/she understands teachers' or other students' statements		TR, C	3
A8 He/she handles the Geogebra software			
A.8.1.	He/she can draw regular polygons	TR, UTR	2
A.8.2.	He/she properly handles the different isometric tools of the program, in order to make tessellations	TR, UTR	3

Figure L-4. Competencies observation grid (task 5)

¹⁰⁴ TR= Thinking and reasoning, AD= Argumentation-Proof, C=Communicating, M= Modelling, PS= Posing and Solving Problems, R= Representation, UTR= Using Tools and Resources.

5.4. Reflection Phase

In this phase all the data collected were analyzed and triangulated, using specific software such as Atlas.ti (qualitative analysis) and SPSS (quantitative analysis), among others. The analysis made with Atlas.ti allowed for the students in the sample to reconstruct, the development of the sessions in which the tasks were performed with Geogebra. To do so, the first step was to transcribe the audio and analyze the files and written protocols of Geogebra resolution of each task. Then these data were introduced in Atlas.ti, integrating them so that each task with Geogebra would be perfectly reconstructed. The next step was to codify them, using as codes the 24 indicators included in the attitude grids and competencies associated with each task (included in the competencies grid). Encoding and analyzing with Atlas.ti in depth each significant piece of each session, one could perceive the overall picture of each attitude and competence in each task, and how it was changing, if it did so, during one session. In addition, this analysis permitted to report on the factors responsible for this transformation: attributes and advantages of Geogebra, interaction with peers and/or the teacher of the task itself. On the one hand, the SPSS software allowed analyzing possible responses from all students to the two questionnaires used.

The report analysis allowed to inform about the transformation experienced by students in their attitudes related to mathematics because of the use of software, and to describe the competencies expressed by them while performing the task sequence based on the use of Geogebra. At the same time, they highlighted the features of the software associated with the improvement of certain attitudes and competencies. These tests were conducted at various depth levels: for the whole group a global analysis (performance analysis), for students in the sample a detailed analysis (incorporating the information in their schedules of observation) and a case study for 5 students in the sample, one being more thoroughly analyzed (including also the analysis of audio files). For each set of students, the results of the various instruments examined were triangulated. The final step was to triangulate the results obtained in different sets of students on the transformation of attitudes and competencies development and confront them with the theoretical framework.

6. CONCLUSIONS AND CONTRIBUTIONS OF THE RESEARCH

In this section I discuss briefly how I responded to the objectives and the conjecture of research, presented in section 4.

Objective 1. To design, implement and evaluate a teaching-learning sequence based on the use of dynamic geometry software (DGS) using the Didactic Analysis

The performance analysis carried out confirmed that it is possible to design, implement and evaluate a teaching-learning sequence based on the use of Geogebra, being suitable to work with the selected geometric content.

I attribute the goodness of the design of the task sequence, on the one hand, to the usefulness of the didactic analysis performed, whose content, cognitive and training analysis provided me with a deeper knowledge about the worked contents and its teaching process learning. On the other hand, previous experimentation during the cycle 1 of this study revealed the ways of learning, more frequent errors and difficulties of the students when they worked these contents with DGS. Thus, the training analysis has helped me improve and operationalize my teaching planning.

The implementation of the sequence designed to be worked with Geogebra highlighted not only the appropriateness of the design tasks, but also the other methodological decisions that had been previously taken. I am referring to the suitability of the chosen software and the decision to work collaboratively. Geogebra program proved to be very easy to use, requiring little time to familiarize with the tools offered and whose attributes and advantages over traditional methods of pen and paper were highlighted at all times. The fact that students worked collaboratively in pairs the solving application of problems had no significant effect during the work done with pencil and paper; however, it emerged as a form of suitable work during the tasks performed with Geogebra, by promoting the dialogue among students and help them report fewer difficulties than if they had performed these tasks alone. These results agree with those found by Lavy & Leron (2004) and Sordo (2005) who argue that the technological environment enhances students' collaborative learning.

Regarding how to evaluate students during the teaching-learning sequence conducted with Geogebra, I must say that the instruments used to collect data during the observation phase

helped me get more precise knowledge of the attitudinal changes experienced by these, as well as the development achieved in their math competencies. The richness of data collected through various instruments was useful for both the teacher assessment level and the assessment as a research goal. At teaching level, the tasks' correction and the analysis of the various instruments and data sources used during the observation phase allowed me to evaluate each student and get their qualification for the teaching unit of tessellations of the plane that they worked with Geogebra. The software enabled the evaluation of the tasks to be richer in nuances, allowing its observation during the class sessions and the analysis at the conclusion (examining the protocol of each construction made with Geogebra). Thus, it was not necessary to do a written test at the end of the unit about tessellations of the plane.

Concerning to the evaluation of the teaching-learning sequence itself, performance analysis experience made during the last phase of didactic analysis, described in Chapter 7 (p. 197 section 7.2.1)), was very useful for both my labour as teacher and researcher, since it confirmed the adequacy of the selected tasks to achieve my goals of teaching and learning. That is, by analyzing the action I could check whether the designed tasks actually resulted in the development of math competencies that a priori I expected and if the degree of complexity of these tasks allowed students to manifest, during their resolution, the level of development of their competencies considered in the design phase (analysis of instruction). In short, this analysis confirmed the goodness of the sequence designed to achieve my objectives: to improve attitudes and develop math competencies at the desired level. Only certain aspects of the sequence of tasks' design, outlined in Chapter 7 (section 7.2.1), can be improved for future implementation in the classroom (tasks 3 and 8 have been slightly tweaked) leaving the final sequence set forth in the Appendix K. This sequence is suitable to be implemented in the classroom by other teachers, adapting it to their own interests and characteristics of their particular educational context.

Objective 2. To analyze the changes that the implementation of this sequence has in attitudes related to mathematics in secondary students

In the analysis of attitudes carried out at different levels of depth: total students, student samples and case studies we have obtained quite homogeneous results, showing a positive change in attitudes related to mathematics for most students, by working with Geogebra. Also, I would stress that no attitude worsened with the use of this software, which is a fairly significant fact as, although some students did not show remarkable progress, the tool did not

exerted a negative effect on them either. Following the same structure in the chapters of the thesis, I will start thinking about attitudes towards mathematics, then continuing with mathematical attitudes.

The data analysis carried out for all sets of students (students total, sample and case studies), led to the same conclusions about the changes experienced by students in their attitudes towards Maths. They show that the use of software had its effect on the three components discussed (cognitive, affective and behavioral), highlighting its bigger potential for improving emotional and behavioral components, to ensure that students had a higher taste, pleasure, interest and involvement in the mathematical activity during the GG tasks. The cognitive component (perceptions and beliefs about their chances of success in mathematics, such as self-confidence), was generally the one that experienced less development, especially for some students with cognitive impairments prior to working with Geogebra. A priori, and based on past experience, I was confident that working with SGD had a positive effect on the three components, the latter being more visible to the affective and behavioral dimensions and less relevant to the development of cognitive component, and it happened in the classroom. However, I must add that in the affective domain I did not expect a positive development as large as the one that took place, and that fact made the experience very satisfactory.

On the other hand, students expressed along the Geogebra experience very positive attitudes towards their use. The analysis have confirmed that the taste, motivation and confidence placed by students in the software, as an effective tool for solving the GG tasks, caused a greater pleasure, motivation, confidence and involvement in Maths, i.e., a positive change of their attitudes towards Maths. However, this transformation appears linked to the use of software and can not be extrapolated to the subject, as it is conceived by students, without the help of this tool. These results are in line with those obtained in other studies, carried out by Cretchley & Galbraith (2002) and Gómez-Chacón (2010), who analyzed through questionnaires students' attitudes towards computers when learning mathematics. They found that in learning mathematics with computers there is a stronger correlation with attitudes towards computers (in terms of confidence and motivation to computers) than attitudes towards Mathematics (in terms of confidence and motivation in mathematics) when students learn mathematics with computers. In this study, triangulation of the tests performed (not just the answers to the two questionnaires used, but also other information gathered by various

observational and non observational techniques) has highlighted this higher correlation, by giving students the positive changes in their beliefs, emotions and behavior in Mathematics to the Geogebra software.

Moving on to something else, the work with Geogebra can be considered as the reason for the observed change in the affective and behavioral components for all GG tasks, while for the cognitive component, the tool contributed to its improvement on tasks of low or medium difficulty but was less important in more complex tasks. In connection with, the second most influential factor for the observed change in the cognitive component of students varied from case to case. For many students, the second factor turned out to be the interaction with his/her partner or, in other words, the fact that they worked collaboratively. And for those students for whom interaction with their peers was not effective, the second important factor was my interaction with them. These interactions and work with Geogebra had a positive impact on the improvement of students' self-concept and confidence in Mathematics.

Concerning the changes experienced by students in their mathematical attitudes during the experience with Geogebra, tests performed for different sets of students return consistency and similarity of results. These tests showed that not all attitudes experienced the same evolution and, apart from Geogebra, other factors such as peer interaction (collaborative work in pairs) and with the teacher, affected the changes observed by varying the influence of these factors for each individual student.

During the tasks performed with Geogebra, the vast majority of students showed critical thinking, perseverance, precision and rigour, autonomy and systematization in almost all the sessions where they used the software to solve the tasks designed by tessellations of the plane (GG tasks). In contrast to previous attitudes, flexibility of thought and creativity did not reach high values for most students, but only for some of them.

With regard to the factors considered as main causes of the changes experienced by students in their mathematical attitudes, the most important factor for most students turned out to be Geogebra. Indeed, the analysis highlighted that certain attributes and advantages of using the software over the work with pencil and paper, set out in Chapter 9 (pp. 391-403), together with the taste and confidence of the students use in Maths (motivating role of software), contributed to the development of mathematical attitudes such as critical thinking, perseverance, precision and rigour and autonomy, where students showed high levels of

development of such attitudes. The software helped many students to behave in a more systematic way, although not for most of them, and it also enhanced the flexibility of thought and creativity during all sessions for a few students, but it cannot be said that the software directly contributed to the development of the latter. In the case of these students whose work with the software did not result the development of all their mathematic attitudes at a high level, there were found other factors such as peer interaction and interaction with the teacher, who exercised influence, in some punctual cases and in more significant ones for the development of attitudes of systematization, flexibility of thought and creativity.

The results presented for mathematical attitudes were adjusted to those obtained by other authors such as Ursini, Sanchez, Orendain & Butto (2004), work that I stand out from the very small number of studies found focused on this issue. These authors inquired about the changes appreciated by 24 teachers when their students worked with problem solving with ICT in relation to: participation, ability to analyze a problem and interpret worksheets; initiative, support application, dedication, defending their ideas and creativity. According to teachers, the vast majority of students improved in these aspects due to the use of ICT. These results are consistent with those obtained for this investigation, except in the creative attitude. The evolution of this attitude was noted by the authors at the same level as that of the other attitudes and yet, in our study, creativity developed in less degree while working with Geogebra, since there was no uniform way to all students as it happened for the other attitudes. Previously, I justified that this difference with regard to creativity can stem from the fact that not all the designed tasks favored the development of creativity and students had no prior training in solving tasks that foster creative work and also to different instruments for data collection used in the two studies. Thus, the above authors obtained their results from the analysis of the views of teachers (those who rated their students concerning the points raised) and from a semistructured interview to four of them, while those in this study were obtained from the analysis of various instruments, which allowed to collect in greater detail the performance of students while working with Geogebra solving problems, and also allowed to inquire about the progress of each approach systematically. In summary, the results obtained in this study have shown a greater influence of Geogebra in the transformation of attitudes related to greater involvement in the tasks and in the subject as perseverance, critical thinking, precision and rigour, autonomy and systematization, than those attitudes with greater psychological burden such as flexibility of thought and creativity.

Another issue concerning the attitudes of students that deserves attention is the relationship found between the two attitudinal categories studied and the different attitudes belonging to both, which were analyzed systematically for the five students with whom was conducted the study of cases. On the one hand, tests performed for these students found a dependency relationship between positive attitude towards the use of Geogebra and positive attitudes towards mathematics. As a conclusion of such analysis, we can say that the taste and the confidence placed in Geogebra by students as an appropriate tool to solve problems, helped them to improve their attitudes towards mathematics in use, exhibiting taste, involvement and self-confidence in Mathematics. This involvement was more surprising to those students whose prior attitudes toward mathematics were negative, however, their positive attitude towards working with the software (in terms of taste and trust) led them to transform them favorably during its use. The above results obtained for the case study can be extrapolated to most students participating in the experience, as they showed on questionnaires, interviews and suggestion boxes that they considered that the improvement of their attitudes towards Mathematics was the effect of taste and confidence in working with the software. Moreover, dependent relationship was found between improved attitudes towards Mathematics and improvement of mathematical attitudes Perseverance and Autonomy for the students belonging to case studies and also for most of the students who participated in the experience. Thus, more persevering and autonomous behavior of students while working with Geogebra, contributed both to the attributes and benefits of software on methods of pencil and paper, as well as on the positive change in their attitudes towards Maths. To the remaining mathematical attitudes, the characteristics or attributes of the software exerted a greater influence for their positive change than the fact of enjoying and showing themselves motivated and confident in Maths, i.e., the involvement between improved attitudes towards mathematics and mathematical attitudes improving was not so remarkable.

Summarizing the above, we can say that the tool was useful both in improving students' attitudes towards mathematics and students' mathematical attitudes, however, it did not have the same lasting effect on both. The positive change of attitudes towards mathematics experienced by students as a result of working with Geogebra, became associated with its management. This was confirmed by the students during the experience and when, in due time, they returned to work with pencil and paper, most of them returned to their baseline (before working with Geogebra) in such attitudes. In the case of mathematical attitudes, the use of software resulted in development of these on the students, according to

the possibilities of each one, which many students continued to express on working the following teaching units without the help of the software. That is to say, the tool helped students become aware of the need to express these attitudes, as well as their importance for solving mathematical problems, which led them to continue taking all or some of these attitudes in future math activities (in particular, perseverance and precision and rigour).

Before proceeding to the next research goal, I would add a reflection on the impact of ICT use in the transformation of students' attitudes related to the mathematics, drawn from the three cycles in which this research has been undertaken. With regard to attitudes towards Mathematics that were studied in all stages of this investigation, it was observed that working with computers could motivate the students to work more in Maths, while it made the course more enjoyable. These results were obtained for the first time in the cycle 0, when the students worked math problem solving, drawing on the search for information online, as an effective resource for the study of the selected mathematical contents. Later, during cycles 1 and 2, the study of attitudinal scope was expanded including mathematical attitudes, and the use of ICT focused on the management of dynamic geometry software (DGS). The analysis in these cycles allowed showing the effectiveness of these programs for the study of geometry, highlighting the Geogebra software in this area and also for their ability to improve both attitudinal categories. Indeed, not only contributed to the development of behavioral and affective components (as in cycle 0), but also the cognitive component of attitudes towards Mathematics. On the one hand, working with Geogebra caused a significant improvement in five out of the seven mathematical attitudes considered essential for an adequate students' mathematical literacy. In short, Geogebra, with its attributes and advantages over more traditional methods of pen and paper, has proved to be a very efficient software for the teaching and learning of geometric contents, a more specific question addressed below.

Objective 3. To identify the characteristics of SGD that may influence the processing of certain math-related attitudes.

In the second section of Chapter 9 it is shown what kind of attributes and advantages of Geogebra were highlighted for the evolution of studied attitudes, finding consistency in all the tests carried out for different sets of students in each attribute or benefit observed and attitudes in which the improvement influenced in each case. Reflecting on the results of these analyses, some of them can be highlighted, given its greater relevance to students' attitudinal

development. In what follows, I explain them briefly.

For attitudes towards Mathematics three attributes of software highlighted and its motivating role as the sole significant advantage for the improvement of the three components analyzed (cognitive, affective and behavioral). Constructiveness and Interactivity of Geogebra stood out as the most influential attributes in improving the cognitive component, since the possibility of building and being active at all times, along with the feedback provided by the software after each student's action, reinforced the low self-concept of many of them and made them express greater confidence in their possibilities to deal successfully with problem solving tasks for GG than shown for the PP work. The ease of use and speed of response of the tool, third attribute, caused a greater involvement of students in the tasks performed in the classroom, thus contributing to improving the behavioral component. Finally, I deal with the observed advantage of Geogebra on PP for the evolution of attitudes towards mathematics: motivating role. This directly influenced the affective and behavioral components, leading to an improvement in the affection towards mathematics of students greater than expected.

For mathematical attitudes, it was observed during the execution of tasks with Geogebra the influence of all its attributes and some of its advantages (outlined in figure L-1 (p. 723)) in the development of such attitudes in students. The test results confirmed this statement and provided more detailed information on the relationship between both two variables, whose conclusions are now presented. I will concentrate the six attributes observed in two groups in order of importance, i.e., by weight or influence exerted to improve these attitudes.

The first group was formed by the constructiveness, interactivity, ease of use and quick response and accuracy of the software to run the user actions. Geogebra constructiveness encouraged greater perseverance and autonomy in students, to allow them to build and have activity at all times. The interactivity of the software, or in other words, immediate and effective feedback provided in real time, contributed to the improvement of attitudes such as flexibility of thought and systematization. The ease of use and speed of response by Geogebra encouraged students in the pursuit of different resolution strategies to influence on attitudes such as flexibility of thought and creativity, for the students that showed them, while it made easier to demonstrate greater precision and rigour. The precision with which the software ran the students' actions contributed to the improvement of attitudes such as critical thinking and precision and rigour, helping them to realize their mistakes while reducing the

effort and time they needed with PP to show those attitudes.

The second group was formed by the navigability and interface. The navigability of Geogebra took effect in improving students' autonomy, giving them the opportunity to explore their ideas in a free and flexible way. The interface or mode to capture the student's action and attention, helped to improve the display of student's errors, thereby also encouraging their critical spirit. Regarding the advantages of software over pencil and paper to improve these attitudes, we could underline three, which I will comment now from more to less relevance. The motivating role of software was appreciated by almost all students, finding that this pleasure to work with Geogebra led them to demonstrate greater perseverance, precision and rigour that when they did it with PP. The remaining two advantages of using SGD to be highlighted in the classroom were, firstly, the promotion of reflection and analysis of results, using less time in representations and calculations and, secondly, the promotion of autonomous work by students, which directly influenced his flexibility of thought and autonomy, respectively.

The above results confirm the practical relevance of certain characteristics of the technologies mentioned theoretically by other authors. In fact, during the experience with Geogebra it was highlighted the importance of motivating role, among those identified by Zabala (1989), for attitudinal development of students and the relevance of the six generic attributes which, according to Sánchez (2001) possess the softwares of dynamic geometry. These features were also highlighted in the previous cycles of this research, for its importance to improve students' attitude.

Moreover, I want to highlight that only one of the negative aspects of the introduction of Geogebra as a working tool in the classroom, identified by Sordo (2005), confirmed during the experience with the software: the loss of class time due to technical problems. In this experiment, fortunately, this problem only arose at certain times. In addition, such problems were not about software, but other applications of computer equipment that were used and the connection to the Internet. These technical problems involved only the collection of data for this research, when some students expressed specific problems with the application used to collect the audio files, which caused the loss of some of these files. Also in a couple of sessions the Internet connection failed, making it difficult for students to send Geogebra and audio files, although it had no greater impact, since the students stored these files in their user

folders being able to access to them at any time. In short, the technical problems experienced answered research questions, not representing a real drawback for the development of this experience by other teachers for teaching purposes, which may dispense with the audio files recording. This, in turn, would reduce the initial minutes required in each session for connecting headphones, microphones and audio recorder.

Objective 4. –To describe the development of mathematical competencies that occurs in secondary school students by implementing the sequence described above

The competencies analysis conducted at different levels of depth: total students, student sample and case studies have provided satisfactory results, which show a remarkable development of certain mathematical competencies for most students, by working with Geogebra. These results showed that not all competencies experienced the same development and, apart from Geogebra, other factors such as interaction with peers and the teacher, influenced their development, by varying the influence of these factors for each individual student. I also add that, as for the attitudinal level, we found no negative effects of work with software in the development of student competencies; so it is considered a very positive experience to work solving problems in context with Geogebra.

Three of the seven competencies studied evolved at the same level, reaching a medium-high level for most students during GG tasks: use of tools and resources, representations and modelling. The remaining competencies: thinking and reasoning, argumentation-proof, communicating and posing and solving problems, also improved during the experience with Geogebra, although its evolution was not homogeneous, but the students achieved different levels of development, in most cases consistent with their cognitive status prior to working with the software. That is, although most students experienced a cognitive progress working with Geogebra, only some of them were totally geometrically competent, which was expected, as only the fact of working with this tool they were not going to overcome all the cognitive deficits dragged from previous courses.

As a conclusion of the analysis we can say that Geogebra was very powerful for the development of competencies related to visualization processes. This helped to the fact that representing, along with use of technological tools and resources, were the two competencies in which students obtained the best results from the beginning of the experience with the software. Geogebra also contributed to the development of competencies like modelling and

posing and solving problems in which most students improved without much effort, resulting surprising the development observed in the resolution of context problems, since previous to work with Geogebra they had shown great difficulties in this competence. On the other hand, the tool was less effective for the development of competencies linked to processes of reasoning, as thinking and reasoning, arguing and communicating, noting in these competencies slower progress, not all students reaching appropriate developmental levels. In general, in these competencies students came up a step, that is, those who during PP tasks didn't show these competencies had reached a low level during GG tasks, those with low level evolved into a medium-high and those already evidenced an average level in these competencies (very small number of students) progressed to a high level of their development during the experience with Geogebra. However, I must say that, although most advanced students followed the above scheme, for many students the effect of working with the software was amazing and went from zero or low initial to medium-high levels during GG tasks.

Another important reflection on the influence of the use of Geogebra in the development of students' competencies, refers to permanent character or not such development, when they rework the resolution of application problems without the help of software. I checked how the work with Geogebra had made students aware of the importance of cultivating their Maths competencies to improve in that activity. Therefore, they tried to maintain the competence level achieved in subsequent Geogebra Maths activities. However, most of them did not succeed and revealed again many of the cognitive limitations demonstrated before working with the software. This statement underlines the importance of the attributes and benefits of the software, set out in the second section of Chapter 10, for the development of students' competencies and, especially for those with greater cognitive deficits.

As to the factors that contributed to the competencies development observed in students, I mention the same ones I have already stressed as the agents of attitudinal transformations: Geogebra, interaction between students and interaction with the teacher. As the development of certain competencies differed from some students to others, the weight or the influence of each factor in their cognitive development was also variable. The software was the most important factor, among the three mentioned, for competencies development experienced by students. However, I must say that it contributed more to the development of certain ones than others and did not exert the same effect on all students. Geogebra influence was

significant for the development of the seven mathematical competencies to a medium level, but also contributed to the majority of students could reach a high level of development in representing and using tools and resources. The tool also contributed greatly to many of the students were able to show a medium-high level in modelling¹⁰⁵ and posing and solving problems. The software was losing ground as the complexity of the tasks increased and in these cases became more relevant the other factors mentioned for the development of certain competencies such as thinking and reasoning, arguing and communicating, in which the students had more difficulty. The second important factor for the development of these competencies in students varied from one student to another, though for most of the students proved to be their interaction with me (the teacher), as my work in these cases, was talking to them and providing assistance or suggestions so that they themselves came to solid arguments and communicate them properly grounded. For a few couples, whose members were complemented to perfection, the second important factor for the development of these competencies was their interaction or the collaborative work between students, considering in these cases their interaction with the teacher, the third factor. The interaction of each student with his/her respective partner in many cases was not beneficial for the competencies development, though neither harmful, because it depended largely on the idiosyncrasies of the components of each pair and whether they were at the same cognitive level or not . We can say that it was effective for those students whose partners showed increased competence and offered him help in situations which presented some difficulty.

The above conclusions are in line with those obtained in other studies, whose aim was also to describe the improvement of certain mathematical competencies due to the work with Dynamic Geometry software (DGS) in the classroom. Nevertheless, most studies found focus the competencies thinking and reasoning, arguing, and posing and solving problems. Thus, comparing the results of such studies on these competencies with those of this research, they match completely. In fact, Laborde, Kynigos, Hollebrands & Straesser (2006), found that the use of SGD with high school students resulted in improved understanding of geometric concepts and supported the development of formal proofs by students. On the other hand, Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi (2004) found that the fact that the SGD led to greater student participation during the phase prior to the demonstration (in which students were convinced of the validity of their guesses) led them to the need for a formal

¹⁰⁵ The tasks required the development of this competence at the medium level, and only the task 9 required a high level, therefore, can be considered globally designed tasks required of this competition at medium-high level.

demonstration. According to Santos-Trigo (2008), certain aspects of mathematical problem solving improve with the use of SGD, claim supported by the results obtained in this investigation. In short, these aspects relate to the need of students caused by the use of software, to think the problems in terms of relevant properties and also the fact that working with SGD facilitates the verification process of conjectures considering different methods including the visual, empirical, dragging (drag) and formal proofs to support the conjecture. In conclusion, we can say that these studies point to an improvement of the three competencies identified produced by the software management, a result that coincides with those obtained for this research.

As I did for the attitudinal level, and before moving to the next goal, I would like to add a reflection on the influence of the use of Geogebra in the development of students' math competencies. Over the three cycles of investigation conducted, positive results have been obtained on the development of competencies that students experienced working with ICT. Although the analysis performed during the first two cycles was not as comprehensive as in the latter experience, it allowed itself to say that there was a development of students' math competencies while working with technology, affecting its use in some of them more than in others, confirming the efficiency of such tools not only in its attitude, but also on students achievement in Mathematics.

Objective 5. To identify what factors of SGD are involved in the development of certain mathematical competencies.

In the second paragraph of section 10 (p.) I have outlined the attributes or benefits of Geogebra that were highlighted for the development in each competence studied. Some of them were more important than others, associated with the development of various competencies, as is the case for the different attitudes analyzed.

During the implementation of classroom teaching-learning sequence based on the use of Geogebra, we appreciated the influence of almost all the attributes and some of the advantages of the software, presented in Figure L-1, in developing the students' competencies. Starting GDS attributes that were highlighted to improve certain competencies, five of them stood out, which I classify into two groups, according to the weight or influence that exerted on the development of these competencies.

The first group was formed by constructiveness, interactivity and ease of use and speed of response of the software. Constructiveness and interactivity of Geogebra allowed students to be active (it took them to "test") and immediate feedback of their actions, focusing on competencies development such as modelling and posing and solving problems. In addition, interactivity also helped redirect the thinking and reasoning of students, improving their quality this way. The ease of use and speed of response of Geogebra not only helped to promote use of tools and resources, but encouraged students to search for different resolution strategies, thus influencing the development of competencies such as thinking and reasoning and posing and solving problem. The second group was formed by the interface and accuracy of Geogebra. Both attributes influenced the development of competence representing, by making it more visible to students the connection between different forms of representation and improving their mental representations.

Regarding the advantages of software over pencil and paper for the development of competencies, we highlighted four, now I will deal with them in order of most to least relevant. The possibility to test ideas, receive feedback or manipulate objects (representations able to manipulate or execute with dragging) was the most important advantage for the development of competencies, impacting positively on improving "argumentation-proof, modelling (vertical), posing and solving problems and represent". The ability to generate lots of examples in a quick and easy manner was refining the way of thinking and reasoning of the students and motivated them in the search for arguments, demonstrations, it also facilitated this process. Improved visualization and contextualization of the properties of mathematical concepts and processes, caused by students using the software, influenced when "represent". Finally, the fact that the software forced students to think and reason problems in terms of mathematical properties, proved to be an advantage over pencil and paper in the development of thinking and reasoning.

These results underline the importance of the attributes of the dynamic geometry software, reported by Sanchez (2001), as they simultaneously contributed to the development of certain mathematical competencies and positive attitudinal change experienced by most students, previously commented. Also, the above advantages of using Geogebra that have been relevant to the development of certain competencies, come to match with those proposed by Underwood et al. (2005) and Yerushalmy (2005) as necessary tools in such software to support problem solving in Mathematics. These benefits are consistent with those found by

previous studies of Laborde, Kynigos, Hollebrands & Straesser (2006) and Santos-Trigo (2008), already noted in Chapter 10 (p. 498).

Regarding the drawbacks of using Geogebra as a working tool in the classroom, I have already said for the attitudinal level, the time loss caused by technical problems at specific times of some of the class sessions, which only affected the data collection and did not represent a real limitation in the teaching plane. Regarding the cognitive domain, I have to add that only a few students seemed to confuse manipulation with mathematical knowledge, and in these cases, I interacted with them to show them that they should think and reason how to build Mathematics reasoning, so that their answers could have a solid base on which to be sustained.

Relationship found between attitudes and competencies

I consider it important to include the observed relationship between attitudinal development and competencies improvement for the students of the case study. For the group of students this relationship was analyzed from the information that they collected (questionnaires, my group diaries, interviews and suggestion boxes). This analysis provided an overview that matches the one found for the students of the case study for whom this relationship was analyzed in depth having much more additional information (my individual diaries and audio and Geogebra files of each task).

A priori, and taking into account the results of previous experiences, it was hoped that a positive change in attitudes towards Mathematics of students contribute to an improvement in their mathematical attitudes and this will encourage the desired development of their competencies too. Partly, because as mathematical attitudes have a cognitive rather than affective nature, could be considered part of the overall math proficiency. The results presented in the chapter 10 confirmed that relationship, reflecting that a positive attitude towards the use of Geogebra in Mathematics implied a positive change in their attitudes towards Mathematics which led to the improvement of certain mathematical attitudes. This improvement contributed to the development of certain mathematical competencies too.

For most students, the pleasure and confidence in working with Geogebra led them to enjoy more of the subject, to become actively involved in solving tasks and to show more confidence in their chances of success. This positive change in their attitudes towards Mathematics was vital for many of them, as an activator of its evolution in the cognitive

domain, as it took them to show their mathematical attitudes properly, which also led them to try different ways of resolution and arguments, which made them reason and argue founded on the decoding performances obtained with Geogebra, quickly and easily. That is, the improvement of their mathematical attitudes contributed to the development of their competencies at an appropriate level. For other students with higher cognitive deficits, the positive change in their attitudes towards Mathematics, as a result of the taste and confidence in working with Geogebra in Maths, helped them improve some mathematical attitudes, evolution which favored the development of certain competencies, but not all of them. I find that the relationship was in this sense and not vice versa, as the cognitive advance the students experienced was more progressive and result of previous attitudinal change.

Conjecture of research and final reflection

After properly address the objectives of this research, it's time to take up again the conjecture that has guided it. The above results are a confirmation of this conjecture, while they enable to explain different emerging aspects that can be taken into account for future reformulations, depending on the interests and contexts in which the study could be continued. Then, and as a final reflection, I will contrast the conjecture by a synthesis of everything said above.

First, I refer to the experience planning. Both sequences of tasks as the instruments designed to collect information have met the needs of this study and have proven useful for their purposes. Moreover, the characterizations of attitudes and competencies, as well as the features of Geogebra considered as a theoretical framework of analysis have been shown valid. It is therefore considered suitable for future research with one/s of these sources of interest. At this point, I would like to highlight some procedures like the didactic analysis, which has proved very useful for the design of the didactic sequence and observation competencies grids of this investigation, and it has also contributed to improve the way of my teaching plan. I also wish to report about the progress I've experienced over the three cycles in the search for information. During the cycle 0 the review of the information, was mainly made from books, articles, dissertations and other documents that I could access from different libraries in paper format. However, the electronic format was imposed in the bibliographic reviews I took during cycles 1 and 2, so that most of the documents I could access came from databases to which I accessed through the Internet, as well as other virtual libraries. In this sense, this research has helped me more systematic in seeking information

and thereby maximizing the time spent on such work.

Regarding the decisions for intervention in the classroom: using Geogebra, guided discovery learning and collaborative work, they all have been effective for the evolution of students' attitudes and competencies. The decision to work with Geogebra in the classroom has been rewarded with the positive effect that occurred in students. Indeed, Geogebra contributed to the development of attitudes toward Mathematics¹⁰⁶ and considerable improvement in five of the seven mathematical attitudes under study (critical spirit, perseverance, precision and rigour, autonomy and systematization). Besides, it was an effective tool to promote the development of four of the mathematical competencies at a medium-high level in most students (modelling, posing and solving problems, representing and using tools and resources), having a less marked effect in the remaining three (thinking and reasoning, argumentation-proof and communicating) which, however, allowed students to improve with regard on their previous situation. In short, Geogebra, with its motivating role and its attributes and advantages over more traditional methods of pen and paper, can be considered a very useful software for geometry teaching and learning and, for these reasons, it is recommended to promote proper use in the classroom. Another aspect to consider is its easy use that allows rapid formation through courses (in person or on-line) or the self-training from the manuals available on the Internet. In addition, there is a lot of free material prepared by other teachers to work with different mathematical contents with Geogebra that is available to any user in the web.

On the one hand, the teaching to promote guided discovery learning, has proved a good model for the experience of working with Geogebra in the classroom, as it provided an opportunity for students to become independent thinkers, creative and critically responsible for their own learning, attitudes that working with Geogebra helped develop. My job was to provide appropriate material, guide them in the process and help them when they so requested. It was confirmed during the experience, the good match between this teaching model with work in technological environments, something that had already been studied by other authors, including Olkunn, Sinoplu & Deryakulu (2005), who found that the use of SGD in Maths made learning by guided discovery easier and impacted beneficially on

¹⁰⁶ GeoGebra was an effective tool to improve students' attitudes toward mathematics, due to the ease and confidence they placed in their use for the study of geometric content. In addition, it can be ruled that this improvement was the effect of the novelty of working with the software, as students had already made the Plane Isometries tasks with GeoGebra in the two months prior to the study of the contents of Tesellations of the Plane (GG tasks).

student learning.

Another decision that was supported by the student response was to opt for a methodology based on collaborative work. Students spoke positively in this respect with a variety of forms: questionnaires, interviews, opinions included in the suggestion boxes, and the idea underlying all of them was the goodness of this methodology to improve communication with peers and facilitate learning. Furthermore, the data analysis revealed the importance of collaborative work, as the second influential factor, after the software, in improving attitudes such as self-confidence (cognitive component), the flexible thinking, creativity and systematization and the development of communicative competence. This analysis also pointed to the collaborative work and interaction among students, as the third important factor, after the software and student-teacher interaction, to develop thinking and reasoning and argumentation-proof competencies. These results support the bilateral relationship established by Calzadilla (2001) between collaborative and technological environment. On the one hand, the use of ICT in the classroom requires the support provided by collaborative learning to optimize its intervention and on the other hand, technologies encourage collaborative learning by enhancing and developing interpersonal competencies.

With regard to the negative aspects of the experience of working with Geogebra, which were minimal, I have emphasized that there were technical problems in a timely manner and without much impact, as there was not a considerable loss of class time. Past experiences with ICT (result of the cyclical methodology adopted for research), highlighted the dangers and limitations of working with them in the classroom, and from these considerations, for the third cycle of research I managed to reduce such negative effects¹⁰⁷.

At this point, it seems appropriate to refer, in a general way, to the permanent or temporary nature of the changes arising from the use of software, both in attitudes and in school mathematical competencies. So, although I can not make a comparison of the attitudes and competencies development level of each student during and after work with Geogebra, I can make some observations, in terms of performance in the subject, which I extracted comparing the behavior in the classroom and the marks obtained by pupils in both cases. Two different groups of students: those who did not experience a notable improvement in any way because

¹⁰⁷ For example, a common problem is the Internet disconnection, that in previous experiences did adversely affect some sessions, but this time there was little to regret, thanks to the decision to use parallel Moodle and Helvia platforms, using Helvia as the second option if not running the Internet (required to access Moodle).

they were working with the software (about 15%), and those who improved attitudes, competencies, or both during the experience with Geogebra (85 % remaining). Of the students who did experience an improvement in their performance with Geogebra, this was permanent for 64%, while for 36% of them, the improvement was temporary and can be attributed to working with the software, since they scored lower for algebra contents subsequently worked without this tool, even though they had already studied them in the previous year. More thoroughly analysis of these students who improved only during the work with Geogebra, I realized that these were precisely those who, because of the taste and confidence in the use of software, experienced a surprising change in their attitudes towards Mathematics, which led to an improvement of their mathematical attitudes and competencies. When we stopped working with Geogebra, these 14 students returned to manifest inappropriate attitudes towards Mathematics, which led them not to work enough in the classroom (non-motivation for the tasks, lack of involvement and self-confidence in their chances of success), so their attitudes and math competencies got worse and therefore also their mark. Among the students who improved during the experience with Geogebra and then continued to demonstrate adequate performance in Mathematics, we can say that working with the software made them aware of the need to develop their attitudes and competencies in Mathematics to improve in the subject and therefore, in future math activities they continued to show some of them at an appropriate level. However, maintaining the level of development reached with Geogebra in certain attitudes and competencies, such as critical thinking, autonomy, argumentation-proof, posing and solving problems or representing, was difficult for many of them without the help of software. It highlighted the relevance of the attributes and benefits of the software, above mentioned, to develop students' attitudes and competencies.

To conclude, I will take stock of the results achieved along the three cycles of research conducted in this study. We can say that the use of ICT (Internet in cycle 0; DGS in cycles 1 and 2) caused a positive attitudinal change and development of the students' math competencies, although differences were found between cycle 0 and cycle 1 and 2. During the cycle 0, in which the use of ICT is focused on the Internet use¹⁰⁸, were only analyzed in

¹⁰⁸ Since the resolution of application problems in real life, collaboratively in pairs, the selected contents were introduced that had not been previously studied by students. For this teamwork, students had different resources like the Internet, certain free use software and materials they themselves developed. However, most problems were resolved looking for information over the Internet, from which the students did little research for which they had to bring into play their math competencies.

detail the transformation of attitudes towards Mathematics and mathematic competencies development of students. The results obtained reported an improvement in affective and behavioral components for a large percentage of students, not being significant the development in the cognitive component. As to the competencies tested¹⁰⁹, those which showed a more homogeneous development in students were communicating and using tools and resources, whilst developing competencies such as thinking and reasoning, arguing, solving problems and representing, although satisfactory, was not as positive as in the case of the two previous competencies, as not all students experienced marked improvements. The results obtained during cycles 1 and 2, in which they worked geometric contents of tessellations of the plane with SGD, were similar for the attitudes towards Mathematics, the mathematical attitudes and mathematical competencies, but I must say the analysis of data during Cycle 1 was less detailed than the corresponding one of cycle 2. Contrasting the results of cycle 0 to cycle 1 and 2, in those aspects that were studied during the three cycles, we see consistency in the attitudinal field and similarities and differences in the results obtained for the various competencies. Over the three cycles, similar results were obtained on the development caused by the use of ICT in the competencies use of tools and resources, thinking and reasoning and argumentation-proof. However, the results differ slightly in the competence about posing and solving problems and, above all, its discrepancy in the results for communication and representation competencies. For the communicating competence, this lack of agreement may be due to the different characterization¹¹⁰ adopted for that competence in the cycle 0 and cycle 1 and 2, which led to different interpretation of the results and therefore, it is difficult to compare them. For the competence representation¹¹¹, which during the cycle 0 did not experience a notable uniform development, during cycles 1 and 2 by working with SGD, the situation improved markedly, being one of the two competencies which experienced a major evolution. Therefore, this competence improvement can be associated to the use of SGD during cycles 1 (C.a.R. and Geogebra) and 2 (Geogebra), whose attributes and advantages over pencil and paper methods helped to improve the quality of students' representations.

¹⁰⁹ The competencies studied in cycle 0 didn't match totally with those analyzed in cycles 1 and 2. Thus, modelling competence wasn't analyzed during cycle 0, but in the following cycles.

¹¹⁰ The competencies characterization adopted during the cycle 0 was revised after its implementation, and this caused changes in some competencies, including communicative competence. After cycle 1, the new characterization was more effective and consistent with the research objectives (which were also profiled along the various cycles), thus also being used for cycle 2, with slight nuances.

¹¹¹ Representation competence had the same characterization for the three cycles, except lighter nuances.

All this, leads me to say that the experience of introducing ICT in the classroom, has been very rewarding and also very satisfactory. Moreover, the time and effort dedicated to the design and planning of this research has been rewarded with the students' response, both at the attitudinal and cognitive level and with the professional and personal development that I have experienced during the three cycles in which it has been carried out.

6.3. Research Limitations

In this section we present some of the limitations of this research, which were taken into account during its development.

First, the results refer only to the two groups of students in 3° ESO with whom we carried out the experience; nevertheless, the choice of this level was intentional, considering more likely to develop certain competencies to an appropriate level for these students, who already enjoyed a certain intellectual maturity. Students in both groups responded to different attitudinal and cognitive profiles, which were considered representative of those found in a regular class of 3° ESO, so the conclusions reached in principle could be extrapolated to similar situations.

I agree with Molina (2006) in which verbal methods are often used as a research tool, being valued in fields such as mathematical education, despite of recognizing certain limitations in them. According to Villegas & Castro (2003), one of them is that the information obtained is limited by the ability of students to express in written and verbal form their thinking. We took into account this limitation and therefore, we opted for the collaborative work among pairs of students, which promoted dialogue and interaction among them, thus increasing the wealth of information recorded on audio files and the reliability of subsequent analysis made from that information. This methodological decision, which was very effective, could be considered, however, another limitation of this study. The way of working was beneficial to students; but in some cases raised some questions about whether students could have obtained the same results of having worked tasks with Geogebra individually. That is, in some cases the interaction with the couple became relevant and influenced on the cognitive development of one of the partners or both, thus, making it more difficult to diagnose the separate influences of software and collaborative work with his mate. When recording in audio the dialogues of each pair, we could overcome this limitation to some extent, to differentiate more reliably when each one of these factors was more influential on the development each student was

showing.

On the other hand, the environment exerts direct influence on how students act, an influence that was considered during the investigation. We tried to minimize the disruption of normal development of the classroom produced by the decision to collect audio and video performances by the students. To this end, recordings were made before starting the experience of working with ICT, so that students could become familiar with this way of recording their activity and express themselves freely, disregarding the effect on their behavior of my expectations as a teacher and researcher. In addition, it was decided to perform all audio recordings in pairs and the video ones at group level, limiting them to the sharing of each task and an interview with each group to complete the experience. The interviews, in which I was not present, were made by my thesis directress. Before conducting such interviews, my directress had attended some class sessions with each group, so that students were not embarrassed by her presence during the interviews and could take part. Still, it was noted that some of the more timid students did not participate or did it in a lesser degree than other students.

To ensure the validity of the information collected and reduce the effect of the limitations set forth, in addition to the measures already mentioned, it was decided to collect information of various kinds, combining activities for couples and for singles, which was collected on both oral and written form.

6.4. Thesis contributions

This research can be considered an alternative to researches done in traditional paradigms, which are intended to produce generalizable and abstract knowledge, however, it is hardly applicable for teachers to solve problems caused by their daily practice. Investigating about the practice itself may be useful in this sense, in order to build bridges between theory and practice. To this end, the results of these investigations must clarify their implications for teaching, giving teachers the opportunity to use the knowledge derived from them and adapt it to their own practice.

In this line is the present work, as it aims to provide evidence, strategies, materials, or simply ideas to bring to the classroom that can be useful to other teachers who decide to incorporate ICT in their classrooms, helping to reduce the distance between its potential and actual use. I

believe the lack of agreement between actual and potential use of ICT in the classroom is due in large part to a lack of training of teachers on this subject, which gives them a limited view of the possibilities that would entail its incorporation. According to authors like Parsa, Lewis & Farris (2001), most career opportunities for technological development for teachers in service is offered in the form of short workshops that focus on providing general knowledge about a new educational software and the basic skills needed for management. Due to time constraints, many workshops do not cover the issue of how to successfully integrate this software in the teaching of Mathematics and, therefore, the transfer of these new skills into the classroom is more difficult than necessary for teachers. In this regard, I believe that studying how to integrate ICT successfully in our classrooms, exploring the potential of these technological resources for the teaching and learning of Mathematics in school settings, may be of interest to teachers of Secondary Education, especially since we now require teachers to integrate such tools as part of our teaching.

I have focused on the use in school settings of SGD, especially Geogebra, and the study of how their characteristics and attributes contribute to the improvement of certain attitudes and math competencies. This has allowed contrasting in daily practice the advantages that theoretically have such softwares, considering these results as one of the contributions of this work. On the one hand, the contrast between attributes and theoretical and real advantages (which emerged in practice), and the influence of each of them in the process of teaching and learning of Mathematics, generates useful knowledge for the scientific community. On the other hand, the results of this study, which revealed positive effects on the attitudes and competencies in Mathematics of students due to working with ICT, can motivate other teachers to repeat this experience in their classrooms and encourage them to develop and evaluate their own ones.

To analyze the changes produced by the use of software in the students' attitudes and competencies, it has been required the design, implementation and evaluation of a teaching-learning sequence based on the use of SGD. For the design, we used the procedure called Didactic Analysis (Gomez & Rico (2002), Gomez (2002, 2004, 2006, 2007), Lupiáñez & Rico (2008)), which provided tools and techniques for designing the task sequences, which after being implemented in the classroom, was subjected to evaluation (performance analysis). This process allowed us to refine the sequence designed to obtain the final version, which is available to other teachers who wish to implement it in the classroom using these

technologies in the Appendix K. This design can be considered a triple contribution:

- As a teaching-learning sequence or didactic unit to be brought into the classroom. This sequence can be implemented directly by other teachers in their classrooms or serve as a model for the design of other sequences of interest to them.
- In contrast to theoretical Didactic Analysis tool, to be implemented in a school environment and at all stages (so far, has been used as a tool for initial teacher training). In this sense, content, cognitive and instruction analysis have been very effective in the design and selection of tasks, as it has highlighted the performance analysis done. Thus, the didactic analysis has proved an adequate procedure for the planning and evaluation of the teaching sequence.
- As a model of assessment of contents in terms of competencies, according to the requirements of the current educational situation. LOE required for teachers to teach and assess in terms of competencies; however, provides no tools for it. This research provides useful tools for working with and evaluating the students' math competencies:
 - It provides a characterization of these, discussed in Chapter 4 (pp. 114-126), according to the different levels of complexity that can be developed, which has adapted to the field of geometry. This characterization has been based on the definitions used in the PISA studies and has been completed and remodeled from the reading review and my vision as a high school teacher. So I think that may be useful for other teachers.
 - It tells you a simple procedure that can connect capabilities associated to each teaching unit with the development of math competencies to be developed over the stage (secondary): analysis of instruction. This analysis was very helpful for the design of competencies observation grids. They allowed us to obtain information during the class sessions on competencies that students demonstrated in each task and then encode this information to evaluate the development of these competencies throughout the entire sequence or didactic unit. These grids (Appendix H) are considered another contribution, since they can be used in conjunction with the tasks sequence or serve as a reference for the development of their own grids which allow evaluation in terms of competence of other mathematical contents.

The tools designed to assess attitudes and math competencies in the classroom have enabled to study their evolution as a process, not only through data collection at specific times; that gives richness and depth to the study. At this point I emphasize by considering it new, the contribution to the field of mathematical attitudes. These are characterized and studied not only in its declarative aspect, but, above all, in their behavioral and observable side, throughout a period of time. Few previous studies provide information on this aspect of recognized importance for the improvement of the teaching and learning of Mathematics, so this work is a contribution to the development of this theoretical framework. I find the attitudes characterization set out in section 2, is valuable for several reasons:

- Much time and effort was devoted to review the literature on attitudes, which allowed to categorize between: attitudes towards Mathematics and mathematical attitudes, and to characterize the former ones. In the case of mathematical attitudes I found little information, so I requested the support of experts in the subject.
- Once obtained the initial characterization of both categories, we designed an observation grid which was employed during the cycle 0. After analyzing its adequacy, previous characterization and grid was remodeled, using this new version during the cycle 1. By showing some shortcomings, it was amended again to reach the final characterization (pp. 725-734) and also the final version of the grid (p. 752), both being reviewed by the same experts, which gives them greater rigor and reliability.
- From the characterization obtained, we got the final version of the attitudes observation grid used in the classroom sessions, which has proved very simple to fill in. Reflecting on the goodness of their design, after implementation and in the light of the results, there have been small changes in the attitudes observation grid, leading to the final version available in Appendix H. This grid can be considered a innovative contribution available to other teachers who want to conduct a survey of student attitudes at work in Mathematics. However, I must say that the information collected by other means (audio and video records) is richer than the one obtained with the grids; but it is also more unusual to use these data sources in secondary classrooms.

Another issue of interest is the methodology, which as I said, is part of the paradigm of action research and approaches in its design to the methodology of transformational teaching experiments guided by a conjecture (which falls within the design research). I explained the reconstruction of the history of the conjecture, as well as the evolution of behavior and

students' mathematical thinking along the intervention, which is expected to be useful to other teachers. Since teaching experiments are an emerging methodology, this research can be considered an example of how to implement them. In addition, the results have shown that the methodological approach has been effective in reaching and informing about the objectives of this work.

Finally, with regard to my teaching practice, I can say that classroom experiences have helped me to keep improving my competence in planning teaching-learning sequences, as well as my digital competence, because I have been demanded a permanent training in the use of various technological tools. Moreover, as noted by the appearance of great value to me, the positive results derived in each cycle have confirmed that by using some changes in classroom methodology, it is possible to improve my students' teaching and learning, which opens many possibilities to consider for improving the educational reality that confronts us daily, which often is not as favorable as expected.

6.5. Implications for Future Research

The above findings leave a number of issues that could be examined in future research. Thus, based on the results of this study, some possible areas of progress include the following:

- ☑ I believe more research is needed on the possibilities new technologies can offer to improve the teachers' teaching process and therefore, the students' learning process, not only in Mathematics, but in other areas which are part of the current educational curricula. About our area, most recent research focus in the field of geometry, being less numerous those that inquire about algebraic or statistical software, which would be useful to check if the results depend on the selected mathematical contents or the own software chosen for the study of them.

- ☑ We could make progress in the relationship of dependency between improved attitudes about Maths and math competencies development, a relationship that has been tested and confirmed for the students from the case study, but it should be systematically analyzed for a significant sample of students, to report with greater assurance the correlation between both variables. Also, in this work we have referred to the stability in time of some of the improvements resulting from the use of technology in the classroom, and this aspect could be explored in depth, to analyze what specific improvements are maintained and how the ones associated to the management of such tools could be permanently

maintained and with independent of its use.

☑ It would be interesting to extend the study to other ICT centers, to see if students in groups of similar idiosyncrasies we would obtain similar results.

☑ It would be convenient further investigation on one key aspect which has emerged in this work: the influence of collaborative work on the improvements experienced by students during their work with ICT. To this end, it would be necessary to take into consideration factors such as the dynamics of working in pairs, the forms of representation and expression of knowledge in the classroom, the teacher's role in the management of classroom processes, etc.

☑ This study has highlighted the important role of teachers as a designer and implementer of learning materials and classroom experiences in which they work with ICT. In this sense, participants in the Symposium¹¹² "Paradigms in Mathematics Education for the Twenty-First Century: Asia sharing educational experiences" saw the creation and empowerment of teachers' communities as the only way to boost the adoption of effective teaching methods that lead to significant and lasting improvements. Studies like this can serve as a basis to work with other teachers together, so that the conjecture that guides it, could be tested in a range of educational circumstances, thereby expanding the community of those who find the statements and the products of this research significant, informative or of any assistance for their own experience.

¹¹² This symposium, organized by Manuel de León, Tomás Recio, Bernardo Gómez, Luis Rico and Eve Stockstill, held in Valencia in October 2009, being its aim understanding, sharing and comparing experiences about mathematics education in Spain and Asia. Among his assistants was a special elite of prestigious speakers from Asia, Australia and Europe, which included Celia Hoyles and Jeremy Kilpatrick, Freudenthal and Felix Klein medals respectively.