



## ¿Pueden los sistemas algebraicos de cómputos (SAC) mejorar la comprensión de conceptos matemáticos?

Sonia Pastorelli; Lilian Cadoche

Universidad Tecnológica Nacional. ARGENTINA;

[spastorelli@frsf.utn.edu.ar](mailto:spastorelli@frsf.utn.edu.ar)

Nivel: Medio; terciario y Universitario

Palabras claves: Comprensión – Álgebra - Sistema Algebraico de Cómputos

### Resumen

El objetivo de esta investigación fue diseñar una secuencia didáctica para mejorar los desempeños de comprensión de los alumnos de primer año de la Licenciatura en Organización Industrial de la Facultad Regional Rafaela de la Universidad Tecnológica Nacional.

Nos preguntamos entonces: *¿Puede, el diseño de una secuencia didáctica apropiada que incorpore softwares matemáticos, ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos matriz pseudoinversa y noción de cuadrados mínimos en el estudio de sistemas lineales?*

Para dar respuesta a este interrogante se diseñó una secuencia didáctica que incluyó el desarrollo de un proyecto usando un Sistema Algebraico de Cómputo (SAC). El énfasis se centró en la comprensión y uso activo de los conocimientos compartidos, basando esta experiencia en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

El propósito de mejorar los desempeños de comprensión en dos tópicos de mucha utilidad para el futuro profesional fue alcanzado en la mayoría de los estudiantes.

Si bien el uso de SAC es una exigencia curricular, en esta experiencia fue revalorizado por los estudiantes, no sólo como herramienta para resolver complejos y tediosos cálculos sino como favorecedor de la comprensión y motivador del aprendizaje.

Hemos encontrado evidencias de que estas herramientas apoyan la colaboración y el aprendizaje entre pares, el ensayo de distintos caminos para la resolución de problemas, el uso de distintos registros para el abordaje de los temas, la autovaloración de los avances y el desarrollo de desempeños de comprensión cada vez más refinados.

### Justificación de la investigación.

*«El álgebra lineal en espacios  $n$ -dimensionales es una materia que tradicionalmente se impartía en licenciaturas donde es necesaria una formación matemática y física; sin embargo, el rápido desarrollo de las computadoras de alta velocidad ha obligado a que disciplinas como administración, economía y ciencias sociales, entre otras, incorporen esta rama a sus cursos»*, Grossman (1996, contratapa).

Luego la comunidad de docentes de matemática se ha enfrentado al objetivo de “bajar” contenidos a niveles en los que tradicionalmente no se impartían.

Es así que la Universidad Tecnológica Nacional, en el diseño curricular de todas las carreras de grado (Resolución N° 68/94 del Consejo Superior Universitario de la Universidad Tecnológica Nacional), incorpora a la asignatura del primer nivel Álgebra, como contenidos mínimos, *noción de los cuadrados mínimos en estudio de los sistemas lineales y matriz pseudoinversa*. El motivo de esta inclusión no es caprichoso. Estos conceptos permiten resolver problemas medulares del futuro profesional, tales como obtener soluciones aproximadas a problemas cuyo planteo matemático deviene de un sistema de ecuaciones lineales incompatible. El mismo diseño aclara que, la enseñanza de la matemática debe ser *motivada y no axiomática* y que *la práctica debe ser resuelta con softwares especializados*.



Consideramos pertinente aclarar que, el diseño curricular enumera ambos contenidos antes de *espacios vectoriales*, *autovalores* y *auto-vectores*. Esto seguramente debido a que el mismo prevé un desarrollo *motivado* y *no axiomático* de los mismos. Tanto por las importantes aplicaciones de los conceptos, como por la centralidad que le otorga el diseño curricular, (que menciona estos dos tópicos dentro de los 14 totales), es necesario esforzarse para que los estudiantes alcancen desempeños de comprensión de niveles superiores en los mismos.

### **Metodología de trabajo en esta investigación.**

Constó de cuatro partes

- Análisis del contexto inicial (dificultades en la comprensión, material y propuestas existentes),
- delimitación de elementos constitutivos del marco conceptual en los tópicos elegidos,
- experimentación en un período acotado de tiempo en el aula y aula-taller,
- análisis reflexivo de lo actuado, para retroalimentación y posteriores mejoras y avances.

#### **1. Análisis del contexto inicial**

Aquí interesa mencionar en este trabajo lo referido a las propuestas existentes. Se realizó un exhaustivo análisis del tratamiento de estos contenidos en los libros adecuados a la comprensión de un estudiante del primer nivel universitario. Para el análisis del tema en los distintos textos se emplean dos categorías:

- los más nombrados como libros de cátedra de las asignaturas Álgebra y/o Álgebra y Geometría Analítica de las Facultades Regionales de la Universidad Tecnológica Nacional y
- los libros más vendidos de Álgebra Lineal, en la actualidad, en Argentina.

El motivo de la elección de estos dos grupos es sencillo.

Los primeros se debieron a que no se encontró otras carreras de grado que mencionen Pseudoinversa y/o Mínimos Cuadrados en una asignatura del primer nivel en la Argentina. Sólo la Universidad Tecnológica Nacional fija dentro de sus contenidos mínimos Álgebra estos dos temas (para todas sus facultades). Se analizaron así los textos Introducción al Álgebra Lineal (Antón, 1996 y 1999) ; Álgebra Lineal (Grossman, 1996); Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones (Florey, 1980) ; Álgebra Lineal (Lipschutz, 1996); Álgebra y Elementos de Geometría Analítica (Di Caro, 1987) ; Álgebra Lineal (Gerber, 1992); Álgebra Lineal (de Burgos, 1993); Álgebra II (Rojo, 1978); Álgebra Lineal Aplicada (Noble y Daniel, 1989) y Álgebra Lineal (Fraleigh y Beauregard, 1989) .

Los segundos fueron tomados de la página web de la Librería Cúspide en mayo del 2006. Esta categoría se elige porque se conjetura que los libros más vendidos son los que se usarán en un futuro cercano, luego son los que impactan o impactarán en la enseñanza del Álgebra Lineal. Se analizaron los textos Álgebra Lineal (Grossman, 1996); Álgebra Lineal (Lipschutz, 1992) y Álgebra Lineal con aplicaciones y MatLab (Kolman, 1999).

Como puesta en común es posible mencionar que sobre los doce textos analizados, cinco no tratan ninguno de los temas involucrados. Sólo el texto de los autores Noble y Daniel (1989) trabajan con ambos contenidos, pero lo hace en forma demasiado rigurosa dado que; según el prólogo de los autores; es un texto que se supone leerán personas que ya tienen un acercamiento previo al álgebra lineal. Luego si bien un libro muy útil para



consulta del docente es inapropiado para los alumnos de un primer año de una licenciatura. Tres autores trabajan mínimos cuadrados pero sólo desde el ajuste de datos (uno de ellos: Grossman; es el segundo más mencionado como bibliografía y el más vendido). Tres textos generalizan el uso de mínimos cuadrados a cualquier sistema de ecuaciones lineales. En cuanto al uso de SAC; de los siete que tratan algún contenido, dos no utilizan SAC, entre ellos el más mencionado (Antón, 1996 y 1998).

Cabe mencionar que los ejercicios más ricos desde el punto de vista conceptual están tratados en los bloques donde se usan SAC (así estos solicitan realizar confrontaciones gráficas, y numéricas, introducen nuevos conceptos tales como punto disperso o mínimo cuadrado ponderado). Esto permite inferir que los autores que usan SAC parecen avalar la teoría que la introducción de herramientas de cómputos puede liberar al lector de la atención de los cálculos y llegar así a niveles más elevados de comprensión.

Por otro lado, los ejercicios prácticos de estos tópicos necesitan de numerosos cálculos algebraicos, multiplicar matrices de considerables dimensiones, invertir matrices que tienen la mayoría de los elementos no nulos, etc. Esto desvía la atención del alumno de lo conceptual a lo procedimental. En el caso de los problemas que involucran ajustes de datos, la confrontación gráfica de datos versus curva de ajuste, cotejo que ofrece tanta riqueza experimental, no es posible realizarlo en el aula, con tecnología tradicional (más allá del ejemplo típico de un ajuste a una recta). Sin dudas este es uno de los motivos por lo que el diseño curricular incorpora como uno de los contenidos mínimos *computación numérica y simbólica aplicada al álgebra*.

## **2. Delimitación de elementos constitutivos del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.**

El objetivo de esta investigación fue diseñar una secuencia didáctica para mejorar los desempeños de comprensión de los alumnos de primer año de la Licenciatura en Organización Industrial de la Facultad Regional Rafaela de la Universidad Tecnológica. Nos preguntamos entonces: *¿Puede, el diseño de una secuencia didáctica apropiada que incorpore softwares matemáticos, ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos matriz pseudoinversa y noción de cuadrados mínimos en el estudio de sistemas lineales?*

Para dar respuesta a este interrogante se diseñó una secuencia didáctica. El énfasis se centró en la comprensión y uso activo de los conocimientos compartidos, basando esta experiencia en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC).

Esta metodología de la enseñanza deriva de cuatro preguntas claves que se realiza todo docente:

- ¿Qué tópicos se deben comprender?
- ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
- ¿Cómo podemos promover la comprensión?
- ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

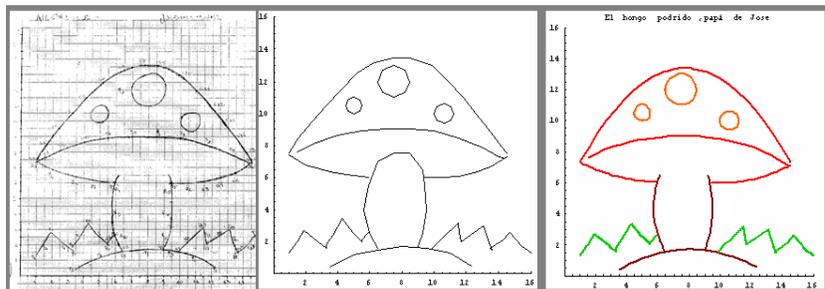
Las respuestas a estas preguntas son los pilares de la EpC y se denominan respectivamente *Tópicos Generativos*, *Metas de Comprensión*, *Desempeños de Comprensión* y *Evaluación Diagnóstica Continua*.

En esta experiencia se adoptó como tópico generativo el *ajuste de datos*; como meta de comprensión que *los alumnos comprendan como utilizar lo que saben para encontrar ecuaciones que representen razonablemente bien un fenómeno dado a través de datos*. El desempeño final de síntesis fue realizar un proyecto consistente en



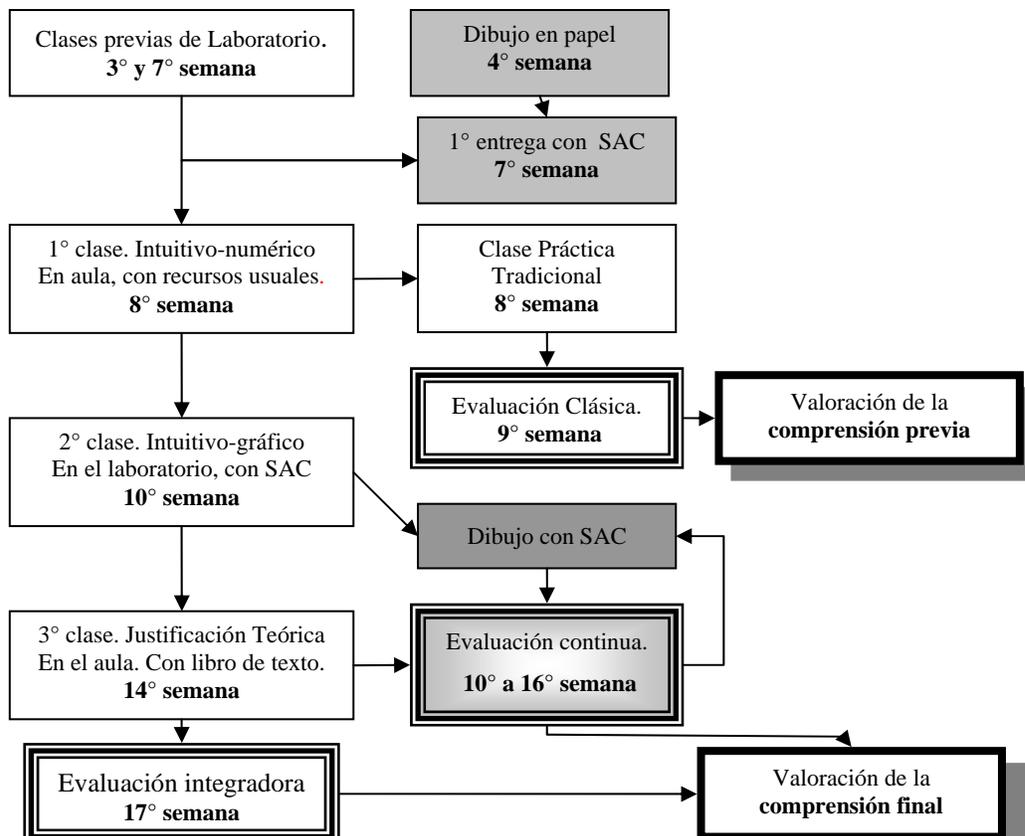
reproducir, utilizando un sistema algebraico de cómputos, un dibujo diseñado en papel, mientras que la valoración continua de los aprendizajes tuvo su eje en la *tutoría para el desarrollo del proyecto*.

La EpC aboga por la mejora de los desempeños de comprensión a través de la valoración continua de los mismos, recurso pocas veces usados en la universidad (en este contexto la evaluación tradicionalmente se hace a través de un examen final, con propósitos de evaluación sumatoria). Los desarrollos de proyectos son adecuados para este fin, ya que a la vez que permiten observar los desempeños de los estudiantes, posibilitan retroalimentar y andamiar el aprendizaje. La observación de los desempeños durante la etapa de investigación guiada junto a los desplegados en la evaluación integradora permitió reconocer el nivel de comprensión de los tópicos para cada estudiante. En el siguiente gráfico las tres entregas del proyecto de una alumna.



### 3. Experimentación en un período acotado de tiempo en el aula y aula-taller

La experiencia se esquematiza cronológicamente en el siguiente gráfico.





Esta secuencia involucra inicialmente el desarrollo práctico de los tópicos utilizando tecnologías tradicionales (calculadoras, transparencias, retroproyector). El tratamiento de los contenidos en esta clase lo denominamos intuitivo-numérico, se realizó en la 8° semana de la cursada y reflejó el previsto por el diseño curricular, a juicio del orden enunciado en los contenidos mínimos; esto es, luego de sistemas lineales, antes de espacios vectoriales. La valoración de la comprensión a través de esta metodología (tradicional) se realizó a través de un ejercicio de la segunda prueba parcial (9° semana). Más allá de ser una evaluación sumatoria, se diseñó un instrumento para valorar la comprensión previa (considerando ésta como la alcanzada sin utilizar los SAC).

El desarrollo de los contenidos utilizando sistemas algebraicos lo denominamos intuitivo-gráfico ya que es previo al tratamiento teórico y permite advertir visualmente la aproximación de la solución aproximada por mínimos cuadrados del sistema lineal derivado de un ajuste de datos. Se realizó en la 10° semana en el laboratorio de computación. Desde aquí y hasta el final de la cursada (17° semana) cada alumno desarrolló su proyecto (esto es reproducir su diseño, utilizando el software matemático, lo que involucra conocer una ecuación para cada trazo del mismo).

Finalmente el tratamiento formal de los contenidos, luego del desarrollo de espacios vectoriales, se realizó en la 14° semana de cursada.

La observación de los desempeños durante la etapa de investigación guiada junto a los desplegados en la evaluación integradora permitió reconocer el nivel de comprensión de los tópicos para cada estudiante.

#### **4. Análisis de los resultados.**

Dado que interesó comparar la comprensión antes y después de la experiencia, y como la comprensión es un constructo difícil de medir, con este marco fue posible observando los niveles de desempeños antes y después de la incorporación de los sistemas algebraicos de cómputos.

La EpC destaca cuatro *dimensiones para la comprensión*: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación.

- *Contenidos* valora el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas, el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica.
- *Métodos* evalúa la capacidad de los estudiantes de mantener un sano escepticismo acerca de lo que se conoce o lo que se les dice, así como el uso de métodos confiables para construir y validar afirmaciones y trabajos verdaderos.
- *Propósito* aprecia la capacidad de los aprendices para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar este conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo.
- *Formas de comunicación* juzga el uso de sistemas de símbolos para expresar lo que se sabe (escribir ensayos, realizar una presentación o explicar un algoritmo).

Para describir la comprensión se evalúan los *niveles* alcanzados en cada una de las dimensiones. Estos niveles se pueden observar a través de los desempeños alcanzados.

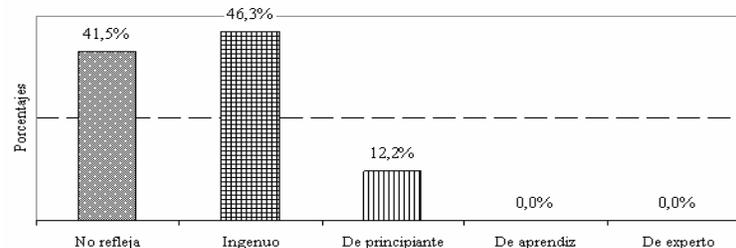


- Los desempeños de *comprensión ingenua* están basados en conocimientos intuitivos, como un proceso no problemático que consiste en captar información que está disponible, resultando, generalmente, poco reflexivos y no estructurados.
- Los desempeños de *comprensión de principiante o novato* están predominantemente basados en procedimientos ritualizados y mecanismos de prueba. La naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento son descriptos como procedimientos mecánicos, paso por paso. La validación de un trabajo depende más de la autoridad externa que de los criterios desarrollados dentro de la disciplina.
- Los desempeños de *comprensión de aprendiz* están basados en conocimientos y modos de pensar disciplinarios y demuestran un uso flexible de conceptos. Con apoyo, pueden detectar la relación entre el conocimiento disciplinario y problemas cotidianos.
- Los desempeños de *comprensión de maestría* son predominantemente integradores, creativos y críticos y permiten usar los conocimientos para reinterpretar el mundo y a menudo implican una comprensión intra, meta o interdisciplinar.

La valoración de la experiencia se realizó contrastando la comprensión inicial (antes de usar SAC) y la final (luego de usarlos). La comprensión inicial se valorizó en la 9<sup>o</sup> semana, a través de un ejercicio de un parcial. Es importante aclarar aquí que no creemos que la comprensión, en todas sus dimensiones, pueda quedar reflejada en una única evaluación. Sin embargo es el método al cual más se recurre en la universidad.

Para valorizar el nivel de comprensión inicial se describieron los parámetros que la reflejan. Así por ejemplo para la dimensión de los propósitos éstos fueron: reconoce el porqué ajustar datos (el uso para extrapolar); argumenta la función elegida (gráfico, tabla, etc); discute la factibilidad de las proyecciones obtenidas.

Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente cuadro:



Notar que más del 85% de los estudiantes no superan el nivel de comprensión ingenua, esto significa que no han superado los conocimientos intuitivos, poco reflexivos y nada estructurados. Solo el 12 % alcanzó un nivel de principiante, nivel basado en procedimientos ritualizados y mecánicos, alumnos que necesitan de validación externa, incapaces de usar algún mecanismo de control. Ninguno alcanzó los dos niveles de comprensión más elevado.

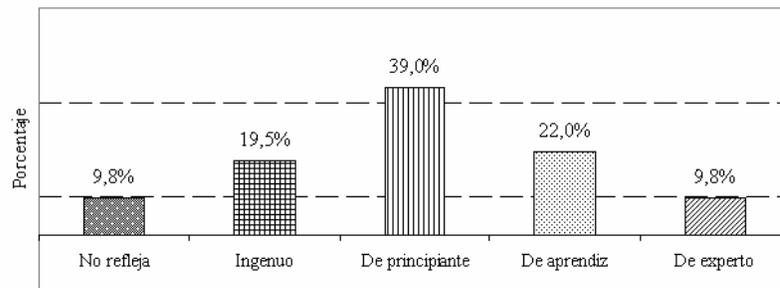
La comprensión final, a diferencia de la inicial; tuvo distintas oportunidades para ser valorada, andamiada y superada; pilar fundamental de la EpC. Los momentos los clasificamos en:

- *Tutorías*: clases de laboratorio; un espacio donde los alumnos pudieran construir su proyecto. El docente brindó las ayudas oportunas para mejorar los desempeños.



- *Proyecto*: producción de cada estudiante en la tercera entrega del proyecto (que es donde se utilizan los tópicos de los cuales se desea observar la comprensión).
- *Evaluación Integradora*: donde los jóvenes debieron explicar, justificar, extrapolar, vincular, ejemplificar y aplicar los contenidos.
- *Entrevista Final*, la que tuvo por propósito indagar, según la visión del estudiante, la influencia del desarrollo del proyecto en la comprensión de los contenidos de la asignatura, y su opinión sobre la experiencia educativa.

El instrumento de evaluación para la comprensión final fue pues más refinado que para la inicial. Se construyó para valorizar cada una de las dimensiones de la comprensión a través de los rasgos de cada una. Para retratar y relevar los desempeños se definieron *criterios o pautas*, las que se plantearon bajo la forma de respuestas a 21 preguntas que refieren a los *rasgos o cualidades* de cada dimensión de la comprensión y dentro de la tabla se incluyen los indicadores de “dificultades en la comprensión”. Los resultados se resumen en el siguiente gráfico.



Como puede apreciarse, los resultados al finalizar la experiencia muestran una dispersión normal en torno del nivel de comprensión de principiante. Esta situación refuerza la idea de que la experiencia ha logrado mejorar los niveles de comprensión de un tema intrínsecamente complejo hasta llevarlo a niveles estándar.

### Consideraciones finales.

Contrastando los niveles de comprensión antes y después del uso de los SAC es posible concluir que el propósito inicial de mejorar los desempeños de comprensión en dos tópicos de mucha utilidad para el futuro profesional fue alcanzado en la mayoría de los estudiantes.

En esta propuesta se abarcó además el resto de los contenidos de la asignatura (que si bien su comprensión no fue de interés para el análisis de esta investigación permitió tanto desarrollarlos como integrarlos).

Por otro lado, si bien el uso de SAC es una exigencia curricular, en esta experiencia fue revalorizado, no sólo como herramienta para resolver complejos y tediosos cálculos sino como favorecedor de la comprensión y motivador del aprendizaje.

Involucrar a los estudiantes en el desarrollo de un proyecto personal permitió que los mismos asumieran un compromiso con los objetivos de la cátedra desde el inicio del cursado.

Pero quizás el punto más fuerte de la experiencia es el clima de comunidad educativa que se generó en las clases. La posición de *docente y evaluadora* inicial fue virando a través del desarrollo del proyecto a *facilitadora de*



*conocimientos y colaboradora en la tarea.*

El proyecto de Enseñanza para la Comprensión definió a la *comprensión* como la capacidad de pensar y desempeñarse flexiblemente con los conocimientos que cada uno dispone para, por ejemplo, resolver un problema, presentar ideas de manera clara y convincente, aplicar conceptos para explicar algo, etc.

El proyecto denominó a estas actividades *desempeños de comprensión* y comprobó que eran medios efectivos de desarrollar y al mismo tiempo demostrar la comprensión. Si pretendemos que los alumnos piensen por sí mismo o lleguen a ser capaces de aplicar lo que saben apropiada y creativamente, el proceso de aprendizaje debe implicarlos, precisamente, en este tipo de pensamiento activo.

Es preciso que los docentes nos aseguremos que los alumnos pasen una amplia parte del tiempo utilizando y expandiendo activamente sus mentes y no recibiendo pasivamente lo que otros han creado. Esto es, debemos aspirar a lograr verdaderos desempeños de comprensión, que les permitan pensar avanzando más allá de lo que se les dice, confrontando sus ideas y actitudes desde una perspectiva más crítica y combinando y contrastando esas ideas de formas hasta el momento inexploradas.

Los docentes efectivos diseñan desempeños en los cuales sus alumnos pueden usar lo que Gardner (1999) llama las *inteligencias múltiples*, vale decir las diferentes formas de expresión que pueden incluir actividades verbales, matemáticas, visuales, musicales, de movimiento, introspectivas e interpersonales.

Stone Wiske (1999) afirma que las nuevas tecnologías pueden perfeccionar y enriquecer los desempeños de comprensión de diversas maneras, entre las que se incluyen:

- La tecnología multimedia permite que el estudiante investigue nuevas ideas y produzca conocimientos utilizando una variedad de inteligencias.
- Muchos softwares pueden hacer visibles conceptos abstractos y permiten que los estudiantes comprendan ideas complicadas experimentando activamente con ellas, manipulando variables y observando la interacción dinámica de los elementos de un sistema
- Las tecnologías digitales y las herramientas informáticas permiten que los alumnos expresen su comprensión en una rica variedad de formas. Estas tecnologías también permiten registrar el trabajo de los alumnos en formatos que pueden corregirse, combinarse y distribuirse más fácilmente.

Hemos encontrado evidencias de que estas herramientas apoyan la colaboración y el aprendizaje entre pares, el ensayo de distintos caminos para la resolución de problemas, el uso de distintos registros para el abordaje de los temas, la autovaloración de los avances y el desarrollo de desempeños de comprensión cada vez más refinados.

Tareas que hubiesen resultado engorrosas o imposibles con las herramientas tradicionales utilizadas en las aulas, se pudieron realizar con eficiencia y calidad. Los desempeños de comprensión nos permitieron también diseñar estrategias para que los alumnos saquen el mayor provecho educativo de las nuevas tecnologías.

El clima de trabajo, el compromiso asumido, el compañerismo observado durante las tutorías alientan a continuar con esta propuesta y a desarrollar otras similares.



### Referencias bibliográficas

- Antón, H. (1996). *Introducción al Álgebra Lineal*. México: Limusa.
- Antón, H. (1998). *Introducción al Álgebra Lineal*. (3° ed.). México: Limusa.
- de Burgos, J. (1993). *Álgebra lineal*. España: McGraw-Hill.
- Di Caro, H. (1987). *Álgebra y Elementos de Geometría Analítica. Tomo 1 y 2*. (6° ed.). Buenos Aires: Editorial Munro.
- Fraleigh, J y Beaugard, R. (1989). *Álgebra Lineal*. New York: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Florey, F. (1980). *Fundamentos del Álgebra lineal y Aplicaciones*. México: Prentice Hall Internacional.
- Gardner, H. (1994). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. México: Fondo de la Cultura.
- Gerber, H. (1992). *Álgebra Lineal* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal* (5° ed.). México: McGraw-Hill.
- Kolman, B. (1999). *Álgebra Lineal con aplicaciones y MatLab*. (6° ed.). México: Prentice Hall.
- Lipschutz, S. (1992). *Matemáticas Para Computación*. Series de Compendios Schaum. México: Libros McGraw-Hill.
- Noble, B y Daniel, J. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada* (3° edic.) México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Rojo, A. (1978). *Álgebra II*. Buenos Aires: El Ateneo.
- Stone Wiske, M. (comp.). (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.