ALGUNOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS, DESDE LOS BABILONIOS A DESCARTES

Guillermina Emilia Vosahlo
Instituto Técnico de Aguilares y Facultad de Ciencias Económicas, UNT, Argentina
gvosahlo@yahoo.com.ar
Nivel medio y superior
Palabras clave: ecuaciones de segundo grado

Resumen

El presente trabajo analiza algunos métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado completas desde la Civilización Babilónica hasta Descartes.
Los primeros indicios de resolución de ecuaciones cuadráticas los encontramos en la Civilización Babilónica (Milenio II a.C.), que usaba la actual resolvente en un lenguaje coloquial.
En los *Elementos* de Euclides (año 300 a.C.) podemos encontrar la interpretación gráfica del cuadrado de un binomio y algunas resoluciones geométricas de ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2 + ax = a^2$, con $a > 0$.
En su obra *Aritmética*, Al-Khowarizmi, matemático árabe que vivió alrededor del año 800, muestra dos formas de resolver las ecuaciones $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, con $b > 0$, $c > 0$.
René Descartes (1596-1650), matemático francés, presenta en su obra *Geometría*, soluciones de ecuaciones del tipo $x^2 = ax + b^2$, con $a > 0$.
Si bien resulta más fácil la resolución de la ecuación usando la fórmula actual o completando cuadrado, la importancia de conocer las construcciones geométricas griegas, árabes y de Descartes, es la posibilidad de obtener las soluciones de la ecuación por medición de segmentos, cuando es relativamente fácil la construcción de las soluciones pero no tenemos disponible una calculadora para realizar operaciones con números irracionales.
La presentación integrada de la resolución algebraica con interpretaciones geométricas permite a los alumnos vincular Álgebra y Geometría, que habitualmente se enseñan separadas, y puede favorecer la comprensión al permitir que el alumno aborde un mismo problema desde distintos puntos de vista.

Introducción

El presente trabajo es un recorrido por alrededor de 3.500 años de la Historia de la Matemática, desde la Civilización Babilónica hasta Descartes, analizando cómo se resolvieron a través de este tiempo las ecuaciones de segundo grado completas.

Dado que uno de los métodos que se usarán está basado en la interpretación gráfica del cuadrado de un binomio, el trabajo comienza con una presentación de este tema como conocimiento previo.

Los primeros indicios de resolución de ecuaciones cuadráticas los encontramos en la Civilización Babilónica (Milenio II a.C.), que ya usaba la actual resolvente, pero en un lenguaje coloquial. Dado que los babilónicos conocían la representación gráfica del cuadrado de un binomio, es factible que hayan conocido también el método de completar cuadrado para resolver estas ecuaciones, puesto que es posible deducir la fórmula resolvente a partir de esta interpretación gráfica, como paso concreto previo al abstracto.

En los Elementos de Euclides (año 300 a.C.) también podemos encontrar la interpretación gráfica del cuadrado de un binomio y algunas resoluciones geométricas de ecuaciones de segundo grado, como aquellas del tipo $x^2 + ax = a^2$, con $a > 0$.

En su obra *Aritmética*, Al-Khowarizmi, matemático árabe que vivió alrededor del año 800, muestra dos formas de resolver las ecuaciones del tipo $x^2 + bx = c$, basadas en la interpretación gráfica del cuadrado de un binomio y del tipo $x^2 + c = bx$, con $b > 0$, $c > 0$, con justificaciones geométricas.

René Descartes (1596-1650), matemático francés, presenta en su obra *Geometría*, soluciones gráficas de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 = ax + b^2$, con $a > 0$.

Quedan entonces cubiertos con los enfoques griego, árabe y de Descartes, las tres combinaciones posibles, con signos distintos, de los coeficientes *a, b y c* de la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, los cuales están incluidos en el tratamiento actual por el método de completar cuadrado y uso de la fórmula.

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

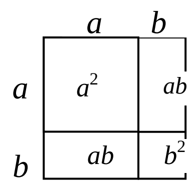
1) Cuadrado de una suma y una diferencia

Actualmente, con la notación que tenemos nos resulta fácil hacer una demostración acerca de cómo obtener el cuadrado de un binomio basada en propiedades de los números reales o complejos, pero por ejemplo, en la civilización Babilonia (Milenio II a.C.) y de la Antigua Grecia (siglo IV y III a.C) no se conocía la notación actual, debida en parte a Johann Widmann (signos + y -, en su obra *Aritmética*, aparecida en Leipzig en 1489) y en parte a Nicolás Chuquet (la regla de los signos del producto y la escritura de las potencias de las incógnitas como exponente, pero indicado en el coeficiente, aparecen en su obra *Le Triparty en la science des nombres*, compuesta en 1484).

Los babilonios y griegos al no contar con una notación adecuada, y dado que los objetos matemáticos no tenían el grado de abstracción que hoy tienen, se basaban en figuras geométricas para deducir este tipo de propiedades, puesto que había predilección por lo visual, lo táctil, lo limitado, lo finito.

Para poder demostrar esta propiedad, interpretaron los cuadrados y productos contenidos en ella como áreas de cuadriláteros.

El cuadrado de un binomio, con su interpretación geométrica fue publicada como Proposición 4, en el Libro II, de la obra *Elementos* de Euclides, quien fue un matemático griego que vivió alrededor del año 300 a.C. Allí a^2 se interpreta como el área de un cuadrado de lado a, y b^2 como el área de un cuadrado de lado b; mientras que $a.b$ es el área de un rectángulo de lados a y b. Ordenando estas figuras como si fueran partes de un rompecabezas, se puede completar un cuadrado más grande.

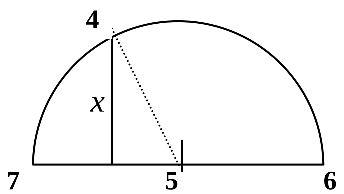


El lado del cuadrado grande es $a + b$, y su área es $(a+b)^2$, la cual se puede escribir como suma de las áreas de las cuatro figuras que componen este cuadrado. Entonces: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) Construcción geométrica de la raíz cuadrada

René Descartes, filósofo, biólogo, físico y matemático francés, que vivió entre 1596 y 1650, basándose en trabajos de los griegos, publicó en su obra *Geometría* la forma de representar mediante el uso de regla y compás las cinco operaciones aritméticas (suma, resta, producto, cociente y raíz).

Jean-Paul Collette (1998), muestra el siguiente procedimiento usado por Descartes para representar geométricamente la raíz cuadrada de un número no negativo *a*.



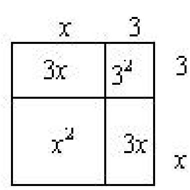
$\sqrt{a}$ se grafica de la siguiente forma: Sea *a* la longitud del segmento *GH*, y *FG* un segmento de longitud 1. Se dibujan ambos segmentos uno a continuación del otro. Se considera *K*, el punto medio del segmento *FH* y se traza la semicircunferencia de centro *K* y radio la longitud del segmento *FK*. Por *G* se traza un segmento perpendicular a *FH*, que intersecta a la semicircunferencia en el punto *I*. La longitud de IG es $\sqrt{a}$.

Vemos que si $\sqrt{a}$ no tuviera un resultado exacto y no contáramos con una calculadora, se lo puede obtener mediante la construcción anterior, midiendo el segmento *GI*, con un pequeño error de medición.

Resolución de la ecuación de segundo grado completa, usando el método de completar cuadrado

Si bien de la bibliografía consultada no se puede inferir que los griegos y babilonios hayan usado el método de completar cuadrado para resolver una ecuación de segundo grado, dado que conocían la interpretación geométrica del cuadrado de un binomio es posible que la hayan usado para resolver este tipo de ecuaciones.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 6x = 16$ los babilonios y los griegos podrían haber pensado el primer miembro como la suma de la superficie de un cuadrado de lado *x* y dos rectángulos de área 3*x* cada uno (sus lados miden *x* y 3 = 6/2). Para poder completar un cuadrado con estas tres áreas, hay que agregarle un cuadrado de lado 3.



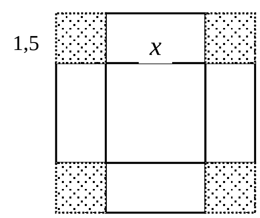
El área del cuadrado grande es $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 25$, entonces la medida del lado es $x + 3 = 5$, al resolver la ecuación lineal resultante se obtiene $x = 2$.

Babini (1973), presenta el siguiente problema de segundo grado resuelto por los babilonios: “Largo y ancho. He multiplicado largo y ancho y he obtenido el área. He agregado al área el exceso del largo sobre el ancho: 183, además he sumado largo y ancho: 27. Se pide largo, ancho y área”. Considerando como incógnitas *x*, *y*, cuyos significados son el largo y ancho respectivamente, este problema conduce a las ecuaciones $xy + x - y = 183$ y $x + y = 27$, eliminando una variable se obtiene la ecuación $x^2 + 29x = 210$. El procedimiento que se describe que siguió el calculista es el siguiente: “toma la mitad de 29: 14 y medio, de cuyo cuadrado resta 210, obteniendo un cuarto, cuya raíz cuadrada un medio suma y resta a 14 y medio obteniendo los valores 15 y 14”. Traducido a símbolos actuales la operación realizada es $\frac{29}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = \frac{29}{2} \pm \frac{1}{2}$, que coincide con nuestra resolvente actual, puesto que $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$. Por lo tanto, es factible que los babilonios conocieran el procedimiento de completar cuadrado, porque resolvían las ecuaciones de segundo grado con la resolvente actual, que quizás se pudo deducir mediante el uso de la representación gráfica del cuadrado de un binomio, puesto que ellos la conocían (paso concreto, previo al abstracto de la fórmula).

Los babilonios, griegos y árabes sólo llegaban a la solución positiva, puesto que no trabajaban con números negativos. Además, la interpretación geométrica como áreas sólo permite este resultado.

Por su parte, Al-Khowarizmi, matemático árabe, quien vivió alrededor del año 800, presentó en su obra *Aritmética* la siguiente solución para la ecuación $x^2 + 6x = 16$.

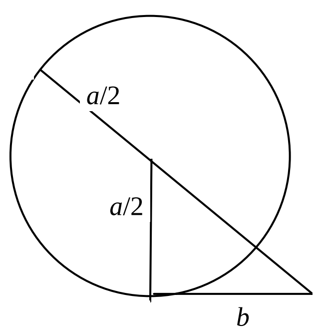
Parte de un cuadrado de lado x, sobre cuyos lados construye 4 rectángulos de lados x y 1,5 = 6/4 (la suma de las áreas de los 4 rectángulos es $6x$), y completa un cuadrado agregando en las esquinas 4 cuadrados de lado 1,5 (la suma de las áreas de estos 4 cuadrados es $9 = 4.1{,}5^2$). Se obtiene así un cuadrado de área 25 = 16 + 9, cuyo lado mide 5 = 1,5 . 2 + x, de donde se deduce que $x = 2$.



Nuevamente, se puede destacar que los árabes sólo llegaban a la solución positiva, porque al pasar de $(x + 3)^2 = 5$, al siguiente paso, sólo consideran $x + 3 = 5$, y no $x + 3 = -5$.

Resolución de la ecuación de segundo grado, usando la representación gráfica de una raíz cuadrada

Colette (1993) presenta la siguiente resolución de una ecuación de la forma $x^2 = ax + b^2$, $a > 0$, usando el método descripto por Descartes referido a la representación gráfica de una raíz cuadrada.



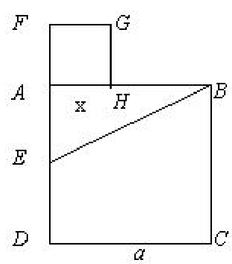
Se construye el triángulo rectángulo *NLM* con el lado *LM* igual a *b*, la raíz cuadrada del término independiente b^2, y el otro lado, *LN*, igual a $\frac{a}{2}$, la mitad del coeficiente de *x*. Con centro en *N* y radio $\frac{a}{2}$ se traza una circunferencia. Se prolonga *MN*, la hipotenusa de este triángulo, hasta obtener el punto *O* de intersección con la circunferencia. La longitud del segmento *OM* y el opuesto de la longitud del segmento *MP* son las soluciones buscadas.

Se puede probar usando Teorema de Pitágoras que: $\left|OM\right| = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{4}} = x_1$.

Restando el radio de la longitud de *MN*, se obtiene la longitud de *MP*: $\left|MP\right| = \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{4}} - \frac{a}{2} = -x_2$.

Si no contamos con una calculadora, que nos permita calcular los valores de x_1 y x_2 en forma aproximada, podemos usar este método, construir los segmentos *OM* y *MP*, y luego midiéndolos podemos obtener las raíces.

Morris Kline (1994) explica cómo resolver gráficamente la ecuación $x^2 + ax = a^2$, con $a > 0$. La resolución que Euclides realizó es la siguiente: considera un cuadrado *ABCD* de lado *a*. Traza el segmento *EB*, siendo *E* el punto medio del segmento *AD*. Prolonga el segmento *DA* hasta el punto *F*, tal que las longitudes de *EF* y *EB* sean iguales. Determina el punto *H*, sobre el lado *AB*, trazando el cuadrado *AFGH*, cuyo lado *AH* o *AF* es *x*, una solución de la ecuación dada. Se puede probar que la otra solución es el opuesto de la longitud del segmento *DF*.



En el trabajo de Euclides no se nombra la solución negativa, porque los griegos no trabajaban con números negativos, y además este método está planteado en el contexto de un problema, donde la solución negativa de la ecuación de segundo grado no verifica las condiciones del problema.

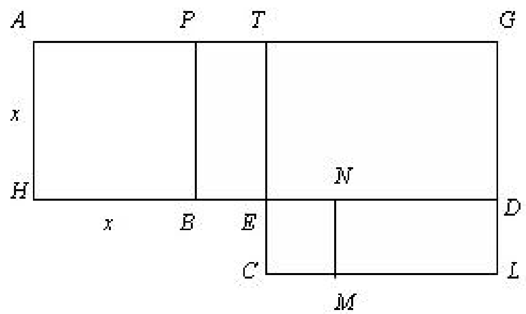
Nuevamente, si la solución de la ecuación es un número irracional y no tenemos una calculadora para obtener una solución aproximada, la podemos determinar realizando la construcción y midiendo las longitudes de los segmentos *AF* y *DF*. Las raíces son la longitud del segmento *AF* y el opuesto de la longitud del segmento *DF*.
Si el término independiente no fuera un cuadrado perfecto, se puede construir el lado del cuadrado mayor con el método descripto por Descartes, para la construcción de una raíz cuadrada.

Resolución de la ecuación de segundo grado completa, usando una demostración geométrica

Collette (1998) , presenta cómo resolvían los árabes una ecuación del tipo $x^2 + c = bx$, con $b, c > 0$.

Al-Khowarizmi dibujaba un cuadrado *APBH* que representa x^2 y el rectángulo *BPGD* que representa 21 unidades. Entonces el rectángulo total *AGDH*, que comprende ambas figuras, tiene como área 10*x*. Por lo tanto los lados *AG* y *HD* deben medir 10 unidades, porque la altura es *x*.

Trazamos la mediatriz *ET* de *AG* y de *HD*, la extendemos hasta *C* de manera que la longitud del segmento *TC* sea igual a la de *TG* y completamos los cuadrados *TCLG* y *CMNE*.

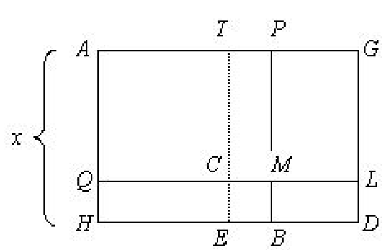


El área del rectángulo *PTEB* es igual a la de *MLDN*, porque sus respectivos lados son congruentes, *TE* tiene igual longitud que *ND* (por ser de igual longitud *TC* y *ED* por construcción, *EC* y *EN* por ser lados de un cuadrado, entonces al restar las respectivas longitudes dan el mismo resultado) y *PT* tiene igual longitud que *DL* (porque *AT* es congruente con *TG* por ser *TE* mediatriz de *AG*, y *AP* tiene igual longitud, *x*, que *GD*, entonces restando las respectivas longitudes, los resultados son iguales).

El cuadrado *TGLC* tiene área 25, porque su lado mide 5 (pues *AG* mide 10), y la figura *TENMLG* tiene área igual a 21, por ser igual a la del rectángulo *PGDB*. Por lo tanto, el cuadrado *ECMN* tiene área 4, y su lado mide 2 unidades. Como el segmento *EC* es congruente con *EB*, y la longitud de *HE* es 5, entonces $x = 5 - 2 = 3$, es una de las soluciones de la ecuación, y era la única dada por los árabes.

Para determinar la otra raíz de la ecuación, se puede hacer otra construcción.

Se construye el cuadrado *APBH* de área x^2, al que se adosa un rectángulo *PGDB* de área 21, entonces el rectángulo total *AGDH* tiene área 10*x*, y dado que su altura es *x*, su base es 10.



Trazamos *ET*, la mediatriz del segmento *AG*. Trazamos *QL* de manera que *AQ* sea congruente con *AT* (cada uno mide 5 unidades), quedando completados los cuadrados *ATCQ* y *TGLC*.

El área del rectángulo *TPMC* es igual a la del *CEDL*, porque sus lados son congruentes, pues *TC* es congruente con *CL* por ser lados de un cuadrado y *TP* es congruente con *CE* (pues tanto la longitud de *AP* como de *AH* es *x*, y *AT* es congruente con *TC* por ser lados de un cuadrado, entonces cuando restamos las respectivas cantidades los resultados son iguales). Por lo tanto, *CMBE* es un cuadrado.

El cuadrado *TGLC* tiene igual área, 25, que la figura *PGDECM*, y el rectángulo *PGDB* tiene área 21, entonces el área del cuadrado *CMBE* es 4, y su lado mide 2.

Entonces $x = 5 + 2 = 7$ es la otra solución de la ecuación dada.

Conclusión

Si bien resulta más fácil la resolución de la ecuación usando la fórmula actual o completando cuadrado, la importancia de conocer las construcciones geométricas griegas, árabes y de Descartes, es la posibilidad de obtener las soluciones de la ecuación por medición de segmentos, cuando es relativamente fácil la construcción de las soluciones pero no tenemos disponible una calculadora para realizar operaciones con números irracionales.

La presentación integrada de la resolución algebraica con interpretaciones geométricas permite a los alumnos vincular Álgebra y Geometría, que habitualmente se enseñan separadas, y puede favorecer la comprensión al permitir que el alumno aborde un mismo problema desde distintos puntos de vista.

Referencias bibliográficas

Babini, José (1973). *Historia de las Ideas Modernas de la Matemática*. OEA.

Collette, Jean Paul (1998). *Historia de la Matemática*. Siglo XXI Editores. 3ª edición.

Kline, Morris (Primera reimpresión, 1994). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.

Rey Pastor, J. y Babini, José (1984). *Historia de la Matemática*. Gedisa.