ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN TRADICIONAL DE OPTIMIZACIÓN EN ANÁLISIS MATEMÁTICO, FUNCIONANDO DINÁMICAMENTE

Mariana Gabriela Torres – Julio Ricardo Torres
mtorres@uaco.unpa.edu.ar – ricardo_lh13@hotmail.com
Unidad Académica Caleta Olivia – Universidad Nacional de la Patagonia Austral
Argentina.

Tema: 4. Uso de Tecnologías.
Modalidad: Comunicación Breve.
Nivel educativo: Terciario – Universitario.
Palabras clave: Análisis Matemático, Optimización, GeoGebra.

Resumen
Este trabajo surgió en el marco de un curso para profesores y alumnos que realizamos en UACO – UNPA, Argentina. Un participante realizó una interesante reflexión acerca de la resolución de un problema típico de optimización, como sobre la justificación de la solución encontrada. El problema: "hallar el volumen máximo de una caja de cartón construida con una lámina, recortando de cada esquina un cuadrado de igual tamaño". Lo planteamos de dos maneras, según el contexto donde funcionan las relaciones que se producen con los datos: el analítico, como se realiza en un curso de cálculo y el dinámico, con GeoGebra. Comparamos las resoluciones pensando, como incide el uso de elementos dinámicos, en los significados y en los que emergen a partir de las condiciones de diferentes contextos, tratando de brindar una mirada para abordar el problema desde diferentes mirandas y su efecto en la enseñanza-aprendizaje con éstas actividades.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo surgió en el marco de un curso que formaba parte de un Programa de Extensión[1] que se brindo para profesores y alumnos de carreras de ciencias exactas de la Unidad Académica Caleta Olivia de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral, Argentina. Dicho curso apuntaba al uso del software GeoGebra, allí un alumno participante, co-autor de este trabajo, realizó una interesante reflexión acerca de la resolución de un problema típico de optimización de un curso de análisis matemático, como sobre la justificación de la solución encontrada y como el software facilita ver diferentes objetos en lo dinámico, los cuales no se observan en lo analítico. La idea fue abordar el trabajo se desde dos diferentes enfoques, el analítico y el que denominamos dinámico. El primero de ellos, utilizando las herramientas que brinda un curso de análisis matemático y el segundo apoyándonos, con GeoGebra.

[1] Programa de Extensión denominado: "Uso e Integración de software libres en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática", a cargo de la Lic. Mariana Torres (directora de dicho Programa) docente UACO - UNPA y la Prof. Cristina Viviana Varas docente UACO- UNPA.

2. DESARROLLO

La importancia y delimitación del campo de la modelización en la educación matemática han sido puestas de manifiesto por diversos autores, tales como Niss, Blum, & Huntley (1991), Galbraith, Blum, Booker & Huntley (1998), Ortiz (2000) y Ortiz, Rico & Castro (2004). Además, la diversidad de trabajos de investigación en esta área y la introducción de cursos y propuestas curriculares para su uso, confieren a la modelización un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles. Por otro lado, la modelización posee un espacio de reflexión que muestra los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático (Rico, 1997)[2].

Las modificaciones que se han incorporado a los currículos de algunos países han sido dirigidas principalmente hacia una introducción del Análisis Matemático más intuitiva y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías[3].

En éste trabajo nos abocaremos a trabajar en particular a un problema de optimización. En primer lugar, queremos comentar diversas características que dan los dos autores que hemos tomado de referencia al problema, antes de analizar sus posibles resoluciones.

El *Problema*, (según Larson, R. Hosteler, R. Edwards, B.) que hemos tomado dice:

Que se desea construir una caja abierta de volumen máximo, a partir de una pieza de cartón cuadrada de 24 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas (véase Figura 1 y Figura 2).

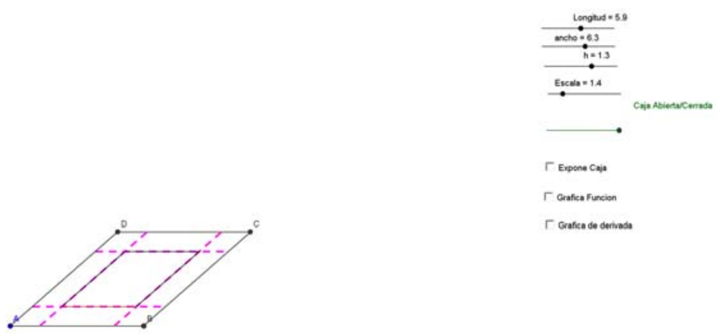

Figura 1

[2] Citado de: Uso de la modelización matemática en actividades didácticas. Análisis de una situación problema.

[3] Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

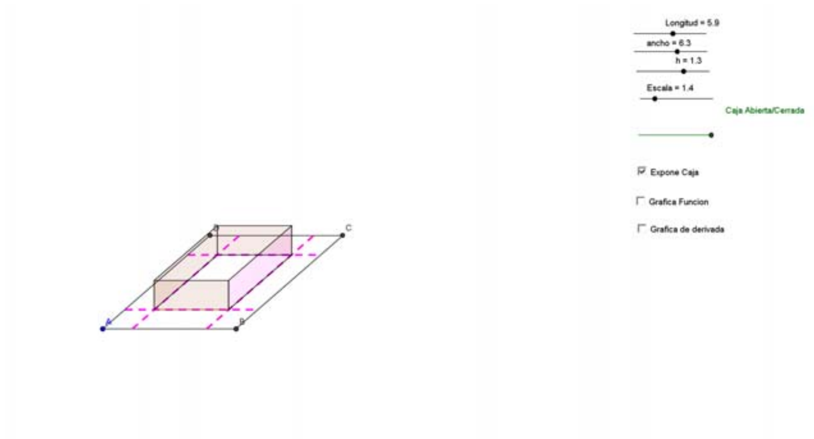

Figura 2

Luego de presentado el problema, el autor, escribe una serie de cuestiones, para que el alumno tenga en cuenta a la hora de su resolución, las mismas son:

* Completar analíticamente seis filas de una tabla que adjunta, la cual contiene 3 columnas. Una en donde el alumno irá registrando la altura, otra para registrar la longitud y anchura y en la última columna, el volumen.

* Luego pide que exprese el volumen V como función de x. Donde x es el valor que el alumno debió asignar al cuadrado del cartón que se va a ir quitando de las esquinas.

* A continuación se comenta que utilice las herramientas del cálculo, para hallar el punto crítico de esa función y su valor máximo.

Luego se requiere que con algún soft grafique esa función y verifique en la gráfica el volumen máximo.

Por último se solicita resolver para una pieza de s metros de lado y pregunta, Si las dimensiones de la pieza cuadrada se doblan, ¿cómo cambia el volumen? Esto, ya mas abocado a la generalización.

Nuestro trabajo no se basa en hacer críticas a cada una de las cuestiones enunciadas anteriormente por el autor para orientar al alumno a la hora de resolver el problema. Por ello sólo nos limitaremos a describir el trabajo realizado desde las dos resoluciones que se proponen.

J. Stewart. enuncia de igual manera el *problema*, sólo que utiliza como medida de los lados del cartón, *pies*. Solicita al alumno que: dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras altas con bases pequeñas. Suponiendo que el alumno va tomando distintos valores para recortar las esquinas.

Luego pide, que encuentre el volumen de varias de esas cajas y pregunta: ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo. Solicita también, que dibuje un diagrama en el cual se ilustre la situación general, que introduzca la notación y marque en el diagrama con sus símbolos. Que escriba una expresión para el volumen usando la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables, que escriba el volumen como función de una variable. Y que una vez terminado de resolver el problema, compare la respuesta con la estimación que hizo al principio. Se quiere que el alumno realice un modelo matemático del problema de optimización.

¿Qué es un modelo matemático?[4]

Para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados. En efecto, esto es el núcleo del problema, ya sea en relación al potencial que tiene el aprendizaje de la modelización matemática, como a las dificultades conectadas con este aprendizaje. En principio, existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático. Esto significa que alguien de manera implícita o explícita ha recorrido un proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. En otras palabras, con el fin de crear y usar un modelo matemático es necesario, en principio, recorrer todo el camino de un proceso de modelización. Analíticamente es posible describir un proceso de modelización matemática consistente en los siguientes seis sub.-procesos (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003). (a) Formulación del problema. (b) Sistematización. (c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático. (d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones. (e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial. (f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

[4] Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica.

3. ESTUDIO REALIZADO

3.1 Enfoque analítico

La resolución del problema, desde en éste enfoque se realizó utilizando las herramientas del análisis matemático, es decir, hallada el modelo matemático, se encuentran el/los puntos críticos del modelo y luego se aplican los criterios de derivadas para concluir si el/los puntos son un máximo y en consecuencia, el máximo volumen de la caja que es lo que se está buscando.

Habiendo realizado el gráfico de la situación, llamamos x, al cuadrado que se quita de cada una de las esquinas del cartón, como lo sugiere uno de los autores considerados en éste trabajo. Luego, cada lado del cartón, tiene una longitud de 24 – 2.x, pues es un cartón cuadrado. Una vez que tenemos la longitud de cada lado se plantea la función volumen, en términos de la variable x. Donde:

Base= 24-2.x

Ancho=24-2x

Altura=x

Entonces,

$$V = (24-2x).(24-2x).x$$
$$V = (24-2x)^2.x$$

Ahora a partir de la función V, calculamos la derivada primera, la igualamos a cero y calculamos el/ los puntos críticos como ya mencionamos arriba.

$$V' = 2.(24-2x).(-2).x + (24-2x)^2$$
$$V' = -96x + 8x^2 + 576 - 96x + 4x^2$$
$$V' = 12x^2 - 192x + 576$$
$$V' = 0$$
$$x_1 = 12, x_2 = 4$$

Aplicando el criterio de la derivada segunda en cada uno de los puntos críticos hallados, se tiene:

$$V''(x) = 24x - 192$$
$$V''(12) = 96 > 0$$
$$V''(4) = -96 < 0$$

Observemos que para x=12 no tiene sentido el calculo del volumen, dejamos en claro que luego de hallar la solución analítica debemos contextualizarla. El dominio de la solución estará acotado de acuerdo a las longitudes que del cartón dado.

Concluimos entonces que, cuando se saca un cuadrado de cada esquina del cartón, de 4 cm de lado, el volumen de la caja será máximo.

3.2 Enfoque dinámico

Cuando analizamos el problema aplicando GeoGebra, surge una cuestión interesante en la función V, que no se tiene en cuenta a la hora de analizarlo desde el enfoque analítico. Para crear la caja, tendremos que tener en cuenta el valor de cada cuadrado x, la altura de la caja, dependerá de la longitud de cada lado del cuadrado de cartón que se considera, pues sino no se formará la caja. Véase Figura 3 y Figura 4.

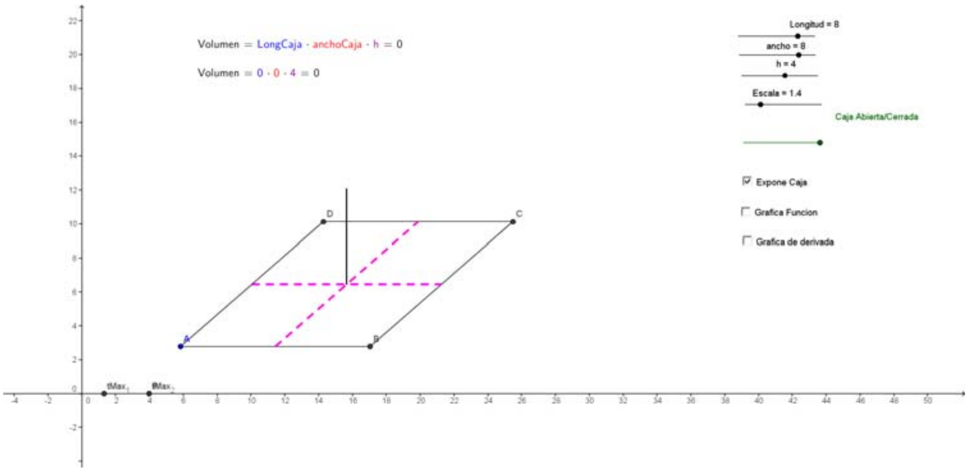

Figura 3

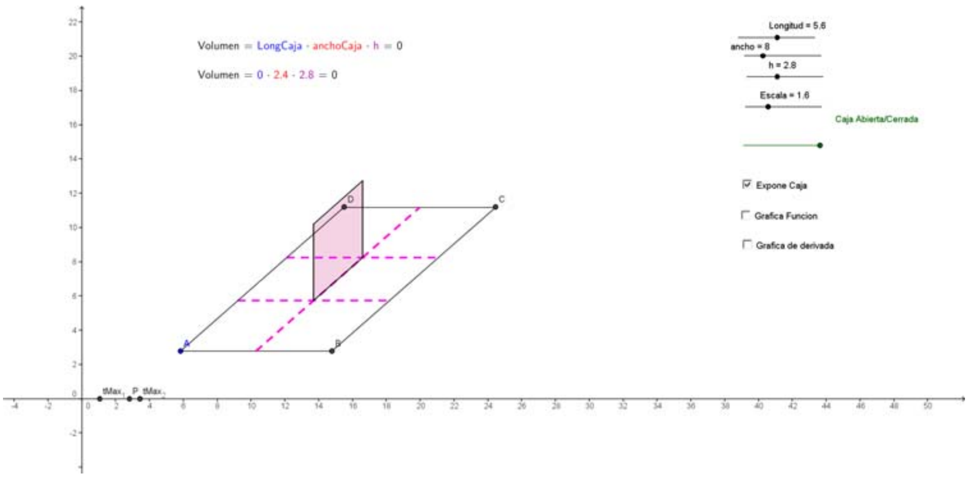

Figura 4

El problema se vuelve muy interesante con el soft si se hace variar las dimensiones de la caja. Se puede así generalizarlo si se considera un cartón rectangular. En éste proceso de generalización se deberá poner especial énfasis en el dominio de definición de cada uno de los lados, como así también el dominio de x. Véase Figura 5 con la caja formándose y la gráfica de la función V. Y la Figura 6 con la caja armada.

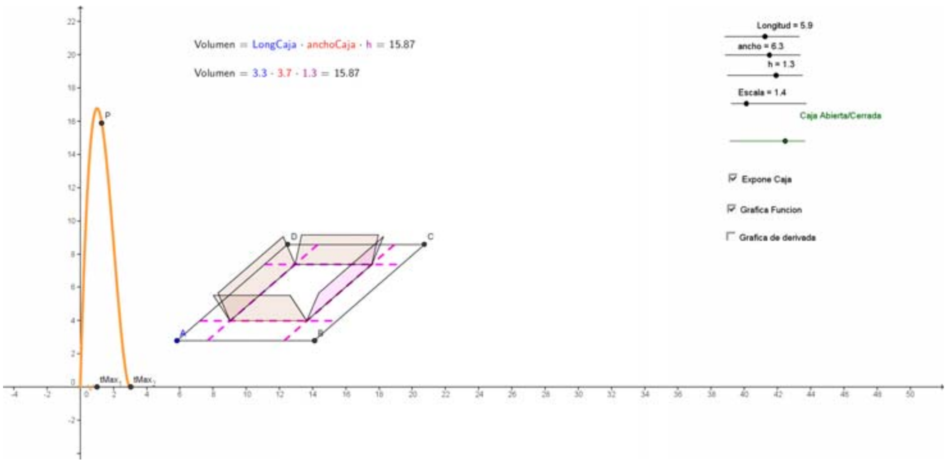

Figura 5

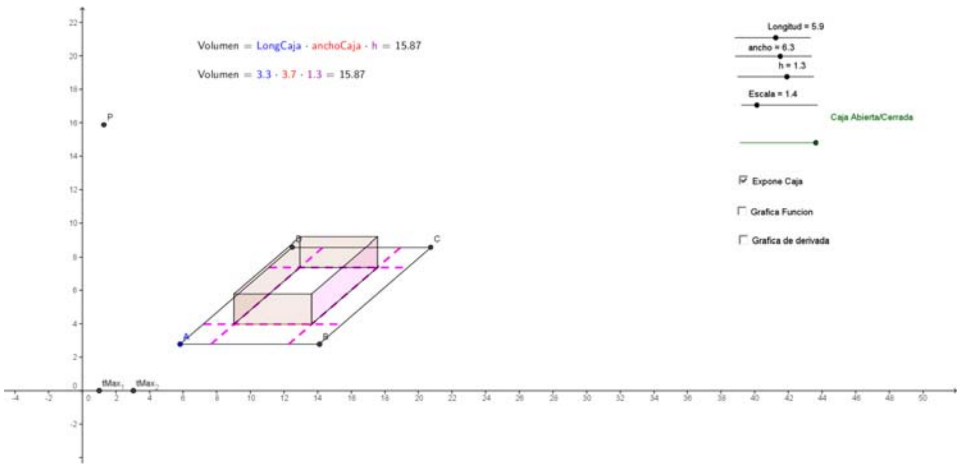

Figura 6

4. REFLEXIONES FINALES

En el enfoque analítico la caja se ve y es una sola, como así también solo se puede realizar la gráfica de una función V por vez, sin ver la familia de funciones que surgen a medida que varían los cuadrados de cartón.

Mientras que en el enfoque dinámico vimos que se ponen a funcionar elementos y propiedades que no se explicitan en el contexto analítico, por ejemplo, la necesidad de tener de antemano el dominio de definición de x, cuando consideramos un cartón cuadrado y el dominio de los lados del cartón si se considera de forma rectangular. Aquí se podrán observar las gráficas de las funciones V, si el cartón es cuadrado y las gráficas de V cuando es rectangular.

No pretendemos tomar partido por el enfoque analítico o el dinámico, estamos convencidos que cada uno de los enfoques tienen cuestiones interesantes para abordar, creemos que deben complementarse entre sí, permitiendo su coexistencia. El GeoGebra permite visualizar, significar e idealizar conceptos, propiedades y relaciones que desde lo analítico se pierden de vista.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate Giménez, C, Camacho Machín, M. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. X (Nº 2). pp. 135 – 149.

- Blomhøj, M. Traducción: María Mina. *Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica.* Recuperado de: http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf

- Gómez-Chacón, M. *Modelización matemática en contextos tecnológicos*. Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/modelizaciones/modelizacion-1.pdf

- Larson, R., Hosteler, R.; Edwards, B. (2000). *Cálculo y Geometría Analítica* Vol. 1. México: Editorial MC GRAW HILL.

- Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. México: Editorial THOMSON.

- Vilanova, S. Rocerau, M. Valdez, G. Oliver, M. Vecino, S. Medina, P. Astiz, M. Álvarez, E. *LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje.* Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF.