TALLER SOBRE CURVAS DE PEANO EN EL GEOGEBRA

María Inés Urbina Amores
ducosurbina@yahoo.com
Centro Regional de Profesores del Suroeste, Uruguay

Tema: Formación de Profesores y Maestros
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras Claves: Geogebra, Curvas de Peano, Fractales

Resumen
Se exhibirá una temática del SXX y se desea que los concurrentes experimenten un acercamiento más a la herramienta informática cuyo uso es hoy ineludible en la Educación Matemática. Se aspira luego de una sucinta presentación de las Curvas de Peano, desarrollar un taller donde se representarán las primeras iteraciones de algunos ejemplos con el uso del GeoGebra. Estas curvas fractales poseen un diseño geométrico basado en el concepto de autosemejanza, que conlleva una singular belleza visual allende del potente resultado matemático: que una curva "llene un cuadrado". Se realizarán los comentarios pertinentes acerca de límites, recurrencia, inducción, completitud, densidad, continuidad y dimensión fractal entre otros. El recurso de la Geometría Dinámica, se adapta a la recursividad y facilita la visualización. Se propenderá a generar otras curvas libradas a la creatividad de los asistentes.

Introducción

El ***infinito*** es una palabra que utilizamos desde el primer año de enseñanza media pero su total dimensión se va gestando a medida el alumno avanza en su conocimiento matemático. Si le preguntamos a un alumno de primer año cuántos múltiplos de 3 hay o cuántos puntos tiene una recta, seguramente luego de una mirada inquisidora del docente responderá: infinitos. Es una palabra de uso corriente, que pertenece a su vocabulario activo.

Íntimamente ligado al concepto de infinito está el concepto de límite y lo asociado a lo infinitesimal, a la densidad y a la continuidad. Generalmente cuando en bachillerato se formaliza la definición de función continua, los ejemplos de discontinuidad ayudan a la formación del concepto, dado que la continuidad ha sido para el alumno lo corriente, y los casos de discontinuidad aparecen excepcionalmente. Comprender la completitud de la recta real implica concebir que pueden haber rectas "agujereadas" y se requiere de determinada abstracción para visualizarla. Desde el pensamiento ingenuo, no es natural pensar el infinito sin el continuo o la completitud.

La elección del tema está fundada por un lado por el lugar que ocupan en el pensamiento matemático de los *procesos iterativos*, asociados a las sucesiones, conceptos de inducción y convergencia y a su influencia en los métodos informáticos; y por otro la intención de tratar con temáticas del S XX, porque tenemos el deber de transmitir a nuestros alumnos que la Matemática es campo de conocimiento en expansión, que tiene preguntas abiertas y que en particular durante la segunda mitad del siglo pasado y lo que va de éste, ha constituido un momento privilegiado de la historia por su enorme volumen de producción.

Finalmente, la opción de un taller con el GeoGebra, se basa en que el docente asistente pueda aplicar al aula alguna actividad inspirada en estas curvas. La idea básica es hacer uso del botón *"herramienta"* y emprender la recursividad para algunos casos, en que la autosimilitud se reduce (en los casos a abordar en este taller) a transformaciones de semejanza.

Desarrollo del taller

Primera parte

Se expondrá sobre las curvas de Peano. Se enunciarán definiciones y proposiciones necesarias para comprender por qué siendo "curvas", éstas llenan el cuadrado. En otras palabras: son imágenes de funciones sobreyectivas del [0,1] en el [0,1]x[0,1]. En el anexo 1 de este documento se amplía esta información. Este concepto de "llenar el cuadrado" tiene eco en la definición de dimensión fractal que será tratada en el Anexo 3. Por último se exhibirán algunos ejemplos clásicos de estas curvas.

Segunda parte

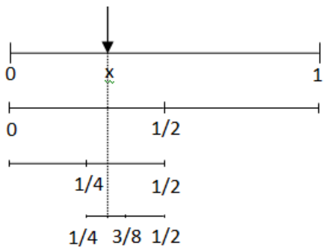
Con base en la autosomilitud (o autosemejanza como es el caso de la que vanos a abordar con los asistentes en el taller) y con la opción *Creación de nueva Herramienta* que proporciona el GeoGebra, se plantearán algunos primeros elementos de la sucesión de caminos cuyo límite es una curva de Peano. En particular esta curva es cerrada y esta versión fue planteada por Sierpinski. El análisis de esta curva se detalla en el Anexo2.

Anexo 1

Se busca en este apartado referir a las definiciones y proposiciones que fundamentan la existencia de las curvas de Peano. Se apela a nociones que el docente conoce y que se manejan en el aula de la enseñanza media superior.

- <u>Proposición 1.</u> En el Intervalo [0,1] hay infinitos números reales.

- <u>Proposición 2.</u> La intersección de todos los términos de una sucesión de intervalos cerrados encajados de números reales cuya longitud tiende a cero es un conjunto unitario.
  En particular, a través de un proceso dicotómico, afirmamos:
  $\forall x \in [0,1]$encontramos una sucesión de intervalos encajados
  que verifica $\forall x \in [0,1], \{x\} = \bigcap_1^\infty I_n$.



$I_1 = [0, 1/2]$

$I_2 = [1/4, 1/2]$

$I_3 = [1/4, 3/8]$

$\{x\} = \bigcap_{n \in IN} I_n$

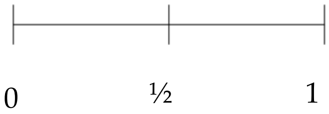
❖ <u>Definición 1.</u> Dos conjuntos son *coordinables* o *equipotentes* si existe una función biyectiva de uno en el otro. Se dice que ambos poseen el mismo cardinal.

- <u>Proposición 3.</u> Los conjuntos [0,1] y [0,1]x[0,1] son coordinables.

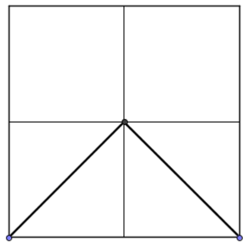
❖ <u>Definición 2.</u> Dados dos puntos *x* e *y* de un espacio E, llamamos *camino* en E que une *x* con *y*, a una función continua $f : [a, b] \to E$ de algún intervalo cerrado [a,b] de la recta real de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$.

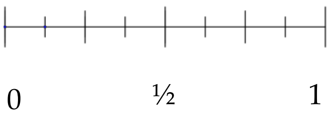
Vamos a construir una sucesión de caminos del [0,1] en el [0,1]x[0,1], cuyo límite será una función continua sobreyectiva [0,1] en el [0,1]x[0,1].

Las siguientes imágenes ilustran los primeros términos de esta sucesión:

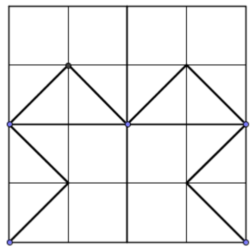


*f*1

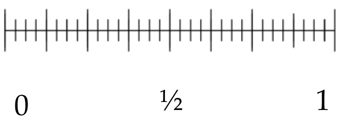


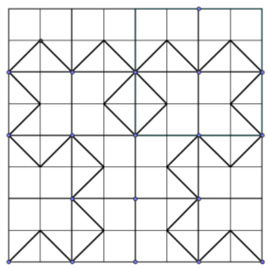


*f*2



*f*3

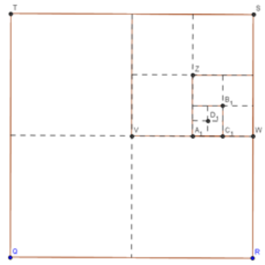




- <u>Proposición 4.</u> La proposición2, se extiende para el caso de cuadrados encajados cuyo lado tiende a cero:

  $$\forall (x,y) \epsilon [0,1] x [0,1], \quad \{(x,y)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

  donde C_n es el cuadrado elegido en el n-ésimo paso, en que cada cuadrado se divide en 4 y se elige uno al que pertenece dicho punto.



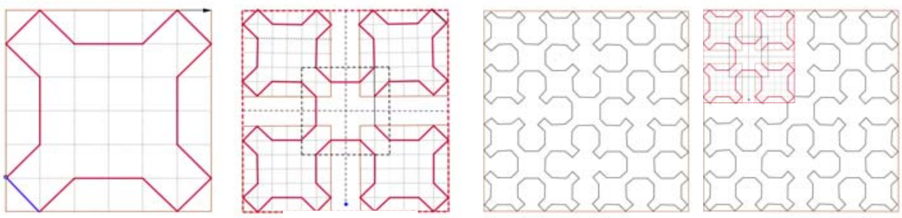
Se concluye:

- ✓ Las imágenes de los elementos del conjunto $A_j = \left\{x \epsilon [0,1]: x = \frac{k}{2^j}, 0 \leq k \leq 2^j\right\}$ a través de las funciones $f_n, \forall n \in N,\ n \geq j$ se verifica que $f_j\left(\frac{k}{2^j}\right) = f_n\left(\frac{k}{2^j}\right)$.
- ✓ El conjunto $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ es denso en [0,1].
- ✓ El conjunto $\bigcup_{j=1}^{\infty} f_j\left(A_j\right)$ es denso en [0,1]x[0,1].
- ✓ Existe una función límite $f: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$.

  Definida una distancia en el conjunto de dichas funciones, el espacio resultante es completo. Se demuestra además que la sucesión de caminos planteada es una sucesión de Cauchy con esa métrica.
- ✓ La función f es sobreyectiva.

Anexo 2

Algunas consideraciones sobre la curva cuyas primeras iteraciones se plantearán en actividad de taller:



Paso 1 Paso 2 Paso 3

En el primer paso, se divide el cuadrado [0,1]x[0,1] en 36 pequeños cuadrados, dividiendo cada lado en 6 segmentos iguales. Seleccionando los segmentos correspondientes se obtiene la primera figura.

En el segundo paso, "se unen" cuatro de estas figuran con una central, para lo cual se divide al lado del cuadrado [0,1]x[0,1] en 2.6+2= 14 segmentos iguales.

En el tercer paso, "se unen" cuatro de estas segundas figuras con una central de la primera iteración. Para ello, se divide al lado en 2x14+2= 30 segmentos iguales.

La sucesión de números en que hay que dividir cada lado es recurrente, definida por:

$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = 2.a_n + 2$

Esta sucesión creciente es divergente y verifica $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$. Lo interesante a los efectos de proceso iterativo de construcción, es calcular las razones de semejanza que llevan de un paso al siguiente: $\frac{14}{6}, \frac{30}{14}, \frac{62}{30}, \ldots$

Anexo 3

Acerca de la dimensión fractal

Las consideraciones sobre la dimensión fractal que aquí se presentan son informales. Se apunta a que intuitivamente se pueda identificar un número real con una figura del plano enclidiano. Se va a proveer de una fórmula para calcular esta dimensión. Se utilizará el lenguaje coloquial para definir la sucesión de figuras.

En primera instancia vamos a aceptar que una curva del plano tiene dimensión 1 y que el cuadrado [0,1]x[0,1] tiene dimensión 2. En cada iteración, llamaremos k_n, $0 < \mathrm{k_n} < 1$, a la razón de semejanza que surge de pasar de la figura F_n a la figura F_{n+1}; y sea A_n el coeficiente de aumento del número de segmentos al pasar de la figura F_n a la figura F_{n+1}. La dimensión fractal se calcula: $\lim_{n\to\infty} \frac{L(A_n)}{L\left(\frac{1}{k_n}\right)}$. En los fractales más conocidos estas dos sucesiones son constantes. El análisis de los ejemplos clásicos ayudará a la comprensión del concepto.

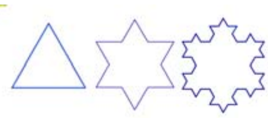
Ejemplo 1: Triángulo de Sierpinski

Paso 1: un triángulo equilátero, F_1.

Paso 2: Se divide cada lado en 2 segmentos iguales y se elimina el triángulo central, obteniendo F_2, que está compuesta por 3 triángulos equiláteros.

Paso 3: En cada uno de los triángulos de F_2, mediante el mismo procedimiento se elimina el triángulo central, obteniendo F_3, que consta de 9 triángulos equiláteros.

En este caso $\forall n,\ n \in N,\ k_n = \frac{1}{2}\ ,\ A_n = 3$, luego la dimensión fractal es $\frac{L3}{L2}$.



Ejemplo 2: El copo de nieve de Koch

Paso 1: Dado un triángulo equilátero, se consideran sus lados, a los que les llamamos F_1.

Paso 2: Se divide cada lado en 3 segmentos iguales, se elimina el segmento central, y se construyen los otros dos lados de los triángulos equiláteros que se forman sobre estos segmentos de modo que sean exteriores al triángulo inicial, obteniendo así F_2, que está compuesta por 12 segmentos.

Paso3: Sobre cada uno de los segmentos se repite el procedimiento.

En este caso $\forall n,\ n \in N,\ k_n = \frac{1}{3}\ ,\ A_n = 4$, luego la dimensión fractal es $\frac{L4}{L3}$.

Ejemplo 3: La curva de Sierpinski a iterar con el GeoGebra

Paso 1: La figura consta de 20 segmentos, 8 de longitud $\frac{1}{6}$ y 12 segmentos de longitud $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Paso 2: Ya calculamos $k_1 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$. Consta de 84 segmentos, 40 de longitud $\frac{k_1}{6}$ y 44 de longitud $\frac{k_1\sqrt{2}}{6}$ de donde $A_1 = \frac{84}{20} = \frac{21}{5}$.

Paso 3: Calculemos: $A_2 = \frac{83.4+8}{84} = \frac{340}{84} = \frac{85}{21}$.

Si p_n es la sucesión que cuenta el número de segmentos de la figura n-ésima, ésta queda definida recurrentemente por $p_1= 20$, $p_{n+1}= 4(p_n-1)+8$ (se hace este planteo en virtud de la figura) de donde $p_{n+1} = 4(p_n+1)$y luego $A_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{4(p_n+1)}{p_n} \rightarrow 4$ si $n \rightarrow \infty$ dado que $p_n \rightarrow \infty$. Por otro lado $k_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(a_n+1)}{a_n} \rightarrow 2$, si $n \rightarrow \infty$ dado que $a_n \rightarrow \infty$.

Ahora podemos calcular la dimensión fractal:$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{L(A_n)}{L\left(\frac{1}{k_n}\right)} = \frac{L4}{L2} = 2$ y no es de extrañar obtener este resultado, ¡porque la curva llena el cuadrado!

Bibliografía

Fagella, N. & Jarque, X. (2007). *Iteración compleja y fractales.* Barcelona: Vincens Vives.

Aguilera, N. (1995). *Un paseo por el jardín de los fractales.* Buenos Aires: Red Olímpica.

Munkres, J. (2002) *Topología.* Madrid: Prentice Hall.

Braun, E. (1996). *Caos, fractales y cosas raras.* México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Mandelbrot, B. (1977) *The fractal Geometry of Nature* .New York: W. H. Freeman and Company.

Stewart, I. (2005) *De aquí a infinito. Las Matemáticas de hoy*. Barcelona: Crítica.