POR QUÉ Y CÓMO USAR SOFTWARE EDUCATIVO PARA LA APROPIACIÓN DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Mercedes Villalba - Adriana López
mercedes.villalba3@gmail.com; lopezadriana36@gmail.com
Institutos Normales de Montevideo, Uruguay

Tema: Pensamiento geométrico
Modalidad: Taller
Nivel: actualización y formación docente
Palabras clave: geometría, Geogebra, construcción, validación

Resumen

Se trata de poner en práctica la idea de que aprender matemática implica "hacer matemática", involucrando a los aprendices en una activa participación intelectual. Consta de dos partes: una de resolución matemática y la otra de análisis didáctico. Se trata de una construcción, a partir de un protocolo dado, que implica la necesidad de buscar propiedades, conceptos, relacionarlos, poner en juego sus conocimientos, seleccionar los adecuados y elaborar otros nuevos. Se da una primera instancia de exploración, una segunda instancia de formulación de conjeturas y una tercera de argumentación matemática. Un aspecto del análisis didáctico es el "hacer geometría", a partir de la metacognición de los propios procesos cognitivos desarrollados en la primera parte del taller. Otro aspecto a considerar es el uso de software educativo como herramienta para desplegar esta forma de enseñar: no es la idea utilizar la computadora por novedad y que, en esencia, continúe el enfoque tradicional ostensivo y nominalista en la enseñanza de la geometría. La cuestión radica en plantear propuestas que problematicen los contenidos y habiliten la elaboración de conjeturas: eso tiene que ver con el proceso de producción que habilita el software y la gestión de clase que realiza el docente.

Propuesta de Taller para Magisterio

Utilizamos el software GeoGebra

1ª parte:

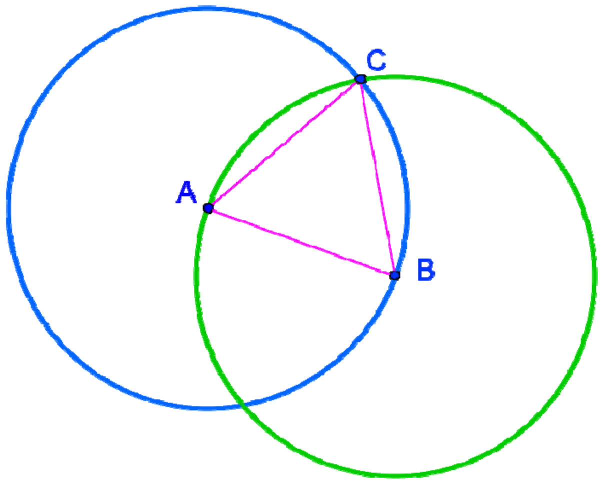
Modalidad de trabajo: binas

Consigna:

> Construye una circunferencia de centro A que pase por el punto B.
>
> Construye otra circunferencia de centro B y radio [AB].
>
> Muestra la intersección de ambas circunferencias y selecciona uno de los puntos (C).
>
> Traza el triángulo ABC y lo clasificas por sus lados. Justifica con argumentos matemáticos tu respuesta.

Análisis de procedimientos de resolución

Un camino posible:



Una vez que los participantes llegan a la construcción que se les pidió en la propuesta de trabajo, un camino posible es medir los lados del triángulo y constatar que son iguales por lo cual el triángulo es equilátero.

Pueden también medir los ángulos y llegar a la conclusión de que el triángulo es equiángulo.

Un análisis interesante para realizar cuando cada grupo plantee su argumentación es el siguiente:

a) Si el triángulo tiene los lados iguales ¿tendrá sus ángulos iguales? ¿puedo saber cuánto mide cada uno sin realizar la medición? ¿Qué propiedades se ponen en juego?

   Si de la medición resulta que los ángulos son iguales ¿se puede asegurar que los lados son de igual medida?

b) Luego del análisis se concluye que si un triángulo es equiángulo es también equilátero; asimismo el que sea equilátero implica la igualdad de ángulos.

   Esta relación entre equilátero y equiángulo ¿se cumple para los demás polígonos?

Esta relación suele estudiarse casi exclusivamente en triángulos, por lo cual el alumno a nivel escolar asocia los términos “equilátero” y “equiángulo” solo a las figuras triangulares y no a otros polígonos, entonces es importante ampliar el conjunto de figuras donde se aplica este conocimiento y delimitar la validez de las propiedades estudiadas. El cuadrado es un polígono equilátero y equiángulo mientras el rombo es equilátero pero no equiángulo. El rectángulo es equiángulo pero no equilátero.

Con estos contraejemplos se puede concluir que una propiedad no implica que la otra deba cumplirse: el polígono equilátero no tiene por qué ser equiángulo y viceversa (salvo en triángulos).

Es importante destacar la validez de utilizar contraejemplos para argumentar que una propiedad no se cumple para un determinado conjunto de elementos.

Este procedimiento utilizado para poder clasificar el triángulo utiliza la medición para constatar si son iguales o diferentes sus lados y/o ángulos. ¿Podríamos utilizar la Geometría para validar esta constatación sin recurrir a la medida o es imprescindible valerme de otra área del conocimiento matemático?

<u>Otro camino posible:</u>

Una alternativa de argumentación para clasificar el triángulo ABC como equilátero es demostrar la igualdad de sus lados, poniendo en juego conceptos geométricos.

Los puntos B y C son puntos de la circunferencia de centro A y radio [AB], entonces los segmentos AB y AC son iguales. Como C y A pertenecen a la circunferencia de centro B y radio [AB] los segmentos AB y BC son iguales.

Dichos segmentos: AB, AC, BC, por construcción, son radios de circunferencias de igual radio, por lo tanto tienen la misma medida.

¿Qué avala estas igualdades? Utilizar la circunferencia - como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro - asegura que todos los segmentos cuyos extremos sean el centro de una circunferencia y un punto de dicha circunferencia, son iguales.

Otra alternativa de justificación de la igualdad de los tres segmentos es que, al ser una relación de equivalencia, se cumple la propiedad transitiva, por lo tanto:

Si [AB] = [AC] y [AB] = [BC] puedo concluir, por la propiedad transitiva de la igualdad, que [AC] = [BC], con lo cual puedo asegurar que el triángulo ABC es equilátero.

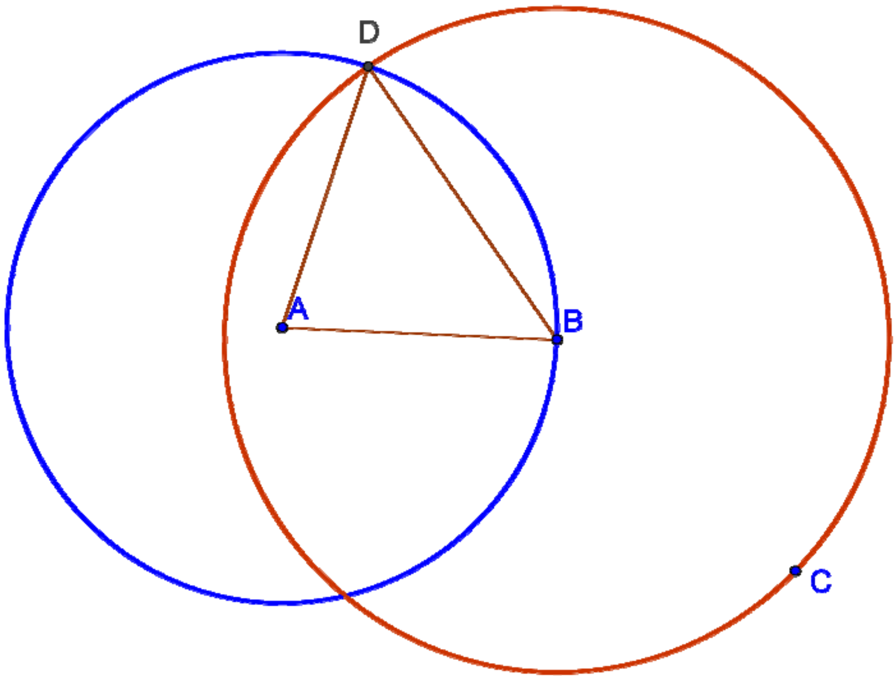
Es importante, en nuestro trabajo docente, lograr que el alumno explicite qué propiedades, conceptos o relaciones está utilizando para avalar sus conjeturas. No alcanza con que “se dé cuenta” de la solución, lo realmente importantes es descubrir la matemática que está atrás, y poder explicitarla en los argumentos utilizados. Es sorprendente ver alumnos que, desde muy temprana edad, pueden formular argumentos válidos y es necesario exigirlo en todo el ciclo escolar. El tipo de argumentación depende de los conocimientos que tenga y el nivel que esté cursando, pero todo alumno puede "demostrar" sus conjeturas.

Si se comparan los dos procedimientos se constata que, en este segundo caso, la validación de la respuesta dada se basa en las propiedades que se ponen en juego y no en una constatación empírica o lo que "el ojo dice". Prevalece lo deductivo sobre lo experimental: aunque lo experimental sea parte del proceso, no finaliza en él.

2ª parte:

Consigna:

> Investiga qué tipo de triángulo se forma si el radio de la circunferencia de centro B es diferente a [AB]. Representa distintos ejemplos y escribe tus conjeturas. Busca argumentos que avalen las conclusiones que planteas en este nuevo caso.



Esta nueva situación plantea el dominio de validez de la propiedad trabajada. Nueva experimentación, nuevas construcciones, nuevas conjeturas, nuevas validaciones: el triángulo será isósceles pero no equilátero.

Parte de lo ya planteado se podrá utilizar, ya que los segmentos AB y AD serán iguales porque son radios de la circunferencia de centro A, pero el segmento BD no es igual porque es radio de la circunferencia de centro B, radio que debe ser diferente a [AB]. Por lo tanto, el triángulo será isósceles pero no equilátero.

¿Se podrá determinar la medida de los ángulos? ¿Y la medida de los lados?

Se puede deducir cuáles son los ángulos iguales, pero no cuánto miden. La diferencia con el caso anterior es que la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo - igual a un llano - no me permite deducir cuánto mide cada uno. ¿Qué dato sería suficiente para poder conocer la medida de cada uno de los ángulos interiores de dicho triángulo?

En la nueva construcción, el radio BC queda determinado por el punto B (que pertenece a la circunferencia de centro A) y el punto C variable. Al explorar en la construcción se puede mover el punto C, obteniéndose diferentes triángulos ¿qué cambios hay en la figura? Si se muestran las medidas de los lados y ángulos, se ve cómo varía la superficie, los ángulos y lados, pero se mantienen las relaciones entre los mismos, o sea siempre dos lados y dos ángulos iguales, a mayor lado se opone mayor ángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales, el lado diferente siempre es el segmento determinado por los puntos B y D (siendo B un punto de la circunferencia de centro A y también el centro de la otra circunferencia; y D un punto de intersección de las circunferencias). Estas regularidades observadas en los incontables casos que permite la construcción con Geogebra, favorecen el establecimiento de conjeturas que están ahora en mejores condiciones de validar, debido al proceso de familiarización con las propiedades que se ponen en evidencia.

Es posible ahora plantear la posibilidad de adelantar qué tipo de triángulo se forma con los centros de dos circunferencias secantes cualesquiera (que no cumplan los requisitos anteriores) y uno de sus puntos de intersección. Se trata del camino inverso, o sea que se propone establecer una hipótesis, basada en los procesos de construcción conceptual de las instancias previas, y utilizar GeoGebra como una herramienta de afiliación o de confrontación con las mismas.

Proponemos una variable didáctica para la elaboración de los conceptos trabajados: en lugar de solicitar una construcción, partimos de una construcción ya realizada, donde se representa la longitud variable del radio con un deslizador y se habilita la interpretación de los algoritmos de construcción y la elaboración de hipótesis de las propiedades que hemos estudiado. Además se pone en juego la condición de existencia del triángulo y los casos en que las circunferencias no se intersecan, de modo de visualizar las relaciones interfigurales de forma más amplia y global. Para ello utilizamos el applet que alojamos en el sitio oficial de GeoGebra:
http://www.geogebratube.org/student/m15593

En este taller lo que se pretende es trabajar matemática, específicamente geometría, entonces ¿qué es hacer matemática?
Hacer matemática implica una actividad intelectual del alumno, que se involucre en el desafío de resolver un problema, que incluya un trabajo exploratorio, la búsqueda de ejemplos, la elaboración de conjeturas basadas en propiedades, conceptos y relaciones estudiadas, la formulación de argumentos, sostenerlos y ser capaces de debatir, pero también de escuchar y entender las validaciones de los otros, reconocer los propios errores y reestructurar sus ideas en pos del avance conceptual. (Itzcovich, 2007)
Por lo dicho anteriormente debemos reflexionar sobre qué implica enseñar: al decir de Patricia Sadovsky "*enseñar es asumir la responsabilidad de sostener el conocimiento como un espacio de producción, debates e intercambios*" (Itzcovich, 2005, contratapa).
Para Delia Lerner (1992):

> Enseñar es plantear problemas a partir de los cuales sea posible reelaborar los contenidos escolares y es también proveer toda la información necesaria para que los niños puedan avanzar en la reconstrucción de esos contenidos. Enseñar es promover la discusión sobre los problemas planteados, es brindar la oportunidad de coordinar diferentes puntos de vista, es orientar hacia la resolución cooperativa de las situaciones problemáticas. Enseñar es alentar la formulación de conceptualizaciones necesarias para el progreso en el dominio del objeto de conocimiento, es propiciar redefiniciones sucesivas hasta alcanzar un conocimiento próximo al saber socialmente establecido.

> Enseñar es - finalmente - promover que los niños se planteen nuevos problemas que no se hubieran planteado fuera de la escuela.

Esta actividad está pensada para trabajar con GeoGebra. ¿Qué ventajas tiene el uso de software educativo para la enseñanza, entendida como la acabamos de caracterizar?

Las construcciones aquí permiten de manera más sencilla y dinámica explorar distintas construcciones, trazando circunferencias con distintos radios para representar una cantidad importante de casos que ayuden a la elaboración de conjeturas o para constatar si las conclusiones a las que se arriba se pueden extender o no. Las construcciones adquieren movimiento, permiten ser transformadas al mover los puntos y ver lo que cambia y lo que permanece, permite investigar de forma dinámica y sencilla. Pensemos cuánto tiempo y esfuerzo se debería dedicar si se tuvieran que realizar construcciones con regla y compás, en desmedro de la focalización en las regularidades que se van descubriendo a partir de un sinnúmero de casos diferentes.

Pero el software por sí solo no asegura, ni siquiera habilita la mejorara en la enseñanza de la Geometría si la propuesta se limita a una serie de pasos a seguir en forma predeterminada por el docente, dejando al alumno el rol de ejecutor de algoritmos que conducen a la única respuesta esperada como correcta, sin darle la oportunidad de explorar, equivocarse, discutir con sus pares, preguntar en base a lo elaborado, volver sobre sus pasos, tal como un verdadero "hacedor" de matemática.

No se trata de mostrar el saber del docente y registrarlo con términos técnicos, sino de favorecer procesos de construcción colaborativa para la elaboración de conceptos cuyos nombres deben estar plenos de significado.

Referencias bibliográficas

Itzcovich, H. (2005) *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. (coord.) (2007) *La Matemática escolar*. Buenos Aires. Aique Educación.

Lerner, D. (1992) La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición. En J. Castorina et al, *Piaget -Vigotsky: Contribuciones para replantear el debate*, pp. 69-118. Argentina: Paidós.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2006) *Matemática 4*. Montevideo. Editorial Santillana.