



## **SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE DE SUCESIONES NUMÉRICAS**

Gonzalez Juliana, Medina Perla, Astiz Mercedes, Vilanova Silvia  
Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina  
julianagonzalezjg@yahoo.com.ar

**Nivel Educativo:** Universitario

**Palabras clave:** sucesiones, límite, Geogebra, visualización

### **Resumen**

En primer año de las carreras de Matemática y Física, en la asignatura Cálculo I, el concepto de límite de una sucesión numérica es uno de los que presenta gran dificultad en ser aprehendido. Aún cuando la noción de límite de sucesión generalmente se introduce en forma intuitiva, la formalización del concepto a través de su definición y el desarrollo de ejercicios utilizando la misma, trae aparejado por sobre todo, los inconvenientes propios del lenguaje formal.

En base a lo expuesto, y con el objetivo de ofrecer una herramienta de apoyo tanto para la teoría como la práctica, generamos una *propuesta de actividades* basada en el uso del software informático Geogebra, para colaborar en el proceso de visualización, entendiendo por visualizar a la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto que colaboren con el descubrimiento y la comprensión de nociones matemáticas, tal como lo señalan Zimmerman y Cunnicanham (1991).

La *propuesta de actividades* consiste específicamente de un conjunto de actividades interactivas desarrolladas con el software Geogebra que permiten a través de la manipulación de variadas y numerosas gráficas colaborar no sólo con la aprehensión de la noción intuitiva de límite de una sucesión numérica sino también con la interpretación del concepto a través de su definición formal.

### **Introducción**

Son varios los temas que en primer año de las carreras universitarias de Matemática y Física generan inconvenientes a los estudiantes. En particular, de la asignatura Cálculo I, hemos seleccionado el concepto de *límite de una sucesión numérica* para desarrollar una *serie de actividades* basada en el uso del software informático Geogebra, con el objetivo de ofrecer una herramienta de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Aún cuando la noción de límite de sucesión se introduce en forma intuitiva, la formalización del concepto a través de su definición y el desarrollo de ejercicios utilizando la misma, trae aparejado por sobre todo, los inconvenientes propios del lenguaje formal.

Plantea Artigue (1998) que las investigaciones didácticas en enseñanza y aprendizaje del análisis elemental se han visto promovidas por las persistentes dificultades que los estudiantes tienen al introducirse en el campo conceptual del Análisis y el ambiente general de insatisfacción generado por los cursos de Cálculo. Tall y Vinner (1981), señalan que hay una creencia generalizada de que el aprendizaje último del cálculo debe poner énfasis en los aspectos tradicionalmente formales de la disciplina, marginando la intuición y los aspectos heurísticos que, en conjunto, generan la construcción del conocimiento.

Respecto a las nuevas tecnologías y su relación con las representaciones semióticas, Hitt (1998) afirma que: "El uso de nuevas tecnologías para el aula como calculadoras y/o microcomputadoras permite un mayor acceso a la representación múltiple de conceptos matemáticos, promoviendo la articulación entre diferentes representaciones de los conceptos, y así facilitando el acceso a un nivel más importante en el aprendizaje de las matemáticas".



La propuesta que presentamos se basa fundamentalmente en trabajar con gran cantidad de gráficos para la interpretación de la definición de límite, que derivan continuamente en la manipulación algebraica inherente a la misma. Está organizada de forma tal que pueda ser utilizada tanto por el docente en la clase teórica como por los estudiantes para trabajar el concepto y su vinculación con la representación gráfica del mismo.

Con el objetivo principal de favorecer la visualización del concepto, entendiéndolo por visualizar a la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto que colaboren con el descubrimiento y la comprensión de nociones matemáticas, tal como lo señalan Zimmerman y Cunnicanham (1991), buscamos generar una herramienta que les permita poner en juego, por sobre todo, el análisis de los pasos que se siguen para lograr la conversión entre las diferentes representaciones del objeto en estudio.

### **En qué nos basamos para generar la *propuesta de actividades***

A partir de las observaciones de clases teóricas y el trabajo con los estudiantes en las clases prácticas y sus manifestaciones sobre sus inconvenientes con el concepto en cuestión, logramos detectar e identificar los problemas principales que obstaculizan la comprensión del concepto de límite de sucesiones numéricas y la interpretación de su definición. Además de los inconvenientes derivados de la dificultad de interpretación del lenguaje formal, surgió la dificultad de interpretación gráfica y algebraica y por sobre todo la relación entre todas ellas.

Apoyados en las muchas investigaciones que confirman que el uso de computadoras ayuda a los estudiantes en el proceso de visualización, a través de un mayor acceso a representaciones múltiples de conceptos matemáticos que promueven la articulación entre diferentes representaciones de los mismos, y que además el uso de este tipo de tecnología les permite trabajar individualmente, comprobar sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas, es que surge la idea de utilizar un software en el diseño de las actividades.

Se seleccionó el programa GeoGebra por ser un software libre y de plataformas múltiples diseñado especialmente para trabajar en educación matemática. Es un entorno sencillo, amigable y potente con el que se pueden realizar fácilmente construcciones geométricas y analíticas, y además ofrece la posibilidad del desarrollo de aplicaciones interactivas que pueden ser utilizadas desde un navegador de internet (applets).

### **En qué consiste la *propuesta de actividades***

La *propuesta* de actividades consiste específicamente de un conjunto de actividades interactivas desarrolladas con el software Geogebra que permiten a través de la manipulación de variadas y numerosas gráficas colaborar no sólo con la aprehensión de la noción intuitiva de límite de una sucesión numérica sino también con la interpretación del concepto a través de su definición formal.

Tal como expresáramos en la introducción, la noción de límite de sucesión generalmente se introduce en forma intuitiva, que involucra la realización de tablas y de gráficos.

En este sentido, la primera parte de la propuesta plantea trabajar con applets generados con el Geogebra que permiten graficar diferentes sucesiones dada su expresión funcional, como muestra el gráfico 1.

### Gráfica de sucesión con texto dinámico

Para graficar otra sucesión, introducir una nueva expresión  $a(x)$  como se indica en el texto de la zona gráfica, y luego presionar la tecla enter.

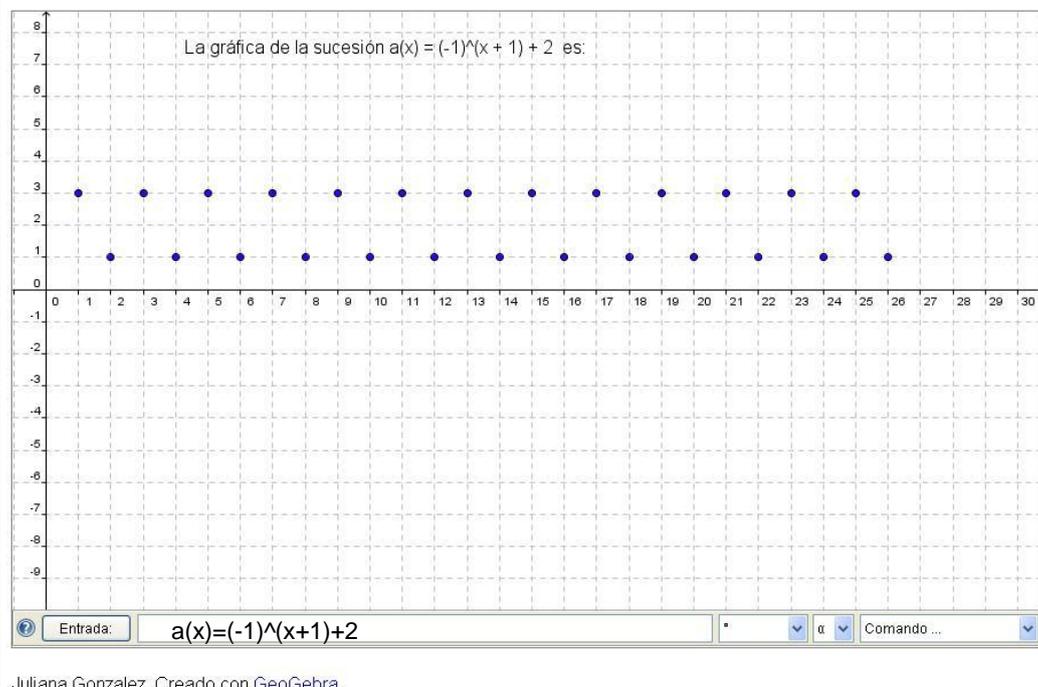


Gráfico 1

Esta aplicación permite ingresar en el cuadro de texto inferior la expresión funcional de la sucesión a graficar. Esto da la posibilidad al docente de presentar numerosos ejemplos en clase o bien al alumno practicar con otros.

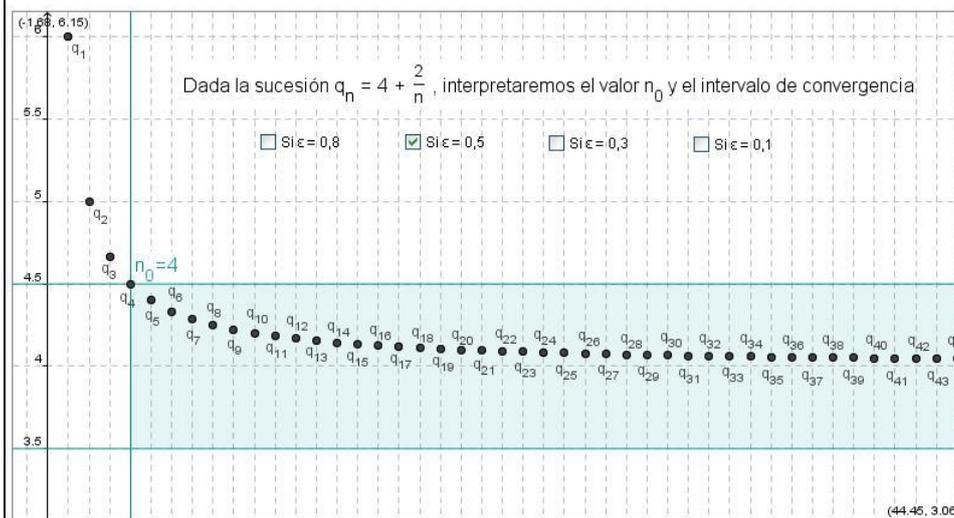
Otros applets, prevén la graficación de sucesiones ya especificadas. Estas aplicaciones presentan los ejercicios de la guía de trabajos prácticos convencional. Se trabaja también con el análisis de la convergencia sobre gráficos, para posteriormente investigar el comportamiento de ellas y poder relacionar conceptos como convergente, oscilante, divergente, monótona; y por último se trabaja con la definición de límite relacionando lo gráfico con la definición formal. Para trabajar con la definición de límite de una sucesión numérica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \geq 0)(\exists n_0) / (\forall n \geq n_0, |a_n - L| < \varepsilon) \text{ siendo } \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ y } n_0 \in \mathbb{N}$$

se generan aplicaciones interactivas que permiten determinar el valor de  $n_0$  a partir de un  $\varepsilon$  dado, como lo muestran los gráficos 2 a 5:

### Interpretación gráfica de la definición de límite

Esta planilla tiene como objetivo mostrar a partir de qué valor natural ( $n_0$ ), los términos de la sucesión se encuentran dentro del intervalo de convergencia

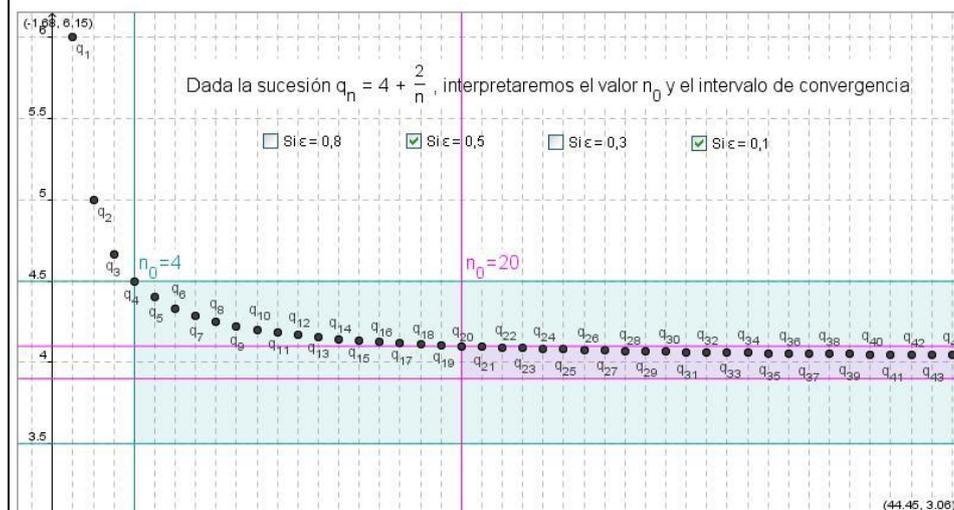


Juliana Gonzalez, Creado con GeoGebra

Gráfico2

### Interpretación gráfica de la definición de límite

Esta planilla tiene como objetivo mostrar a partir de qué valor natural ( $n_0$ ), los términos de la sucesión se encuentran dentro del intervalo de convergencia



Juliana Gonzalez, Creado con GeoGebra

Gráfico 3

Estos dos gráficos corresponden a diferentes alternativas de la misma aplicación. En el gráfico 2 se da la opción de graficar la recta  $x=n_0$  y el intervalo  $(L-\epsilon, L+\epsilon)$  para un único valor de  $\epsilon$ , mientras que en el gráfico 3 se ve la posibilidad que también ofrece de realizar lo mismo para diferentes valores de  $\epsilon$  en forma simultánea.

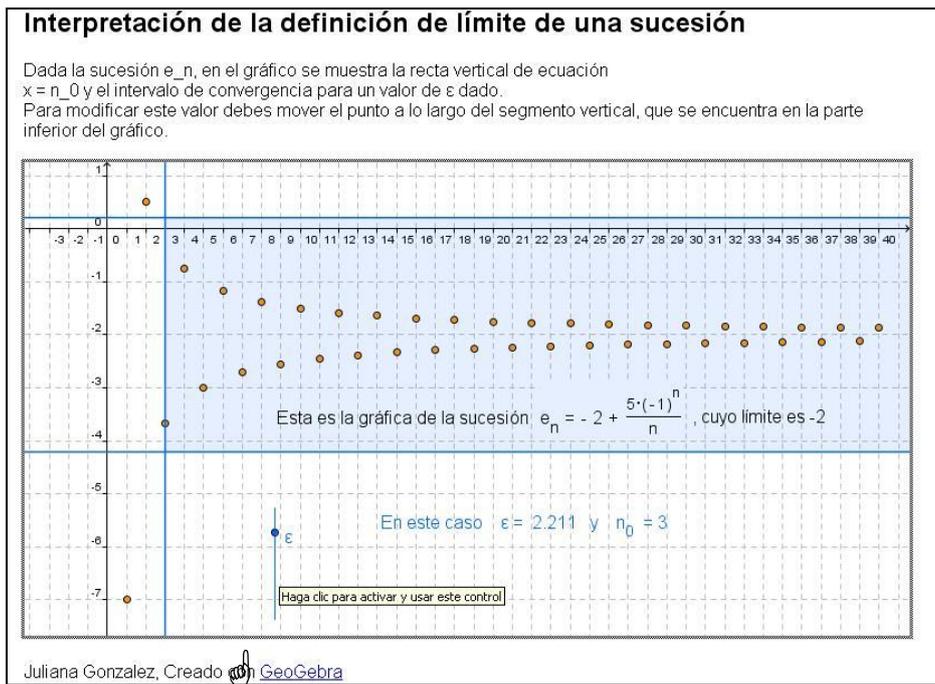


Gráfico 4

El gráfico 4 muestra un ejemplo en el cual, dada una sucesión, permite calcular el valor de  $n_0$  y graficar la recta  $x=n_0$  y el intervalo  $(L-\epsilon, L+\epsilon)$  para diferentes valores de  $\epsilon$  que están predefinidos en un intervalo. Esto se logra moviendo con el mouse el punto que tiene la manito sobre la barra vertical. En todo momento, a medida que varía, muestra el valor de  $\epsilon$  seleccionado y de  $n_0$  correspondiente.

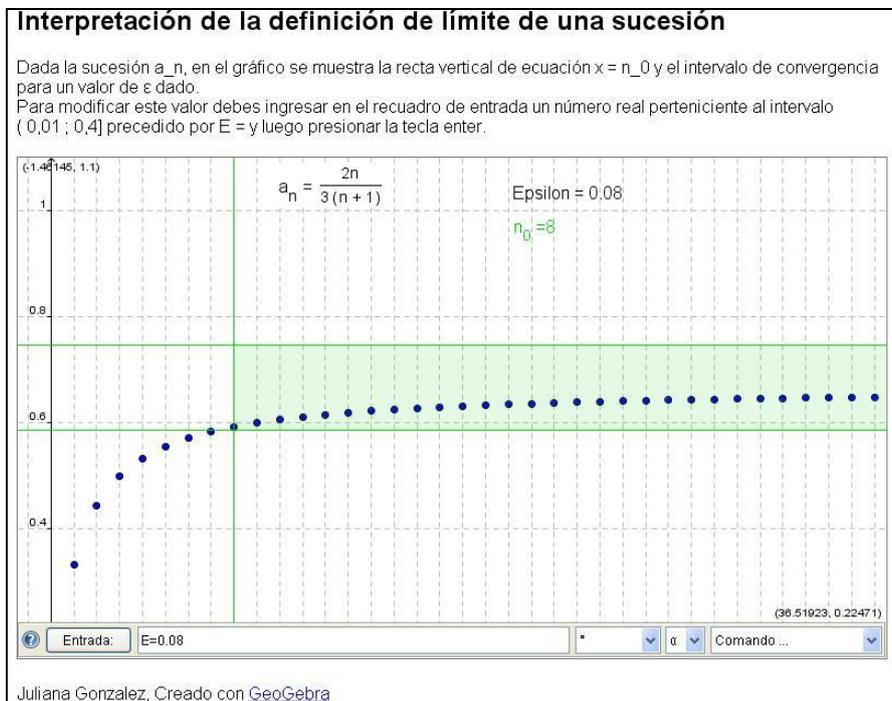


Gráfico 5

El gráfico 5 muestra otro tipo de ejercicio, en el cual dada una sucesión se prevé la posibilidad de que se grafique la recta  $x=n_0$  y el intervalo  $(L-\epsilon, L+\epsilon)$  para un valor de  $\epsilon$  que se ingresa dentro de un rango permitido.

En todos los casos las aplicaciones permiten trabajar el concepto:

- en forma coloquial, haciendo énfasis en cada una de las partes de la definición de límite de una sucesión numérica que se ve involucrada a medida que la gráfica se visualiza
- en forma algebraica, realizando los cálculos que llevan a obtener el valor de  $n_0$  en cada caso
- en lenguaje formal, escribiendo la definición específica para cada sucesión que se trabaja

### Consideraciones finales

Tal lo explicitado, esta propuesta de actividades tiene como objetivo principal ser una herramienta, tanto para el docente como para los alumnos. Para los alumnos, a fin de colaborar en la interpretación del concepto de límite de una sucesión numérica. Para los docentes a fin de colaborar en la enseñanza no sólo específicamente en el tema tratado, sino también desde el punto de vista que la herramienta tecnológica les plantea el desafío de diseñar actividades que aprovechen sus características con el potencial de apoyar nuevas maneras de enseñanza.

En ese contexto, las aplicaciones Geogebra descritas en el trabajo permiten abordar el concepto en formas diferentes. Desde lo básico y sencillo como es graficar una sucesión numérica, hasta la complejidad de determinar para una sucesión, el valor de  $n_0$  a partir de un  $\epsilon$  dado. No obstante es importante destacar que las aplicaciones Geogebra tienen sentido de ser utilizadas siempre que se enfatice el trabajo con diferentes representaciones del concepto. Por otra parte, el hecho de que las actividades utilicen applets de fácil manejo, permite al



estudiante trabajar en forma individual, en cualquier sitio donde sólo disponga de una computadora.

Se espera que la implementación de este tipo de ejercitación con soporte informático, que apuntan a las distintas representaciones, con énfasis en las gráficas, permita una mejor predisposición, por parte de los alumnos, en el abordaje de un concepto tan complejo como el de límite de una sucesión numérica. Como consecuencia se espera que este material signifique un verdadero complemento para la comprensión del concepto, lo que en la teoría de las representaciones significa un aprendizaje más estable.

### **Bibliografía**

- Artigue M. (1998) Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime* 1 (1) 40-55.
- Hitt, F. (1998) Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum, *Educación Matemática* Vol. 10, N° 2, Agosto, págs. 23-45.
- Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (1998). *Calculus with Analytic Geometry* (6ª Ed). Houghton Mifflin Ed. New York.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? en Zimmerman y Cunningham (Eds) *Visualization in teaching and learning mathematics*. (pp 1-8). EEUU, Mathematics Association of America.