LAS TEORÍAS DIDÁCTICAS TAMBIÉN NECESITAN BUENOS EJEMPLOS: ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD PARA EL JUEGO DE MARCOS

Nancy Elizabeth Jagou - Jorge Orlando Manzur
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales, U.Na.M. - Argentina
njagou@arnet.com.ar

Nivel Educativo: Universitario
Palabras Clave: Juego de marcos, Análisis didáctico, Sistema de ecuaciones, Soluciones

Resumen

En Didáctica de la Matemática, se habla de juegos de marcos para subrayar que la mayoría de los conceptos matemáticos pueden intervenir en diversos marcos, por ejemplo el geométrico, el aritmético, el algebraico, etc. De allí resultan correspondencias entre objetos y relaciones en los diferentes marcos, en el caso analizado, entre la determinación del número de soluciones del par de ecuaciones dadas y la obtención de los puntos comunes de los lugares geométricos representados por dichas ecuaciones.
Dada la formulación del problema elegido, (ejemplo presentado por Arcavi en su artículo “Sentido del Símbolo: crear sentido informal en las matemáticas formales”, revista For the Learning of Mathematics, 1994) es de esperar que los alumnos inicien la búsqueda de solución trabajando en el marco algebraico; sin embargo las dificultades que encontrarán hará necesario valerse de las representaciones geométricas de las ecuaciones, como apoyo y control de los resultados parciales. Además, si bien el trabajo en el marco geométrico aportará información sobre lo hecho, permitiendo validar los resultados parciales obtenidos, no será suficiente para confirmar qué raíces reales son múltiples, o si considerando también las soluciones complejas, la cantidad de soluciones posibles se modifica.
No siempre resulta sencillo encontrar actividades que pongan en evidencia cuestiones que se plantean desde la teoría; por ello en este trabajo nos proponemos, desde el análisis didáctico del problema elegido, enfatizar que en el aprendizaje de una noción matemática, o en la resolución de un problema, el hecho de cambiar de marco en el que se afronta dicho problema permite desbloquear los procesos de comprensión y, en muchos casos, generalizar una noción, un procedimiento o un significado matemático.

Introducción

El presente trabajo se puede enmarcar dentro de un problema que se ha denominado en la literatura didáctica como “traducciones entre los diferentes modos de representación de los conceptos matemáticos (juegos de marcos, Douady)”. Adherimos a Duval en el argumento de que los conceptos se van construyendo mediante acciones que impliquen el uso de diferentes representaciones ya sea de los conceptos, o de los objetos matemáticos, así como la manipulación de éstos para promover una articulación coherente entre ellos y sus representaciones; es por ello que este trabajo se propone mostrar la interacción y la conveniencia del tránsito que existe entre los diferentes marcos en los cuales se puede trabajar un determinado problema.
Se plantea una actividad, que se formula dentro del cuadro algebraico, y para abordarlo, el estudiante podría hacer interactuar de acuerdo a las competencias que posea, con el cuadro gráfico y relacionar la visualización con las representaciones simbólicas.
No obstante, aparece un riesgo cuando se transita sobre los diferentes cuadros: un aprendizaje centrado exclusivamente en la representación gráfica que no se puede conectar con los aspectos simbólicos y numéricos en el aprendizaje pueden llegar a influenciar de manera negativa en la mirada de los estudiantes; si bien la visualización es un concepto amplio que nos

permite acercarnos a un objeto de conocimiento tan profundamente como se quiera, es necesario poder conectar las relaciones entre la visualización gráfica y la construcción simbólica para poder argumentar con herramientas concluyentes.
El problema elegido es presentado por Abraham Arcavi (1994) entre distintas actividades propuestas para la construcción del sentido del símbolo. Afirma que "tener sentido del símbolo debería incluir el sentimiento intuitivo de cuándo convocar a los símbolos en el proceso de resolver un problema, y recíprocamente, cuándo abandonar un tratamiento simbólico cambiándolo o sustituyéndolo por herramientas mejores.
Agrega con relación a este problema que "por iniciarse en términos algebraicos, induce, de manera fuerte a una resolución algebraica, por consiguiente no sorprende que muchos estudiantes se lancen a la pelea con los símbolos sin darse cuenta de que las manipulaciones algebraicas pueden ser bastante trabajosas y propensas de error. Más aún, la decisión de descartar la tentación inicial casi inevitable de proceder principalmente en forma simbólica, requiere de una armonía saludable de **control** con el sentido del símbolo".
En este trabajo nos proponemos realizar el análisis didáctico de la situación planeada por Arcavi por considerarla ejemplificadora de los aspectos más salientes del "Juego de marcos" de Douady:

- El uso de un marco u otro afecta a los procedimientos de solución , su eficacia relativa e incluso el planteamiento de nuevos problemas,
- En el aprendizaje de una noción matemática, o la resolución de un problema, el hecho de cambiar de marco en el que se afronta dicho problema permite desbloquear procesos de comprensión y, en muchos casos, generalizar una noción, un procedimiento o un significado matemático.

El problema

Decir para que valores de ***a*** el par de ecuaciones (siendo ***a*** un número real)

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

Tienen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 soluciones.

Características del problema:

- Marcos posibles de abordaje

Enunciado en términos algebraicos, induce de manera fuerte a una solución algebraica; sin embargo la complejidad de las manipulaciones algebraicas y la necesidad de controlar la veracidad de los resultados obtenidos favorecen la búsqueda de otra aproximación, de otra manera de resolverlo.
El cambio de representación, apelar al gráfico cartesiano y las consiguientes consideraciones geométricas sugieren otra manera de visualizar y ver el problema: el número de intersecciones entre las diagonales del plano cartesiano $\left(x^2 - y^2 = 0, \text{ a saber } y = \pm x\right)$ y una familia de circunferencias de radio 1 cuyos centros descansan sobre el eje de las "*x*".
Sin embargo, solo la interacción entre ambos marcos, algebraico y geométrico, evitarán posibles interpretaciones erróneas de los resultados obtenidos al graficar ambas ecuaciones (no considerar las soluciones reales iguales o las soluciones complejas por no visualizar los puntos de cortes).

- Conocimientos previos

Para abordar el problema analizado serán necesarios que los alumnos puedan apelar a los siguientes conocimientos:

- Solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (pares (x,y)que verifican ambas ecuaciones),
- Métodos de resolución (sustitución o igualación),
- Interpretación geométrica de las soluciones de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas,
- Método de resolución de una ecuación cuadrática con una incógnita, tipo de soluciones (en función del valor del discriminante),
- Interpretación geométrica de las ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones con dos incógnitas (ecuación de una circunferencia de radio 1 con centro en un punto de coordenadas $(a,0)$, ecuaciones de las diagonales de plano cartesiano) y de las soluciones del sistema (según sean reales distintas, reales iguales o complejas),
- Propiedades de las operaciones en R:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ ó } y = -x$$
$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y = x \text{ ó } y = -x$$

Análisis a priori de la resolución del problema

Abocados a la resolución algebraica del problema, podrán a partir del valor de y^2 obtener la ecuación cuadrática $(x-a)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + (a^2 - 1) = 0$ y caracterizar sus soluciones:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{(2-a^2)}}{2};\ x_2 = \frac{a - \sqrt{(2-a^2)}}{2}$$

es decir, determinar qué valores del parámetro "*a*" aseguran soluciones reales distintas, reales iguales o complejas. Con los valores de x_1 y x_2 hallados, deberán obtener los correspondientes valores de "y", determinando así, los pares de valores (x,y) solución de las ecuaciones dadas.
Ahora bien, los procedimientos utilizados para obtener la expresión para el cálculo de y son una posible fuente de error; en efecto podrán concluir equivocadamente a partir de la segunda ecuación que:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow y = x$$

en lugar de:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y = x \text{ ó } y = -x$$

y por lo tanto, no visualizar dos de las posibles soluciones del sistema.
En el marco geométrico, podrán apelar a la representación gráfica de las ecuaciones dadas y a partir del análisis de las posiciones relativas del par de rectas y de la circunferencia de radio 1 y centro $(a,0)$, indagar acerca de las soluciones del par de ecuaciones.

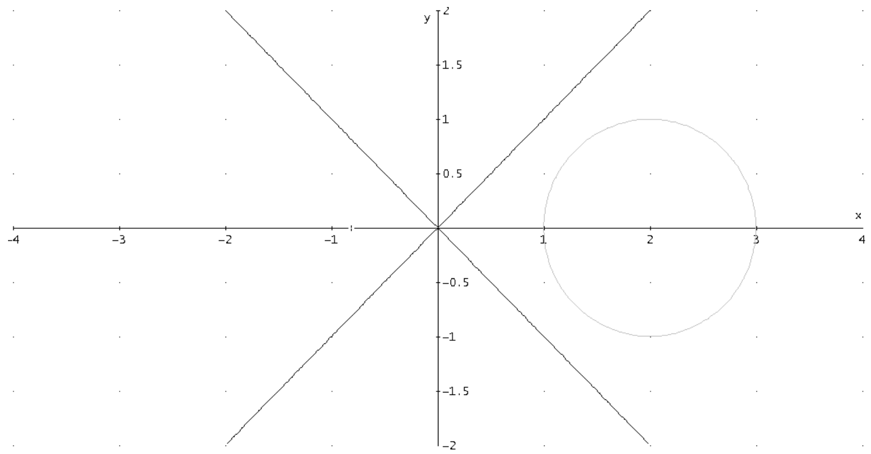

Gráfico Nº1

Aún cuando la expresión del valor de " y "esté bien hallada las gráficas de posiciones relativas de ambas ecuaciones pueden inducir a pensar que son posibles 0, 2, 3 y 4 soluciones. Seguidamente se presenta la resolución algebraica completa para mostrar que sólo la interacción entre ambos marcos permitirá establecer la cantidad de soluciones del sistema en función del valor del parámetro " a ". Así, las cuatro soluciones que posee el sistema de ecuaciones cualquiera sea el valor de " a "son las que se muestran a continuación:

- Si $2-a^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática serán números reales distintos, los que reemplazados en la expresión de y obtenida de la segunda ecuación, $y=x$ ó $y=-x$, darán cuatro soluciones distintas: $y_1=x_1$; $y_2=x_2$; $y_3=-x_1$; $y_4=-x_2$. (Gráfico Nº2).

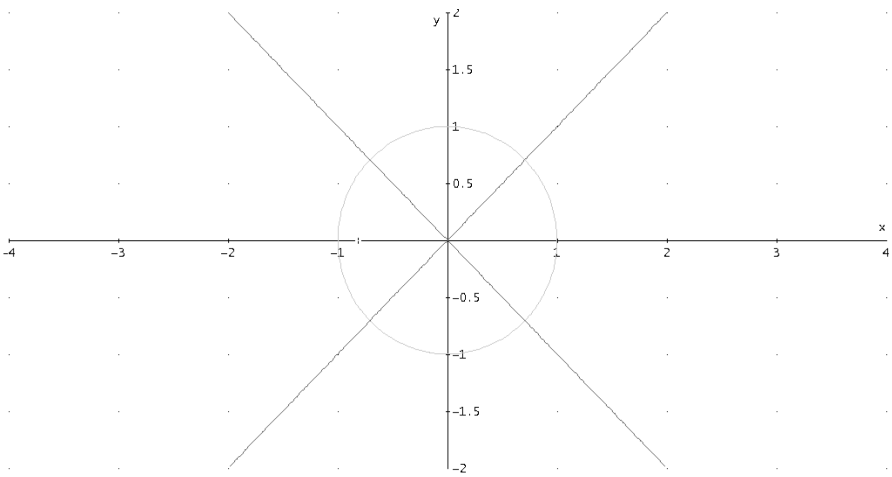

Gráfico Nº2

- Si en particular $a=1$, resulta $y_1=x_1=1$; $y_2=x_2=0$; $y_3=-x_1=-1$; $y_4=-x_2=0$ por lo tanto la solución $(x,y)=(0,0)$ es de multiplicidad dos. (Gráfico Nº3).

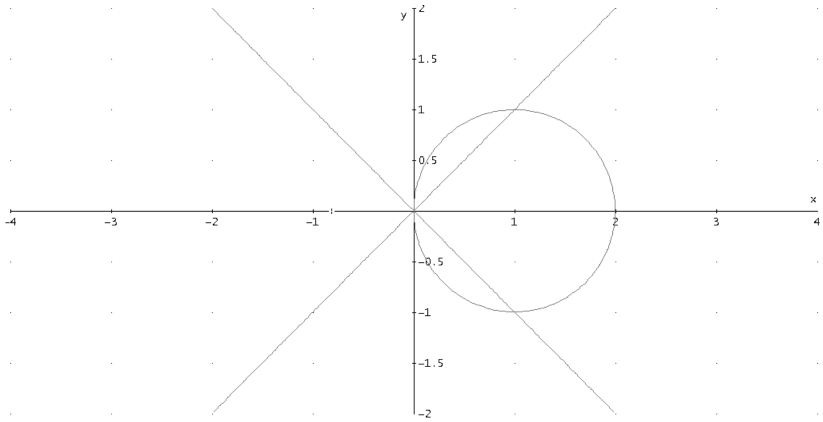

Gráfico Nº3

- Si $2-a^2=0 \Leftrightarrow a=-\sqrt{2}$ $ó$ $a=\sqrt{2}$ las raíces de la ecuación cuadrática serán $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto el sistema tendrá dos raíces de multiplicidad dos: $y_1=x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_2=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_3=-x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_4=-x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Gráfico Nº4).

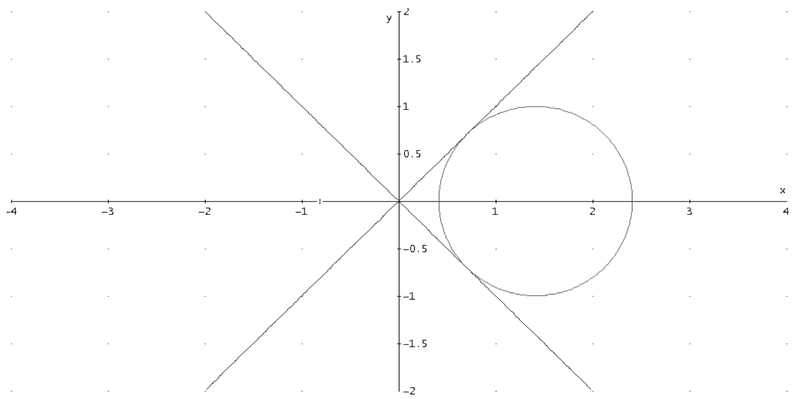

Gráfico Nº4

- Si $2-a^2<0 \Leftrightarrow a<-\sqrt{2}$ $ó$ $a>\sqrt{2}$ las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática serán complejos conjugados, y las del sistema de ecuaciones cuatro raíces complejas distintas: $y_1=x_1$; $y_2=x_2$; $y_3=-x_1$; $y_4=-x_2$ (Gráfico Nº1).

Del análisis a priori de los posibles procedimientos de resolución es posible anticipar que la interacción entre marcos estará asegurada, cualquiera sea el marco elegido inicialmente por los alumnos; en efecto, si el trabajo se inicia en el **marco algebraico**, el pasaje al marco geométrico estará favorecido por:

- la complejidad de la manipulación algebraica,

- la necesidad de interpretar y tener control sobre los resultados obtenidos, y
- la necesidad de confirmar el número de soluciones del par de ecuaciones dadas.

Si el trabajo se inicia en el **marco geométrico**, el paso al marco algebraico estará favorecido por la necesidad de:

- precisar los valores de "a" para los cuales se dan las soluciones visualizadas en los gráficos,
- confirmar posibles raíces múltiples,
- averiguar acerca de las soluciones que no pueden obtenerse gráficamente (soluciones complejas).

Análisis de la implementación de la Actividad

Esta actividad fue implementada con alumnos de la cátedra Taller II (Materia del segundo cuatrimestre de tercer año del profesorado en Matemática de la FCEQyN- UNaM), que habían cursado tres geometrías, 3 álgebras y cursaban simultáneamente, Didáctica de la Matemática (asignatura anual).
Como aspectos generales de los resultados obtenidos se rescata que:

- *En todos los casos los grupos apelan a un gráfico como punto de partida, aunque no responden acerca de las soluciones buscadas:*
- *La resolución la realizan en el marco algebraico, interactuando con el marco geométrico en algunos casos.*

Para explicitar los razonamientos involucrados en la resolución del problema se rescata lo hecho por uno de los grupos (grupo Nº3): inician el trabajo en el marco geométrico; realizan cuatro gráficos donde muestran las posiciones relativas de las diagonales del plano cartesiano y de la circunferencia de radio 1 para distintos valores del parámetro. Indican explícitamente en el gráfico los valores de $a = 0; 1; \sqrt{2}$ y consideran un cuarto caso en el que $a > \sqrt{2}$ aunque no indican el valor de "a"considerado.
Sin decidir acerca de la cantidad de soluciones de las ecuaciones dadas, seguidamente se abocan a la resolución algebraica del sistema.
Afirman que "el discriminante $-a^2 + 2$ les dirá con qué valor de "a", x adopta 0, 1, 2 soluciones que condicionará a "y" (por la relación $y^2 = x^2$) a tomar 0, 2, 4 soluciones respectivamente".
Nota: Establecen correctamente que la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ son las rectas de ecuaciones $y = x$ e $y = -x$ ya que recurren a la expresión factoreada de la ecuación: $(x + y)(x - y) = 0$
A partir del análisis de esta afirmación y de los realizado por el grupo al considerar las distintas posibilidades del discriminante, podemos postular que la información obtenida en el marco geométrico actúa de obstáculo al momento de decidir acerca de las soluciones de la ecuación de segundo grado e induce a descartar las raíces complejas y a no diferenciar entre raíces de distintas multiplicidad.

Comentarios Finales

Si bien este problema se abordó entre otros problemas que permitían desarrollar ciertas capacidades indispensables para asegurar la construcción del sentido del símbolo, el análisis didáctico de la actividad, realizado posteriormente, puso en evidencia su potencialidad para ejemplificar el Juego de Marcos de Douady.

Conscientes de la importancia de disponer de buenos ejemplos que permitan conceptualizar las teorías estudiadas en Didáctica de la Matemática, creímos importante aportar con el análisis didáctico de una actividad valiosa que, por sus características:

- permite encarar la resolución del problema a partir de los conocimientos previos de los alumnos, ya sea en el marco algebraico o geométrico,
- genera la necesidad de cambiar el curso de la acción, de considerar el problema en una forma diferente (buscar otra representación) cuando las manipulaciones algebraicas se vuelven trabajosas o cuando la representación gráfica de las ecuaciones involucradas no está disponible ,
- pone en evidencia la insuficiencia de la información suministrada por un único marco y la necesidad de interactuar entre marcos como forma de restablecer el desequilibrio originado por los resultados parciales, muchas veces contradictorios, obtenidos en uno y otro marco; o bien, cuando es necesario confirmar la veracidad de los resultados obtenidos en el marco inicial.

Bibliografía

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14 (3), pp. 24-35.

- Douady, R. (1983). Rapport enseignement-apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadre. Cahier de Didactique de la Mathématique, 3 (numéro spécial), 1-30.

- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (eds). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una Empresa Docente. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Godino, J., Font, V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), 9 (1): 117-150.