PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Silvia Salomone - Cristina Modarelli
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires – República Argentina
ssalomon@fio.unicen.edu.ar ; cmodarel@fio.unicen.edu.ar
Nivel educativo: Universitario
Palabras Clave: aprendizaje significativo – límite de una función

Resumen

Los grandes cambios en lo económico, social y tecnológico han implicado nuevas demandas al sistema educativo en general y a la Universidad, en particular.
Los docentes no debemos permanecer ajenos a ello, debemos entender que la manera de formar a los futuros profesionales no es sólo con la transmisión de conocimientos, sino que debemos intentar desarrollar en ellos la capacidad de aprender y razonar, herramientas que le serán útiles en cualquier actividad que deseen emprender. En consecuencia, debe redefinirse el rol docente como guía del proceso de enseñanza y aprendizaje hacia una participación activa y creativa de los alumnos. Entre los conceptos nuevos que aparecen en Análisis Matemático I, el de límite de funciones es uno de los que presenta mayor dificultad en los ingresantes a la Facultad de Ingeniería. Ante este problema, nos planteamos la necesidad de introducir nuevas estrategias de enseñanza con la intención de ofrecer a los alumnos la oportunidad de construir su propio aprendizaje logrando aprendizajes significativos. Con este objetivo, proponemos el diseño de una guía teórico-práctica para que el alumno construya conjuntamente con el profesor el contenido indicado y pueda interpretarlo gráfica y cuantitativamente.

Introducción

Los grandes cambios en lo económico, social y tecnológico han implicado nuevas demandas al sistema educativo en general y a la Universidad, en particular.
Los docentes no debemos permanecer ajenos a ello, debemos entender que la manera de formar a los futuros profesionales no es sólo con la transmisión de conocimientos, sino que debemos intentar desarrollar en ellos la capacidad de aprender y razonar, herramientas que le serán útiles en cualquier actividad que deseen emprender. En consecuencia, debe redefinirse el rol docente como guía del proceso de enseñanza y aprendizaje hacia una participación activa y creativa de los alumnos.
Los alumnos que cursan las primeras asignaturas en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires; son, en su mayoría, recientes egresados de la Escuela Media y como hemos probado en estudios realizados desde distintos proyectos de investigación, podemos afirmar que la adaptación al ritmo universitario es lenta y en algunos casos, dificultosa.
La amplia brecha existente entre la preparación recibida por los alumnos en la Enseñanza Media y los requerimientos mínimos que exige una carrera universitaria provoca en los ingresantes un profundo sentimiento de fracaso y frustración, que se traduce en un bajo rendimiento en las primeras asignaturas y en altos índices de deserción.
En la asignatura Análisis Matemático I, un contenido que presenta grandes dificultades para su aprendizaje es el de límite de funciones, en este trabajo proponemos el diseño de una guía teórico-práctica para que el alumno construya conjuntamente con el profesor el contenido indicado y pueda interpretarlo gráfica y cuantitativamente.

Además, se espera lograr que los alumnos sean capaces de enfrentar situaciones problemáticas nuevas en las que tengan que aplicar el concepto de límite, que se apropien de técnicas que les permitan inferir y abstraer en situaciones que así lo requieran.

Fundamentación

El aprendizaje significativo surge cuando el alumno, como constructor de su propio conocimiento, relaciona los conceptos a aprender y les da un sentido a partir de la estructura conceptual que ya posee. Dicho de otro modo, construye nuevos conocimientos a partir de los conocimientos que ha adquirido anteriormente.
Según la teoría de David Ausubel el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, es decir sus ideas previas; el profesor lo debe identificar y enseñar en consecuencia.
La concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje pues es él quien construye el conocimiento y nadie puede reemplazarlo en esa tarea.
2. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que ya poseen un cierto grado de elaboración.
3. El hecho de que la actividad constructiva del alumno se aplique a unos contenidos de aprendizaje preexistente condiciona el papel del docente como guía pues su función no puede limitarse únicamente a crear las condiciones óptimas para que el alumno desarrolle una actividad mental constructiva rica y diversa; además, debe orientar esta actividad con el fin de que la construcción del alumno se acerque de forma progresiva a lo que significan y representan los contenidos como saberes culturales.

Entre los requisitos para que el alumno pueda llevar a cabo aprendizajes significativos se pueden mencionar:

- Significatividad lógica del material: el material que presenta el docente al estudiante debe estar organizado, para que se de una construcción de conocimientos.
- Significatividad psicológica del material: que el alumno conecte el nuevo conocimiento con los previos y que los comprenda.
- Actitud favorable del alumno: el aprendizaje no puede darse si el alumno no quiere. Este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, en donde el docente sólo puede influir a través de la motivación.

Enseñar, según esta teoría, significa descubrir lo que el alumno ya sabe, y preparar esas ideas previas que tiene en su estructura cognitiva y orientarlas para poder conectarlas con la nueva información a través de la motivación.

Metodología

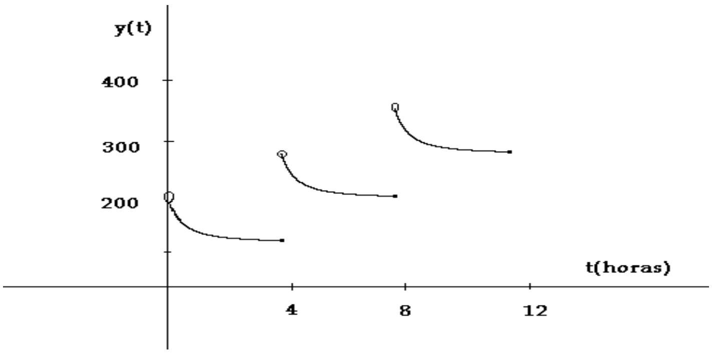
La guía teórico-práctica constará de:
✓ Un problema motivador.
✓ Consignas que el alumno deba completar donde se descubran los conocimientos previos
✓ Consignas para completar que permitan al alumno incorporar la nueva información en forrna sustantiva en su estructura cognitiva; esto se logra cuando el estudiante relaciona el nuevo conocimiento con los anteriormente adquiridos.
✓ Formalización de la definición.
✓ Resolución del problema planteado.

Para completar las consignas los alumnos trabajarán en grupo para facilitar la etapa de verbalización. Las consignas provocan conflictos ya que en el grupo puede suceder que no todos las completen con la misma respuesta, entonces cada uno tendrá que argumentar su afirmación, y los alumnos aprenderán algo muy importante en matemática que es argumentar y contra argumentar para encontrar la respuesta acertada y con este proceso se va desarrollando el pensamiento hipotético deductivo propio del conocimiento matemático.
Los alumnos dispondrán de una guía teórico-práctica en la que se diferenciarán consignas en las cuales harán uso de sus conocimientos previos (gráficas de funciones, dominio, imagen, valor absoluto como concepto de distancia); en otras, se investigarán situaciones particulares, se las compara, se construye el concepto y finalmente se da un contraejemplo para validar la definición.
En cuanto al aspecto humano, los alumnos son protagonistas activos y el docente actúa como guía en la construcción del conocimiento.

Guía Teórico-Práctica

✓ **Problema motivador**

Un paciente recibe una dosis inicial de 200 mg de medicamento. Posteriormente se le administra una dosis de 100 mg cada 4 hs. La figura muestra la cantidad y(t) de medicamento en la sangre a las t hs. Calcule e interprete $\lim\limits_{t\to 8^-} y(t)$ y $\lim\limits_{t\to 8^+} y(t)$



✓ **Conocimientos previos**

1) Escribe con tus palabras lo que para vos significa encontrar el límite de una función en un punto dado.
2) Efectúa la correspondencia entre los conjuntos de la columna de la derecha con los de la columna de la izquierda.

El conjunto de números cuya distancia al 3 es menor que 1	$\lvert x+1 \rvert < 2$
El conjunto de números cuya distancia al -1 es menor que	$\lvert x+4 \rvert < \delta$
El conjunto de números cuya distancia al 4 es menor que ε	$\lvert x \rvert < 1$
El conjunto de números cuya distancia al 0 es menor que 1	$2 < x < 4$
El conjunto de números cuya distancia al -4 es menor que δ	$x \in (4-\varepsilon,\, 4+\varepsilon)$

3) Representa gráficamente, en ejes de coordenadas cartesianas, las siguientes funciones y halla el dominio y la imagen de cada una de ellas.

a) $f_1(x) = 3x$ b) $f_2(x) = \begin{cases} x/2 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$ c) $f_3(x) = \sqrt{x}$

d) $f_4(x) = \dfrac{1}{x-2}$ e) $f_5(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ f) $f_6(x) = [x]$

g) $f_7(x) = -2^x$ h) $f_8(x) = \dfrac{2(x^2-4)}{x-2}$

✓ **Construcción del concepto de límite de una función**

4) ¿En el ejercicio anterior hay funciones que a medida que “x” se aproxima a “2”, sus imágenes se acercan a algún valor finito?
Si es así, menciona cuáles son esas funciones y cuál es el número.
A ese número lo llamaremos L_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 según corresponda.

5) Completa la siguiente tabla para las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ del ejercicio 3, acercándonos a “x = 2” con valores mayores que él, (por derecha), y valores menores que 2, (por izquierda).

X	F(x)	$\lvert f_1(x) - L_1 \rvert$	$\lvert x - 2 \rvert$
1,5			
2,5			
1,8			
2,2			
1,9			
2,1			
1,99			
2,01			
1,999			
2,001			

x	F(x)	$\lvert f_2(x) - L_2 \rvert$	$\lvert x - 2 \rvert$
1,5			
2,5			
1,8			
2,2			
1,9			
2,1			
1,99			
2,01			
1,999			
2,001			

Observa la tercer y cuarta columna y escribe tus conclusiones

6) Completa Si $\lvert f_1(x) - L_1 \rvert < 1,5$ $\Rightarrow \lvert x - 2 \rvert <$ ....
Si $\lvert f_1(x) - L_1 \rvert < 0,6$ $\Rightarrow \lvert x - 2 \rvert <$ ....
Si $\lvert f_1(x) - L_1 \rvert < 0,3$ $\Rightarrow \lvert x - 2 \rvert <$ ....
Si $\lvert f_1(x) - L_1 \rvert < 0,03$ $\Rightarrow \lvert x - 2 \rvert <$ ....
Si $\lvert f_1(x) - L_1 \rvert < 0,003$ $\Rightarrow \lvert x - 2 \rvert <$ ....

En general Si $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ $\Rightarrow 0 < \lvert x - 2 \rvert < \delta$, ¿existe alguna relación entre ε y δ?

7) Grafica $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2-16)}{(x-4)} & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases}$

a) ¿A qué valor se acerca la imagen de f(x) cuando x se acerca a 4?, a ese valor llámalo L
b) Completa la siguiente tabla

X	f(x)	$\lvert f(x) - L \rvert$	$\lvert x - 4 \rvert$
3,5			
4,5			
3,8			
4,2			
3,9			
4,1			
3,99			
4,01			
3,999			
4,001			

c) Observa la tercer y cuarta columna y escribe tus conclusiones.

8)
a) Si $\lvert f(x) - L \rvert < 0,4$ $\Rightarrow$ $\lvert f(x) - \text{.......} \rvert < 0,4$ $\Rightarrow$ ....< f(x) <..........

Si $f(x_1) = 15,6$ $\Rightarrow$ x_1 = ...

Si $f(x_2) = 16,4$ $\Rightarrow$ x_2 = ...

¿ x_1 y x_2 son simétricos respecto a x = 4?

¿Qué distancia debo considerar para que si "f(x)" pertenece al intervalo (16-0,4; 16+0,4), entonces "x" pertenezca al intervalo (4-δ; 4+δ)? (nótese que se ha considerado ε = 0,4)
Luego si $\lvert f(x) - 16 \rvert < 0,4 \Rightarrow$ $\lvert x - 4 \rvert <$ ....

b) Consideremos ahora ε = 0,2

Si $\lvert f(x) - L \rvert < 0,2$ $\Rightarrow$ $\lvert f(x) - \text{.......} \rvert < 0,2$ $\Rightarrow$ ....< f(x) <...............

Si $f(x_1) = 15,8$ $\Rightarrow$ x_1 = ...

Si $f(x_2) = 16,2$ $\Rightarrow$ x_2 = ...

¿ x_1 y x_2 son simétricos respecto a x = 4?

¿Qué distancia debo considerar para que si f(x) pertenece al intervalo (16-0,2; 16+0,2) "x" pertenezca al intervalo (4-δ; 4+δ)?

Luego si $\lvert f(x) - 16 \rvert < 0,2$ $\Rightarrow$ $\lvert x - 4 \rvert <$ ....

c) ¿Podemos decir que el valor de δ depende de ε? ....¿Por qué?........................

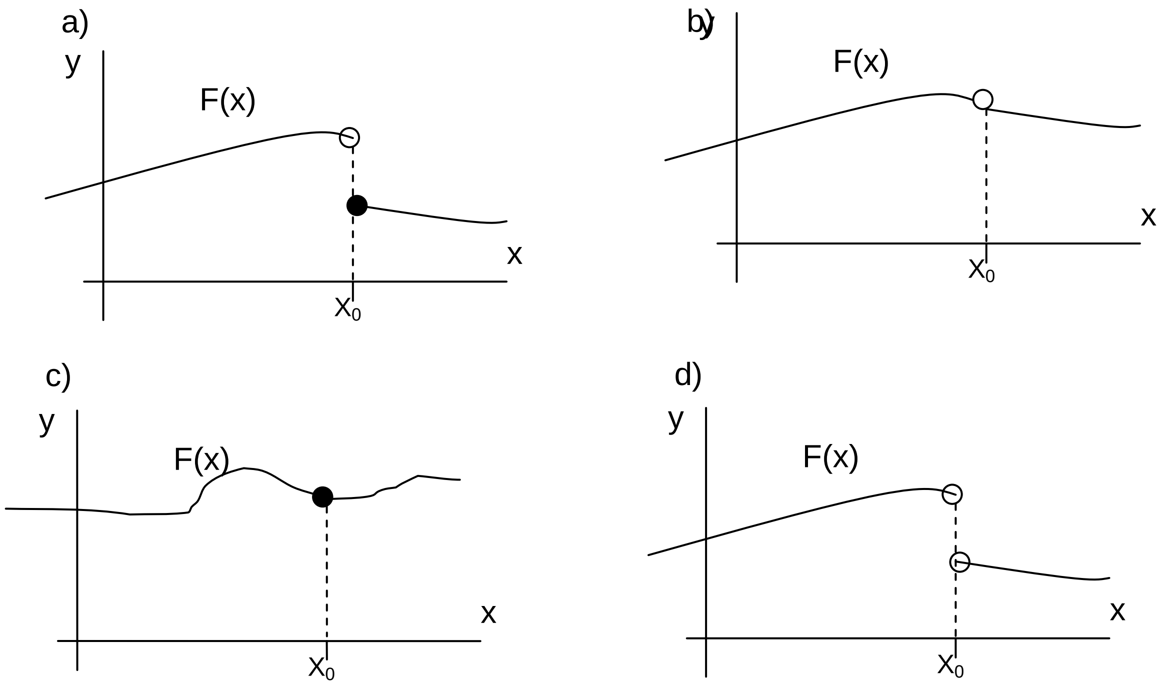
Definición: Decimos que una función f(x) tiene límite "L" para x tendiendo a x_0 si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (dependiente de ε), tal que si x está en el entorno ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$), con x distinto de x_0, entonces f(x) está en el entorno (L- ε, L+ε).

9) Escribe en símbolos la definición de límite de una función en un punto x_0.

10) Representa gráficamente la definición para una curva genérica

11) Observemos la gráfica de la función $f_6(x)$ del ejercicio 3.
¿Podemos decir que cuando "x tiende a 2" f(x) tiene límite L = 1?................
¿Podemos decir que cuando "x tiende a 2" f(x) tiene límite L = 2?................
Tomar $\varepsilon = 0.5$ y graficar para L = 1
¿Puedo encontrar algún $\delta(\varepsilon)$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$?......... ¿Por qué?

12) Dadas las siguientes gráficas discutir y justificar cuales tienen límite en el punto indicado.



13) ¿Cómo expresarías el siguiente problema en términos de límite de una función?.

a) Dado un cuadrado interior a una circunferencia ¿hasta que valor puedo aumentar el lado del cuadrado para que sea siempre interior a la circunferencia?
b) El mismo problema pero cuando el radio de la circunferencia es 5 cm.
c) El mismo problema pero cuando el diámetro de la circunferencia es 12 cm.

A modo de conclusión

Esta propuesta didáctica intenta constituir un aporte en la enseñanza y aprendizaje de un concepto como el de límite de una función en el nivel universitario y también en el nivel medio.
Además, de acuerdo con Apple (1986), “no hay otra elección que comprometerse”, lo cual implica repensar y reorientar nuestra tarea docente hacia un papel activo por parte del alumno; en definitiva que el estudiante de sujeto pasivo se convierta en el centro del proceso de aprendizaje.
Para ello el profesor debe superarse sistemáticamente, no solamente para actualizarse en todas las técnicas que requiere su profesión sino, sobre todo, para lograr que sus alumnos no solo aprendan nuevos conocimientos sino que "aprendan a aprender".
Por otra parte, el presente trabajo pretende compartir con otros colegas este pequeño aporte que la matemática puede hacer a la formación del ingeniero desde el inicio de sus estudios universitarios.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognitivo.* (2º Ed.). México; Trillas.

Apple, M. (1986). *Ideología y Currícula*. Madrid: Akal.

Chrobak, R. (1998). *Metodologías para lograr aprendizaje significativo.* Neuquén: EDUCO.

Porlán, R. (1994). *Constructivismo y escuela*. Sevilla: Díada Editora.

Smith, R. & Minton, R. (2005). *Cálculo*. México: Mc Graw-Hill.

Stewart, J. (2006). *Cálculo: Conceptos y Contexto*. (3º Ed.). México: Internacional Thomson.

Thomas Jr. G. (2006). *Cálculo. Una variable*. (11º Ed.). México: Pearson Educación.