Geometría Axiomática de la Convexidad
Parte I: Axiomática de Segmentos

Juan Carlos Bressan

Resumen

En este trabajo haremos una introducción a la Geometría Axiomática de la Convexidad, para dos niveles en la formación matemática del alumnado.

La Parte I, que veremos en este número, está destinada a introducir, en forma elemental, una axiomática de segmentos caracterizados mediante tres axiomas independientes. El desarrollo de esta axiomática permitirá obtener varias propiedades de los conjuntos convexos y de la cápsula convexa de un subconjunto A, es decir, del menor conjunto convexo que incluye al A.

La Parte II, que estudiaremos en el próximo número, estará destinada a alumnos con mayor formación matemática. Allí consideraremos como concepto primitivo el de cápsula convexa, que caracterizaremos mediante cuatro axiomas independientes que son teoremas de la axiomática de segmentos. Se desarrollará este sistema y se probará su equivalencia con el sistema axiomático de segmentos visto en la Parte I.

La consistencia de estos sistemas queda asegurada ya que sus axiomas son válidos en el plano y el espacio.

Finalmente, en un Apéndice un nuevo axioma, independiente de los anteriores, permitirá estudiar la separación de convexos mediante semiespacios.

1.- Introducción.

En las estructuras algebraicas se crean sistemas axiomáticos con pocos axiomas que son satisfechos por diversos conjuntos numéricos o geométricos los cuales son sus modelos. Así, la estructura de grupo tiene entre sus modelos el conjunto **Z** de los enteros con la operación de suma; el conjunto Q* de los racionales no nulos con la operación de producto y el de vectores del plano de un mismo origen, con la operación de suma.

Lo mismo puede hacerse con los sistemas axiomáticos en Geometría. Siguiendo esta idea podemos considerar pequeños sistemas axiomáticos cuyos axiomas sean satisfechos por la Geometría elemental pero que admitan además otros modelos incluso con un número finito de puntos. Muchos de estos sistemas tienen los conceptos primitivos de punto, recta y plano (ver Blumenthal (1965)). Nuestra idea consiste en tomar como términos primitivos los de punto y segmento cerrado, y con pocos axiomas desarrollar las propiedades básicas de los convexos y de la cápsula convexa.

Evidentemente, pasar de una axiomática de segmentos a una de cápsula convexa exige un mayor nivel de formación por parte del alumnado; por tal motivo se tratará en la segunda parte, donde, a partir de algunas propiedades de la cápsula convexa deducidas en el sistema axiomático de los segmentos se obtendrá otro sistema equivalente al anterior pero que tome como concepto primitivo el de cápsula convexa.

Para probar la independencia de cada axioma, tendremos que encontrar una interpretación que no cumpla dicho axioma, pero que satisfaga los restantes axiomas del sistema.

El presente trabajo procede de la teoría axiomática de la convexidad y persigue como fin que el alumno logre hacer algunas demostraciones en geometría mediante axiomas no tradicionales.

La notación lógica y conjuntista de la presente publicación es la ya utilizada por Bressan-Ferrazzi (2009) en *Lógica simbólica y teoría de conjuntos, Partes I y II*, de la Bibliografía.

PARTE I

Axiomática de Segmentos

2.- Un sistema axiomático para los segmentos

El concepto de segmento determinado por dos puntos es uno de los más intuitivos de la Geometría elemental. Por supuesto que estos segmentos gozan de muchas propiedades, tres de las cuales serán tomadas como axiomas en este trabajo. Ello permitirá familiarizar al alumno con desarrollos axiomáticos en Geometría, demostrando algunas propiedades de los convexos y de la cápsula convexa y probando además la independencia de los axiomas.

Consideraremos un conjunto X con $card\ X \geq 2$, cuyos elementos llamaremos *puntos*, y una función $s : X^2 \to P(X)$ que a cada par ordenado $(a,b) \in X^2$ le asigne un subconjunto $s(a,b) = [a,b] \subseteq X$ llamado *segmento cerrado* de extremos a, b. Estos segmentos quedarán caracterizados por tres axiomas que permitirán desarrollar únicamente las nociones básicas de la convexidad. De esta forma los siguientes tres axiomas, escritos en Lógica simbólica, caracterizarán este **sistema axiomático para los segmentos**. En todos ellos las letras minúsculas cursivas ($a, b, b_1, b_2, c_1, c_2, x, y$) denotan puntos de X .

S.1. $\{a,b\} \subseteq [a,b]$.

S.2. $[a,a] \subseteq \{a\}$.

S.3. $(\ c_1 \in [a,b_1] \wedge c_2 \in [a,b_2] \wedge x \in [c_1,c_2]\ ) \Rightarrow (\ \exists y \in [b_1,b_2]\ )[\ x \in [a,y]\ ]$.

Observemos que estos axiomas son satisfechos por los segmentos cerrados del plano como así también del espacio tridimensional. Por **S.1** los extremos del segmento $[a,b]$ pertenecen a dicho segmento, es decir, estos segmentos son cerrados. En **S.2** afirmamos que el segmento $[a,a]$, cuyos dos extremos son coincidentes, está incluido en el conjunto unitario $\{a\}$. Finalmente, **S.3** puede visualizarse en el plano mediante un triángulo de vértices a, b_1, b_2, como se ilustra en la Figura 1. Este axioma asegura que para cualquier segmento $[c_1, c_2]$ cuyos extremos pertenezcan respectivamente a los lados $[a,b_1]$ y $[a,b_2]$ se cumple que si $x \in [c_1,c_2]$ entonces existe $y \in [b_1,b_2]$ tal que $x \in [a, y]$. Destaquemos que este axioma es característico de la convexidad, permitiendo obtener interesantes propiedades de los conjuntos convexos.

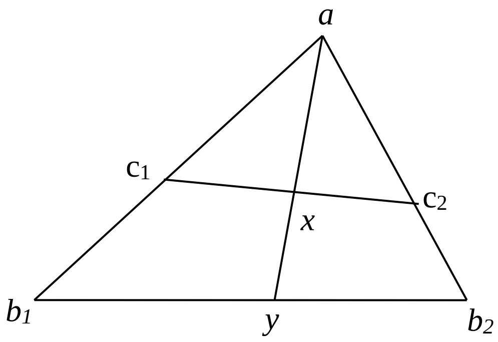

Figura 1

3.- Primeros resultados en el sistema axiomático para los segmentos

Demostraremos algunos resultados que pueden deducirse de los tres axiomas **S.1**, **S.2** y **S.3**.

Proposición 3.1. $[a,a] = \{a\}$.

Demostración. Si en **S.1** tomamos $b = a$ entonces $\{a, a\} \subseteq [a,a]$, pero como $\{a, a\} = \{a\}$ resulta $\{a\} \subseteq [a,a]$. Por otra parte, por S.2 $[a,a] \subseteq \{a\}$; luego $[a,a] = \{a\}$.

La siguiente proposición es un caso particular de **S.3**.

Proposición 3.2. $(c \in [a,b_1] \wedge x \in [c,b_2]) \Rightarrow (\exists y \in [b_1,b_2])[\, x \in [a,y]\,]$.

Demostración. Si en **S.3** reemplazamos c_1 por c, y tomamos $c_2 = b_2$, entonces la hipótesis de **S.3** se transforma en $c \in [a,b_1] \wedge x \in [c,b_2]$. De esta forma, se obtiene la tesis de 3.2 que es la misma que la de **S.3**.

La Figura 2 ilustra esta proposición.

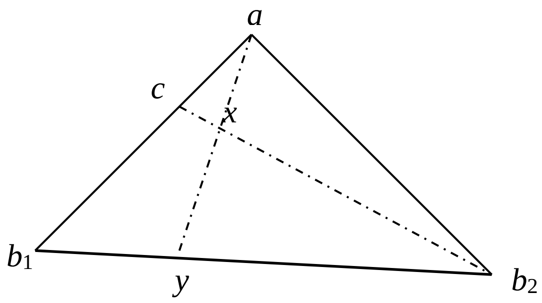

Figura 2

En la siguiente proposición demostraremos que todo segmento determinado por dos puntos c_1, c_2 de un segmento $[a,b]$ está incluido en $[a,b]$.

Proposición 3.3. $\{c_1, c_2\} \subseteq [a,b] \Rightarrow [c_1, c_2] \subseteq [a,b]$.

Demostración. Supongamos que $\{c_1, c_2\} \subseteq [a,b]$ y consideremos $x \in [c_1, c_2]$. Veremos que $x \in [a,b]$. Para ello tomamos $b = b_1 = b_2$, de esta forma podemos considerar que $c_1 \in [a,b] = [a,b_1]$ y $c_2 \in [a,b] = [a,b_2]$. Luego, por **S.3** existe $y \in [b_1, b_2] = [b,b]$ tal que $x \in [a, y]$. Pero por 3.1 $[b,b] = \{b\}$, de donde $y = b$. Luego, $x \in [a,b]$ y en consecuencia $[c_1, c_2] \subseteq [a,b]$.

Como consecuencia de 3.3 obtenemos 3.4, en donde vemos que en los segmentos no importa el orden en que se dan los extremos.

Proposición 3.4. $[a,b] = [b,a]$.

Demostración. Por **S.1** $\{a, b\} \subseteq [a,b]$, pero $\{a, b\} = \{b, a\}$. Luego, $\{b, a\} \subseteq [a,b]$ y por 3.3 es $[b,a] \subseteq [a,b]$. Análogamente se prueba que $[a,b] \subseteq [b,a]$ y en consecuencia $[a,b] = [b,a]$.

Al dar únicamente tres axiomas para caracterizar los segmentos no vamos a poder obtener muchos resultados de la Geometría, por ejemplo, no podremos construir otros segmentos mediante uniones de segmentos y así llegar al concepto de recta como una unión infinita de segmentos. Sin embargo, estos axiomas permiten demostrar ciertas propiedades de los conjuntos convexos.

Recordemos que un conjunto A es convexo si todo segmento determinado por puntos de A está incluido en A. Esta definición también puede expresarse diciendo que un conjunto $A \subseteq X$ es convexo si y solo si para todo $x \in A$, y para todo $y \in A$, se cumple que $[x, y] \subseteq A$. Esto queda expresado mediante la lógica simbólica utilizando el cuantificador universal "$\forall$" *para todo*, en la siguiente definición.

Definición 3.5. Diremos que $A \subseteq X$ es un conjunto *convexo* si y solo si

$$(\forall x \in A)\, (\forall y \in A)\, \big[\, [x, y] \subseteq A \,\big].$$

De la definición resulta que el conjunto vacío es convexo, pues cumple la condición anterior vacíamente. Además, como cualesquiera sean $x, y \in X$, $[x, y] \subseteq X$, resulta que X es convexo. Por otra parte, como consecuencia de 3.3 y 3.1 se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.6. Todo segmento $[a,b]$ es un conjunto convexo, en particular todo subconjunto unitario es convexo.

Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces $A \cap B = \{\, x \in X : x \in A \wedge x \in B \,\}$ y $A \cup B = \{\, x \in X : x \in A \vee x \in B \,\}$. Por otra parte, si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\, x \in X : (\forall i \in I)\, [x \in A_i] \,\}$ y $\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \in X : (\exists i \in I)\, [x \in A_i] \,\}$. Comenzaremos viendo qué ocurre al efectuar la intersección de subconjuntos convexos de X.

Proposición 3.7. La intersección de subconjuntos convexos de X es también un subconjunto convexo de X.

Demostración. En primer lugar consideremos A y B subconjuntos convexos de X y probemos que $A \cap B$ es un subconjunto convexo de X. Para ello tomemos $x, y \in A \cap B$. Como $x, y \in A$ y A es convexo, entonces $[x, y] \subseteq A$. Análogamente, obtenemos que $[x, y] \subseteq B$. Luego, $[x, y] \subseteq A \cap B$ y $A \cap B$ es convexo.

Ahora consideremos una familia $(A_i)_{i\in I}$ de subconjuntos convexos de X y veremos que $A=\bigcap_{i\in I} A_i$ es también un subconjunto convexo de X. En efecto, si $x,y\in A$, entonces para todo $i\in I$, $x,y\in A_i$, de donde por la convexidad de los A_i, $[x,y]\subseteq A_i$. Así, $[x,y]\subseteq A$, y en consecuencia $A=\bigcap_{i\in I} A_i$ es convexo.

En el caso de la unión de subconjuntos convexos resulta evidente que, en general, no obtenemos un convexo. Sin embargo, existe un caso muy particular que es conveniente analizar. Para ello comenzaremos dando un ejemplo de la geometría plana en el que la unión resulta ser convexa.

Ejemplo 3.8. Consideremos la familia de todos los círculos cerrados $C_r=\{\, x\in\Pi : d(p,x)\le r \,\}$ del plano euclidiano Π, con centro fijo p y radio $0<r<1$. Estos conjuntos son convexos, pero además dados C_{r_1} y C_{r_2}, si $r_1\le r_2$, entonces $C_{r_1}\subseteq C_{r_2}$, mientras que si $r_1\ge r_2$, entonces $C_{r_1}\supseteq C_{r_2}$. Por tal motivo, se dice que la familia $(C_r)_{r\in(0;1)}$ es una *cadena* ya que dados dos conjuntos cualesquiera de la familia siempre son comparables por la relación de inclusión. En este caso $C=\bigcup_{r\in(0;1)} C_r=\{x\in\Pi : d(p,x)<1\}$ es el círculo abierto de centro p y radio 1, que es un conjunto convexo.

El ejemplo dado nos hace pensar que cuando los conjuntos convexos considerados se encuentran totalmente ordenados por inclusión, es decir, cuando son una *cadena*, entonces su unión también es un conjunto convexo.

Proposición 3.9. La unión de una cadena de subconjuntos convexos de X es un subconjunto convexo de X.

Demostración. Consideremos una cadena $(C_i)_{i\in I}$ de subconjuntos convexos de X y tomemos $x,y\in C=\bigcup_{i\in I} C_i$. Así, existirán $i,j\in I$ tales que $x\in C_i$, $y\in C_j$. Pero, como $(C_i)_{i\in I}$ es una cadena, entonces $C_i\subseteq C_j$, o bien $C_j\subseteq C_i$. Si $C_i\subseteq C_j$, entonces $x,y\in C_j$ de donde $[x,y]\subseteq C_j$; luego $[x,y]\subseteq C$. En forma análoga, si $C_j\subseteq C_i$ entonces $[x,y]\subseteq C_i$ y también $[x,y]\subseteq C$. Luego, C es un subconjunto convexo de X.

4.- Conjuntos convexos y cápsula convexa

En el parágrafo anterior hemos demostrado la proposición 3.7 por la cual la intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de X es nuevamente un convexo. De esta forma, dado $A \subseteq X$ podemos tomar la intersección de todos los convexos $C \subseteq X$ tales que $A \subseteq C$ y dicha intersección será un conjunto convexo que incluye a A. Evidentemente, por la forma en que fue definido va a ser el menor conjunto convexo que incluye al conjunto A. Este conjunto es la cápsula convexa de A, que se denotará $conv\ A$, lo cual da lugar a la siguiente definición.

Definición 4.1. Dado $A \subseteq X$, diremos que $conv\ A$ es la *cápsula convexa* de A si y solo si $conv\ A = \bigcap \{ C \subseteq X : A \subseteq C \wedge C\ convexo \}$.

De la definición 4.1 se obtiene el corolario siguiente.

Corolario 4.2. La cápsula convexa cumple las siguientes condiciones que la caracterizan:

(i) $conv\ A$ es convexo.

(ii) $A \subseteq conv\ A$.

(iii) Si $A \subseteq B$ y B es convexo, entonces $(conv\ A) \subseteq B$.

La siguiente proposición es la propiedad de *dominio finito*, que es característica de todas las cápsulas de origen algebraico. Así, la cápsula afín o variedad afín generada por un subconjunto de un espacio vectorial, y el subgrupo generado por un subconjunto de un grupo, también satisfacen esta propiedad; mientras que la clausura por ser de origen topológico no cumple dicha propiedad (ver Bressan-Ferrazzi (2002)).

Proposición 4.3. Si $A \subseteq X$, $conv\ A = \bigcup \{ conv\ F : F\ \ finito\ \wedge\ F \subseteq A \}$.

Demostración. Sea $C_A = \bigcup \{ conv\ F : F\ \ finito\ \wedge\ F \subseteq A \}$. Veremos que C_A es convexo. Para ello tomemos $x, y \in C_A$; luego existirá un conjunto finito $F \subseteq A$ tal que $x, y \in conv\ F$ y como $conv\ F$ es convexo, $[x, y] \subseteq conv\ F$. En consecuencia, $[x, y] \subseteq C_A$, de lo que resulta que C_A es convexo. Evidentemente, $A \subseteq C_A$. Resta ver la condición (iii) de 4.2; para ello tomemos $A \subseteq B$ con B convexo. Luego, si $F \subseteq A$, tendremos que $F \subseteq B$ y $conv\ F \subseteq B$, ya que B es convexo. Así, $C_A \subseteq B$. Como C_A cumple las tres condiciones que caracterizan la cápsula convexa de A concluimos que $conv\ A = C_A$.

Proposición 4.4. La cápsula convexa goza de las siguientes propiedades:

(i) $A \subseteq X \Rightarrow conv\ A = conv(conv\ A)$.
(ii) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow conv\ A \subseteq conv\ B$.
(iii) A es convexo si y solo si $A = conv\ A$.
(iv) $conv\ X = X$, $conv\ \phi = \phi$, $conv\ \{a\} = \{a\}$ y $conv\ \{a,b\} = [a,b]$.
(v) $A, B \subseteq X \Rightarrow conv\ (A \cup B) = conv\ (A \cup conv\ B) = conv\ (convA \cup convB)$.

Demostración. (i), (ii) y (iii) son consecuencias de 4.1. Por otra parte, (iv) resulta de (iii) por ser X, ϕ, $\{a\}$ y $[a,b]$ convexos. Para probar (v) sabemos por 4.2 (ii) que $A \cup B \subseteq A \cup conv\ B \subseteq convA \cup convB$; luego, por 4.4 (ii) $conv\ (A \cup B) \subseteq conv\ (A \cup conv\ B) \subseteq conv\ (convA \cup convB)$. Por otra parte, por (ii) $convA \subseteq conv\ (A \cup B)$ y $convB \subseteq conv\ (A \cup B)$; en consecuencia, $convA \cup convB \subseteq conv\ (A \cup B)$ y $conv\ (convA \cup convB) \subseteq conv\ (A \cup B)$. Así, $conv\ (A \cup B) = conv\ (convA \cup convB)$ y $conv\ (A \cup B) = conv\ (A \cup conv\ B)$, con lo que quedan probadas las igualdades que figuran en (v).

Definición 4.5. Si A y B son subconjuntos no vacíos de X, definimos el conjunto $S(A,B)$ como la unión de todos los segmentos cerrados $[a,b]$ tales que $a \in A$ y $b \in B$, es decir $S(A,B) = \bigcup \{ [a,b] : a \in A \wedge b \in B \}$.

Para simplificar la notación, si $A = \{a\}$, escribiremos $S(a,B)$ en lugar de $S(\{a\},B)$. Análogamente, si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$, $S(\{a\},\{b\})$ se denotará $S(a,b)$.

El siguiente corolario es consecuencia de la definición de conjunto convexo.

Corolario 4.6. Si A es un subconjunto no vacío de X, entonces:

$$A \text{ es convexo, si y solo si } S(A,A) = A.$$

Como consecuencia inmediata de 4.5 resulta la proposición 4.7 que será utilizada para obtener la cápsula convexa de la unión de conjuntos convexos mediante unión de segmentos.

Proposición 4.7. Si A y B son subconjuntos no vacíos de X, entonces:

(i) $A \cup B \subseteq S(A,B) = S(B,A) \subseteq conv(A \cup B)$.
(ii) $S(A,B)$ es convexo, si y solo si $S(A,B) = conv(A \cup B)$.

5.- Obtención de conjuntos convexos y de la cápsula convexa mediante la unión de segmentos

En el parágrafo 3 vimos algunas propiedades de los segmentos que se deducían de los axiomas y que los segmentos, los conjuntos unitarios, el vacío y X son convexos. Ahora veremos cómo, mediante la unión de segmentos, podemos obtener algunos conjuntos convexos. En primer lugar estudiaremos cómo se genera un convexo a partir de un punto $a \in X$ y un segmento cerrado $[b_1, b_2]$ de X.

Proposición 5.1. Si $a \in X$ y $[b_1, b_2] \subseteq X$, entonces $S(a, [b_1, b_2])$ es convexo y $S(a, [b_1, b_2]) = conv(\{a\} \cup [b_1, b_2]) = conv\{a, b_1, b_2\}$.

Demostración. Sea $C = S(a, [b_1, b_2])$. Tomemos $c_1, c_2 \in C$ y probemos que $[c_1, c_2] \subseteq C$. Sea $x \in [c_1, c_2]$. Como $c_1, c_2 \in C$, existen $d_1, d_2 \in [b_1, b_2]$ tales que $c_1 \in [a, d_1]$ y $c_2 \in [a, d_2]$. De esta forma, puesto que $c_1 \in [a, d_1]$, $c_2 \in [a, d_2]$ y $x \in [c_1, c_2]$, podemos aplicar **S.3** por el cual existe $y \in [d_1, d_2]$ tal que $x \in [a, y]$. Pero por 3.3, $[d_1, d_2] \subseteq [b_1, b_2]$, y en consecuencia $y \in [b_1, b_2]$. Así, $x \in C$ y $[c_1, c_2] \subseteq C$; de esta forma, C es convexo. Además, por, 4.7 (ii) y 4.4 (v), $C = conv(\{a\} \cup [b_1, b_2])$ y $conv(\{a\} \cup [b_1, b_2]) = conv\{a, b_1, b_2\}$.

La Figura 3 ilustra la demostración de 5.1, tomando en el plano los puntos a, b_1, b_2 no alineados. Así, C es el triángulo a, b_1, b_2 que resulta de la unión de los segmentos con extremos en el vértice a y en todos los puntos $y \in [b_1, b_2]$.

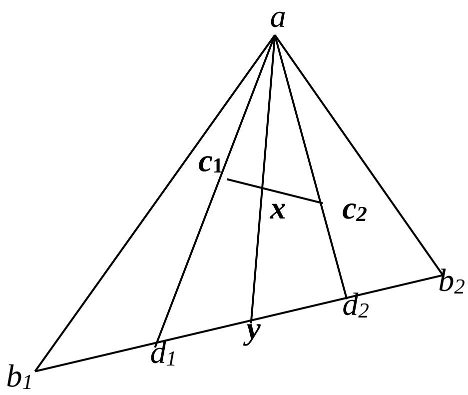

Figura 3

La siguiente proposición generaliza 5.1, reemplazando el segmento cerrado $[b_1, b_2]$ por cualquier conjunto B convexo no vacío de X .

Proposición 5.2. Si $a \in X$ y B es un convexo no vacío de X , entonces $S(a,B)$ es convexo y $S(a,B) = conv(\{a\} \cup B)$.

Demostración. Se procede en forma análoga a 5.1, tomando $C = S(a,B)$ y $c_1, c_2 \in C$. Así, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $c_1 \in [a, b_1]$ y $c_2 \in [a, b_2]$. Pero por **S.3** existe $y \in [b_1, b_2]$ tal que $x \in [a, y]$ y como B es convexo, $[b_1, b_2] \subseteq B$, de donde $y \in B$. Así, $x \in C$ y $[c_1, c_2] \subseteq C$; en consecuencia, C es convexo y, por 4.7 (ii), $C = conv(\{a\} \cup B)$.

La Figura 4 ilustra la demostración de 5.2. Por otra parte, una consecuencia inmediata de 5.2 resulta de tener en cuenta que cualquiera sea $D \subseteq X$, $conv\, D$ es convexo y que por 4.4. (v) $conv(\{a\} \cup D) = conv(\{a\} \cup conv\ D)$ Así, tomando en 5.2 $B = conv\ D$, resulta $conv(\{a\} \cup conv\ D) = S(a, conv\ D)$. De esta forma obtenemos el corolario siguiente.

Corolario 5.3. Si $a \in X$ y D es un subconjunto no vacío de X , entonces

$$conv(\{a\} \cup D) = S(a, conv\ D) = \bigcup \{ [a, y] : y \in conv\ D \}.$$

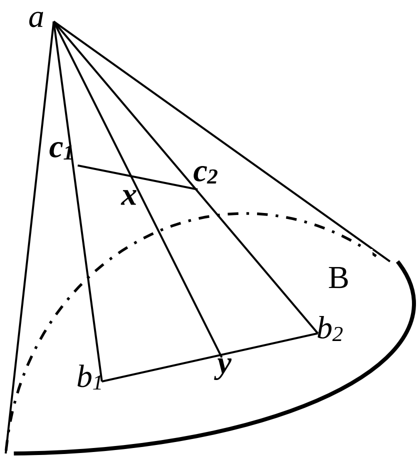

Figura 4

Otra generalización de 5.1 se obtiene si reemplazamos el punto a por un segmento $[a_1, a_2]$, como veremos en 5.4.

Proposición 5.4. Si $[a_1, a_2]$ y $[b_1, b_2]$ son dos segmentos cerrados de X , entonces $S([a_1, a_2], [b_1, b_2])$ es un subconjunto convexo de X y $S([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = conv([a_1, a_2] \cup [b_1, b_2]) = conv\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Demostración. Consideremos $C = S([a_1, a_2], [b_1, b_2])$, $T = S(a_2, [b_1, b_2])$ y $D = S(a_1, T)$. Por 5.1, T es convexo y, por 5.2, D también es convexo. Probaremos que $C = D$.
Si $x \in D$, existe $t_x \in T$ tal que $x \in [a_1, t_x]$. Por definición de T, existirá $b_x \in [b_1, b_2]$ tal que $t_x \in [b_x, a_2]$. Pero $[b_x, a_2] \subseteq S(b_x, [a_1, a_2])$. Así, como $t_x, a_1 \in S(b_x, [a_1, a_2])$, resulta por 4.1 que $[t_x, a_1] \subseteq S(b_x, [a_1, a_2])$; luego, $x \in S(b_x, [a_1, a_2])$, es decir, existe $a_x \in [a_1, a_2]$ tal que $x \in [b_x, a_x]$. Pero $S(b_x, [a_1, a_2]) \subseteq C$. Así, $x \in C$ y $D \subseteq C$. Por otra parte, como D es convexo y $\{a_1, a_2, b_1, b_2\} \subseteq D$, resulta $C = S([a_1, a_2], [b_1, b_2]) \subseteq D$. Luego, $C = D$ y C es

convexo. Pero, por 4.7 (ii), $C = conv\big([a_1, a_2] \cup [b_1, b_2]\big)$, además, por 4.4 (v), $conv\big([a_1, a_2] \cup [b_1, b_2]\big) = conv\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Interpretación geométrica de 5.4. Si tomamos un tetraedro con vértices a_1, a_2, b_1, b_2, vemos por 5.4 que la unión de todos los segmentos $[a_x, b_x]$ con $a_x \in [a_1, a_2]$ y $b_x \in [b_1, b_2]$ da por resultado dicho tetraedro. Evidentemente, también habríamos obtenido el tetraedro haciendo la unión de todos los segmentos con extremos en dos aristas opuestas cualesquiera. (ver Figura 5).

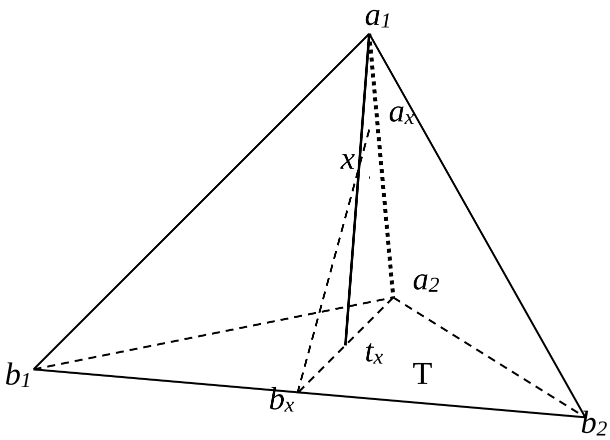

Figura 5

La siguiente proposición generaliza 5.4, reemplazando respectivamente los segmentos cerrados $[a_1, a_2]$ y $[b_1, b_2]$ por los conjuntos convexos no vacíos A y B.

Proposición 5.5. Si A y B son subconjuntos convexos y no vacíos de X, entonces $S(A, B)$ es subconjunto convexo de X y $S(A, B) = conv(A \cup B)$.

Demostración. Consideremos $c_1, c_2 \in S(A, B)$. Luego, existen $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$ tales que $c_1 \in [a_1, b_1]$ y $c_2 \in [a_2, b_2]$. Por 5.4 $S\big([a_1, a_2], [b_1, b_2]\big)$ es convexo. Así, $[c_1, c_2] \subseteq S\big([a_1, a_2], [b_1, b_2]\big) \subseteq S(A, B)$ y $S(A, B)$ es convexo. Además, por 4.7 (ii), $S(A, B) = conv(A \cup B)$.

Si tomamos C, D subconjuntos no vacíos de X, entonces $A = conv\, C$ y $B = conv\, D$ cumplen las hipótesis de la proposición 5.5. De esta forma,

$S(convC, convD)$ es convexo y $S(convC, convD) = conv(convC \cup convD)$. Además, como por 4.4. (v) $conv(convC \cup convD) = conv(C \cup D)$, obtenemos el corolario siguiente.

Corolario 5.6. Si C y D son subconjuntos no vacíos de X, entonces $S(convC, convD)$ es convexo y $S(convC, convD) = conv(C \cup D)$.

Hasta el momento utilizamos los segmentos para generar conjuntos convexos a partir de otros convexos. Ahora veremos cómo puede generarse la cápsula convexa de cualquier conjunto $A \subseteq X$ mediante la unión de segmentos. Para ello introduciremos los operadores C y C^n para $n \geq 0$.

Definición 5.7. Si A es un subconjunto no vacío de X, definimos $C(A)$ como la unión de todos los segmentos cerrados $[x, y]$ tales que $x, y \in A$; así $C(A) = \bigcup\{[x, y] : x \in A \wedge y \in A\} = S(A, A)$. Si $A = \phi$, entonces $C(A) = \phi$. Además, definimos por inducción $C^n(A)$, para $n \geq 0$, mediante $C^0(A) = A$, y $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$. Así, $C^{j+1}(A) = \bigcup\left\{[x, y] : x \in C^j(A) \wedge y \in C^j(A)\right\}$ y si $A \neq \phi$, $C^{j+1}(A) = S\left(C^j(A), C^j(A)\right)$.

Los operadores C^n antes definidos nos permitirán obtener la cápsula convexa de cualquier conjunto $A \subseteq X$, como veremos en la proposición siguiente.

Proposición 5.8. Si $A \subseteq X$, entonces $conv\ A = \bigcup_{n \geq 0} C^n(A)$.

Demostración. Por 5.7. $A = C^0(A) \subseteq C(A) \subseteq \ldots \subseteq C^n(A) \subseteq C^{n+1}(A) \subseteq \ldots..$, en consecuencia, los $C^n(A)$ forman una sucesión creciente ordenada por inclusión. Demostraremos por inducción que, para todo $n \geq 0$, $C^n(A) \subseteq conv\ A$. Evidentemente, $A = C^0(A) \subseteq conv\ A$. Ahora, por hipótesis inductiva, suponemos que $C^j(A) \subseteq conv\ A$ y demostraremos que $C^{j+1}(A) \subseteq conv\ A$. En efecto, si $v \in C^{j+1}(A)$, entonces existen $x, y \in C^j(A)$ tales que $v \in [x, y] \subseteq C^{j+1}(A)$, pero como $C^j(A) \subseteq conv\ A$ resulta $x, y \in conv\ A$ y $v \in [x, y] \subseteq conv\ A$. Luego, $C^{j+1}(A) \subseteq conv\ A$. En consecuencia, $A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} C^n(A) \subseteq conv\ A$.

Resta probar que $\bigcup_{n\geq 0} C^n(A)$ es convexo; para ello tomemos $x, y \in \bigcup_{n\geq 0} C^n(A)$, luego existen $j,k \in N$ tales que $x \in C^j(A)$, $y \in C^k(A)$, de donde si $m = máx\{j,k\}$, entonces $x, y \in C^m(A)$, mientras que $[x, y] \subseteq C^{m+1}(A)$. Luego, $[x, y] \subseteq \bigcup_{n\geq 0} C^n(A)$. Así, $\bigcup_{n\geq 0} C^n(A)$ es convexo y $conv\ A = \bigcup_{n\geq 0} C^n(A)$.

En la proposición siguiente daremos diversas propiedades de la sucesión creciente de los $C^n(A)$.

Proposición 5.9. Si $A \subseteq X$, entonces:

(i) Para todo $j \in N$, $conv\ A = \bigcup_{n\geq j} C^n(A)$.

(ii) Si existe $j \geq 0$, tal que $C^{j+1}(A) = C^j(A)$, entonces para todo $n \geq j$, $C^n(A) = C^j(A)$ y $conv\ A = C^j(A)$.

Demostración. (i) Puesto que por 5.7, los $C^n(A)$ forman una sucesión creciente ordenada por inclusión, entonces cualquiera sea $j \in N$, $\bigcup_{n\geq 0} C^n(A) = \bigcup_{n\geq j} C^n(A)$. En consecuencia, por 5.8, $conv\ A = \bigcup_{n\geq j} C^n(A)$.

(ii) Tomemos $j \geq 0$, tal que $C^{j+1}(A) = C^j(A)$; si suponemos que $C^{j+k}(A) = C^j(A)$ resulta que $C^{j+k+1}(A) = C(C^{j+k}(A)) = C(C^j(A)) = C^j(A)$. En consecuencia, para todo $n \geq j$, $C^n(A) = C^j(A)$. Luego, por (i) $conv\ A = C^j(A)$.

En la siguiente proposición veremos algunas propiedades que relacionan los operadores C y S.

Proposición 5.10. Si A y B son subconjuntos no vacíos de X, entonces:
(i) $S(A, B) \subseteq C(A \cup B)$.
(ii) Si A, B son además convexos, $C(A \cup B) = S(A, B) = conv(A \cup B)$.

Demostración. (i) Si $z \in S(A,B)$, existen $x \in A,\ y \in B$ tales que $z \in [x,y]$. Pero, si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$, Análogamente, como $y \in B$, resulta $y \in A \cup B$; luego $z \in C(A \cup B) = \bigcup \{ [x,y] : x \in A \cup B \wedge y \in A \cup B \}$.

(ii) Por ser A y B convexos, entonces, por 5.5, $conv(A \cup B) = S(A,B)$. Además, $C(A \cup B) \subseteq conv(A \cup B)$. Luego, $C(A \cup B) \subseteq S(A,B)$ y, por (i) $C(A \cup B) = S(A,B) = conv(A \cup B)$.

Proposición 5.11. Si $F \subseteq X$ y $card\ F \leq 2^n$ entonces $conv\ F = C^n(F)$.

Demostración. Se hace por inducción sobre $n \geq 0$. Si $n = 0$, entonces $card\ F \leq 2^0 = 1$. Pero, $conv\ \phi = \phi = C^0(\phi)$ y $conv\ \{x\} = \{x\} = C^0(\{x\})$; en consecuencia se cumple la tesis para $n = 0$. Supongamos que se cumple la tesis para $n = j$, es decir, que $conv\ F = C^j(F)$, si $card\ F \leq 2^j$. Veremos que también se cumple para $n = j+1$. Supongamos que $card\ F \leq 2^{j+1}$. Si fuera $card\ F \leq 2^j$, entonces $conv\ F = C^j(F) = C^{j+1}(F)$. De allí que supondremos $2^j < card\ F \leq 2^{j+1}$ y haremos una partición $\{F_1, F_2\}$ de F tal que $máx\{card\ F_1, card\ F_2\} \leq 2^j$; así $conv\ F_1 = C^j(F_1)$ y $conv\ F_2 = C^j(F_2)$, y, por 4.4 (v) y 5.10 (ii), $conv\ F = conv(C^j(F_1) \cup C^j(F_2)) = S(C^j(F_1), C^j(F_2))$. Pero,

$S(C^j(F_1), C^j(F_2)) \subseteq S(C^j(F), C^j(F)) = C^{j+1}(F) \subseteq conv\ F$. De esta forma, $conv\ F \subseteq C^{j+1}(F) \subseteq conv\ F$; luego $conv\ F = C^{j+1}(F)$. En consecuencia, por el principio de inducción queda probada la tesis.

Observaciones 5.12. Resulta interesante hacer algunas observaciones con respecto a este último resultado.

(i) Tomemos $X = R^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : x_i \in R\}$, el espacio vectorial real *n*-dimensional. En este caso por el Teorema de Carathéodory, si $A \subseteq X$, $conv\ A = \bigcup \{ conv\ F : card\ F \leq n+1 \ \wedge\ F \subseteq A \}$ (ver Toranzos-Nanclares (1978)). Así a diferencia de la Proposición 4.3 no es necesario tomar todos los conjuntos $F \subseteq A$ finitos, sino que alcanza con tomar los $F \subseteq A$ con $card\ F \leq n+1$.

(ii) Vamos a ver cómo podemos aplicar lo visto en (i) a la proposición 5.11. Si $X = R^n$, y $card\ F \le n+1$, tendremos que determinar $j \in N$ tal que $conv\ F = C^j(F)$. Por 5.11, si $n+1 \le 2^j$, entonces

$$conv\ A = \bigcup \left\{ C^j(F):\ card\ F \le n+1 \ \wedge\ F \subseteq A \right\} \subseteq C^j(A) \subseteq conv\ A.$$

En consecuencia, si $A \subseteq R^n$ y $n+1 \le 2^j$, entonces $conv\ A = C^j(A)$. Así, si $n=3$, entonces para cualquier $A \subseteq R^3$, $conv\ A = C^2(A)$. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$ donde a, b, c, d son los vértices de un tetraedro, entonces $C(A) = [a,b] \cup [a,c] \cup [a,d] \cup [b,c] \cup [b,d] \cup [c,d]$ es el conjunto formado por la unión de las aristas del tetraedro y $C^2(A) = S([a,b], [c,d])$ es el tetraedro de vértices a, b, c, d. Las cuatro caras se obtienen haciendo $S(a,[b,c])$, $S(a,[b,d])$, $S(a,[c,d])$ y $S(b,[c,d])$. Destaquemos que cualquier par de aristas opuestas permiten obtener $C^2(A)$; por ejemplo $C^2(A) = S([b,c], [a,d])$. Por otra parte, hay diversas formas de determinar una cara; por ejemplo, la cara a, b, d puede obtenerse mediante $S(a,[b,d])$, o bien, $S(b,[a,d])$, o bien, $S(d,[a,b])$. Observemos que si tomamos $C^2(A) = S([b,c], [a,d])$ entonces $C^2(A) = \bigcup \{S(x, [a,d]) : x \in [b,c]\}$; así, podemos expresar $C^2(A)$ como la unión de todos los triángulos de base $[a,d]$ y cuyo tercer vértice es $x \in [b,c]$. Para $x = b$, obtenemos la cara $S(b,[a,d])$ y para $x = c$ la cara $S(c,[a,d]) = S(a,[c,d])$.

6- Consistencia e Independencia en la axiomática de segmentos

6.1. Consistencia y Modelos. Resulta evidente que lo fundamental en cualquier sistema axiomático es la consistencia, es decir, que en dicho sistema no se pueda deducir una proposición y su negación. La forma más sencilla de asegurar la consistencia es encontrar un modelo del sistema axiomático, o sea, una interpretación de los términos primitivos para la cual los axiomas sean verdaderos. Evidentemente, si un sistema axiomático es consistente, todos sus sistemas axiomáticos equivalentes también lo serán. Para el sistema axiomático considerado cualquiera de los siguientes modelos nos asegura la consistencia.

6.1.1. Modelos de la Geometría Euclidiana. Si X es el plano R^2 o el espacio R^3 y $[a,b]$ es el segmento cerrado de extremos a,b, entonces se satisfacen los axiomas **S.1**, **S.2** y **S.3**, obteniéndose así modelos del sistema. La importancia de estos modelos radica en que los resultados obtenidos en el sistema axiomático son también válidos en la Geometría euclidiana que los alumnos ven en la enseñanza media, permitiéndoles hacer pequeños desarrollos axiomáticos en dicha Geometría.

6.1.2. Modelos definidos sobre convexos de la Geometría Euclidiana. Si X es un subconjunto convexo no vacío del plano o del espacio y para $a,b \in X$ consideramos nuevamente como $[a,b]$ el segmento cerrado de extremos a,b obtenemos también otro modelo del sistema axiomático. En efecto, tomemos X un convexo no vacío del plano o del espacio y $conv$ la cápsula convexa usual. Así, si $a,b \in X$, $[a,b] = conv\{a,b\} \subseteq X$. Análogamente, si $a,b_1,b_2 \in X$, entonces $conv\{a,b_1,b_2\} \subseteq X$. De esta forma, se cumplen **S.1**, **S.2** y **S.3**. En particular podemos tomar como X un subconjunto convexo acotado en cuyo caso obtendremos un modelo acotado.

6.1.3. Modelos de la Geometría en el cuerpo *Q* de los números racionales. Si tomamos el plano racional $X = Q^2$ y para $a,b \in X$ consideramos el segmento racional $[a,b]_{Q^2}$ entonces se satisfacen los axiomas **S.1**, **S.2** y **S.3**. En este caso, si $a,b \in Q^2$, resulta $[a,b]_{Q^2} = [a,b] \cap Q^2$, donde $[a,b]$ denota el segmento cerrado en el plano real. Análogamente, los convexos de Q^2 se obtienen como intersección de los convexos de R^2 con Q^2. Como en 6.1.2 también en este caso podríamos tomar como X un subconjunto convexo no vacío de Q^2, obteniendo así un nuevo modelo del sistema axiomático Estas afirmaciones también son válidas para el espacio racional $X = Q^3$.

6.1.4. Modelos Discretos. Si X es cualquier conjunto no vacío y para $a,b \in X$ definimos $[a,b] = \{a,b\}$ resulta que se satisfacen los axiomas **S.1**, **S.2** y **S.3**. En este caso tanto X como todos los subconjuntos de X son convexos. En particular si X es finito obtenemos un modelo finito de nuestro sistema axiomático.

Cabe destacar que, como puede verse en los modelos anteriores, el sistema axiomático dado por **S.1**, **S.2** y **S.3** admite modelos que no son isomorfos, y en consecuencia no es categórico.

6.2. Independencia de los axiomas. Un problema en general más delicado es el de estudiar la independencia de los axiomas de un determinado sistema. Recordemos en tal sentido los esfuerzos hechos durante siglos para probar la independencia del axioma 5 de Euclides, lo cual dio origen a las geometrías no euclidianas. En nuestro caso, al tratarse de un sistema axiomático con pocos axiomas podremos probar la independencia de cada uno de los axiomas del sistema axiomático. Para ello tendremos que encontrar una interpretación que no satisfaga el axioma considerado pero que satisfaga todos los restantes axiomas del sistema.

6.2.1. Independencia de S.1. Sean X un conjunto con $card\ X \geq 2$ y $s : X^2 \to P(X)$ la función que a cada par ordenado $(a,b) \in X^2$ le asigna $s(a,b) = \phi$. Así, se satisfacen **S.2** y **S.3** vacíamente, pero no se satisface **S.1**.

6.2.2 Independencia de S.2. Sean X un conjunto con $card\ X \geq 2$ y $s : X^2 \to P(X)$ la función que a cada par ordenado $(a,b) \in X^2$ le asigna $s(a,b) = X$. Evidentemente esta interpretación satisface **S.1** y **S.3** pero no cumple **S.2**.

6.2.3. Independencia de S.3. Tomemos como X el triángulo ab_1b_2 de la Figura 1 del parágrafo 2, al cual le restamos el segmento abierto $]b_1, b_2[=: [b_1, b_2] - \{b_1, b_2\}$. Los segmentos cerrados de este espacio son los mismos que los del plano euclidiano salvo el segmento cerrado b_1, b_2 que es $[b_1, b_2] = \{b_1, b_2\}$. Evidentemente, se satisface **S.1** ya que si $v, w \in X$, $\{v, w\} \subseteq [v, w]$. Lo mismo ocurre con **S.2** puesto que $[v, v] = \{v\}$. Sin embargo no se satisface **S.3**; en efecto, si tomamos $c_1 \in]a, b_1[$, $c_2 \in]a, b_2[$ y $x \in]c_1, c_2[$ **no** existe $y \in [b_1, b_2]$ tal que $x \in [a, y]$ ya que $[b_1, b_2] = \{b_1, b_2\}$. De esta forma queda probada la independencia de **S.3**.

Si bien la interpretación anterior nos asegura la independencia de **S.3**, el ejemplo que daremos a continuación nos permite ver que **S.3** es un axioma específico de la convexidad. Para ello veremos que la cápsula afín cumple **S.1** y **S.2**, pero no satisface **S.3**. En efecto, sean X el plano euclidiano y $af : X^2 \to P(X)$ la función que a cada $(a,b) \in X^2$ le asigna la variedad afín $af(a,b)$ generada por $\{a,b\}$. Así, si $a \neq b$, $af(a,b)$ es la recta determinada por los puntos a, b, mientras que si $a = b$, $af(a,b) = af(a,a) = \{a\}$. De esta forma, se satisface **S.1** ya que $\{a, b\} \subseteq af(a,b)$ y también **S.2** puesto que $af(a,a) = \{a\}$. Sin embargo no se satisface **S.3**; en efecto, supongamos que a,b_1,b_2 son tres puntos no alineados del plano X y tomemos $c_1 \in af(a,b_1)$, $c_2 \in af(a,b_2)$ tales que $af(c_1,c_2)$ no sea paralela a la recta $af(b_1,b_2)$. Ahora consideremos la recta r que pasa por el punto a y es paralela a $af(b_1,b_2)$, y el punto $x \in af(c_1,c_2) \cap r$, que resulta de la intersección de ambas rectas. En consecuencia, puesto que r y $af(b_1,b_2)$ son rectas paralelas, no existe $y \in af(b_1,b_2)$ tal que $x \in af(a,y)$. Luego, no se cumple **S.3**.

7. Observaciones finales de la Parte I

En lo desarrollado en esta primera parte del trabajo tratamos de ver que con una axiomática de segmentos, basada únicamente en tres axiomas se han podido probar varias propiedades geométricas de los conjuntos convexos así como de la cápsula convexa. Algunas de las propiedades de esta última serán luego utilizadas en la Parte II como axiomas de una axiomática de cápsula convexa, que resultará equivalente a la de segmentos desarrollada en esta primera parte del trabajo.

El sistema axiomático podía haberse enriquecido con el agregado de axiomas que permitieran obtener rectas a partir de la unión de segmentos y la separación de convexos disjuntos. Sin embargo, me pareció más oportuno postergar tales desarrollos para trabajos posteriores en donde ya se estudien las variedades afines y la separación de convexos mediante hiperplanos. La razón por la cual seguimos este camino es que al trabajar con pocos axiomas es más fácil probar la independencia de cada uno de ellos, así como ver la equivalencia entre sistemas axiomáticos.

El lector interesado en ampliar el tema puede recurrir a la Bibliografía. En tal sentido el sistema axiomático aquí estudiado forma parte del desarrollado en Bressan (1972 y 1976) en donde también se estudia la separación de convexos mediante convexos complementarios. En Bressan-Ferrazzi (2002) se prueba la equivalencia entre las familias interseccionales y la existencia de un operador de cápsula generado por dicha familia. También se destaca la diferencia entre las cápsulas de origen algebraico y topológico. El libro de Coppel (1998) hace un desarrollo exhaustivo de un sistema axiomático que tiene como término primitivo el de segmento cerrado y puede tomarse como libro de referencia para estudios posteriores. Por otra parte, en Van de Vel (1993) van a encontrar diversos sistemas axiomáticos relacionados con la convexidad.

BIBLIOGRAFÍA

Blumenthal, L. M. (1965); *Geometría Axiomática,* Editorial Aguilar.

Bressan, J. C. (1972); Sistema Axiomático para Operadores de Cápsula Convexa, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 26, 131-142.

Bressan, J. C. (1976); *Sistemas Axiomáticos para la Convexidad*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.

Bressan, J. C. y Ferrazzi de Bressan, A. E. (2002); Las Cápsulas en las Estructuras de la Matemática, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Clame, Volumen 15, Tomo 2, 681-686.

Bressan, J. C. y Ferrazzi de Bressan, A. E. (2009); Lógica simbólica y teoría de conjuntos, Parte I, *Revista de Educación Matemática*, UMA, 24-1, 3-16.

Bressan, J. C. y Ferrazzi de Bressan, A. E. (2009); Lógica simbólica y teoría de conjuntos, Parte II, *Revista de Educación Matemática*, UMA, 24-2, 15-27.

Coppel, W. A. (1998), *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge University Press.

Toranzos, F. A. y Nanclares, J. H. (1978); *Convexidad*, Cursos, Seminarios y Tesis del PEAM, Maracaibo, Venezuela.

Van de Vel, M. L. J. (1993), *Theory of Convex Structure*s, North-Holland.