

DERIVADAS SUCESIVAS: UNA SECUENCIA PARA APRECIAR SU POTENCIAL

Edward Arap - Antonella Dellapiazza - Franco Mariani - Verónica Molfino

edwardarap@gmail.com - antonelladellapiazza@gmail.com -

francomar_88@hotmail.com - veromolfino@gmail.com

Instituto de Profesores “Artigas” (IPA) - Uruguay

Tema: Pensamiento variacional

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Derivadas sucesivas, relaciones de subida, relaciones de bajada, pensamiento y lenguaje variacional.

Resumen:

Las relaciones entre los aspectos gráfico y numérico de la derivada primera son ampliamente estudiadas en Educación Media y nivel terciario, así como algunas relaciones entre las derivadas primera y segunda. Ahora, ¿cuánto puede aportarnos profundizar en el estudio de las relaciones de subida y bajada entre f , f' y f'' ? En este taller proponemos reflexionar en torno a qué nos puede aportar para la enseñanza del cálculo una secuencia que promueve el uso de las relaciones de subida y bajada entre f , f' y f'' . Algunas de ellas están presentes en el discurso matemático escolar tradicional y otras no tanto, al menos explícitamente. La misma surge a partir del interés generado por la problemática planteada en la tesis de Testa (2004).

Introducción

La motivación para ahondar en el tema de las derivadas sucesivas y el valor numérico de la derivada segunda, viene dada por dos actividades propuestas en el curso de Análisis del Discurso Matemático Escolar; asignatura correspondiente al cuarto año del Plan 2008 del Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas. La primera está relacionada con las derivadas sucesivas y aparece en (Cantoral y Farfán, 1998), donde se pide hallar el signo de f , f' , f'' y f''' conociendo la representación gráfica de f . La segunda, fue propuesta en la tesis de (Testa, 2004) y buscaba explicitar el significado del valor numérico de la derivada segunda, su relación con la representación gráfica, y sobre las relaciones de subida y bajada de las derivadas sucesivas de f , f' y f'' .

Ante la propuesta y lectura de dicha tesis, muchas fueron las interrogantes que nos surgieron. Desde que egresamos de secundaria conocemos la derivada segunda, y la utilizamos con los fines que señala (Testa, 2004 y Testa 2006), como herramienta que aporta información acerca de la concavidad de una función en concreto. Nos llama mucho la atención, por un lado, que hasta este momento nunca nos habíamos cuestionado sobre el significado del valor numérico, limitando su potencial al estudio del signo, y por otro, que el vínculo entre $f-f'$ se reduce a lo algebraico en las relaciones de bajada y a lo gráfico en las de subida.

En definitiva, tal toma de conciencia despertó un interés muy grande en la propuesta, múltiples discusiones, razonamientos que iban y venían, argumentos y refutaciones al argumento inicial, que en varias situaciones provocaron contradicciones en todos nosotros.

De aquí surge el interés por continuar investigando, y el objetivo propuesto fue elaborar una secuencia de algún tema relativo al concepto de derivada en torno a las derivadas sucesivas, considerando los documentos mencionados anteriormente.

En relación a ellos, decidimos centrarnos en el esquema de relaciones reportado por (Testa, 2004), en cuanto a los vínculos que se establecen habitualmente en el Discurso Matemático Escolar entre una función y sus derivadas de orden 1 y 2.

A partir de esto, nuestro objetivo en el taller es proponer actividades para ampliar ese esquema, establecer y evidenciar nuevos vínculos, nuevas relaciones entre estas tres funciones; asimismo, nos proponemos fortalecer las relaciones existentes, enriquecerlas para que, por ejemplo, las relaciones de bajada no sean exclusivamente algebraicas.

Marco teórico

Abordaremos nuestro análisis desde la perspectiva socioepistemológica, que se caracteriza por la problematización del conocimiento y considera las siguientes cuatro dimensiones fundamentales en su construcción como un sistema complejo: su naturaleza epistemológica (dimensión del saber); los planos de lo cognitivo (procesos de aprendizaje del estudiante); la dimensión didáctica (los modos de transmisión a través de la enseñanza) y su dimensión sociocultural (el contexto y las prácticas sociales).

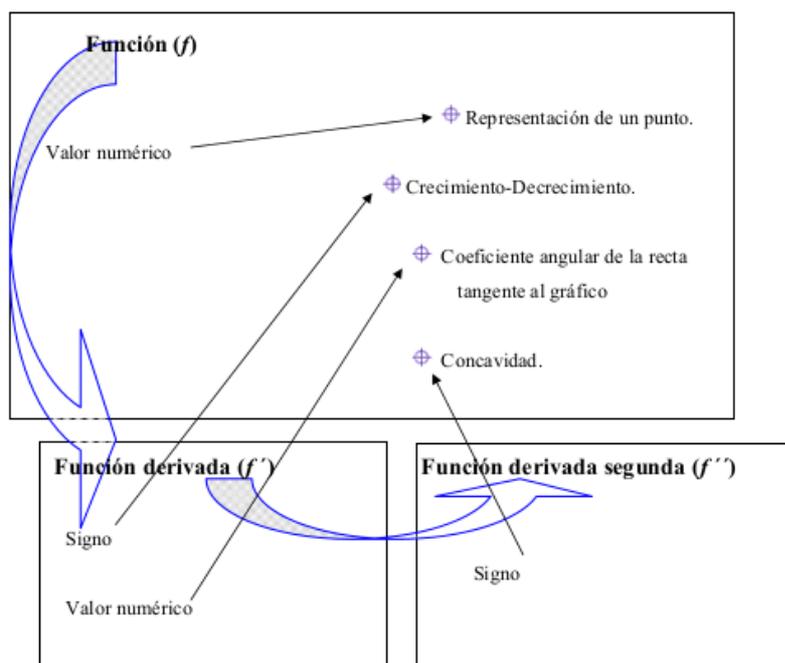
“La socioepistemología, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple...” (Cantoral, 2004, p.1)

Dentro de este marco, vamos a considerar los aportes que nos brinda la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Como línea de investigación, (Cantoral, 2004) establece que el PLV se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes matemáticos en relación a la variación y el cambio, en el sistema educativo y social en que se encuentra.

Un punto importante a tener en cuenta al momento de analizar el PLV es si los estudiantes han construido un universo de formas gráficas, es decir, si consideran a la gráfica de una función como una gráfica en particular o como perteneciente a una familia de gráficas de funciones, ya sea polinómicas, racionales, etc.

Esto se vincula con lo establecido por (Testa, 2006) en cuanto a las relaciones de subida y bajada que se establecen habitualmente, entre una función f , y sus funciones derivadas de orden 1 y 2, cuestión que resulta central en nuestro trabajo.

Según la autora, el discurso matemático escolar en torno al concepto de derivada fomenta un tratamiento del mismo meramente instrumental, donde el principal objetivo es que la derivada sea una herramienta para poder representar funciones gráficamente. Como



consecuencia, existe un abordaje del concepto que no fomenta otras perspectivas, salvo las mencionadas anteriormente. No se pone en juego lo que refiere al PLV del estudiante ni el valor numérico de la derivada segunda, ni se fomenta la interpretación gráfica del mismo.

En el cuadro aparecen dos tipos de relaciones entre las funciones en cuestión: relaciones “de bajada” cuando se dan a través de las técnicas de derivación ($f-f$, $f'-f'$) o “de subida” cuando brindan información gráfica ($f'-f$ y $f''-f$). Algo que nos interesa ver es si es posible establecer otras relaciones entre la función y sus derivadas, en particular entre f'' y f , pudiéndose considerar el pasaje por f' como paso intermedio, es decir, $f''-f'$ y $f'-f$.

Más en detalle, la autora indica que en el tratamiento de las derivadas sucesivas (de una función f) no se trabaja con derivadas de orden mayor a 2 y que las relaciones que aparecen entre las derivadas se dan en las siguientes direcciones: $f \rightarrow f' \rightarrow f''$, $f' \rightarrow f$, $f'' \rightarrow f$, y que no aparece por ejemplo relaciones del tipo $f'' \rightarrow f'$ ni $f \rightarrow f''$.

Por otro lado, siguiendo la línea propuesta por (Testa, 2006), también tendremos en cuenta a nivel cognitivo, los aportes que realizan (Tall y Vinner, 1981) en cuanto a los términos imagen conceptual y definición del concepto.

Con respecto a la estructura cognitiva de un sujeto, los autores, consideran la existencia de dos “celdas” diferentes, una celda para la(s) definición(es) del concepto y otra parte para la imagen conceptual, así como el proceso intelectual de los estudiantes frente a situaciones problema que el docente espera que realicen. Se distinguen cuatro casos los cuales presentan los diferentes caminos que el sistema cognitivo podría generar a dar respuesta a un problema.

Caso 1: Se consulta sólo la celda de las definiciones (deducción puramente formal).

Caso 2: Se evoca en una primera instancia la Imagen del Concepto, luego se consulta su definición para, a partir de ahí, dar una respuesta (deducción siguiendo un pensamiento intuitivo).

Caso 3: Se recurre en una primera instancia a la definición del concepto, se realiza una interacción con la imagen de éste, pero la respuesta es dada a partir de su definición (interacción entre definición e imagen).

Sin embargo, lo que ocurre en la práctica es que los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana prevalecerán sobre los hábitos de pensamiento impuestos por los contextos técnicos.

Caso 4: Se consulta solamente la celda de la Imagen del Concepto para dar una respuesta (respuesta intuitiva).

Además (Testa, 2006) considera un nuevo tipo de respuesta posible.

Caso 5: Se recurre en una primera instancia a la celda de la Imagen del Concepto, se realiza una interacción con la definición de éste pero la respuesta es dada a partir de la celda de la Imagen del Concepto.

Fundamentación de la secuencia y análisis a priori

Para el diseño de la secuencia intentamos, en primer lugar, vincular la función y sus derivadas de un modo distinto al que según (Testa, 2006) es habitual en los cursos de secundaria, procurando que las relaciones de bajada entre f , f' y f'' no sean únicamente algebraicas, ni las de subida de f' a f y f'' a f , exclusivamente gráficas.

En nuestra propuesta priorizamos, en la primera de las actividades, los aspectos gráficos de las relaciones entre f - f' - f'' , donde las respuestas pueden involucrar además aspectos analíticos. En la segunda actividad, proponemos un inicio poco habitual, ya que el punto de partida se halla en la representación gráfica de la derivada segunda, a partir de la cual se solicita en primera instancia elaborar posibles gráficos de f' relacionados a ella. Luego se pregunta acerca de la posibilidad de construir una función f con determinadas características, asociada a la f'' inicial. Nos parece que este cambio de perspectiva promueve la utilización de otros recursos, amplía estrategias y obliga a pensar distinto. En consecuencia hace que se tengan en cuenta otros vínculos entre las funciones que entran en juego y no sólo la información que aportan las derivadas de orden 1 y 2 en cuanto a crecimiento y concavidad de la función original.

Con estas actividades, procuramos que se establezcan relaciones entre las derivadas primera y segunda “independientes” de la función original, relaciones que, según el marco teórico en que nos basamos, refieren al desarrollo del PLV de los estudiantes.

En cuanto a lo que hace a un análisis a priori de lo que se espera encontrar, mucho va a depender del nivel educativo alcanzado por los estudiantes a los que apliquemos la secuencia. En relación a la actividad 1, creemos que puede ser respondida sin mayor dificultad en cualquier nivel que consideremos en el universo de posibles participantes (estudiantes de Profesorado de Matemática que hayan cursado Análisis I, asignatura de

segundo año de la carrera). Si bien hay distintos caminos para resolverla, la opción elegida dará cuenta del PLV y del grado de abstracción del estudiante.

Pensamos que al realizar la actividad 1, los estudiantes pueden optar principalmente entre dos caminos: el primero, que relaciona los gráficos de f , f' y f'' con familias de funciones conocidas (polinómicas básicamente), y el segundo, que vincula el signo de f y f'' con crecimiento, extremos relativos y concavidad de f .

Un posible error si se toma el primer camino puede tener lugar al asociar la función (a) de cuarto grado, con una polinómica de segundo grado, provocando que las relaciones establecidas entre f - f' - f'' sean incorrectas.

En resumen, según el tipo de respuesta y la justificación efectuada, el análisis de la primera actividad creemos nos dará información sobre el tipo de relaciones de bajada utilizadas, y de la imagen conceptual que poseen los participantes en cuanto a las derivadas primera y segunda. Es posible también que, dependiendo de la profundidad de la justificación, podamos observar qué relaciones establece el estudiante entre las funciones, si las concibe como familias, si intervienen aspectos analíticos, etc.

Por otra parte, la actividad 2 será de utilidad para observar qué relaciones de subida alcanzan a establecer los estudiantes, qué vínculos encuentran entre f'' y f' , cómo juegan las condiciones impuestas en la variación de las derivadas, etc.

Asimismo y tal como ocurre en la actividad 1, las características, profundidad y justificación de las respuestas, pondrán en evidencia el desarrollo del PLV de los estudiantes. En particular, atendiendo a lo que consideramos como posibles respuestas, una opción puede ser presentar un único gráfico de f' ; otra sería establecer varios gráficos de f' sin considerar las variantes dadas por sumar una constante; y una tercera opción puede ser similar al punto anterior incluyendo además la familia de funciones que difieren en un constante. Estos diferentes niveles de complejidad alcanzados en las respuestas puede darnos pautas sobre tal desarrollo.

En cuanto a posibles errores que podemos encontrar, puede ocurrir que alguien responda que no existe tal función pero basándose en argumentos erróneos, como por ejemplo haber construido un único gráfico de f' que no es “compatible” con f decreciente. Otra respuesta incorrecta sería realizar la construcción de f' y f'' , relacionados a la f' dada, aceptando la idea de que es posible encontrar una f' tal que $f'(x) < 0$ para todo x real.

Resultados de la experiencia con estudiantes del Instituto de Profesores “Artigas”:

En lo que hace a relaciones de subida y bajada existentes entre f - f' , la actividad 1 nos permitió registrar otras además de las reportadas en (Testa, 2004) y de las observadas en el análisis del DME. Por ejemplo, se observaron relaciones de bajada tanto gráficas como analíticas, lo cual en cierto sentido estaría ampliando y fortaleciendo el esquema reportado en (Testa, 2004).

Por otra parte, la actividad 2 apunta a evidenciar las relaciones de subida entre f - f' - f'' . A este respecto constatamos dificultades varias a la hora de su resolución, lo cual puede ser explicado por el hecho de que en el abordaje dado a esta temática en el DME tradicional, en general no se contemplan estas relaciones. De todos modos, un gran número de estudiantes resolvió correctamente la parte (a) de la actividad, y de ellos solamente la mitad alcanzó a trabajar satisfactoriamente en la parte (b). Esta observación permite conocer sobre el desarrollo del PLV de los estudiantes.

Reportamos relaciones de subida, tanto gráficas como analíticas, entre f' y f , que era uno de los objetivos de la actividad, ampliando, reforzando, fortaleciendo el esquema señalado en (Testa, 2004). A su vez, en algunos casos se observan estas relaciones teniendo en cuenta derivadas sucesivas, concibiendo f'' como derivada de f' .

En cuanto a relaciones de bajada, se constatan relaciones gráficas de f a f' al momento de responder a la pregunta planteada en la parte (b), indicando por ejemplo que si existiera f tal que $f(x) < 0$ para todo x real, entonces deberían existir puntos de inflexión en f que no se corresponden con la f' dada. Otro argumento a destacar en este sentido, consistió en observar que para que f cumpla con la condición descrita debe existir una asíntota horizontal, lo cual implicaría que las pendientes de las rectas tangentes al gráfico de f tiendan a cero cuando x tiende a infinito, y esto entra en contradicción con el gráfico de f' proporcionado.

Hasta aquí lo que hace al reporte y comentarios de la experiencia llevada a cabo; a modo de cierre, observamos que independientemente de que el abordaje tradicional no contempla las cuestiones señaladas en este trabajo, al realizar la secuencia muchos estudiantes pudieron establecer nuevos vínculos así como también reforzar los ya existentes. Esto nos da la pauta de que propuestas como esta podrían implementarse desde secundaria promoviendo un mayor desarrollo del PLV de los estudiantes.

Bibliografía



- Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica*. En Díaz Moreno, L. (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 1 – 9. Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf> Recuperado el 11 de setiembre de 2014
- Cantoral, R. (2013). *Del pasaje de los objetos a las prácticas*. En R. Cantoral (Ed) *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre construcción social de conocimiento*. (pp. 179 211), Barcelona, España: Gedisa.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis*. Épsilon, Revista de S.A.E.M “Thales”. 42, 353369.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12 (7). pp. 151169. ISSN 00131954.
- Testa, Y. (2006). *Procesos resignificación del valor numérico de la derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo*. En M. Dalcín, M. Olave, C. Ochoviet y Y. Testa (Comp). *Didáctica de Matemática. Cuatro trabajos de investigación en el marco del sistema educativo uruguayo*. Montevideo: Ediciones Rocamadur.