FORMULANDO PROBLEMAS SOBRE GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

Teresa Braicovich – Patricia Caro
teresabraicovich@gmail.com – caropatriciaj@yahoo.com.ar
Universidad Nacional del Comahue. Argentina

Tema: Teoría de Grafos
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio
Palabras clave: grafos – formulación de problemas – hamiltonianos – eulerianos

Resumen

La resolución de problemas es una parte fundamental de la matemática, en una conferencia pronunciada ya en 1968 George Polya decía: "Está bien justificado que todos los textos de matemática contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática", pero los docentes debemos determinar cuáles de ellos nos permitirían un verdadero aprendizaje. El eje de este taller es la formulación, por parte de los asistentes, de problemas y en particular aquellos que se encuentran relacionados con los grafos eulerianos y hamiltonianos.

Los grafos en sus comienzos estaban relacionados principalmente a pasatiempos, sin embargo, actualmente es una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge, tiene numerosas aplicaciones en diversos ámbitos.
El objetivo de este taller es que los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio, "inventen" problemas referidos a recorridos eulerianos y hamiltonianos, se hará un análisis minucioso de sus propuestas, esto con el fin de considerar ampliamente formulaciones de problemas de otros temas. Luego se presentarán, a modo de ejemplo, distintos problemas que fueron formulados por estudiantes avanzados del Profesorado de Matemática en el curso de Grafos, que forma parte del Seminario de la Enseñanza, que es una asignatura de dicha carrera.

1. Introducción

En este taller se propondrá a los asistentes que formulen problemas, cuestión tan importante en el momento de preparar nuestras prácticas docentes. En particular, en esta actividad el trabajo versará sobre aquellos problemas que tengan resolución utilizando algunos conceptos de la Teoría de Grafos. El tema grafos en un principio formaba parte de la topología pero actualmente se considera que es una rama de la Matemática Discreta, ha tenido un gran auge en las últimas décadas asociado en gran medida a los grandes avances que se han dado en informática. Es importante agregar que tienen numerosas aplicaciones en disciplinas de lo más diversas, química, electrónica, sociología, economía, programación, salud, entre otras. Sin embargo es importante aclarar que el tema puede ser trabajado con alumnos desde los12 años y al no necesitar una base matemática importante resulta un tema útil en la enseñanza.

(Braicovich, 2005). Podemos citar a Coriat (2004): "*Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos*"

La propuesta es que los asistentes a este taller, ya sean docentes en formación o en ejercicio, "inventen" problemas, referidos a dos de las cuatro motivaciones históricas que se consideran como origen de la Teoría de Grafos, como son los recorridos eulerianos y hamiltonianos.

2. Pertinencia de la propuesta.

Citando a Guy Brousseau (1986): "*Saber matemática no es sólo aprender las definiciones y los teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos; nosotros sabemos bien que hacer matemática implica que uno se ocupe de los problemas. No hacemos matemática sino cuando nos ocupamos de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar las buenas preguntas es tan importante como encontrar las soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que actúe, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las intercambie con otras, que reconozca aquellas que son conformes a la cultura, que tome aquellas que le son útiles, etc.*" Esta cita muestra la importancia que tiene el análisis de los problemas, elegidos y/o formulados por los docentes, para que efectivamente los estudiantes puedan hacer un trabajo apropiado.

No hay duda que uno de los pilares fundamentales de la enseñanza de matemática es que los estudiantes resuelvan problemas, pero ante esto, surge una pregunta que, seguramente, muchas veces nos hacemos como docentes y es la siguiente: "¿Qué problemas son los que debemos dar a nuestros alumnos?". Para responder en parte a esta pregunta pueden tenerse en cuenta las consideraciones de Callejo de la Vega (1997, pp. 3) referidas al tema, las que se mencionan a continuación:

- Problemas accesibles: enunciados claros, conocimientos al alcance de los alumnos, pero no deben ser triviales.
- Problemas interesantes: pueden ser juegos, situaciones reales, fantásticas o puramente matemáticos, también pueden estar relacionados con la historia de la matemática.

- Problemas relevantes: útiles para introducir conceptos, propiedades, heurísticas, estrategias, etc.
- Problemas que se puedan resolver de distintas formas, que permitan diferentes niveles de profundización de acuerdo al nivel de enseñanza o al propio grupo, que sean aplicables y también verificables.
- Problemas que se presten para introducir variantes, que sirvan para emprender un proceso de investigación o que sean problemas abiertos.

Por otro lado y de acuerdo con Schoenfeld (1985) existen cuatro destrezas necesarias para el éxito en matemática, a saber:

- Plantear heurísticas, estrategias y técnicas para resolución de problemas tales como "trabajar hacia atrás" o dibujar figuras,
- Ser ingenioso al trabajar con proposiciones y procedimientos matemáticos,
- Decidir sobre cuándo y qué resolución o estrategia utilizar y el control de las resoluciones.
- Reconocer que la matemática está estrechamente ligada con la vida cotidiana.

También existe pasos a seguir para resolver un problema, según M. de Guzmán: Familiarización con el problema, búsqueda de estrategias, llevar adelante la estrategia, revisar el proceso y sacar conclusiones de él.

3. Contenidos a desarrollar.

Nos avocaremos, como se ha mencionado a dos de las cuatro grandes motivaciones históricas de la Teoría de Grafos (Chiappa, 1989), las que sucintamente se presentan a continuación:

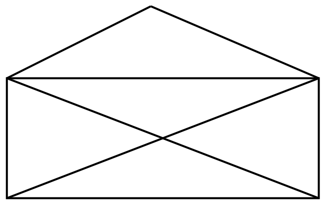
3.1. Recorridos eulerianos.

Leonhard Euler (matemático suizo, 1707-1783) escribió el primer artículo científico referido a grafos -apareció en la publicación de la Academia de San Petersburgo, 1736-, donde a partir de un problema concreto planteado, el Problema de los Puentes de la ciudad de Königsberg, se hace la siguiente pregunta "*¿En cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez*?". Es importante aclarar que Euler no resolvió este problema utilizando grafos, pero a partir de la resolución que hace esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

- *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino* *euleriano cerrado o directamente camino euleriano*. (También se lo suele denominar *ciclo euleriano*)

- *Un grafo conexo contiene un camino S_{ab} que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si a y b son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto.*

Por otro lado, el problema euleriano está relacionado directamente con el de las figuras unicursales, que son las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. Un entretenimiento muy conocido y relacionado con este concepto es el comúnmente denominado "*figura del sobre*", el mismo se presenta a continuación:

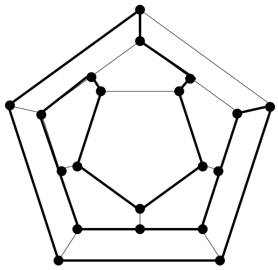


Grafo que representa el *juego del sobre*

Como en este grafo hay exactamente dos vértices de grado impar, existirá camino euleriano abierto, pero no cerrado. Para dibujar la figura sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo lugar, se debe comenzar el trazado en uno de los dos vértices inferiores y finalizar en el otro, ya que estos son los dos vértices de grado impar, ambos son extremos de tres aristas, por lo tanto tienen grado 3.

3.2. Recorridos hamiltonianos

Es un recorrido que pasa una y sólo una vez por cada uno de los vértices del grafo. El famoso matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) debido a sus trabajos sobre cuaterniones, analizó la existencia de ciclos de este tipo e inventó un juego, llamado "*Icosian Game*". La parte principal de este juego estaba hecha de madera y era un dodecaedro regular, cada uno de los 20 vértices del mismo era marcado con el nombre de una ciudad importante muy conocida de dicha época, París, Londres, Roma, etc. El juego consistía en que el jugador debía elegir un recorrido a lo largo de las aristas del dodecaedro que pase exactamente una vez por cada ciudad y vuelva a la ciudad de la cual partió. Existían otras posibilidades de recorridos, por ejemplo realizarlo de manera de pasar por todas las ciudades pero sin necesidad de finalizar en la ciudad de la cuál partió y también una variante de este desafío, que lo hacía aún más interesante, era estipular algunas ciudades que debían ser visitadas al comienzo del recorrido. Para recordar cuáles ciudades se habían visitado se insertaban alfileres en los vértices y se los conectaba mediante un hilo. Como no era cómodo trabajar sobre el dodecaedro, Hamilton desarrolló una versión del juego más práctica, en la misma dicho poliedro regular se reemplazaba por un grafo, el mismo se presenta a continuación:



Grafo que representa al dodecaedro

Este tema es aún hoy un problema abierto, pero es importante que los docentes, sobre todo del nivel secundario cuenten con herramientas de este tipo. Cabe aclarar que los alumnos no necesitan una base matemática importante para poder comprenderlo y de esta manera los estudiantes tienen una visión distinta de la matemática, pues tienen la posibilidad de saber que no está "*todo resuelto*" en esta disciplina, creencia que, en general, es muy fuerte en ellos.

Cabe aclarar que los otros dos temas que dieron origen a la Teoría de Grafos son árboles y coloreo-planaridad. Por una cuestión de tiempo en este taller se ha optado sólo por dos de ellos.

4. Metodología:

A partir de lo que ha sido planteado hasta aquí, queda de manifiesto la importancia que tiene en las prácticas docentes la resolución de problemas, pero no hay ninguna duda que esto está ligado a la presentación de "*buenos*" problemas por parte de los docentes, por eso el objetivo de este taller es que los asistentes formulen los problemas y luego serán analizados en conjunto, se prestará especial atención a los que se hayan presentado y se haría una puesta en común.

En general, no es demasiado el tiempo que se dispone cuando se realizan talleres y/o cursos en el marco de congresos o jornadas, por eso siempre se debe plantear como objetivo la idea de trabajar con algunos conceptos de la teoría de grafos pero generar en los asistentes la inquietud de investigar y seguir estudiando el tema, por lo que se prepararon actividades que los motiven a continuar en esa dirección y se ofrecerá el contacto a futuro, con la finalidad de ir compartiendo experiencias.

Algunas actividades a proponer:

A continuación se presenta, sin perder de vista la flexibilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje, una guía en la que se mencionan ciertos momentos que se tiene la intención de que se produzcan:

- Se comenzará el taller leyendo en conjunto distintos escritos de matemáticos donde quede de manifiesto la importancia de mantenerse actualizado con los temas a enseñar, entre otrosse citará a Paenza (2007 y 2008) y Chartrand (1985).
- Se presentará la noción de grafo a partir de una situación concreta y real que se les pedirá que esquematicen. Es importante que sean situaciones de la vida cotidiana para que no encuentren esta brecha tan grande entre lo que se da en la escuela y la realidad.
- Se hará pensar a los asistentes en situaciones de distinta índole que puedan ser modelizadas con grafos. Es altamente probable que a partir de los ejemplos presentados por ellos surjan varios conceptos de grafos particulares.
- Es importante que detecten a los grafos como buenos modelizadores, pues representaciones diferentes sustentan diferentes formas de pensar sobre los objetos matemáticos.
- Se presentarán los conceptos de euleriano y hamiltoniano a partir de la motivación histórica pues la historia debería formar parte de los conocimientos de cada docente y de cada alumno, en todos los niveles, debido a que proporciona una visión verdaderamente humana de la ciencia y por ende permite entender mejor las distintas correlaciones existentes. Una vez dados estos conceptos, se les pedirá que ellos formulen problemas que puedan ser resueltos a partir de ellos. Luego de la puesta en común y análisis de las propuestas de los asistentes al taller, se les mostrarán los problemas que plantearon un grupo de estudiantes del Profesorado en Matemática.

Durante el encuentro se hará que los docentes trabajen de manera individual en algunas situaciones y de manera grupal en otras, consultando todo aquello que consideren necesario.

5. Reflexión final

Cabe aclarar que es muy probable que el grupo que asiste al taller sea heterogéneo, por lo tanto se partirá considerando que los asistentes desconocen totalmente el contenido a desarrollar referido a grafos, que no han trabajado previamente con conceptos de esta teoría, ya que por el tipo de actividades que se plantean esto es posible. Por último, queremos destacar que: “*Tener una disposición favorable hacia la resolución de* *problemas incluye la confianza y la voluntad para encargarse de tareas nuevas y difíciles. Los buenos resolutores de problemas son hábiles buscando la información que les ayude a resolverlos y haciendo un uso efectivo de lo que conocen. Su conocimiento de estrategias les proporciona opciones. Si falla el primer enfoque del problema, consideran otros*". (NCTM, 2003, pág. 340).

Referencias bibliográficas

Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 7 (2), 33-115.

Callejo de la Vega, M. (1997). Resolver e inventar problemas. Juegos, números y figuras. *Seminario Internacional Olimpíada Matemática Argentina*. Bariloche. Argentina.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.

Chiappa, R. (1989). "*Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*". Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

Coriat, M. (2004) Algunos usos escolares de los grafos. UNO. *Revista de Didáctica de la Matemática* 36, 8-21. Universidad Complutense de Madrid.

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí? episodio* 3". Siglo XXI. Editores Argentina, Buenos Aires.

Paenza, A. (2008). "*Matemática…¿estás ahí? episodio* 100". Siglo XXI. Editores Argentina, Buenos Aires.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving,* San Diego, CA: Academic Press.