DIVISIBILIDAD: UNA EXCUSA PARA HABLAR DE COSAS IMPORTANTES

Cecilia Calvo Pesce
ccalvo@escolasadako.com
Uruguay - España

Tema: Pensamiento numérico
Modalidad: CP
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: divisibilidad, algoritmos, práctica productiva, recursos digitales

Resumen

Analizar algunos aspectos relativos al aprendizaje del tema divisibilidad en la etapa de enseñanza obligatoria nos puede dar un contexto para analizar ciertas cuestiones didácticas que considero fundamentales, independientemente del tema matemático que estemos tratando:

- *La importancia de promover la formación de esquemas conceptuales ricos en relación a los conceptos matemáticos básicos.*
- *La necesidad de llevar al aula, de manera constante, recursos digitales y manipulativos.*
- *La creencia de que el aprendizaje de un concepto no puede centrarse en el entrenamiento de los algoritmos asociados.*
- *La posibilidad de practicar los procedimientos matemáticos de manera productiva.*

Introducción

Tal como planteo en el resumen, la elección del tema Divisibilidad como hilo conductor de esta conferencia es anecdótico, simplemente se trata de un tema presente en los currículums de Matemáticas para los últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria Obligatoria que me permitirá ejemplificar las reflexiones que pretendo compartir durante esta conferencia en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en esta etapa.

Divisibilidad antes de saber dividir

El trabajo con los primeros conceptos de divisibilidad comienza mucho antes que los alumnos sepan dividir. Basta mencionar un par de ejemplos:

<u>Pares e impares</u>. Tenemos 9 tarjetas y en cada una de ellas aparece escrito un dígito entre 1 y 9. Elegimos una tarjeta al azar y pedimos a los alumnos que nos digan el mayor número par de dos cifras en que interviene el dígito de la tarjeta. Por ejemplo, si la tarjeta tiene el número 3 la solución es 38 y si la tarjeta tiene el número 4 la solución es 94. Después de hacer unos cuantos ejemplos, podemos preguntarles cuál es la estrategia general para encontrar la solución. Durante la conferencia comentaré un applet

relacionado con este problema que los lectores podrán encontrar en el post “Buscar el nombre més gran que …” del blog de applets del PuntMat.

Patrones En una tabla de 10 filas y 10 columnas tenemos escritos los números del 1 al 100 de manera ordenada (conformando un material de referencia habitual en las aulas de los primeros cursos de primaria: la grilla del 100), pintamos la primera casilla de verde, la segunda de rojo, la tercera de amarillo y volvemos a repetir los colores: la cuarta casilla de verde, la siguiente de rojo, la siguiente de amarillo y así sucesivamente. Después de pintar unas 10 o 20 casillas, preguntamos a los alumnos de qué color será la casilla que contiene al número 40, buscando saber si el alumno intuye la relación cíclica entre los colores y los números, si intuye que contando de 3 en 3 los colores se repiten: una noción básica para acercarse en el futuro a la idea de múltiplo.

Divisibilidad desde el primer día que sabemos dividir

Creo que, desde que se comienza a trabajar con la operación “división”, es fundamental dar tanta importancia al resto como la que se da al cociente de la misma.

• Desde el primer reparto que proponemos a los niños utilizando material manipulativo debemos incorporar, junto con las preguntas sobre la cantidad de grupos o sobre la cantidad de objetos en cada grupo, la pregunta sobre la cantidad de objetos que quedan sin repartir.

• □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ listas de cálculo mental que proponemos a los alumnos, junto con 12:4 o 14:2, deben aparecer divisiones del tipo 10:3 en la que los alumnos nos digan “cociente 3 y resto 1”, En este sentido comentaré un fantástico applet que se ajusta a este objetivo: “Remaiders counts” (el enlace al cual presento al final de este extenso).

• Cuando proponemos actividades para practicar el algoritmo que se haya decidido trabajar para la división pueden proponerse actividades que al mismo tiempo que cumplen el objetivo de mecanización de un procedimiento sitúan al alumno en un ambiente de resolución de problemas, actividades que siguiendo a Van Den Heuvel (2001), podemos clasificar de *práctica productiva*. Comentaré un par de ejemplos de actividades de este tipo que los lectores podrán encontrar en el post “El residu si importa” del blog PuntMat. Los enlaces a todas las entradas de este blog mencionadas durante la conferencia aparecen al final de este extenso. Aunque se trata de un blog escrito originalmente en catalán se puede acceder a la traducción al castellano a partir de un botón visible en la parte derecha de la página.

Las tareas básicas en relación al concepto de divisor

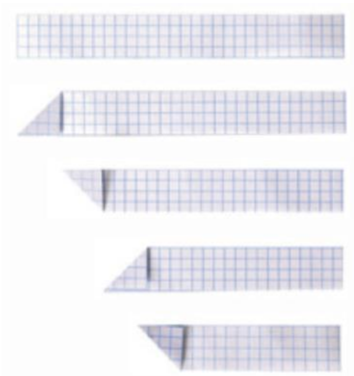
Independientemente que, tal como comento en los dos apartados anteriores, los conceptos básicos de divisibilidad aparecen de manera natural en las clases de Matemáticas llega un día que presentamos el concepto de divisor y lo ponemos en juego en diferentes actividades. Creo que es conveniente tener presente las diferentes demandas cognitivas de las tres tareas básicas en relación al concepto de divisor:

1) Decidir si un número es divisor de otro

Esta tarea el alumno la puede enfrentar dividiendo con lápiz y papel y observando si el resto es o no es cero o dividiendo con calculadora y observando si el cociente tiene o no cifras decimales. Más adelante podrá tomar la decisión usando un criterio de divisibilidad o analizando la descomposición factorial, pero en un primer momento también conviene que tomen la decisión utilizando estrategias más "visuales", colaborando a enriquecer el esquema conceptual de divisor que posee el alumno:

a) 7 es un divisor de 56 porque si sobre una línea numérica salimos del 0 y vamos dando saltos de longitud 7 hay un momento en que caemos en el 56

b) 4 no es un divisor de 30 porque si hacemos una tira de papel cuadriculado de 4x30 y hacemos pliegues como se ve en la siguiente imagen no llegamos exactamente al final de la tira



c) 6 es un divisor de 48 porque podemos dibujar sobre una hoja de papel cuadriculado un rectángulo que ocupe 48 cuadritos ocupando 6 cuadritos en su base.

2) Encontrar divisores de un número

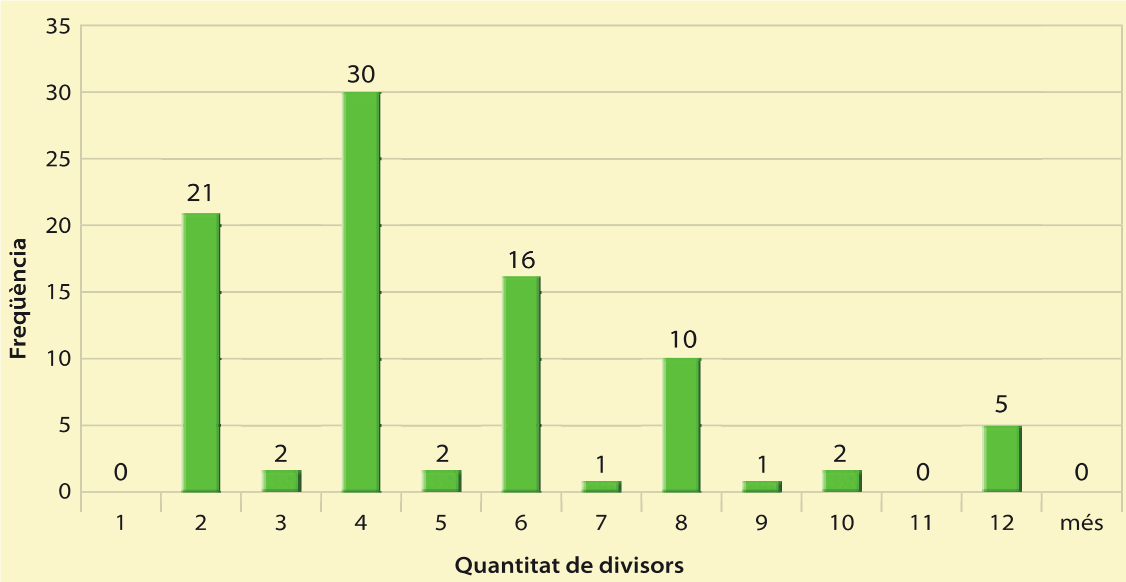
En esta tarea los alumnos aplicarán lo aprendido durante la ejecución de la tarea anterior pero de una manera más autónoma. Ahora no es el maestro quien le propone mirar si tal o tal número es un divisor sino que es el propio alumno el que se ha de proponer esa pregunta y lo ha de hacer con números para los que sea razonable hacerlo. Deberá concluir que si busca divisores de un número n no tiene sentido buscar divisores en números mayores que el propio n, que 1 y el propio número siempre están en la lista de divisores y que si descubre que un número a es un divisor de n, también el cociente de n:a lo será.

3) Encontrar todos los divisores de un número

Llega un momento en que la búsqueda de algunos divisores puede hacerse de manera exhaustiva y si el alumno ha sido sistemático podrá asegurar que aquellos divisores que ha encontrado son todos los divisores del número.

Esta tarea requiere práctica pero eso no quiere decir que debamos proponer a nuestros alumnos largas listas de números a los que deban hallarles todos sus divisores. La práctica a la que hago referencia puede ser productiva como se ve en los siguientes ejemplos:

<u>Los números de dos cifras</u>: podemos preguntar a nuestros alumnos cuál es el número de dos cifras que tiene más divisores y discutir con ellos sobre la necesidad de evaluar la cantidad de divisores de 90 números, una tarea que se presta a abordarla de manera cooperativa, se reparten entre los alumnos los 90 números y cada uno de ellos aborda la subtarea asignada. Al acabar se puede elaborar un gráfico como el siguiente cuyo análisis entre otras conclusiones nos permite descubrir que los números de 2 cifras con mayor cantidad de divisores son los cinco que tienen 12 divisores: 60, 72, 84, 90 y 96.



Un número y su doble: al elaborar el gráfico anterior seguro que los alumnos descubren que ser mayor no implica tener más divisores pero podemos perfilar más esta conclusión (el doble de un número sí que tiene más divisores que el propio número) proponiendo a los alumnos que elijan diversos números impares y calculen sus divisores y los de su doble. Por ejemplo: los divisores de 15 son 1, 3, 5, 15 y los de 30: 1, 3, 5, 15, 2, 6, 10, 30. Luego de realizar esta tarea con diversas parejas de números les preguntamos qué observan (en todos los casos la cantidad de divisores se duplica ya que a la lista de todos los divisores del número impar se agrega el doble de cada uno de esos divisores) y cómo se modifica esa conclusión cuando el número inicial es par (en esta ocasión aunque el doble tiene más divisores que el número inicial nunca llega a duplicarse esta cantidad).

La necesaria práctica a la que anteriormente hacia referencia también puede ser lúdica, brindando al alumno un ambiente en que el interés por no perder ningún divisor viene dado por el interés de ganar. En este sentido en la conferencia comentaré un ejemplo que los lectores podrán encontrar en el post “Joc de divisors” del blog de applets del PuntMat.

La equivocada urgencia por presentar un algoritmo para calcular el MCD

Después de haber trabajado con la determinación de todos los divisores de un número es natural (y necesario para avanzar en el trabajo del tema) plantearse si dos números comparten entre la lista de sus divisores algún número más allá del siempre presente 1. Este planteo debe surgir desde alguna situación con contexto (matemático o cotidiano) y el alumno la puede resolver con sus conocimientos previos sin necesidad de ninguna fórmula y mucho antes de haber visto una sigla como “MCD”.

Después de haber resuelto situaciones en que los alumnos determinan los divisores que tienen en común dos números, podemos presentar el interés de conocer el mayor de estos divisores comunes y podemos relacionar este número con la búsqueda de un número que comparta la mayor cantidad posible de factores primos de los números iniciales. Durante la conferencia comentaré un applet que los lectores podrán encontrar descrito en el post “Un algorisme més transparent per calcular MCD i mcm” del blog del PuntMat.

Pero de esta búsqueda de un procedimiento transparente para encontrar el máximo divisor común a dos números a presentar de manera prematura un algoritmo como “el máximo común divisor común de dos números se obtiene multiplicando los factores primos comunes a esos dos números elevados a su mayor exponente”, hay una brecha que no podemos ignorar si no queremos dar una imagen distorsionada de las Matemáticas: no se trata de aprender una fórmulas que olvidarán un mes después de haberlas utilizado en clase sino de resolver problemas, de descubrir patrones y de entender que hay algoritmos que simplifican tareas mecánicas, pero que tienen sentido aprenderlos si a ellos se llega de manera razonada y justificada.

Creo que puede tener interés presentar en el aula algoritmos alternativos para el cálculo del MCD de dos números basándonos en otros argumentos didácticos más allá de su eficiencia. Como ejemplo de este tipo de algoritmos comentaré durante la conferencia una versión del Algoritmo de Euclides que los lectores podrán encontrar descrita en el post “Pràctica productiva amb restes” del blog del PuntMat.

Me parece interesante que sea cual sea el procedimiento que utilizan los alumnos para determinar el máximo común divisor (o el mínimo común múltiplo) en el momento de presentarles actividades de práctica, ésta también sea productiva y motivadora de interesantes discusiones grupales. Un ejemplo que me gusta mucho de este tipo de actividades es pedir a mis alumnos que completen una tabla como la siguiente:

a	b	MCD(a,b)	mcm(a,b)
4	6		
7	8		
11	11		
1	17		
19	31		
33	35		
13	130		
16	20		
18	30		
24	60		

A partir del trabajo de los alumnos podemos pedirles que conjeturen qué pasa con el MCD(a,b) y el mcm(a,b) cuando a y b son el mismo número, o números consecutivos, o números primos entre si, o cuando a es múltiplo de b. Pero podemos ir más allá y proponerles que busquen un patrón entre el resultado de multiplicar los números de las dos primeras columnas y el de multiplicar los números de las dos últimas.

Conclusión

Durante esta conferencia espero justificar de manera suficiente mi posición respecto a que, en el tema "Divisibilidad" y en todos los otros temas que trabajamos en la clase de Matemáticas durante la etapa obligatoria, es necesario:

- Promover esquemas conceptuales ricos en relación a los conceptos matemáticos
- Utilizar y promover el uso por parte de los alumnos de recursos digitales y manipulativos
- No centrar el aprendizaje de un concepto en el entrenamiento en los algoritmos asociados
- Practicar los procedimientos matemáticos de manera productiva

Enlaces relacionados

Buscar el nombre més gran que …

http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2014/02/buscar-el-nombre-mes-gran-que.html

Joc de divisors

http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/12/joc-de-divisors.html

El residu si importa

http://puntmat.blogspot.com/2015/08/el-residu-si-importa-2na-part.html

Pràctica productiva amb restes

http://puntmat.blogspot.com.es/2014/11/practica-productiva-amb-restes.html

Remaiders counts

http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_remainders_count.html

Un algorisme més transparent per calcular MCD i mcm

http://puntmat.blogspot.com.es/2011/11/un-algorisme-mes-transparent-per.html

Referencias bibliográficas

Barba, D., & Calvo, C. (2014). *Algunas actividades para hablar de divisibilidad*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (76), 91-98.

Calvo, C., & Barba, D. (2010). *La división: mucho más que un algoritmo*. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 17(54), 41-54.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.