ALGUNAS IDEAS ACERCA DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

Ana Laura Fortes - Camilo Romero

anitafortes@gmail.com - soycamiloromero@gmail.com

Consejo de Educación Secundaria

Tema: Pensamiento Geométrico.

Modalidad: PT

Nivel educativo: Formación y actualización docente.

Palabras claves: Goemetría Hiperbólica, Poincaré, Mosaicos

Resumen:

El libro "Elementos de Euclides" fue creado en el año 300 a.c. y contenía todo el saber matemático acumulado hasta ese entontes. En él se establece el rigor del cual goza la matemática hasta nuestros días. Los cinco postulados de Euclides son el principio de una larga cadena de deducciones en el cual se basa toda la geometría, que tiene sentido así como la conocemos si aceptamos el quinto como válido: "dado una recta y un punto exterior a ella, existe y es única la paralela a la recta por el punto". La negación de él, lejos de llevarnos a una contradicción, como muchos pensaron, desarrollaron nuevas geometrías. Aquí nos centraremos en la geometría hiperbólica que admite la existencia de varias rectas paralelas que pasan por un punto exterior a ella. Veremos que entendemos como plano hiperbólico, la forma de medir distancias en él y los movimientos que conservan esas distancias y dejan invariante nuestro plano. También mostraremos que la suma de ángulos de un triángulo está vinculada al área del mismo y como eso permite construir mosaicos en el plano hiperbólico.

Para entender la Geometría Hiperbólica es necesario remontarse hacia 300 a.C. cuando Euclides escribió su libro "*Elementos*" donde rocopila y ordena los conocimientos goemétricos y físicos generados hasta ese momento y además propone un modo de validarlos, que suponia la existencias de cinco postulados que son la bese larga cadena de deducciones en el cual se basa toda la geometría**.**

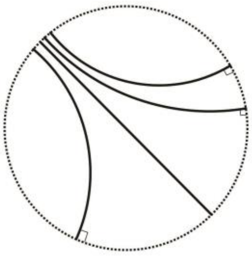
I. **Dados dos puntos de un plano pueden unirse por una recta incluída en él.**
II. **Un segmento de recta puede ser prolongado en una longitud tan grande como se desee.**
III. **Se puede dibujar una circunferencia de cualquier centro y cualquier radio.**
IV. **Todos los ángulos rectos son iguales.**

V. En un plano, dado una recta y un punto exterior a ella, existe y es única la paralela a la recta por el punto.

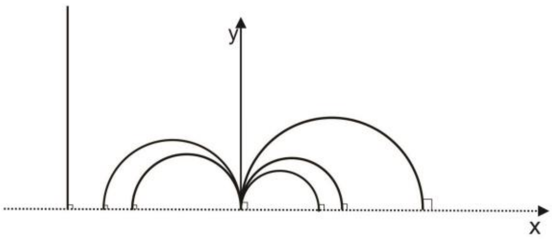
La Geometría Hiperbólica resulta de aceptar como válida una de las dos negaciones[1] del quinto postulado: existe más de una paralela a una recta por un punto exterior a ella. Bolayai (1802 - 1860) y Lobachesvsky (1793 - 1856) demuestran la consistencia del sistema de axiomas que resulta de sustituir en el sistema euclideano el Postulado V por una de sus negaciones. Existen varios modelos de Geometría Hiperbólica en este póster nos centramos en los modelos de Henri Poincaré (1854 - 1912) que permiten una mejor respresentación de la figuras así como la posibilidad de medir las distancias en formato real.

Modelo del disco de Poincaré Δ: disco sin frontera donde las rectas elegidas como rectas hiperbólicas son los arcos de circunferencia ortogonales a la frontara así como los diámetros.

Modelo del Semiplano superior H^+: tiene como puntos a los del semiplano superior del plano cartesiano, los puntos del eje x juegan el papel de puntos al infinito. Las rectas hiperbólicas son las semicircunferencias perpendiculares al eje x y las rectas perpendiculares al eje x.



Modelo del disco de Pincaré, Δ



Modelo del semiplano superior de Poincaré, H^+

Métrica Hiperbólica:

Es necesario modificar la forma en que medimos las longitudes para lograr que las rectas propuestas sean curvas que minimicen la distancia entre dos puntos. Si pensamos en el

[1] La primera negación del quinto postulado, no existen rectas paralelas a una dada por un punto exterior a ella, tiene como desencadenente la Geometría Elíptica.

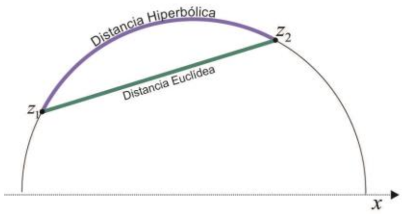
semiplano como una superficie que se vuelve más densa a medida que nos aproximamos al borde, una persona que intenta avanzar debe modificar su tamaño a fin de seguir avanzando a la misma velocidad. Si la densidad en el borde es infinita, la persona no puede alcanzarlo y por lo tanto esa longitud será infinita.

Sea $\gamma:(a,b)\to\square$, con (a,b) abierto y γ diferenciable. γ es una curva en el plano hiperbólica si: $\gamma(t)=\gamma_1(t)+i\cdot\gamma_2(t)$. La longitud de γ la medimos como:

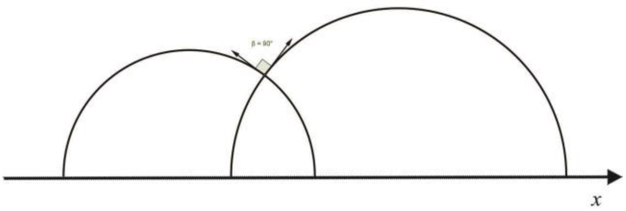
$$l(\gamma)=\int_a^b \frac{\sqrt{\left(\gamma_1'(t)\right)^2+\left(\gamma_2'(t)\right)^2}}{\gamma_2(t)}\,dt$$

Dados dos puntos z_1 y z_2, la distancia entre ellos es el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen esos dos puntos.

De esta manera entendemos una geodésica como una curva que realiza la disntracia entre dos puntos y su conjunto imagen es una recta hiperbólica. Las rectas hiperbólicas son las que minizan las disntacias y tienen longitud infinita.



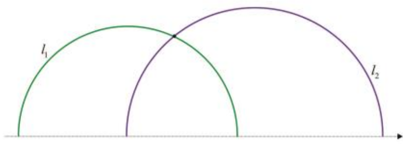
Ángulos entre rectas: Sean dos rectas hiperbólicas $\gamma(t)$ y $\delta(t)$ que se intersecan en el punto z_0, tal que $z_0=\gamma(t_1)=\delta(t_2)$. β es el ángulo formado por $\gamma(t)$ y $\delta(t)$ y queda determinado por los vectores tangentes a $\gamma(t)$ y $\delta(t)$ en z_0.

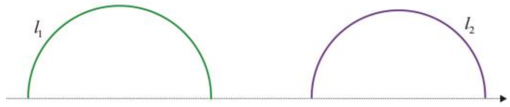


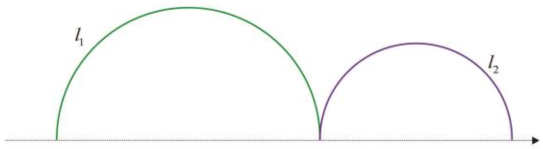
En el dibujo de anterior las rectas trazadas son perpendiculares, porque el ángulo formado por los vectores trangentes en el punto de intersección es 90°.

Posiciones Relativas de dos rectas.

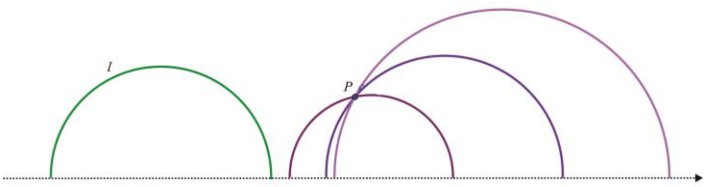
Sean l_1 y l_2 dos rectas hiperbólicas distintas. Decimos que son secantes si tienen un punto en común y no secantes si no tienen puntos en común. Haciendo referencia a la geometría euclideana, dos rectas no secantes son paralelas.







Sea l una recta y P un punto exterior a ella. Existen infinitas rectas secantes a l que pasan por P.



Es interesante notar en este punto que los primeros cuatro postulados de Euclides se siguen siendo válidos. Principalmente el segundo que establece que las rectas tienen longitud infinita. El mismo se encuentra explicitado con el cuidado que la cultura de su tiempo le permitó donde todavía no existía el concepto de infinito.

Grupo G de las Transformaciones de Möbius:

Las Transformaciones de Möbius son funciones biyectivas en el plano complejo en sí mismo extendido a $\square_{\infty}$: $T:\square \to \square, T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ con $a,b,c\ y\ d \in \square$. Si nos restringimos al conjunto de transformaciones que dejan invariante el semiplano superior H^{+} tienen la propiedad de preservar la distancia hiperbólica y los ángulos entre curvas, son isometrías. Félix Klein propone en 1872 pasar a ver la Geometría con eje en el concepto de grupo de isometrías o transformaciones rígidas. "*Geometría es el estudio de los invariantes bajo un grupo de transformaciones*"[2].

Definimos G como: $G=\left\{T:\square \to \square, T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d \in \square, ad-bc=1\right\}$

Todo elemento de G preserva el semiplano superior y además es una composición de las siguientes:

- Inversión: $T:\square \to \square, T(z)=-\dfrac{1}{z}$
- Homotecia: $T:\square \to \square, T(z)=k\cdot z, k \rangle 0$
- Traslación: $T:\square \to \square, T(z)=z+c$

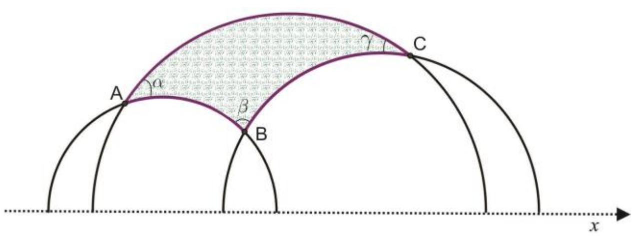
Estás transoformaciones preservan las distancias y los ángulos en H^{+}.

La transformación $Q(z)=\dfrac{z-i}{iz+1}$ lleva el semiplano H^{+} en el disco Δ lo que permite trabajar idistintamente con uno u otro modelo.

Triángulos.

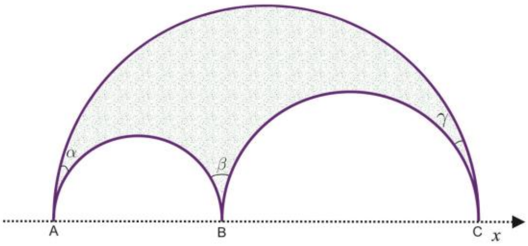
Dados tres puntos en el plano hiperbólico, un triángulo es la unión de los tres arcos de recta hiperbólica que determinan dichos puntos, pudiendo estar en el infinito.

Triángulo de vértices A, B, C y ángulos α, β y γ.La recta AB corta a la recta AC en A, por lo



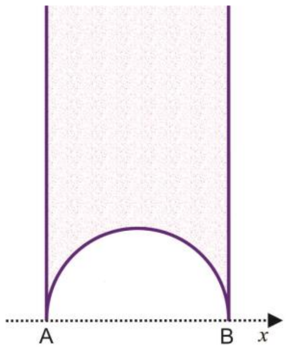
[2] Klein, F. *Le Programme d'e Erlangen*, Guthier-Villard, Paris 1064

tanto el ángulo α es mayor a 0°.



Triángulo de vértices A, B, C y ángulos α, β y γ. En este caso A, B y C no pertenecen al plano hiperbólico, las rectas AB y BC se cortan en el punto infitno.

Por lo tanto $\beta = 0$. Realizando el mismo razonamiento para los ángulos α y γ tenemos que: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Este tipo de triángulos, cuyos ángulos miden 0 reciben el nombre de Ideales.



El siguiente triángulo también ese ideal.

Proposición: Dados dos triángulo ideales existe una transformación de Möbius que lleva uno en el otro.

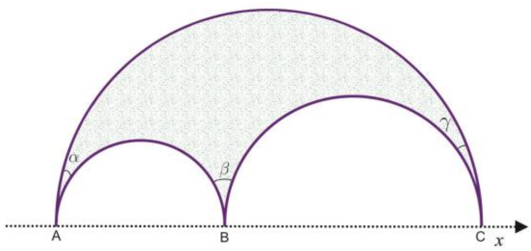
Área Hiperbólica:

Sea E una figura del plano hiperbólico, el área de E la definimos como: $\acute{A}(E) = \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$.

Las áreas se conservan mediante las tranformaciones de Möbius.

Teorema de Gauss - Bonnet:

El área de un triángulo hiperbólico es igual a π menos la suma de los ángulos. $\acute{A}(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \lambda)$



La demostración del teorema figura en el póster.

Mosaicos[3]:

[3] El estudio de los Mosaicos en el plano hiperbólico podría constituir un poster en si mismo. Aquí lo analizamos como una aplicación de la Geometría Hiperbólica donde se utiliza el resultado de Gauss - Bonnet.

Un mosaico o teselado se obtiene cuando se cubre completamente el plano con una figura regular. Entre dos figuras cualesquiera de un teselado es posible encontrar una isometría que las hace corresponder. En el plano euclíedo se tiene una restricccción grande para generarlo, los ángulos de las figuras que coinciden en un vértice suman 360°, lo cual se obtiene solamente con triángulos equiláteros, cuadrado y hexágonos. En H^+ (y por lo tango en Δ) la restricción es menor ya que los polígonos regulares pueden generarse con cualquier medida de ángulos gracias al resultado de Gauss - Bonnet. Esto perminte construir infintas manera de teselar el plano hiperbólico, y por lo tanto el disco.

Las teselaciones vienen determinadas por dos variables:

- El número de lados del polígono regular
- El número de polígonos que concurren en un vértice.

Una vez determinaos estas dos variables, es necesario construir un polígono en el centro del disco y por medio de inversiones con respecto a sus lados se determina toda la taselación. Utilizando la transformación $Q(z)=\frac{z-i}{iz+1}$ es posible llevarla al semiplano superior.

M.C. Escher utilizó tanto la goemetría hiperbólica como la euclídea para realizar teselados. Este es uno de sus famosos mosaicos euclidiano transformado en hiperbólico.

Geometría Euclídea

Geometría Hiperbólica. Disco Δ

Geometría Hiperbólica. Semiplano superior H^+

Referencias

Ramírez - Galarza, A. & Seade Kuri, J., (2002). *Introducción a la Geometría avanzada*, UNAM, Facultad de Ciencias.

Santaló, L. (1961). *Geometrías no euclideanas*, Cuadernos de Eudeba.

Kisbye, N.(2009) , El plano de Poincaré, En: *Facultad de Matemática Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba Publicaciones*. de http://www.famaf.unc.edu.ar/

Recuperado de: http://www.famaf.unc.edu.ar/series/pdf/pdfCMat/CMat35-1.pdf

.