CONDICIÓN ¿NECESARIA O SUFICIENTE?
ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS USUALES EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA

Eduardo Mario Lacués Apud
elacues@ucu.edu.uy
Universidad Católica del Uruguay (UCU)

Formación de profesores y maestros
Minicurso
Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación en servicio; Estructuras deductivas; Enseñanza y aprendizaje de Matemática; Razonamiento.

## Resumen

*Aprendizajes de Matemática y habilidades de razonamiento aparecen frecuentemente ligadas, hasta el punto en que suele admitirse que conseguir los primeros tiene como consecuencia la adquisición de las últimas. Sin embargo, existen evidencias de que esto podría no ser así y resultaría necesario prestar atención a explicitar las estructuras deductivas presentes en las argumentaciones matemáticas, como manera de propiciar su apropiación por parte de los estudiantes (Durand-Guerrier, 2003; Inglis & Simpson, 2008; Morou & Kalospyros, 2011).*
*En este minicurso, dirigido a profesores que se desempeñan en la educación media o en la superior, el objetivo es sensibilizar acerca de la necesidad de explicitar desde la enseñanza el rol que las estructuras deductivas juegan en el aprendizaje de Matemática, por lo que se propone la siguiente agenda:*
*Sesión 1:*
*Exposición magistral: Breve estudio del trayecto histórico de la noción de condicional; relación entre el condicional y las estructuras deductivas, modus ponens y modus tollens.*
*Trabajo en taller: Identificación de instancias en el desarrollo de los contenidos matemáticos donde aparecen estructuras deductivas.*
*Sesión 2:*
*Exposición magistral: Razonamiento por absurdo, recíproco y contrarrecíproco, falacia abductiva.*
*Trabajo en taller: diseño de actividades de clase con el propósito de enseñar estructuras deductivas.*

## Introducción

Es frecuente que Matemática y razonamiento se asocien, de manera que se asume que el aprendizaje de la primera provoca la adquisición de habilidades en el segundo, y esta razón se ha esgrimido como una de las que justifican la inclusión de Matemática en el currículo.

Sin embargo, las características de este vínculo en general permanecen difusas: ¿el desarrollo de habilidades en qué clase de razonamiento (deductivo, inductivo, por analogía, entre otros) resultan estimuladas por el aprendizaje de Matemática? ¿Este desarrollo se produce como simple efecto colateral del aprendizaje, o existen otros factores relevantes para conseguirlo, como la naturaleza de los contenidos matemáticos o la explicitación desde la enseñanza de la presencia de formas de razonamiento asociadas a los argumentos matemáticos?

Existen evidencias que muestran que en ausencia de enseñanza intencional, puede no ocurrir que los estudiantes reconozcan las estructuras de razonamiento utilizadas, y por lo tanto, no necesariamente se apropiarán de ellas (Durand-Guerrier, 2003, Inglis y Simpson, 2008, Morou y Kalospyros, 2011, Chávez y Caicedo, 2014).

Este minicurso busca situar este problema, concentrándose en estructuras de razonamiento deductivo, brindando una visión teórica desde los fundamentos lógicos basados en la noción de condicional, y concluyendo en la práctica cotidiana en clase con ejemplos de situaciones en los que es posible aprovechar la enseñanza de contenidos matemáticos para, además, generar situaciones donde los estudiantes pueden razonar y reconocer las formas argumentales que están usando.

A continuación se presenta un breve marco teórico para cada una de las sesiones del Minicurso.

**Sesión 1**

**1.1 Trayecto histórico de la noción de condicional**

Aristóteles (384-322 a.C.) es considerado el precursor de la Lógica, al introducir los silogismos y discutir cuáles de estas formas argumentales eran correctas (algunas de sus conclusiones resultaron equivocadas, a la luz de desarrollos posteriores); mostró, además, una preocupación por el problema de cuantificar proposiciones, que vino a tener solución recién en el siglo XX.

Un avance posterior puede encontrarse en Filon de Megara (Durand-Guerrier, 2003) cuyo trabajo se desarrolló alrededor del año 300 a.C., retomando y ampliando el de Aristóteles. A él se debe la definición acerca de cuándo una sentencia condicional es cierta.

En Cálculo Proposicional, si A y B son dos fórmulas bien formadas (fbf), se define el valor de verdad de la fórmula (A) $\rightarrow$ (B), llamada condicional, diciendo que es falsa si y sólo si la fbf A es cierta y la fbf B es falsa. A y B se llaman, respectivamente, antecedente y consecuente.

Desde Filón, no se registran avances importantes en Lógica hasta Leibnitz, con su objetivo de crear una "Simbólica" o "Característica", ciencia en la que se podrían expresar todos los razonamientos: "Es de esta ciencia que dependería entonces el desarrollo de las diferentes partes de la Matemática" (Brunschvicg, 1945, p. 227).

Esta misma posición fue defendida entre finales del siglo XIX y comienzos del XX por otros matemáticos, como Giuseppe Peano, Augustus de Morgan y George Boole.

Con sus trabajos se resolvieron cuestiones de Cálculo Proposicional (con el uso de la algebrización de este cálculo), se plantearon adecuadamente los problemas relacionados con la cuantificación (aun cuando su solución recién se logró con Gottlob Frege) y se avanzó en la noción de teorías axiomáticas.

Finalmente, se estableció el valor de verdad de fórmulas cuantificadas; con la designación de implicación material que dio Bertrand Russel a estas sentencias condicionales, tenemos que:

> La fbf $(\forall x)$ ( (A) $\rightarrow$ (B) ) es cierta en un dominio si y sólo si (A) $\rightarrow$ (B) es cierta para cualquier instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.
>
> La fbf $(\exists x)$ ( (A)$\rightarrow$(B) ) es cierta en un dominio si y sólo si (A) $\rightarrow$ (B) es cierta para alguna instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.

### 1.2 Relación entre condicional y estructuras deductivas

A lo largo del siglo XX fueron configurándose dos maneras de enfocarse en el problema de la deducción.

En el teoría semántica, se comienza estableciendo el valor de verdad de una fórmula, desde allí se definen las tautologías como fórmulas que son ciertas en cualquier interpretación, y se establecen las reglas de inferencia a partir de tautologías que tengan la forma de un condicional.

Las reglas de inferencia, en esta perspectiva, resultan de las tautologías: si la fórmula $(A_1) \wedge (A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n) \rightarrow (B)$ es una tautología, entonces la fórmula B es consecuencia lógica de las premisas $A_1, A_2, \ldots A_n$.

En la teoría sintáctica, en cambio, lo que se asume como punto de partida en el llamado método de deducción natural, son las estructuras deductivas que se construyen con el uso de reglas de transformación. Estas reglas aparecen de a pares, de manera que una de ellas sirve para introducir un conectivo y a otra para eliminarlo. Así, por ejemplo, del conocimiento de las fórmulas A y B se deduce $A \wedge B$, mientras que del conocimiento de $A \wedge B$ se deducen tanto A como B.

El método de deducción natural es más próximo a la forma de trabajo en Matemática, y se acerca a la idea primitiva de Euclides, de que deben obtenerse demostraciones de enunciados a partir de otros, tomados como ciertos, mediante reglas que justifican la construcción de secuencias de enunciados que culminan en el que se quiere probar.

**1.3 Modus ponens y modus tollens**

Filón de Megara enunció estas dos reglas, respectivamente, de la siguiente manera:

> *"Si el primero, el segundo: el primero; por lo tanto, el segundo"*
> *"Si el primero, el segundo: no el segundo; por lo tanto, no el primero"*

Estas dos reglas de inferencia son de las más usadas en Matemática. Para ejemplificar lo que se planteó en la sección anterior, se presenta la relación del modus ponens con tautologías y las sentencias condicionales.

La forma verbal que describe el modus ponens puede traducirse en términos del Cálculo Proposicional de la siguiente manera (aunque mediante convenciones sobre precedencia de conectivos, podrían eliminarse paréntesis): $((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b$. En esta formulación, "$\rightarrow$" es el signo para el condicional y "$\wedge$" el correspondiente a la conjunción. El paréntesis antes del segundo signo de condicional expresa la frase "si el primero, el segundo" (en el paréntesis interno) y "el primero", mientras que el segundo signo de condicional sirve para establecer que de esta conjunción se concluye "el segundo".

Ahora bien, la sentencia $((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b$ es una tautología, es decir, una fórmula que es cierta para cualquier asignación de valores de verdad a sus variables. Para ver esto, alcanza con notar que la única forma de que fuera falsa sería que $(a \rightarrow b) \wedge a$ fuera cierta y b falsa. Pero $(a \rightarrow b) \wedge a$, para ser cierta, requiere $a \rightarrow b$ y a ciertos simultáneamente, con lo que b es obligatoriamente cierto y no falso como hubiera debido ser.

Teniendo en cuenta lo mencionado en la sección anterior, esta tautología conduce a modus ponens como regla de inferencia.

En la teoría sintáctica, entretanto, modus ponens es una de las reglas de transformación: del conocimiento de $(A) \rightarrow (B)$ y A, se deduce B; la regla que complementa el par con ésta establece que si a partir de A se ha establecido B, entonces se deduce $(A) \rightarrow (B)$.

**1.4 Trabajo en taller de la sesión 1**

Consigna: Reconocer qué estructuras deductivas aparecen con frecuencia en la argumentación en la clase de matemática.

Identificar situaciones habituales de clase en la que es posible poner énfasis, además de en el contenido matemático, en las estructuras deductivas que forman parte suya.

**Sesión 2**

**2.1 Razonamiento por absurdo**

La estructura de razonamiento por absurdo se fundamenta en la siguiente tautología: $(a\rightarrow b) \leftrightarrow ((a \wedge \neg b) \rightarrow (d \wedge \neg d))$

Esta fórmula puede interpretarse diciendo que es equivalente que podamos deducir b de a (representado en esta fórmula por “$a\rightarrow b$”) a que podamos deducir de a y la negación de b un absurdo (en el condicional $(a \wedge \neg b) \rightarrow (d \wedge \neg d)$ la conjunción de a y la negación de b se representa con “$a \wedge \neg b$”, mientras que “$d \wedge \neg d$” representa un absurdo, al ser una fórmula siempre falsa).

Vale la pena señalar al menos dos asuntos en relación con los razonamientos por absurdo.

El primero es una dificultad intrínseca al método: no se puede anticipar cuál es el absurdo al que se va a llegar. A veces, se consigue como conclusión la negación de una de las hipótesis; en otras, se llega a una contradicción de algún resultado previamente probado.

Por eso, como forma de abordaje de problemas, el razonamiento por absurdo clasifica como una estrategia heurística, que puede conducir a la solución pero no es seguro el éxito al usarla.

El segundo, es una concepción que frecuentemente se detecta en los estudiantes. Cuando se les pregunta acerca de en qué consiste el método, suelen limitarse a decir que en suponer que no se cumple la tesis. La compleja estructura de esta forma de razonamiento queda inadvertida para muchos de ellos.

**2.2 Recíproco y contrarrecíproco, falacia abductiva.**

A cada enunciado condicional, “$a \rightarrow b$”, se asocian un enunciado recíproco “$b \rightarrow a$”, y un contrarrecíproco, “$\neg b \rightarrow \neg a$”.

Una notable diferencia entre ambos, es que el segundo es equivalente al dado, mientras que el primero no tiene relación alguna con él. Sin embargo, esta diferencia no es percibida por muchos estudiantes.

Una de las explicaciones de este hecho es la presentada por Cecilia Crespo en su tesis doctoral. Muchas de las ocurrencias cotidianas de sentencias condicionales en realidad se refieren a equivalencias (es decir, bicondicionales). Esto puede contribuir a que se pierda de vista el diferente rol que juegan antecedente y consecuente.

Por otro lado, una sentencia bicondicional es cierta siempre y cuando los dos enunciados que la componen tomen el mismo valor de verdad, lo que empuja más en el sentido de confundir estos roles.

Si esto ocurre, entonces es sencillo comprender por qué se incurre en el error llamado falacia abductiva; parafraseando la forma en que Filón enunció el modus ponens, podríamos establecer esta falacia diciendo que: "si el primero, el segundo; el segundo; luego el primero". Es decir, de las sentencias "a→ b" y "b" se obtiene "a".

Para esclarecer este punto, vale la pena hacer notar que de (A) ↔ (B) se obtienen tanto (A)→(B) como (B)→(A). Por eso, si se está entendiendo un condicional como si fuera un bicondicional, la estructura deductiva de la falacia abductiva corresponde a la aplicación del modus ponens al par formado por (B)→(A) y B.

### 2.3 Trabajo en taller de la sesión 2

Consigna: Identificar en el discurso cotidiano, por un lado, y en el matemático del aula, por otro, sentencias condicionales que se toman como bicondicionales y bicondicionales que se asumen como condicionales.

Consigna: Diseñar una intervención didáctica con la finalidad de utilizar la enseñanza de algún contenido matemático para destacar la estructura de razonamiento por absurdo.

Cierre: debate sobre los temas tratados y evaluación del minicurso.

### Referencias bibliográficas

Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires: Lautaro.

Chávez, J.D., Caicedo, A.M. (2014). TIC y argumentación: Análisis de tareas propuestas por docentes universitarios. Estudios Pedagógicos XL, N° 2, 83-100.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis Doctoral, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México, D.F.

Durand-Guerrier, V. (2003). *Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective*. Educational Studies in Mathematics, (53), 5–34.

Inglis, M., Simpson, A. (2008). *Conditional inference and advanced mathematical study*. Educational Studies in Mathematics, (67), 187–204.

### Referencias bibliográficas ampliatorias

Durand-Guerrier, V. (2008). *About logic, language and reasoning at the transition between French upper Secondary school and University*, comunicación del CI2U en ICME 11. http://tsg.icme11.org/document/get/551 Consultado el 15/10/2014

Morou, A., Kalospyros, N. (2011). *The role of logic in teaching, learning and analyzing proof*. comunicación presentada en CERME 7 http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Morou&Kalospyros.pdf Consultado el 28/11/2014