CLASIFICACION DE FORMAS CUADRATICAS

Jorge Moretti
jmoretti@hotmail.com
Uruguay

Tema: Resolución de problemas
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras claves: Forma cuadrática

Resumen: Un tema simple, interesante y útil que se estudia en la enseñanza media es el estudio de signo de una función polinómica de segundo grado, real de una variable real. Cuando lo que interesa son esas funciones de más de una variable real, la simpleza del tema suele complicarse ya que los métodos tradicionales suponen, por ejemplo, el conocimiento de asuntos como el de los valores propios de una matriz. En realidad, hay un método sencillo, que creo inédito, basado en la escalerización de una matriz (procedimiento usado habitualmente para resolver sistemas de ecuaciones lineales). El objetivo del taller es presentar ese método.

1 - Introducción

En los últimos años del liceo aprendimos a estudiar el signo de una función polinómica de segundo grado. La más sencilla de esas funciones es aquélla en la que P(x) = ax^2, ya que en este caso el signo de P es el de a (salvo en 0 pues P(0) = 0). Aquí nos interesarán funciones similares a la recién comentada pero ahora en R^n (con n > 1). O sea, nos ocuparemos de algunas funciones polinómicas de segundo grado, de dos o más variables, con el propósito de estudiar su signo en el sentido que más adelante indicaremos. Por ejemplo, analizaremos funciones como las que definimos a continuación.

1) f tal que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 3x^2 - 8xy - 6y^2$ (no aparecen términos ni en x, ni en y, ni término independiente y ello es intencional).

2) g tal que $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 4x^2 + 5y^2 - 7z^2 - 2xy + 6xz + 10yz$.

3) h tal que $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 3t^2 - xy + xz + 2xt + 3yz + 4yt - 6zt$.

Es importante que notemos que esas funciones pueden definirse a partir de un producto interno. Por ejemplo, en el caso de la función g lo que sigue muestra que g(x) = ⟨Ax,x⟩ donde A es una matriz simétrica y x = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es un vector de R^3. En efecto:

$$g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\left\langle\begin{pmatrix}4&-1&3\\-1&5&5\\3&5&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle=\langle \mathrm{Ax,x}\rangle \text{ con } \mathrm{A}=\begin{pmatrix}4&-1&3\\-1&5&5\\3&5&-7\end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

A tales funciones las llamaremos formas cuadráticas. En este documento describiremos un método, basado en el proceso de escalerización de una matriz, que permite estudiar con bastante sencillez el signo de las formas cuadráticas. En cuanto a los teoremas, sólo daremos sus enunciados (en la referencia bibliográfica constan sus demostraciones).

2 – Formas cuadráticas

Definición 1 - Forma cuadrática en R^n

Sea A una matriz simétrica de n filas y n columnas. Con esa matriz construyamos la función $Q_n : R^n \to R$ tal que $Q_n(x) = \langle Ax,x\rangle$ para cada $x \in R^n$. A esa función la llamaremos forma cuadrática en R^n con matriz asociada A.

En relación con la definición anterior resulta de interés que notemos lo siguiente:

- Es habitual ver en la literatura matemática la fórmula $Q_n(x) = x'Ax$.
- $Q_n(O) = 0$ cualquiera sea la forma cuadrática Q_n. Debido a ello, el vector nulo no tiene mayor interés en lo que al estudio del signo de una forma cuadrática se refiere.
- Si consideramos la forma cuadrática Q_n cuya matriz asociada es la matriz nula resulta que $Q_n(x) = 0 \ \forall \ x \in R^n$. Sin duda, esta forma cuadrática carece de interés en nuestro problema de estudiar el signo de una forma cuadrática.

Ejemplo 1 - Una forma cuadrática en R^2

Sea f la función de R^2 en R tal que $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=5x^2+4xy+8y^2$.

1) Tomemos la matriz simétrica A definida mediante $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix}$.

   Si $x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ resulta que $Ax=\begin{pmatrix}5x+2y\\2x+8y\end{pmatrix}$ y
   $\langle Ax,x\rangle = (5x + 2y)x + (2x + 8y)y = 5x^2 + 4xy + 8y^2$.
   Por lo tanto tenemos que la función f es una forma cuadrática en R^2 cuya matriz asociada es $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix}$.

2) Pongamos ahora $B=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ y determinemos a, b, c y d de modo que $\langle Bx,x\rangle = f(x)$.

   Debido a que $\langle Bx,x\rangle = ax^2 + (b + c)xy + dy^2$ concluimos que $a = 5$, $b + c = 4$ y $d = 8$. Existen, entonces, infinitas matrices B que cumplen $\langle Bx,x\rangle = f(x)$ y entre ellas hay sólo una que es simétrica (pues si exigimos que $b = c$ tenemos que $b = c = 2$).

3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq O$. En efecto, como $5 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (5x + 2y)^2 + 36y^2$ resulta que $5 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \geq 0 \ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $5 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$ sólo cuando $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O$ pues $(5x + 2y)^2$ y $36y^2$ son simultáneamente 0 sólo para $x = y = 0$.

4) $f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 5$ y $f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 8$.

Estos resultados ocupan, respectivamente, el primer y el segundo lugar en la diagonal principal de la matriz A.

Teorema 1 - Los valores de una forma cuadrática que identifican a su matriz

Sean Q_n una forma cuadrática en R^n con matriz asociada A y a_{ij} el número que está en la fila i y en la columna j de la matriz A (i y j varían entre 1 y n). Entonces:

1) $a_{ii} = Q_n(e_i)$ para i = 1, 2, ..., n.
2) $2a_{ij} = Q_n(e_i + e_j) - Q_n(e_i) - Q_n(e_j)$ para i = 1, 2, ..., n y j = 1, 2, ..., n.
3) $2a_{ij} = Q_n(e_i) + Q_n(e_j) - Q_n(e_i - e_j)$ para i = 1, 2, ..., n y j = 1, 2, ..., n.

3 – Signo de una forma cuadrática

Explicaremos en primer lugar lo que entenderemos por "estudiar el signo de una forma cuadrática". Dada una función real, el significado habitual de esa expresión es el de partir el dominio de la función en tres subconjuntos tales que en uno de ellos la función tome valores positivos, en otro valores negativos y en el restante el valor 0. Aquí no seremos tan pretenciosos.

Si Q_n es una forma cuadrática en R^n y su matriz asociada no es la matriz nula, hay algún valor de la forma cuadrática que no es 0 y por lo tanto puede ocurrir una y sólo una de las siguientes alternativas:

♣ Existe algún $x_1 \in R^n$ tal que $Q_n(x_1) > 0$.
En este caso distinguiremos entre:
- ♦ $Q_n(x) \geq 0 \ \forall x \in R^n$ y $Q_n(x) = 0$ sólo si $x = O$.
- ♦ $Q_n(x) \geq 0 \ \forall x \in R^n$ y existe algún $x_0 \in R^n$ tal que $x_0 \neq O$ y $Q_n(x_0) = 0$.
- ♦ Existe algún $x_2 \in R^n$ tal que $Q_n(x_2) < 0$.

♣ Para cualquier $x \in R^n$ es $Q_n(x) \leq 0$ y existe algún $x_2 \in R^n$ tal que $Q_n(x_2) < 0$.
En este caso distinguiremos entre:
- ♦ $Q_n(x) = 0$ sólo si $x = O$.
- ♦ Existe algún $x_0 \in R^n$ tal que $x_0 \neq O$ y $Q_n(x_0) = 0$.

Dada una forma cuadrática en R^n nuestro interés se concentrará en saber ante cuál de las cinco alternativas anteriores nos encontramos. Ese es el sentido que para nosotros tendrá la expresión "estudiar el signo de una forma cuadrática". La próxima definición resume lo que antecede.

Definición 2 - Clasificación de una forma cuadrática

Sea Q_n una forma cuadrática en R^n cuya matriz asociada no es la matriz nula.

1) Q_n es definida positiva cuando $Q_n(x) > 0$ $\forall$ $x \in R^n$ tal que $x \neq O$.
2) Q_n es definida negativa cuando $Q_n(x) < 0$ $\forall$ $x \in R^n$ tal que $x \neq O$.
3) Q_n es semidefinida positiva cuando $Q_n(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in R^n$ y $\exists$ x_0, x_1 en R^n tales que $x_0 \neq O$, $Q_n(x_0) = 0$ y $Q_n(x_1) > 0$.
4) Q_n es semidefinida negativa cuando $Q_n(x) \leq 0$ $\forall$ $x \in R^n$ y $\exists$ x_0, x_2 en R^n tales que $x_0 \neq O$, $Q_n(x_0) = 0$ y $Q_n(x_2) < 0$.
5) Q_n es indefinida cuando $\exists$ $x_1, x_2 \in R^n$ tales que $Q_n(x_1) > 0$ y $Q_n(x_2) < 0$.

Ejemplo 2 - Clasificación de cinco formas cuadráticas en R^2

En todas las formas cuadráticas que analizaremos a continuación usaremos el resultado de la primera parte del ejercicio 2 (ver el Anexo 2). Allí consta que si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la forma cuadrática Q_2, entonces se cumple lo siguiente:

$aQ_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2 \;\; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1) Sea Q_2 la forma cuadrática con A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

   Entonces $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x + 2y)^2 + 3y^2$. Esta forma cuadrática es definida positiva ya que $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq O$.

2) Elijamos B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

   Con esta matriz resulta que $-Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (-x + 2y)^2 + 3y^2$, o sea

   $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -(-x + 2y)^2 - 3y^2$. Esta forma cuadrática es definida negativa puesto que $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) < 0 \; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq O$.

3) Tomemos C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   En este caso tenemos que $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x + 2y)^2$. Esta forma cuadrática es semidefinida positiva ya que $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \geq 0 \; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Q_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ y $Q_2\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$.

4) Sea E = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

 ISSN 1688-9886

Ahora resulta que $-Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (-x + 2y)^2$ y por lo tanto $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \leq 0 \ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Q_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1$ y $Q_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$. Estamos pues ante una forma cuadrática semidefinida negativa.

5) Si $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ tenemos que $Q_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x + 2y)^2 - y^2$. Esta forma cuadrática es indefinida ya que $Q_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ y $Q_2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = -3$.

4 – La escalerización y las formas cuadráticas

En esta sección expondremos un método para clasificar formas cuadráticas.

Teorema 2 - Pasaje de una forma cuadrática en R^n a una forma cuadrática en R^{n-1}

Sean Q_n una forma cuadrática en R^n con matriz asociada A y a_{11} el número que ocupa el primer lugar en la diagonal principal de A. Si $a_{11} \neq 0$, entonces existe una forma cuadrática Q_{n-1} en R^{n-1} que tiene las siguientes propiedades:

1) Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ y $z = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^{n-1}$ resulta que $a_{11}Q_n(x) = Q_{n-1}(z) + \langle A_{1.}, x\rangle^2$.

2) Para cada $z \in R^{n-1}$ existe $x \in R^n$ tal que $Q_{n-1}(z) = a_{11}Q_n(x)$.

El teorema anterior amerita los siguientes comentarios:

1) A partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ construimos una matriz B cuyas filas son $\begin{cases} B_{1.} = A_{1.} \\ B_{2.} = a_{11}A_{2.} - a_{21}A_{1.} \\ B_{3.} = a_{11}A_{3.} - a_{31}A_{1.} \\ \vdots \\ B_{n.} = a_{11}A_{n.} - a_{n1}A_{1.} \end{cases}$.

Obtenemos $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & ... & b_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$.

2) Q_{n-1} es la forma cuadrática en R^{n-1} con matriz asociada C, donde C se obtiene de la matriz B eliminando su primera fila y su primera columna.

Teorema 3 - Sobre la clasificación de una forma cuadrática (escalerización)

Sean Q_n una forma cuadrática en R^n con matriz asociada A, a_{11} el número que ocupa el primer lugar en la diagonal principal de A, $a_{11} \neq 0$ y Q_{n-1} la forma cuadrática en R^{n-1} del teorema 2. Entonces:

1) Si Q_{n-1} es definida positiva resulta que Q_n es definida positiva cuando $a_{11} > 0$ y definida negativa cuando $a_{11} < 0$.
2) Si Q_{n-1} es definida negativa resulta que Q_n es indefinida.
3) Si Q_{n-1} es semidefinida positiva resulta que Q_n es semidefinida positiva si $a_{11} > 0$ y semidefinida negativa si $a_{11} < 0$.
4) Si Q_{n-1} es semidefinida negativa resulta que Q_n es indefinida.
5) Si Q_{n-1} es indefinida resulta que Q_n es indefinida.
6) Si la matriz asociada a Q_{n-1} es la matriz nula resulta que Q_n es semidefinida positiva cuando $a_{11} > 0$ y semidefinida negativa cuando $a_{11} < 0$.

Ejemplo 3 - Clasificación de dos formas cuadráticas en R^4

1) Sea Q_4 la forma cuadrática tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Para clasificarla, pasaremos de Q_4 a la forma cuadrática Q_3 del teorema 2. Con ese fin, ordenaremos nuestro trabajo así: en primer lugar anotaremos la matriz A, a continuación indicaremos los coeficientes que nos llevarán a la matriz B del teorema 2 (le llamaremos coeficiente básico al número que ocupa el primer lugar en la diagonal principal de A) y terminaremos escribiendo esa matriz B.

La matriz A				**Los coeficientes Básico: 1**			**La matriz B**			
1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	2	2	2	1			0	1	1	1
1	2	3	3		1		0	1	2	2
1	2	3	4			1	0	1	2	3

La forma cuadrática Q_3 es la que tiene matriz asociada $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Reiteremos el trabajo anterior con el fin de pasar de Q_3 a la forma cuadrática Q_2 del teorema 2 y, a partir de ésta, a la forma cuadrática Q_1 del mismo teorema.

La nueva matriz A			Los coeficientes Básico: 1		La nueva matriz B		
1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	2	2	1		0	1	1
1	2	3		1	0	1	2

La forma cuadrática Q2 tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La última matriz A		Los coeficientes Básico: 1	La última matriz B	
1	1	-1	1	1
1	2	1	0	1

La forma cuadrática Q_1 tiene como matriz asociada (1) y por lo tanto $Q_1(t) = t^2$. Esta forma cuadrática es definida positiva (con ella, aunque parezca increíble, retornamos a la sencilla función polinómica de una variable de la introducción). Debido a que todos los coeficientes básicos son positivos, la aplicación reiterada de la primera parte del teorema 3 nos lleva a concluir que Q_4 es definida positiva.

Atentos a todos los cálculos que hemos realizado, podemos aplicar tres veces la primera parte del teorema 2 para expresar Q_4 como una suma de cuadrados; el resultado es el siguiente: $Q_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = (x+y+z+t)^2 + (y+z+t)^2 + (z+t)^2 + t^2$.

2) Sea Q_4 la forma cuadrática tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. Al igual que en el punto anterior, pasaremos de Q_4 a la forma cuadrática Q_3 del teorema 2.

La matriz A				Los coeficientes Básico: 1			La matriz B			
1	2	3	4	-2	-3	-4	1	2	3	4
2	5	6	7	1			0	1	0	-1
3	6	8	9		1		0	0	-1	-3
4	7	9	10			1	0	-1	-3	-6

Q_3 es la forma cuadrática que tiene matriz asociada $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$. Por suerte no tenemos que continuar nuestro trabajo de escalerización. En efecto, al ser $Q_3(e_1) = 1$ y $Q_3(e_2) = -1$ resulta que Q_3 es indefinida. La quinta parte del teorema 3 nos asegura que Q_4 es indefinida.

En este caso, la continuación del proceso de escalerización hasta el final nos hubiera llevado a que $Q_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = (x + 2y + 3z + 4t)^2 + (y - t)^2 - (z + 3t)^2 + 2t^2$.

Sin duda, en pocas páginas hemos aprendido bastante en lo que a la clasificación de una forma cuadrática se refiere. A esta altura es conveniente que hagamos algunos comentarios.

- En los teoremas 2 y 3 hemos supuesto que a_{11}, el número que ocupa el primer lugar en la diagonal principal de la matriz asociada a la forma cuadrática, no es cero. En realidad, todo lo que vimos sólo requiere que alguno de los números de esa diagonal sea distinto de cero; sólo por comodidad elegimos a_{11}. Ahora bien, ¿qué ocurre en el caso que toda la diagonal principal esté llena de ceros? A continuación respondemos a esa pregunta.
- Si Q_n es una forma cuadrática cuya matriz asociada no es nula, pero sí es nula su diagonal principal, resulta que existe algún $a_{ij} \neq 0$ con $i \neq j$. Para ese i y ese j se cumple que $2a_{ij} = Q_n(e_i + e_j)$ y también que $-2a_{ij} = Q_n(e_i - e_j)$. O sea que Q_n tiene valores de distinto signo en $(e_i + e_j)$ y en $(e_i - e_j)$. En consecuencia, Q_n es indefinida.

Referencia bibliográfica:

Moretti Jorge (2008), Algebra Lineal, Montevideo, CECEA

ANEXO 1
Las raíces de una forma cuadrática

Teorema 4 - El núcleo de la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida
Sean Q_n una forma cuadrática en R^n con matriz asociada A y Z el conjunto de las raíces de Q_n. Si Q_n es semidefinida (positiva o negativa) entonces Z es el núcleo de A, es decir $Z = \{x \,/\, x \in R^n, Ax = O\}$.

El teorema anterior proporciona un método para hallar las raíces de una forma cuadrática semidefinida (positiva o negativa). Si la forma cuadrática es definida (positiva o negativa), ella tiene sólo una raíz que es el vector nulo, el cual es el único elemento del núcleo de su matriz asociada. En el caso que una forma cuadrática sea indefinida, el ejercicio 5 del próximo anexo muestra que para calcular sus raíces no alcanza con determinar el núcleo de su matriz asociada.

ANEXO 2
Ejercicios

Ejercicio 1

Prueba que cada una de las siguientes funciones es una forma cuadrática y encuentra su matriz asociada.

1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -x^2 + 4xy - 5y^2$

2) $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 6xy + 5y^2$

3) $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 6yz$

4) $j\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz$

Ejercicio 2

1) Sea Q_2 la forma cuadrática cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Calcula $aQ_2(x)$ para cada $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y verifica que $aQ_2(x) = (ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2$.
2) Usa el resultado anterior para estudiar el signo de las formas cuadráticas f y g del ejercicio 1.
3) Resume gráficamente los resultados que obtuviste en la parte anterior.
4) Estudia el signo de la forma cuadrática Q_2 de la primera parte en el caso que $a = 0$.

Ejercicio 3

1) Clasifica cada una de las tres formas cuadráticas que constan en la introducción.
2) Clasifica las formas cuadráticas h y j del ejercicio 1.
3) Reclasifica las formas cuadráticas del ejemplo 2.

Ejercicio 4

Sea Q_4 la forma cuadrática cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Demuestra que Q_4 es definida positiva.
2) Expresa Q_4 como una suma de cuadrados.

Ejercicio 5

Prueba que la forma cuadrática Q_3 con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es indefinida y que sus raíces no son sólo los vectores del núcleo de A.

Ejercicio 6

Sea Q_4 la forma cuadrática de la segunda parte del ejemplo 3. Prueba que en el núcleo de su matriz asociada está sólo el vector nulo y encuentra otras raíces de Q_4.