

## LA EXPERIMENTACIÓN ALEATORIA Y SU SIMULACIÓN EN EL AULA: ESTRATEGIAS PARA LA RECONSTRUCCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD.

Mag. Alicia Pereira das Neves Yedig.

[apereiradasneves@gmail.com](mailto:apereiradasneves@gmail.com)

CERP DEL LITORAL SALTO. URUGUAY.

**Tema: I.5** (Pensamiento relacionado con la Probabilidad y la Estadística).

**Modalidad:** MC

**NIVEL:** Medio (11 a 17 años).

**palabras claves:** Probabilidad, frecuencias relativas, simulación y estimación.

### RESUMEN:

*Tanto la realización como la simulación de experimentos aleatorios, con el correspondiente análisis estadístico de los resultados, permiten recrear la construcción histórica del concepto de probabilidad jerarquizando su esencia.*

*Reflexionar acerca de qué inferencias es posible realizar a partir de un diseño muestral para estimar la proporción de unidades con cierta característica en una población, genera el contexto adecuado para abordar el concepto de probabilidad desde otra perspectiva: la distribución del estadístico utilizado y sus aplicaciones.*

### La reconstrucción histórica del concepto de probabilidad:

“Una disputa entre jugadores en 1654 llevó a dos matemáticos franceses, Blaise Pascal y Pierre Fermat, a la creación del Cálculo de Probabilidades. Antoine Gombaud, caballero de Meré, noble francés interesado en cuestiones de juegos y apuestas, llamó la atención a Pascal respecto a una aparente contradicción en un popular juego de dados. El juego consistía en lanzar 24 veces un par de dados; y el problema en decidir si era lo mismo apostar la misma cantidad a favor o en contra de la aparición por lo menos de un doble seis en las 24 tiradas...” (Apostol, T. Calculus, Vol. 2).

La *Estadística Descriptiva*, se reconoce por su desarrollo mucho antes de nuestra era, basta citar como ejemplo los censos de población que constituían una práctica habitual siglos A.C. Sin embargo, recién en el siglo XVII D.C., se producen las primeras discusiones implicando cálculos probabilísticos a partir de la demanda de los juegos de apuestas. Muchos años más tarde, se consideró necesario una formalización de estos contenidos: fue en la década de 1920 que la teoría empezó a tomar cuerpo con la ayuda de la integral de Lebesgue-Stieltjes y más tarde, en 1933, cuando Kolmogorov solidificó

sus cimientos al identificar explícitamente *Espacios de Probabilidad y Variables Aleatorias* con *Espacios de Medida y Funciones Medibles*, respectivamente.

Desde entonces, la teoría de *Probabilidades* no ha detenido su desarrollo. Hoy los constructos exceden la mera organización de aquello que le dio origen a esta nueva rama de Matemática, caracterizada por su aplicabilidad a contextos inciertos. La *Estadística Inferencial* ha pasado a constituirse en uno de los escenarios de múltiples aplicaciones de los desarrollos probabilísticos. Así por ejemplo es posible cuantificar los errores cometidos en las estimaciones de parámetros desconocidos en una población, usando las nociones de probabilidad como función medida.

La aplicabilidad a otras disciplinas, así como en particular, los aportes que las Probabilidades y Estadística brindan a la investigación científico-disciplinar y a la investigación educativa, justifican ampliamente su inclusión en el currículo de la Matemática como disciplina. Es posible apreciar estas tendencias en los sucesivos cambios programáticos de los últimos años y en particular en las reformulaciones realizadas en el año 2010, para su enseñanza en los distintos niveles de educación (inicial, primaria y media) en nuestro país. Sin embargo, es posible constatar cierta escasez de materiales de contenido didáctico, disponibles para los docentes a la hora de preparar sus clases. Las actividades de los libros suelen concentrarse en conocimientos técnicos y no en la aplicabilidad de las herramientas que brinda la Estadística para la resolución de problemas enmarcados en diferentes contextos del entorno.

Podemos citar múltiples ejemplos de situaciones donde la incertidumbre está presente y, a pesar de ella, la toma de decisiones se hace necesaria: los controles de calidad realizados en los procesos de producción de productos que consumimos, la contrastación de la fiabilidad de medicamentos o de los exámenes de control médico, etc. La enseñanza de *Probabilidad y Estadística* no ha podido seguir ajena a la aplicabilidad que sus contenidos tienen en la vida cotidiana y es desde este enfoque que repensamos nuestras prácticas.

Un análisis de distintas orientaciones curriculares, permite reconocer que hay múltiples coincidencias con las propuestas en el año 2000 en los estándares curriculares norteamericanos de NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) para el Análisis de Datos y Probabilidad:

*“Los programas educativos de pre-kindergarten hasta el grado 12 deben permitir a todos los estudiantes: 1) Formular preguntas que se puedan responder con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas. 2) Seleccionar y*

*utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos. 3) Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos. 4) Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.”*

Estas orientaciones motivan y comprometen al colectivo de docentes en una búsqueda creativa de actividades que requieren por parte del alumno el desarrollo de aquellas competencias necesarias para realizar tales procedimientos, que luego podrán implementar fuera de las aulas de educación formal.

Entendemos y respaldamos la enseñanza de la *Probabilidad y Estadística*, a partir de proyectos. Esto permite potenciar aprendizajes no lineales, desde un enfoque global, abarcando todos los contenidos que se deben abordar en cada uno de los niveles de enseñanza. Es preciso tener en cuenta que la Probabilidad y la Estadística son inseparables e inseparables de sus aplicaciones. Además, en tanto se resuelven problemas externos a la disciplina, se hace necesario trabajar con datos reales siempre que sea posible (Batanero,C., Díaz,C.; 2010).

Trabajar de esta forma, requiere de una organización del trabajo en el que los estudiantes pueden implicarse activamente: en la formulación de preguntas del problema que se aborda con herramientas estadísticas, estableciendo las estructuras de un diseño muestral apropiado, en la búsqueda de modelos y en el análisis de los resultados para extraer las conclusiones y dar respuesta a las preguntas planteadas. Todos estos procedimientos serán acompañados del manejo del software que el docente considere apropiado o con el que se sienta más cómodo. Sabemos que hoy los estudiantes tienen amplio acceso a programas de libre distribución. La propuesta ya no solo incluye ejercicios creados para el aula. Se propondrán verdaderos problemas, identificados en su realidad contextual, muchas veces por los propios alumnos.

**LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD:** El concepto de probabilidad, en ningún caso estará ajeno al de frecuencia relativa con la que ocurre el suceso. Es así que adquiere sentido el cálculo de probabilidades, para analizar la tendencia a largo plazo de las frecuencias relativas con las que ocurre un suceso, conforme se incrementa el número de experimentaciones.

**Se propone:**

- 1- Busquemos ejemplos actuales en los que interesa conocer el comportamiento a largo plazo de los resultados de algún experimento, por diferentes motivos: intereses personales, económicos empresariales, etc. Detengamos el análisis en este punto y

pensemos qué aportes puede hacer algún estudio estadístico para arrojar luz a tales cuestiones.

**Aportes:** La frecuencia relativa con la que ha ocurrido un suceso de interés permite realizar comparaciones con las de otros sucesos, o analizar estadísticamente los resultados para diferentes números de experimentaciones, estudiando la sucesión de frecuencias relativas de un suceso en particular. Es interesante jerarquizar cómo intervienen las frecuencias relativas en el cálculo de un valor medio para una variable cuantitativa.

- 2- *John Kerrich, matemático inglés, estuvo prisionero durante la Segunda Guerra Mundial. En la soledad de su celda lanzó una moneda 10000 veces y anotó resultados según se observa en la siguiente tabla:*

Nº LANZAMIENTOS	10	30	5000	10000
CARAS	4	17	2523	5067

**Aportes:** El concepto de frecuencia absoluta, frecuencia relativa, sucesión aleatoria y límite en un contexto no determinístico.

- 3- Imaginemos que proponemos en el aula experimentar con un dado, registrando los resultados favorables a alguna de las puntuaciones, por ejemplo **2**, realizando cada alumno por ejemplo 30 lanzamientos:

¿Cómo creen que se ampliaría la tabla que aquí se muestra, si se incrementa el número de experimentos? ¿cómo cambiaría la tabla si se registran los resultados favorables a la puntuación **3**? ¿y con las otras puntuaciones?:

ALUMNOS:	FREC. ABS. EN EXP. PARCIALES	FREC. ABS. EN EXP. ACUMULADOS	NÚM. EXPERIM. ACUMULADOS	FREC. RELATIVAS EN EXP. ACUMULADOS
S	1	1	30	$1/30=0,0333$
E	2	3	60	$3/60=0,0500$
V	8	11	90	$11/90=0,1222$
M	8	19	120	$19/120=0,1583$
J	7	26	150	$26/150=0,1733$
K	5	31	180	$31/180=0,1722$
N	5	36	210	$36/210=0,1714$

R	7	43	240	$43/240=0,1791$
F	6	49	270	$49/270=0,1814$
M	7	56	300	$56/300=0,1866$
N	2	58	330	$58/330=0,1757$
A	9	67	360	$67/360=0,1861$
E	3	70	390	$70/390=0,1794$
V	5	75	420	$75/420=0,1785$
L	6	81	450	$81/450=0,1800$

**Aportes:** El concepto de equiprobabilidad es una hipótesis que habitualmente se impone sin cuestionar. Esta es una forma de abordarlo problematizándolo. Sería conveniente además proponer otro tipo de situaciones donde los diferentes sucesos elementales no presenten equiprobabilidad para dar lugar a la interpretación de tales implicancias. Bajo hipótesis de equiprobabilidad en el espacio muestral finito, la propiedad de Laplace, simplifica notablemente los cálculos probabilísticos, pero es aplicable sólo bajo dicha hipótesis que será discutida en cualquier caso.

### **LA SIMULACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA:**

En la simulación, se pone en correspondencia dos experimentos distintos de forma tal que:

- a cada suceso elemental del primero le corresponda uno y sólo uno del segundo experimento y
- las probabilidades respectivas sean iguales.

La simulación es una verdadera modelización en probabilidad.

#### **Se propone:**

Imaginemos la realización de una encuesta a partir de un diseño muestral para estimar una proporción poblacional. El diseño muestral puede simularse a partir de un procedimiento de urna.

En un segundo nivel de simulación, suponemos que tenemos una gran cantidad de bolillas negras y blancas en una urna y queremos estimar la proporción de uno de los colores. Se extraen 25 bolillas de dicha urna y se calcula la proporción muestral  $p$  de extracciones que corresponden al color elegido como estimación de la proporción poblacional especificada. ¿El experimento es razonable? ¿Qué cuestiones podemos plantear?

PARA ESTUDIAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTIMADORES, CREAMOS UNA SITUACIÓN LÚDICA: Suponer que se tiene 100.000 bolillas en una urna, de las que el 20% son negras y las demás blancas. Imaginemos que se quiere estimar la proporción de bolillas negras de la urna, suponiendo que se trata de un valor desconocido para el investigador: Si se extraen 100 bolillas de dicha urna, y se calcula la proporción muestral  $p$  de bolillas negras: ¿qué tan buena puede ser la estimación obtenida?.

**Se propone:** Es posible imaginar que las bolillas de la urna están numeradas y simular un diseño de muestreo que nos permita realizar un primer abordaje al problema.

Con el apoyo de algún programa informático, simular varias extracciones de muestras de tamaño  $n=100$ , calculando en cada caso  $p$ . ¿Es razonable que varíen los resultados? Argumenta tu respuesta.

Realiza un diagrama de cajas y bigotes, un histograma de frecuencias relativas. ¿Qué observaciones puedes hacer?

**Se propone:** Automatizar el procedimiento con un algoritmo sencillo, cargando en un vector  $b$  las proporciones muestrales extraídas en el mismo, jerarquizando la importancia del uso de los procedimientos que así lo permitan:

```
b<-0
for(i in 1:200){
a<-c(round(runif(100,0.5,100000.5)))
v<- c(table(a<=20000)/length(a))
b[i]<-c(v[2])}
```

Será posible obtener salidas con software específico del propio vector  $b$ , ampliando su tamaño, es decir, aumentando la cantidad de muestras a más de 200 y analizar así el comportamiento normal de las proporciones, el rango de variación, destacando la importancia de trabajar con intervalos de confianza que brinden información sobre las estimaciones requeridas y no únicamente valores puntuales como es habitual recibir como información sobre estimaciones de proporciones.

## BIBLIOGRAFÍA:

Batanero, C. y Díaz, C. (2010). *Estadística con Proyectos*. Disponible en: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>

Canavos, G. (1997). *Probabilidad y Estadística*. Madrid: Mc Graw Hill.

Devore, J. (2005). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. Mexico: Thomson Editores.

Fernández, F. y Mayor, J. (1995). *Muestreo en poblaciones finitas*. Barcelona: EUB.

Galmés, M. (1997). *Métodos de muestreo*. Montevideo: Oficina de Apuntes del CECEA. Facultad de Ciencias Económicas y Administración.

Pereira das Neves, A. (2010). *Convergencia de variables aleatorias: teoría y aplicaciones*. Proyecto de Licenciatura. Dirigido por la Dra. Ma. Isabel Marrero Rodríguez.

Petrov, V. y Mordecki, E. (2002). *Teoría de Probabilidades*. Moscú: Editorial URSS.