FUNCIONES: HISTORIA Y ENSEÑANZA

Carlos Sánchez Fernández
csanchez@matcom.uh.cu
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba

Tema: Historia de la Matemática
MC
Nivel Educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Funciones, historia de la matemática, enseñanza del trabajo con variables

Resumen
En este curso se pretende compartir saberes sobre la historia del concepto función e intercambiar experiencias docentes útiles para comunicar con eficacia estos conocimientos a estudiantes de nivel secundario y terciario. Primeramente disfrutaremos de un paseo a través de los laberintos de la historia de la formación del concepto desde el Oriente, antiguo y exótico, hasta el Occidente, moderno y formalista, donde aparecen los primeros "monstruos" funcionales, los bellos fractales. Después abriremos un debate sobre cómo usar ese saber histórico como recurso didáctico.
Nuestro fin primordial es agudizar nuestra sensibilidad de maestro para apreciar en toda su amplitud el valor de las relaciones funcionales. Con ayuda de un laboreo de adecuación, las bondades de nuestros saberes históricos pudieran hacerse compatibles con un currículo moderno para agregar a nuestros cursos la inteligibilidad y el encanto que tanto agradecen los alumnos. Ese sería un logro muy apetecido de nuestro brevísimo curso.

Introducción.

La palabra "función" se encuentra en un manuscrito de Leibniz escrito en el verano de 1673, después de su regreso de un corto viaje a Londres. En este original trabajo, la palabra "función" aparece para designar una magnitud representando tal o cual papel respecto a una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente o de la normal. Aquí la curva se supone definida por *una relación entre x e y dada por una ecuación*. Como nos percatamos al leer con detenimiento, Leibniz concierta las ideas reflejadas por las palabras *curva, ecuación y relación*. Estas tres palabras con sus significados diferentes, van a ajustarse dialécticamente para producir el concepto preciso y general de función.

En el intercambio epistolar entre Johann Bernoulli y Leibniz, esta noción fue paulatinamente modificando su significado, así en 1718, en un trabajo de Johann aparece este concepto definido con un significado próximo al actual:

Se llama función de una magnitud variable a una cantidad, que se compone de cualquier forma de esta magnitud variable y de constantes.

Bernoulli no aclara qué entiende por *cantidad*, pero del contexto en que la utiliza puede deducirse que se trata de algo susceptible de variación. Propone, además la notación φx para designar una función arbitraria de la variable x, el uso de la letra f y la introducción de los paréntesis se deben a Euler.

Una etapa definitoria para la transformación del "nuevo cálculo" de Leibniz y Newton, como herramienta generalmente asociada a la solución de problemas geométricos o físicos concretos, al "análisis infinitesimal", centrado en el concepto puramente matemático de función, la constituye la publicación de los tres tratados de Euler: *Introducción al análisis de los infinitos* (1748, en dos tomos), *Cálculo Diferencial* (1755) y *Cálculo Integral* (1768-70, en tres tomos).

En el prefacio de *Introducción al análisis de los infinitos* Euler señala:

… en el primer libro me he extendido sobre todo en las funciones de variables, porque ellas son el objeto del Análisis infinitesimal.

De esta forma sitúa a las funciones en el centro del Análisis. Para poner de manifiesto más claramente su distanciamiento de la base geométrica originaria de esta rama de la matemática no incluirá ninguna figura en todo el primer tomo de esta obra, como tampoco más tarde lo hará en sus tratados *Cálculo Diferencial* y *Cálculo Integral*. El estudio de las curvas lo agrupa en el segundo tomo, de la Introducción y en él aplica las ideas desarrolladas en la primera parte de esta misma obra.

En su *Introducción al análisis de los infinitos*, Euler se adhiere esencialmente a la definición de función dada por Johann Bernoulli, pero introduce el término más adecuado de <u>expresión analítica</u>:

"*Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes*."

A diferencia de Bernoulli, Euler aclara cuáles son las operaciones admisibles para la formación de las expresiones analíticas: las operaciones algebraicas usuales y varios procedimientos trascendentes que enumera y que incluyen el paso al límite. A continuación clasifica las funciones según diversos criterios, por ejemplo, dividió las funciones en algebraicas y trascendentes, las primeras son las constituidas solo por operaciones algebraicas y en las segundas incluye aquellas en que la variable se ve afectada por alguna operación trascendente, es decir que *trasciende* las operaciones algebraicas. También las divide en continuas y discontinuas, explícitas e implícitas, uniformes y multiformes, etc. Dentro de las funciones trascendentes incluye tanto las funciones trigonométricas y aquéllas definidas por exponenciales y logaritmos como también las dadas mediante integrales, sin embargo, dado el carácter elemental del texto, no trata estas últimas.

Para lograr su objetivo, Euler necesitó ampliar el conjunto de las funciones básicas que pueden generar una *expresión analítica*. Para ello en los capítulos VI, VII, VIII del primer tomo de la *Introducción*, define y estudia las funciones exponencial, logarítmica y las circulares, de una forma que podemos sin duda catalogar de actual. Por ejemplo, define *la función exponencial* como una potencia donde el exponente es variable y a continuación define el logaritmo de y con base a como el valor z tal que $a^z = y$. De este modo, las propiedades básicas del logaritmo son obtenidas a partir de las de la exponencial. Encuentra las propiedades y relaciones básicas entre estas funciones, en particular, sus desarrollos en serie de potencias. En resumen, las presenta con tanta claridad que se convierten simplemente en *funciones elementales*, aunque *trascendentes*.

La noción de función aparece en la obra de Euler bajo formas diferentes en distintos momentos de su vida y motivada por diversas razones de carácter teórico o práctico. Además de la concepción formal expuesta en su *Introducción al Análisis,* Euler usa la idea de dependencia arbitraria entre cantidades variables. En el prefacio a su tratado *Cálculo Diferencial*, aparece una definición más amplia de función, virtualmente equivalente a una definición moderna:

Si algunas cantidades dependen de otras cantidades de modo que si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es de naturaleza amplia e incluye cada método por el cual una cantidad pudiera ser determinada por otras. Si, por consiguiente, x denota una cantidad variable, entonces toda cantidad la cual dependa de x en cualquier manera o esté determinada por ella es llamada una función de ella.

Sin embargo, el uso que se hace de las funciones deja claro que para Euler, al igual que para sus contemporáneos, una función es una expresión analítica general. La necesidad de resolver con mayor precisión diferentes problemas de la Física y otras ciencias motivó la precisión, generalización y abstracción del concepto función hasta llegar a las diferentes definiciones que hoy utilizamos según sea nuestro interés práctico o teórico.

En la matemática actual todos buscamos el significado de un concepto en la definición que del mismo se da. Sin embargo en los trabajos de los matemáticos anteriores al siglo XX, este significado queda oculto en una definición más o menos vaga y puede ser explicitado solo cuando se busca de forma más precisa en el uso posterior que de ella se haga y en los ejemplos a los cuales se aplica. Es por eso que en nuestro breve curso haremos énfasis no en la definición que se usa en cada momento histórico, sino en los ejemplos ilustrativos, en los problemas que se resuelven con las concepciones establecidas.

El paseo por la historia del concepto función está organizado en dos itinerarios. El primero con las ideas y la metodología desarrolladas para el tratamiento de las relaciones funcionales, antes de que el cálculo diferencial e integral se convirtiera en el arte primordial para el trabajo con variables en dependencia unas de otras. Este viaje puede ser cumplido en toda su extensión por cualquier estudiante de instituto de segunda enseñanza. El segundo recorrido, que puede seguirse independientemente del primero, trata de mostrar cómo el arte del cálculo infinitesimal ayudó a sintetizar las ideas de curva, ecuación y función. Tal vez, para la culminación del paseo, en los vericuetos de los caminos recorridos en los dos últimos siglos, algunos participantes tengan que efectuar un esfuerzo mayor, pero les aseguramos que ¡bien vale la pena!

RECOMENDACIONES BIBLIOGRÁFICAS:

Todo maestro que tenga el placer de explicar un curso de Cálculo, o brindar alguna clase sobre las dependencias funcionales entre variables numéricas, debería conocer alguna versión del extraordinario libro de Euler *Introducción al análisis de los infinitos* donde se establece el estudio de las funciones y sus representaciones analíticas como el objeto primordial del análisis matemático. Una versión bilingüe -en español y latín- es [Euler, 2001]. Existen artículos muy contundentes sobre la historia del concepto función como el del historiador ruso [Youschkevitch, 1976]. Las raíces no europeas se pueden encontrar en el documentado libro del historiador indio [Gheverghese, 1996]. También existen textos de análisis matemático con amplio uso de la historia como el de los analistas suizos [Hairer y Wanner, 1996] dónde se puede encontrar referencias de la historia de las funciones y sus representaciones analíticas. En las últimas décadas han aparecido libros divulgativos dónde se relatan las vicisitudes por las que pasó la idea de relación funcional antes de concretarse en una definición precisa y útil, como el del matemático andaluz [Durán, 1996]. Por razones evidentes nosotros preferimos utilizar como soporte básico el libro publicado en España de los profesores cubanos [Sánchez y Valdés, 2007], en el que aparecen, ampliadas y mejor documentadas, las ideas que compartiremos con los participantes de este brevísimo curso.

ASUNTOS A CONSIDERAR EN EL MINI-CURSO:

1. RELACIONES FUNCIONALES EN LA ANTIGÜEDAD Y LA EDAD MEDIA:

- Los enigmas de las tablas numéricas en la cultura prehelénica. Tablas de divisiones egipcias y tabletas Plimpton babilónicas.

- Las curvas subversivas de la cultura helena para la solución de los problemas célebres. La espiral de Arquímedes y las cónicas de Apolonio.

- Las relaciones trigonométricas en la astronomía oriental. Usos del triángulo rectángulo y del círculo unitario. Las sistematizaciones de Muhammed Abul-Wafa y de Jamshid al-Kashi.

2. RELACIONES FUNCIONALES EN LA EDAD MODERNA TEMPRANA:

- Comienzos del estudio del movimiento en Europa. Las especulaciones de Nicolás de Oresme y Galileo Galilei.

- Surgimiento de la idea básica de los logaritmos para el procesamiento de los datos astronómicos. El ingenio de Juan Napier y su maravillosa regla para facilitar cálculos aritméticos.

- La dimensión algebraica de las curvas. Los trabajos de los franceses Francisco Vieta, René Descartes y Pedro de Fermat en la reducción de problemas geométricos al arte analítico.

- Un nuevo arte y una técnica ingeniosa para el tratamiento de las curvas de todo tipo, algebraicas o trascendentes. La visión de Isaac Newton y Godofredo Leibniz subidos a los hombros de gigantes.

- Determinación de las funciones elementales y las representaciones de funciones mecánicas. El problema fértil de la cuerda vibrante. El gran aporte de Leonardo Euler y la familia Bernoulli.

3. RELACIONES FUNCIONALES EN LA EDAD MODERNA TARDÍA

- Precisión de los conceptos función arbitraria y representación analítica. El estudio de la continuidad funcional. El impacto de los desarrollos en series trigonométricas. Las ideas de Bernardo Bolzano, Agustín Cauchy y Gustavo Dirichlet.

- Importancia del estudio de los casos patológicos. Determinación de diferencias entre las clases principales de funciones: continuas, diferenciables e integrables. Los nuevos “monstruos” funcionales: útiles y bellos. La emergente escuela alemana de analistas y la fecunda escuela de teoría de funciones francesa.

- Breve excursión para conocer algo de lo que nos aportó el siglo XX en la comprensión de las relaciones funcionales. Generalizaciones y abstracciones del concepto función en el análisis y en la lógica matemática.

4. RELACIONES FUNCIONALES EN LA SALA DE AULA CONTEMPORÁNEA:

- Debate sobre el uso de la historia como recurso didáctico para la inteligibilidad del concepto de función y las prácticas con las variables y las funciones

Referencias bibliográficas

Durán, A. J. (1996) *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza Editorial, Madrid.

Edwards, C. H. (1994) *The historical development of calculus*. Springer Verlag. New York.

E

uler, L. (2001) *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición de Antonio J. Durán, Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Sevilla.

Gheverghese, G. (1996) *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Pirámide. Madrid.

Hairer, E. y Wanner, G. (2008) *Analysis by its history*. Springer Verlag, New York.

Ruthing, U. (1984) Some definitions of the concept of function from Bernoulli to

Bourbaki. *Math. Intelligencer* 6, n. 4, p. 72-77.

Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C. (2007) *Las funciones. Un paseo por su historia*. Nivola. Madrid.

Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C. (2010) *El entrañable encanto de las matemáticas*. Editorial Félix Varela. La Habana.

Youschkevitch, A. P. (1976) The concept of function up to the middle of the 19th. Century. *Archive Hist. Exact Sc.* P. 37-85