TEMAS FÉRTILES PARA LA CULTURA MATEMÁTICA

Carlos **Sánchez** Fernández

csanchez@matcom.uh.cu

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Cuba

Tema:
CP
Nivel Educativo: Secundario y Terciario
Palabras clave: historia de la matemática, cultura matemática, tríos pitagóricos, problemas isoperimétricos.

Resumen

Cuando nos enfrentamos a nuestro quehacer docente hay veces que nos preguntamos ¿Qué asuntos relacionados con el tema de la clase me pueden ayudar a formar una cultura matemática en mis alumnos? ¿Dónde puedo encontrarlos? ¿Cuál es la forma más seductora de presentarlos? El objetivo de esta charla es compartir nuestras experiencias en la búsqueda de respuestas a estas inquietudes en las entrañas de la historia de la matemática. Después de una breve introducción dónde compartimos nuestras ideas de carácter teórico, mostramos algunos temas históricos fértiles que han resultado eficaces para desarrollar una cultura matemática en estudiantes y profesores tanto de nivel secundario como terciario.

¿Por qué y para qué desarrollar temas fértiles en la clase de matemática?

"La tarea fundamental y general de la comunidad matemática consiste en contribuir de modo efectivo al desarrollo integral de la cultura humana".

(De Guzmán, M., 1997)

Consideramos que una de las prioridades de la investigación en Educación Matemática tiene que ser la búsqueda de metodologías que motiven y orienten vocacionalmente a los jóvenes para su ingreso y permanencia en las carreras de matemática y de formación de docentes en enseñanza de la matemática. Estas carreras tienen dos repelentes muy fuertes y con arraigo en la cultura de nuestros países. En nuestra opinión, en el mundo actual donde predominan los valores de la oferta y la demanda, una de las menos solicitada es la profesión de maestro, porque es de las más sacrificadas y menos remuneradas. La carrera de matemática tiene más posibilidades en el mercado, pero de todas formas nuestra ciencia es una especie de tabú para la mayoría, novatos o veteranos, relegada solo para "polillas", como se les llama en Cuba a las/los estudiantes "raritos" consagrados solo al estudio y que no acostumbran salir de parranda a bailar salsa, ni tienen mucho éxito con el sexo opuesto.

La necesidad de cambiar estos estereotipos y lograr que las actividades docentes fueran más motivadoras, creativas y sirvieran de enganche para que jóvenes y no tan jóvenes sintieran el placer de "*pensar la matemática*", nos ha llevado a considerar la búsqueda de temas fértiles contextualizados con el recurso de la historia de la matemática. Nos interesa motivar la reflexión sobre la importancia de incluir en el discurso no solo el contexto lógico de justificación del saber, sino sobre todo el contexto de origen y construcción de los diferentes conocimientos y métodos. En definitiva, el objetivo principal es compartir experiencias alcanzadas con el uso de la historia de la matemática en la búsqueda tanto de la contextualización del discurso oral, como también el discurso escrito de libros de texto y de libros de divulgación matemática.

Posiblemente el principal objetivo que la mayor parte de los profesores quisiéramos lograr con nuestras clases es desarrollar un alto nivel de razonamiento matemático. El proceso de razonar es tan complejo, que no se puede describir en pocas y precisas palabras. Por eso se han publicado tantos artículos y libros con diferentes enfoques y detalles -p. e. recomendamos: Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010)- Apreciamos la importancia de tales textos escritos por científicos de la cognición y otros expertos, con el objetivo de dar a los maestros ideas de qué es "*pensar matemáticamente*" y cómo se puede desarrollar este proceso en los alumnos. También existe otra literatura sobre el "*enriquecimiento matemático*", particularmente un proyecto británico que comenzó alrededor de 1996 y su intención desde el inicio es ayudar a los jóvenes talentos que viven en comunidades que tienen un acceso muy limitado a la "buena" Matemática. El proyecto se ha revisado y perfeccionado varias veces. Recomendamos el sitio del proyecto www.nrich.math.org donde se pueden encontrar tareas y consejos para enriquecer la clase –p.e. los trabajos de Jennifer Piggott y de Steve Hewson- y por otra parte, pero muy cercana, está también la línea promovida por la NTSC de EEUU: *Concept-Rich Mathematics Instruction*. Uno de las mejores ilustraciones de esta línea de acción está en el libro de Ben-Hur (2004).

Nuestra intención en esta conferencia es mucho más modesta, aunque con intereses comunes con los proyectos mencionados arriba. Nos ajustamos a compartir experiencias de la forma más agradable posible. Por supuesto, a nuestro enfoque le colocamos un título sugerente "Temas Fértiles para la Cultura Matemática", para que al menos atraiga a los curiosos. El apelativo puede parecer pretencioso, y lo es sin duda, pero nuestro objetivo es claro: usar la Historia de la Matemática para ayudar a que el discurso en las clases y textos sea más atractivo y eficaz y los chicos se entusiasmen por conocer mejor nuestra "*novela policiaca*" al derecho y no al revés, como señalaba el Maestro Miguel de Guzmán:

"… Se trata, en primer lugar, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos, para lo cual deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente. ¿Por qué razones la comunidad matemática se ocupó con ahínco en un cierto momento de este tema y lo hizo el verdadero centro de su exploración tal vez por un período de siglos? Es extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que ellos se enfrentaron con la mirada perpleja con que la contemplaron inicialmente. La visión del tema que se nos brinda en muchos de nuestros libros de texto se parece en demasiadas ocasiones a una novela policíaca que aparece ya destripada desde el principio por haber comenzado contando el final. Contada de otra forma más razonable podría ser verdaderamente apasionante" (Guzmán 2007)

No solo Guzmán, sino muchos de los grandes maestros que en *Nuestra América* han sido, nos han enseñado que nuestras clases deberían desarrollar *cultura matemática,* que según alguien ha definido es lo que todavía recordamos cuando ya hemos olvidado todo lo que nos obligaron a aprender. En nuestra opinión, esta tarea es uno de los compromisos sociales primordiales de la educación matemática. No educamos simplemente para hacer y aplicar matemática o para pasar con éxito las pruebas de ingreso a otros niveles de enseñanza o de la escala salarial –aunque por supuesto no oponemos resistencia a la superación personal. Esto no puede ser el fin de la educación, porque entonces inexcusablemente provocaría *el fin de la educación*. Además, junto con otras cualidades y competencias que se forman en los diferentes ciclos de enseñanza, aprender a pensar toda la matemática que aprendemos como un objeto cultural, constituye también un atajo expedito a la realización personal en los tortuosos caminos de la vida en este mundo estresante y egoísta.

En las últimas dos décadas se ha publicado bastante sobre la integración de la investigación histórica con la práctica educativa matemática, recomendemos, por ejemplo, el estudio ICMI editado por Fauvel y Maanen (2000) y, algo más reciente, el artículo de Jankvist (2009). Nuestra propuesta, con cierta originalidad en la forma, en su esencia no es novedosa, representa un compendio de ideas que hemos ido puliendo y conformando en el marco de un proyecto que en Cuba coordinamosy que recientemente hemos vigorizado bajo el título de *Prácticas Matemáticas en la Edad Moderna y sus Aplicaciones a la Educación Matemática*. Algunas de nuestras ideas han sido presentadas en varios eventos científicos y publicaciones especializadas como, por ejemplo, Sánchez y Valdés (1999), Sánchez y Valdés (2010), Valdés y Sánchez (2011), Sánchez (2013). Por supuesto que este asunto no es tan simple como puede parecer y merita una atención desde diferentes enfoques. De ahí nuestro interés explícito en compartir experiencias y las ilustramos con el análisis muy breve de varios temas fértiles de asuntos poco examinados en las clases tradicionales.

La médula de este trabajo:Temas Fértiles

"[...] incluso los hechos matemáticos sencillos, pueden aplicarse con eficacia solo cuando se han asimilado de forma creativa, de modo que el estudiante los pueda ver como si él mismo pudiera llegar a ellos de forma independiente y para esto, al maestro, mucho puede ayudar el conocimiento de su historia"

(Kolmogórov, A. N. 1988)

Para *instilar* la cultura matemática en los estudiantes, se puede usar una diferenciación simple entre *temas estériles y temas fértiles*. Consideramos fértiles aquellos temas que nos permiten desarrollar en el aula varios asuntos relacionados en cierta manera con el plan de clase y que han demostrado que tienen amplia aplicación en la práctica matemática o en el enriquecimiento de la cultura matemática. Por regla general aparecieron como problemas en una época remota y muchas veces durante el largo y torcido cauce de su historia han variado en forma y en enfoque metodológico para su tratamiento. En definitiva son temas que sabemos cómo comienzan, pero ni sospecha tenemos de cómo van a acabar y que llevan implícito el misterio y el suspenso tan encantadores para la juventud. En nuestra charla mostraremos muy brevemente dos de estos temas fértiles que consideramos seductores y que hemos desarrollado en diferentes escenarios con diversos grupos de estudiantes y docentes en formación, temas que han llegado a ser incentivo de reflexión aún en las condiciones actuales de la revolución informática y la proliferación de todo tipo de divertimento "anti-cultural" y "seudo-científico":

- *Tríos pitagóricos*-relacionados con la descomposición en sumas de cuadrados y con soluciones enteras de ecuaciones cuadráticas -y el gran teorema de Fermat. Es un tema con origen geométrico, pero que enfocamos como un tema aritmético-algebraico

- *Problemas isoperimétricos con polígonos*-que nos permite dinamizar la geometría e introducir el significativo tema de la optimización de magnitudes geométricas. Este es un tema eminentemente geométrico, pero que tratamos con un enfoque analítico.

1º Problemas relacionados con el tema de los tríos pitagóricos

Podemos asegurar que en la propiedad que denominamos "Teorema de Pitágoras" se unen con suficiente profundidad ideas fundamentales que servirán de sustento a dos de las principales ramas del conocimiento: *la Geometría* -ciencia de las medidas, técnica de las observaciones precisas y arte de las formas abstractas- y *la Aritmética*-ciencia del número, técnica de contar y arte del cálculo. Ahora bien, y ahí está el detalle: la propiedad pitagórica de los triángulos rectángulos puede interpretarse como una respuesta al problema aritmético de la descomposición de un número cuadrado z^2 como suma de otros dos números cuadrados x^2+y^2.

Expresado así es más fácil advertir la relación con el problema más general de representar un número entero cualquiera n como suma de cuadrados. Observemos que dado n, no siempre existe un par de enteros (x,y) solución de la ecuación $n = x^2 + y^2$. Por ejemplo, ni 3 ni 7 son representables en sumas de dos cuadrados, mientras que

$$5 = 2^2 + 1^2 \,;\; 17 = 4^2 + 1^2 \,; 85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 .$$

No es difícil darse cuenta que el cuadrado de todo entero es de la forma $4m$ ó $4m+1$, de ahí que la ecuación $x^2 + y^2 = 4k + 3$ no tiene solución para ningún k entero. Por eso ni 3, ni 7 y tampoco 43 ni 2015, se pueden descomponer como suma de dos cuadrados.

En una de sus numerosas notas marginales sobre una traducción de Diofanto, el prestigioso abogado francés Pierre de Fermat afirma que ha demostrado un teorema general que implica que todo número entero se puede descomponer como suma de, a lo más, cuatro cuadrados. Fermat promete publicar ulteriormente los detalles, pero no lo hace. Sin embargo, reduce el problema de los cuatro cuadrados al análisis de varios tipos particulares de ecuaciones cuadráticas. Y nos da la oportunidad de jugar un poco en nuestra clase de aritmética, aunque no logremos ganancias inmediatas, ni demostremos ningún teorema.

Las tentativas para probar o refutar las conjeturas precedentes de Fermat, sirvieron para establecer una *teoría general de las formas cuadráticas*. Eludiendo cualquier tecnicismo, nosotros usamos una versión muy simplificada de la historia, en la que participan tres de los más célebres matemáticos de todos los tiempos: Euler, Lagrange y Gauss.

Con los trabajos de estos tres grandes la atención giró hacia el problema de la representación de un número entero n mediante *formas cuadráticas binarias*, es decir, en la forma

$$n = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (*)$$

lo que en seguida se convirtió en una teoría general de formas cuadráticas, una rama importante del Álgebra con múltiples aplicaciones. No obstante, todavía en el 2015 es un enigma, si existe o no, una condición necesaria y suficiente para que dado un entero n la ecuación (*) posea una solución para valores enteros de x, y. Este problema llevó a otro muy emparentado ¿de cuántas formas se descompone un número en una forma cuadrática? Y aquí aparece otra historia ahora del siglo XIX y XX, con muchos misterios y héroes.

Por si lo anterior no resultara suficiente como ilustración de la fertilidad del tema de los tríos pitagóricos en la evolución de la matemática y si el tirano tiempo nos lo permite, en la clase podemos presentar también un árbol frondoso cultivado en los predios de este tema y que es uno de los enigmas más populares de la Historia de la Matemática: "*El Gran Teorema de Fermat*" al que están ligadas innumerables conjeturas, algunas demostradas y otras aún abiertas (este y otras variantes de este tema fértil pueden encontrarse p. e. en nuestro libro Sánchez & Valdés [2010]).

2º Problemas relacionados con el tema de los problemas isoperimétricos

Los problemas de optimización que plantean la búsqueda de la figura con mayor área dentro de una cierta familia de figuras con igual perímetro, son denominados *problemas isoperimétricos*. Por su evidente importancia económica y fácil formulación, pueden tener un origen anterior a la aparición de la cultura helénica. Pero, según relata el comentarista de Euclides, Proclo de Alejandría (s. V d. C.), todavía en la civilización helena la mayoría de los ciudadanos creía que a perímetros mayores corresponden áreas mayores. Por lo que parece, no todos los helenos eran muy duchos en este tipo de problemas y además eran fácilmente timados en la compra y venta de terrenos.

Una explicación plausible a las falsas creencias es que en el caso de los cuadrados y los círculos existe una relación directamente proporcional entre área y perímetro. Para los cuadrados $A = \frac{P^2}{16}$ y en el caso de los círculos $A = \frac{P^2}{4\pi}$, en ambos caso P denota el perímetro y A el área: igual perímetro implica igual área y viceversa. Pero, p.e. con los rectángulos, es fácil probar que es otra la situación:

Es decir que con un mismo perímetro podemos encontrar figuras poligonales del mismo género y de áreas diferentes. Es pues natural considerar el problema siguiente:

Problema Isoperimétrico con Polígonos: Entre todos los polígonos de n lados y con el mismo perímetro, encontrar aquel que tiene un área mayor.

Según Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010), en el pensar matemáticamente existen cuatro procesos fundamentales, considerados en dos pares dialécticos: especialización-generalización y conjeturar-convencer. Al menos en los casos *específicos* de los triángulos y los rectángulos, Euclides no consiguió dar el paso hacia la *generalización* y por eso no lo incluyó en los Elementos. Quizás *conjeturó* lo mismo que nosotros, que las figuras regulares son las óptimas, pero no consiguió argumentarlo de manera *convincente*.

Las primeras referencias al problema isoperimétrico más general que se han encontrado, se remontan a la obra del matemático heleno Zenodoro de Atenas (s. II a. C.), quien vivió unos 100 años después de Euclides y también después de Arquímedes. Zenodoro enunció y demostró varios resultados generales relacionados con el problema isoperimétrico con polígonos. Es conveniente comenzar con el caso más simple:

Entre todos los triángulos con perímetro fijo, el equilátero es el que tiene área máxima.

Después de haber comprobado el caso de los triángulos es natural realizar la pregunta más general ¿podremos *aplicar el lema o el método utilizado en su demostración* a un polígono de mayor número de lados?

Para los triángulos, la igualdad de los lados implica la de los ángulos, por lo que el problema isoperimétrico para los triángulos está completamente resuelto. Sin embargo, cuando se trata de polígonos con mayor número de lados sería necesario probar que

Entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro, el que tiene todos los ángulos iguales posee un área mayor.

Podemos plantearlo como *conjetura* y buscar *convencimiento* a través de algún *caso específico*, p.e. el caso de los cuadriláteros puede demostrarse sin dificultad y, después de hacer aclaraciones, según sea el grupo de estudiantes, puede hasta dejarse el ejercicio siguiente:

Prueba que entre todos los cuadriláteros con igual perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

Si *dejamos pensar* un poco a los alumnos, alguien nos puede preguntar:

“Oiga profe, entre todos los polígonos regulares de perímetro fijo P ¿cuál es el que tiene mayor área?”

Con el empleo solo de las herramientas de la geometría elemental, la búsqueda de respuestas plausibles es sumamente ardua. No obstante, con el auxilio que nos brindan las herramientas computacionales podemos *convencer* al alumno de la veracidad de que mientras más lados tiene el polígono regular mayor es su área (recuerden que todos tienen el mismo perímetro). Ante todo es preciso buscar una relación entre el número de lados n, el área A_n del polígono regular de n lados y su perímetro P_n. Dejamos pensar después de plantear una interrogante:

¿Conocemos alguna fórmula que relacione área y perímetro de los polígonos regulares? Si no la conocemos ¿cómo podríamos encontrarla?

Para concluir (siempre que el contexto del aula lo asimile) podemos plantear el problema concreto siguiente:

Probar que el círculo con perímetro P tiene mayor área que cualquier polígono con ese mismo perímetro.

La resolución de este problema y otras curiosidades que surgen del tema de las figuras isoperimétricas se pueden encontrar, por ejemplo, en [Sánchez, 2013]

A manera de conclusiones: Fértil en estructura flexible

La estructura de las clases y el discurso debe ser flexible. Según el contexto de alumnos, sus competencias e intereses culturales organizamos la clase. Se puede plantear la solución de una parte de los problemas y comentar los otros, utilizando la experimentación gráfica o computacional con el fin de abrir el apetito para temas más avanzados de geometría o trigonometría o incluso de cálculo. En el caso muy especial de alumnos de talento y con afición expresa por la matemática, entonces seguro desearán conocer la demostración de cada asunto y ¿por qué no mostrarles un esquema de la misma para convencerlos? Si estamos trabajando con alumnos universitarios, que han pasado cursos de Cálculo Avanzado, resulta muy edificante enseñarles la solución de algunos problemas simples usando matemática superior, pero todavía más edificante es resolver problemas difíciles con métodos elementales.

Queremos dejar “pensar la matemática”, que nuestros alumnos no “desconecten la atención” y que se apasionen por buscar la riqueza del conocimiento y la disfruten felizmente.

Para terminar nuestro relato demos a conocer lo que uno de los más completos matemáticos educadores del siglo XX, el ruso Andrei Nikoláyevich Kolmogórov dijera en su última entrevista y está recogido en una recopilación publicada en Rusia después de su desaparición física:

"[...] A los profesores de matemática tanto en la escuela media como en la superior, se les debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien las matemáticas puede sólo aquel que la ame con pasión, la comprenda como una ciencia viva y conozca el contexto histórico que originó sus conceptos" [Kolmogórov, 1988]

Referencias bibliográficas

Ben-Hur, M.(2004). *Concept-Rich Mathematics Instruction. Building a Strong Foundation for Reasoning and Problem Solving*. Association for Supervision and Curriculum Development. Alexandria, Virginia. USA.

Fauvel, J.; Maanen, J. (Eds.) (2000).*History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 43,* 19-58.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Math.*

Kolmogórov, A. N.(1988). *La Matemática-Ciencia y Profesión***.** Biblioteca Kvant Nº 64. Nauka, Moscú (en ruso).

Mason, J.; Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. 2nd. ed. Prentice Hall (La 1ª ed. apareció en 1982 y fue traducida al español).

Sánchez Fernández, C. (2013). ¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 8* (11), 225-236.

Sánchez Fernández, C.; Valdés Castro, C. (2010). *El entrañable encanto de las matemáticas*. Editorial Félix Varela. La Habana.

Sánchez Fernández, C.; Valdés Castro, C. (2000). Proposiciones para un estudio dinámico de la medida. En Fossa, J. (ed.) *Facetas do diamante. Ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática* (pp. 31-58). Editora da SBHMat. Rio Claro.

Valdés Castro, C.; Sánchez Fernández, C. (2011). Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana. *Educação Matemática e Pesquisa. Sao Paulo, 13*(3), 581-596