

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD SIMPLE Y PROBABILIDAD CONDICIONAL: UN ESTUDIO EN ALUMNOS DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD BERNARDO O'HIGGINS

Álvaro Toledo San Martín
alvaro.toledo@ubo.cl
Universidad Bernardo O'Higgins, Chile

Tema: Pensamiento probabilístico – estadístico

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: Probabilidad simple y condicional – definición – criterios de clasificación.

Resumen

La finalidad de este estudio es evaluar la comprensión en forma adecuada del concepto de probabilidad simple y probabilidad condicional en 86 alumnos de pregrado de Ingeniería que han realizado su primer curso de Estadística. De lo observado, dentro del grupo de respuesta incorrectas, se da el asociar lo condicional con una dificultad adicional sobre el experimento aleatorio y dentro de las definiciones imprecisas asociar lo condicional con causalidad. Los resultados obtenidos son comparados con estudios similares realizados en alumnos de psicología y futuros profesores de enseñanza secundaria.

1. Introducción.

En la actualidad la enseñanza del cálculo de probabilidad y específicamente de la probabilidad condicional es fundamental para la formación de un ingeniero, es la base para cursos avanzados como: simulación, investigación de mercados y análisis de decisiones, entre otros. La capacidad de trabajo bajo incertidumbre y la toma de decisiones se especifica como fin importante en la mayoría de los perfiles de egreso en carreras de esta área (Casar, 2009). Aún así, se tiene que los estudiantes no comprenden del todo los conceptos básicos de probabilidad partiendo por la definición de estos (Zazkis & Leikin, 2008) observándose además, una idea incorrecta sobre azar y probabilidad que se extiende inclusive a quienes enseñan tales conceptos (Azcárate, 1995)

Las dificultades que los estudiantes presentan con la probabilidad condicional tanto en su definición como en el uso de ella han sido ampliamente estudiados en Kahneman, Slovic & Tversky (1982), Falk (1986), Pollatsek, Well, Konold, & Hardiman (1987) y Totomasina (1992). Estudios más recientes en alumnos de psicología presentados en Díaz (2007) y en futuros profesores de secundaria detallados por Contreras, Batanero,

Díaz & Cañadas (2013) muestran que tales dificultades se repiten en estudiantes de distintas disciplinas. De acuerdo con estos estudios, las dificultades se refieren a la consideración de la probabilidad condicional como una medida de la relación causal entre dos eventos, de tal manera que los valores que se asignan a las probabilidades condicionales dependerán de la relación causal del evento condicionado en relación con el evento condicionante (Kahneman *et al*, 1982), otra dificultad observada por Falk (1979) y Gras & Totohasina (1995) es la denominada “falacia temporal” donde el evento condicionado ocurre después del evento condicionante.

A continuación se presentan antecedentes, metodología, resultados y conclusión del estudio.

2. Antecedentes.

Las investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad en alumnos universitarios de distintas disciplinas ha sido abordada últimamente en estudio en alumnos de psicología por Díaz (2007) y en futuros profesores por Contreras *et al* (2013). Estas investigaciones han sido realizadas en España y han verificado ciertas imprecisiones en la definición de probabilidad condicional mencionadas en los estudios de Kahneman *et al* (1982) y Gras *et al* (1995). En Chile no hay estudios relacionados al tema, por tanto, el objetivo de estudio es verificar si tales imprecisiones en las definiciones de probabilidad simple y condicional se repiten, o bien, si es posible observar diferencias con los estudios mencionados. El estudio se centrará solo en la definición, ya que, de acuerdo a Zazkis *et al* (2008) la capacidad de un estudiante de dar una definición en sus propias palabras muestra la comprensión de un concepto.

3. Metodología.

De acuerdo a Leikin & Winicki-Landman (2001) una definición debe dar nombre a los conceptos y establecer condiciones necesarias y suficientes incluyendo un número mínimo de tales condiciones además de conceptos previamente definidos.

Concluido el curso de Estadística I y Estadística Aplicada (Probabilidades) dictado a los alumnos de Ingeniería de la Universidad Bernardo O’Higgins, en una última sesión previa al examen de contenidos del curso se planteó como actividad responder la siguiente pregunta:

Explique con sus propias palabras la diferencia entre probabilidad simple y probabilidad condicional.

Siguiendo la investigación de Contreras *et al* (2013) se consideraron como correctas aquellas respuestas donde el sujeto, o bien, da una definición correcta o pone un ejemplo adecuado de cada una de las probabilidades

4. Resultados.

Siguiendo la clasificación propuesta por Díaz (2007) aplicada en alumnos de Psicología, la cual, es replicada en Contreras *et al.* (2013) en un estudio con futuros profesores de secundaria se describen los resultados.

C0: Definiciones incorrectas: La definición no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna condición necesaria (Leikin *et al* 2001) o se confunden conceptos implicados. Díaz (2007) distingue tres tipos:

C0.1. *Errores formales.* El sujeto incluye el término que desea definir en la definición o da una definición que corresponde a otro concepto.

C0.2. *Errores producidos por confundir conceptos que intervienen en la definición.* El sujeto confunde la probabilidad condicional con otras probabilidades. En este tipo de error se incluyen además los casos donde el sujeto considera condicional adicionar una dificultad sobre el experimento aleatorio.

C0.3. *Definiciones apoyadas en fórmulas que contienen errores.*

C1. Definición imprecisa de la probabilidad condicional. La definición incluye todas sus condiciones necesaria o suficientes (Leikin *et al*, 2001) pero es confusa o añade condiciones no necesarias. Hay dos tipos:

C1.1. *Asume que el suceso condicionante precede al condicionado.* Corresponde a la falacia del eje de tiempos mencionada en Tversky *et al* (1982).

C1.2. *Suponer un suceso dependiente del otro.* El sujeto añade una condición no necesaria y podría subyacer la confusión entre condicionamiento y causalidad (Falk, 1986)

C2. *Define correctamente sólo la probabilidad condicional.* Díaz (2007) define tres grupos:

C2.1. *Olvida definir la probabilidad simple, y define verbalmente la condicional.* La definición establece condiciones necesarias y suficientes.

C2.2. *Olvida definir la probabilidad simple, y define la probabilidad condicional con fórmulas.* Entrega la definición de probabilidad condicional, es decir, La razón entre la probabilidad conjunta de los eventos y la probabilidad marginal del evento condicionante.

C2.3. *Error al definir la probabilidad simple.*

C3. *Define imprecisamente las dos probabilidades pedidas.* Contreras *et al* (2013) definen cinco grupos:

C3.1. *Suponer que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado.* Falacia temporal, pero, imprecisa.

C3.2. *Suponer que el suceso condicionante es dependiente del suceso condicionado.* Consideración de dependencia causal pero imprecisa.

C3.3. *Fórmulas imprecisas para definir las probabilidades.*

C3.4. *Indican la diferencia entre probabilidad simple y condicional, pero son imprecisas.* Hace referencia a la independencia o dependencia de los eventos en el caso de probabilidad simple y condicional respectivamente.

C3.5. *En lugar de dar una definición, da un ejemplo.*

C4. Define correcta y de manera precisa las dos probabilidades. Contreras *et al* (2013) definen dos grupos:

C4.1. *Definir ambas probabilidades verbalmente.*

C4.2. *Usar fórmulas para definir ambas probabilidades.*

En la Tabla 1 se presentan las frecuencias y porcentajes de las clasificaciones mencionadas anteriormente. Apenas el 11.6% de los alumnos define correctamente probabilidad condicional.

Tabla 1 – Frecuencia y porcentaje de respuestas en definiciones

		Frecuencia	Porcentaje
C.0. Error en ambas definiciones	C.0.1. Confunde conceptos, incluye términos que desea definir (circularidad)	22	25,6%
	C.0.2. Confunde conceptos que intervienen en la definición	12	14,0%
	C.0.3. Confunde fórmulas	0	0,0%
C.1. Definición imprecisa de probabilidad condicional	C.1.1. Falacia temporal	6	7,0%
	C.1.2. Confunde condicionalidad con causalidad	8	9,3%
C.2. Define correctamente solo probabilidad condicional	C.2.1. Olvida probabilidad simple y define verbalmente prob. Condicional	0	0%
	C.2.2. Olvida prob. Simple y define con fórmula prob. Condicional	0	0%
	C.2.3. Define mal Prob. Condicional	1	1,2%
C.3 Definición imprecisa de las dos probabilidades	C.3.1. Falacia Temporal para las dos definiciones	1	1,2%
	C.3.2. Usa concepto de dependencia (causalidad) para las dos definiciones	21	24,4%
	C.3.3. Fórmula imprecisa	1	1,2%
	C.3.4. Indica diferencias en forma imprecisa	0	0%
	C.3.5. Usa ejemplos	1	1,2%
C.4. Define correctamente las dos probabilidades	C.4.1. Definición verbal	10	11,6%
	C.4.2. Entrega fórmulas correctas	0	0%
	En blanco	3	3,5%

De la tabla 1, se observa un gran porcentaje de individuos que definen erróneamente ambas probabilidades (39, 6%). Dentro de este grupo el 23,5% de los alumnos confunde el concepto de condicional con complejo, esto puede deberse a un sesgo que se produce en pedir probabilidad simple y al desconocer el concepto de condicional se asimila por defecto a complejo, se muestran algunos ejemplos en el Anexo del estudio. Se observa además que sobre el 30% de los sujetos asume la dependencia de eventos en la probabilidad condicional (C.1.2 y C.3.2) citada por Falk (1986), en cambio, la falacia temporal solo se observa en el 8,2 % de las definiciones.

En la tabla 2 se realizan comparaciones con los estudios realizados en futuros profesores por Contreras *et al* (2013) y en alumnos de psicología por Díaz (2007) respecto a las cinco categorías principales.

Tabla 2 – Comparación de alumnos de ingeniería con otros estudios similares

	Alumnos de Ingeniería (n=86)		Futuros profesores (n=196). Contreras <i>et al</i> (2013)		Alumnos Psicología (n=414). Díaz (2007)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
C.0. Error en ambas definiciones	37	43,0	36	18,3	119	28,7
C.1. Definición imprecisa de probabilidad condicional	14	16,3	6	3,1	28	6,8
C.2. Define correctamente solo probabilidad condicional	1	1,2	12	6,0	90	21,7
C.3 Definición imprecisa de las dos probabilidades	24	27,9	111	56,7	50	12,1
C.4. Define correctamente las dos probabilidades	10	11,6	31	15,9	127	30,7
Total	86	100,0	196	100,0	414	100,0

Solo el 11,6% de los alumnos de ingeniería define correctamente las dos probabilidades en comparación con el 15,9% observado en el estudio de Contreras *et al* (2013) y el 30,7% en alumnos de psicología del estudio de Díaz (2007). Respecto a la clasificación C.2. en el caso de estudiantes de ingeniería este porcentaje es prácticamente nulo (1,2%) a diferencia de los estudiantes de psicología donde este tipo de clasificación aparece en un 21,7% de ellos. Se tiene además que el 27,9% de los estudiantes de ingeniería define con imprecisión ambas probabilidad, si se observa la tabla 1 en su mayoría (el 87,5% de este grupo) usa el concepto de dependencia en ambas definiciones. Finalmente, se observa un porcentaje superior en el grupo C.1. (16,3%) respecto a la definición imprecisa de la probabilidad condicional en comparación con los estudios contrastados, sobre el 50% de este grupo menciona la dependencia causal.

5. Conclusión.

El estudio realizado en estudiantes de ingeniería reflejó que las imprecisiones en la definición de probabilidad condicional detectadas en un principio en el artículo de Kahneman *et al* (1982) y verificadas en los estudio de Díaz (2007) y Contreras *et al* (2013) se dan en gran frecuencia en estos alumnos. La falacia temporal prácticamente no se observa en el estudio (1,2% de los estudiantes) al igual que el uso de fórmulas para intentar explicar el concepto pedido, esto último, puede deberse a que el problema planteado pedía explicar el concepto y puede entenderse a que se refiere en forma verbal. También, se tiene que dentro del grupo de repuestas incorrectas el alumno confunde el concepto de lo condicional con lo complejo (23,5% de los casos), esto podría deberse a la falta de conocimiento del concepto por parte de los alumnos y deducir que lo condicional se contrapone a lo simple, por tanto, es complejo. Estos aspectos son preocupantes y deberían ser corregidos por los docentes quienes imparten

los programas de estadística para ingeniería y otras disciplinas. El énfasis en el saber definir los conceptos en los cuales se está trabajando debería considerarse dentro del proceso de evaluación del alumno que se enfrenta a un curso de probabilidad. Por parte del docente, mostrar los errores habituales en la comprensión de la probabilidad condicional puede ser de gran ayuda para introducir correctamente tales definiciones y lograr una comprensión acabada del tema en sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. (Tesis de Doctorado). Departamento de Didáctica, Universidad de Cádiz, Cádiz.

Casar, G. (2009). Aplicación práctica e interdisciplinaria de la probabilidad y estadística en la Ingeniería. Presentación en el 3er foro Nacional de Ciencias Básicas, México. <http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/> Consultado 20/05/2015

Contreras, J.M., Díaz, C., Batanero, C. & Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*, pp. 237-244. Bilbao: SEIEM.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. (Tesis de Doctorado). Departamento de Psicología, Universidad de Granada, Granada.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En: Davidson, R. Avidson, R. y Swift, J. (Eds.). *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, Canada: International Statistical Institute. pp. 292 – 297.

Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v (15), n.1, pp. 49 – 95.



Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.

Leikin, R. & Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for profesional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, pp. 62–73.

Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, pp. 219-248.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, Barcelona*, v(5), pp. 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D.; Konold, C. & Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, Seattle, v(40), n.2, pp. 255-269.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. (Tesis de Doctorado). Instituto de Formacion de Profesores. Departamento de Matemáticas, Universidad de Rennes I, Rennes.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En: Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, MA: Cambridge University Press. pp. 117-128.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: Tall, D. O. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer. pp. 65–81.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131–148.

Anexo: Ejemplos para cada tipo de clasificación obtenidas del estudio de las definiciones proporcionadas por alumnos de Ingeniería en base al criterio de Díaz (2007).

Como observación algunos de los casos no se obtuvieron, por lo que, los ejemplos se tomaron de la investigación de Contreras *et al* (2013).

C0: Definiciones incorrectas

C0.1. *Errores formales.*

“Probabilidad simple es aquella que se puede obtener de manera directa, en cambio probabilidad condicional es aquella que está condicionada a algo” (Sujeto 72)

C0.2. *Errores producidos por confundir conceptos que intervienen en la definición.*

“ La probabilidad simple es que salga cara o sello al lanzar una moneda, la condicional es tirar dos monedas y es más difícil de calcular” (Sujeto 66)

C0.3. *Definiciones apoyadas en fórmulas que contienen errores.*

No se observaron en el estudio, el ejemplo se extrae de Contreras *et al* (2013).

“Probabilidad simple: es cuando interviene los elementos sin estar condicionados a algo. Probabilidad condicional: cuando los elementos están condicionados a otros, cuando depende de otro: $P(A/B) = P(A)/P(A \cup B)$ ”

C1. Definición imprecisa de la probabilidad condicional.

C1.1. *Asume que el suceso condicionante precede al condicionado.*

“La probabilidad condicional es al probabilidad de que ocurra un evento si anteriormente ya ocurrió otro” (Sujeto 25)

C1.2. *Suponer un suceso dependiente del otro.*

“La probabilidad condicional es donde un evento depende de otro” (Sujeto 55)

C2. Define correctamente sólo la probabilidad condicional.

C2.1. *Olvida definir la probabilidad simple, y define verbalmente la condicional.*

No se observaron en el estudio, el ejemplo se extrae de Contreras et al (2013).

“Cuando tratamos de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, conociendo una información adicional, hablamos de probabilidad condicionada”.

C2.2. *Olvida definir la probabilidad simple, y define la probabilidad condicional con fórmulas.*

No se observaron en el estudio, el ejemplo se extrae de Contreras et al (2013).

“No conozco el termino de probabilidad simple, si la de suceso simple que se refiere a un tipo particular de suceso formado solo por elementos. La probabilidad condicionada de un suceso A condicionado a otro B siendo A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio se formula con $P(A/B)$ distinto de cero es la probabilidad de que ocurra A teniendo información de B. Se formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C2.3. *Error al definir la probabilidad simple.*

“Probabilidad simple: no está condicionada o sujeta a otras probabilidades, es independiente en donde: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. (Sujeto 83)

C3. Define imprecisamente las dos probabilidades pedidas.

C3.1. *Suponer que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado.*

“Probabilidad simple: es aquella que no se ve afectada por algún hecho anterior o no tiene un requerimiento y probabilidad condicional es aquella probabilidad que se afectada por algún hecho anterior o requerimiento” (Sujeto 65)

C3.2. *Suponer que el suceso condicionante es dependiente del suceso condicionado.*

“La probabilidad simple se calcula de un hecho independiente y la condicional es cuando existe un hecho que depende de otro” (Sujeto 67)

C3.3. Fórmulas imprecisas para definir las probabilidades.

“ Probabilidad simple = $\frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ de casos totales}}$ ” (Sujeto 58)

C3.4. Indican la diferencia entre probabilidad simple y condicional, pero son imprecisas.

No se observaron en el estudio, el ejemplo se extrae de Contreras et al (2013).

“La probabilidad condicional se diferencia de la simple en que está afectada por un suceso que no es independiente”

C3.5. En lugar de dar una definición, da un ejemplo.

“Probabilidad simple es obtener una ficha azul de una caja con 4 fichas azules y dos rojas, la condicional es la probabilidad de sacar una ficha azul condicionado a que la primera ficha es roja” (Sujeto 3)

C4. Defina correcta y de manera precisa las dos probabilidades.

C4.1. Definir ambas probabilidades verbalmente.

“Probabilidad simple es obtener probabilidad de ocurrencia de un evento A, en cambio, probabilidad condicional es obtener la probabilidad de A si se tiene información de otro suceso B” (Sujeto 78)

C4.2. Usar fórmulas para definir ambas probabilidades.

No se observaron en el estudio, el ejemplo se extrae de Contreras et al (2013).

“Probabilidad simple: Sería la definición de probabilidad según Kolmogorov. Es una función $f: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ que a cada suceso le hace corresponder un número Real, verificando que $P(A) \geq 0, P(A) \leq 1, P(A) = \frac{\text{Casos-favorables}}{\text{Casos-Posibles}}$

Probabilidad condicionada: Dado un suceso B, cuando queremos saber la ocurrencia de otro suceso A a partir de información del suceso B; $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$