CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS MATEMÁTICOS

Marco Vinicio Vásquez Bernal
marco.vasquez@unae.edu.ec
Universidad Nacional de Educación - Ecuador

Tema: Investigación didáctica
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: Cuadrado matemático, sumas, constante, orden.

Resumen

Con el auxilio de alumnos y colegas, teniendo como objetivo entender las relaciones intrínsecas de los números y el carácter lúdico que pueden tener las matemáticas se ha logrado estructurar un proceso para construcción cuadrados matemáticos anidados, que iniciando en algunos básicos, posibilita, con en base de un producto especial, construir otras de mayor orden, que pueden cumplir requerimientos especiales, como que todos sus elementos sean múltiplos de un número dado, o estos terminen todos en alguna cifra preestablecida. El proceso genera cuadrados matemáticos en pocos minutos con ayuda de una hoja de cálculo, debiendo indicar que con este proceso y conjuntamente con alumnos de la Universidad donde laboro, se ha construido en físico, un cuadrado matemático de 1024 filas y 1024 columnas, es decir ubicando allí los números del 1 al 1´048576, de tal forma que los 1024 elementos ubicados en cualquier columna, fila o diagonal suman un mismo valor, 536´871424, en su interior existen cuadrados de diversas órdenes, siendo en total 28785 cuadrados matemáticos distintos.

Desarrollo:

CUADRADOS MATEMATICOS:

Se conoce como cuadrados matemáticos a estructuras de forma cuadrangular, divididas en igual número de filas que de columnas, generando por tanto una cantidad de celdas o casillas equivalente al cuadrado del número de filas o columnas, donde al ubicar números enteros en cada una de esas casillas se podrá comprobar lo siguiente:

- La suma de los elementos de cada una de las filas es una constante.
- La suma de los elementos de cada una de las columnas es la misma contante.
- Al sumar los elementos ubicados en las dos diagonales mayores del cuadrado (las que unen esquinas opuestas), el resultado es nuevamente esa constante.

HISTORIA DE LOS CUADRADOS MAGICOS.

Las curiosidades matemáticas han estado presentes a lo largo de la historia, ligándolas siempre ha leyendas y hechos sobrenaturales, intentando explicar esa relación intrínseca entre los elementos matemáticos, no en función de relaciones propias de la ciencia, sino más bien a través de hechos fabulosos y de fantasía, mostrando cada resultado como algo aislado, fruto del "poder" y no como consecuencia de las reglas matemáticas.

Así, el primer relato que contiene algo relacionado con los cuadrados matemáticos es una leyenda, que permitiría afirmar que estos se originaron en China hace 5.000 años, no se sabe a ciencia cierta quien gobernaba, existiendo una posibilidad de que sea **el emperador Fuxi** (伏羲).

Los árabes conocieron estos cuadrados a través de su contacto con la cultura hindú.

GENERALIDADES MATEMATICAS SOBRE LOS CUADRADOS MAGICOS:

Existen ciertas pautas que surgen de la definición de cuadrados mágicos o matemáticos, expondremos las mismas a continuación como reglas generales que permitirán desarrollar este trabajo:

- La naturaleza de los elementos que conforman un cuadrado mágico o matemático deberá explicitarse, aunque por generalidad, cuando no se indique, se entenderá que son números naturales.
- Un cuadrado matemático de 1 fila y 1 columna, está conformado por cualquier número.
- No es posible construir cuadrados matemáticos de 2 filas.
- Un cuadrado mágico o matemático es una estructura de celdas con igual número de filas y de columnas (n), por tanto el número total de elementos o números, requeridos para llenarlos es de n , pudiendo establecerse relaciones entre estos elementos y admitirse o no la repetición, aunque se debe indicar que si se admite la repetición, esta deberá ser muy limitada, caso contrario anulara la creatividad requerida para la construcción de estas estructuras.
- Al valor que resulta de sumar los elementos de una fila, de una columna o de las diagonales mayores se le designara como constante del cuadrado y caracterizara al mismo.
- Una característica importante que debe definirse es si los números o elementos a emplearse serán o no naturales consecutivos, y de ser consecutivos deberá indicarse a partir de cuál de ellos se arranca, esta característica es muy importante ya que al ser consecutivos se puede utilizar algunas reglas y

resultados que para esos números se han obtenido, a continuación indicaremos las mismas:

- Si son números consecutivos y arrancan en uno, como el arreglo es cuadrado, los números que intervienen serán del 1 a n, y por tanto su sumatoria total se calculara con la fórmula:

  $$S_n = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

  Y por tanto cada fila o columna del mismo deberá contener n elementos que sumen S_n/n.

  Por tanto la suma de cada fila o columna será: $\frac{S_n}{n} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$,

  Para cualquier n, distinto de 2, n numero natural.

  Este valor determine la constante que caracteriza el cuadrado.

- Todo cuadrado mágico n x n, contiene dos diagonales mayores que están compuestas de n elementos que deben sumar una cantidad igual a lo obtenido para filas o columnas.
- Si los elementos de un cuadrado mágico no son consecutivos más se rigen a alguna relación, para cada caso deberá buscarse como esta relación afecta al total de elementos y al total de filas, columnas y diagonales mayores.
- Si no existe ninguna relación entre los elementos de un cuadrado matemático n x n, lo único que puede decirse es que la suma de los elementos de las diagonales mayores es igual a la suma de los elementos de cada fila o cada columna y además esta multiplicada por n determina la suma total de los elementos presentes.

CASO DEL CUADRADO MATEMATICO DE ORDEN 3x3.

Lo primero que buscaremos aquí es la forma de construir un cuadrado matemático 3x3 con los números (1,2,3,4,5,6,7,8,9), elementos que permitirán llenar un cuadrado de tres filas por tres columnas.

Sabemos además que la suma de estos elementos es: $\frac{9(9+1)}{2} = 45$

Por tanto su constante característica será: 45/3 =15.

Entonces cada fila y cada columna deberá contener tres de los elementos indicados, que sumen 15 y que además no se repitan, deberemos por tanto buscar todas las posibles combinaciones de tres elementos de los nueve presentes, que cumplan la condición de que su suma sea 15.

CASO CUADRADO MATEMATICO 4 x 4.

Como el caso anterior, partiremos de que deseamos ordenar los números enteros del 1 al 16, en una malla cuatro por cuatro, donde los elementos de cada fila, cada columna y sus diagonales, sumen un valor constante.

Para obtener ese valor constante debo recordar que los dieciséis elementos en total sumaran:

$$S_4 = (16x17)/2 = 136.$$

Por lo tanto su constante característica será: 136/4 = 34.

CUADRADOS MATEMATICOS DE ORDEN 5x5.

Existen muchos métodos para construir cuadrados matemáticos, cada uno de ellos con sus particulares ventajas y desventajas, más en este trabajo buscaremos profundizar un método que se basa en ir tomando uno ya existente, y dotarle de un contorno, aumentando una fila y una columna en cada lado del que se tiene, es decir aumentaremos en total dos filas y dos columnas, como se puede observar en la siguiente figura:

Los números del cuadrado 3x3, pueden transportarse a la parte pertinente del nuevo cuadrado, en ese entorno en este caso existen 16 elementos, en el cuadrado 5x5 deberán ubicarse los números del 1 al 25, los 8 menores y los 8 mayores se destinaran para esas nuevas celdas, y para ubicar las del cuadrado matemático 3x3, simplemente tomaremos uno ya existente, sumaremos sus elementos más 8 y lo ubicaremos respectivamente.

Así, si nos tomamos como base el siguiente cuadrado matemático 3x3:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

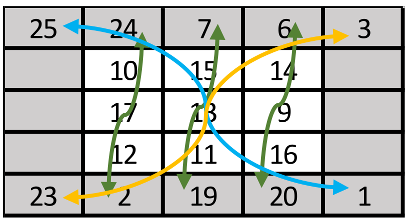
Construimos el espacio de 25 celdas y en su centro ubicamos los elementos del cuadrado 3 x3, sumados más 8 respectivamente, tal como se observa en la Cuadro 1.

CUADRO 1

En esta etapa debemos hacer las siguientes consideraciones:

- Los números que debemos ubicar son 1,2,3,4,5,6,7,8,17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.
- Para n=5, el valor constante de sumas en filas, columnas y diagonales será
- $\frac{S_n}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{S_5}{5} = \frac{5(5^2+1)}{2} = 65$
- Los valores en las filas y columnas ubicadas ya, suman 39.
- Por tanto, para completar esas filas o columnas y las diagonales deberemos añadir números cuya suma 26.
- Si separamos los números que debemos ubicar en grupos de 2 que sumen 26 tendremos los pares (1,25), (2,24), (3,23), (4,22), (5,21), (6,20), (7,19), (8,18).

Con esto podremos ya iniciar la construcción del cuadrado matemático 5x5, iniciamos tomando 5 números, cada uno de un par distinto, tal que su suma sea 65, que es la constante.



CUADRO 2.

Luego deberemos ubicar el opuesto el respectivo de cada par, teniendo en cuenta lo siguiente:

- Para los que se ubiquen en las esquinas, el opuesto se refiere al otro extremo de diagonal.
- Para los que se ubican entre las esquinas, el opuesto será el del otro extremo respecto a la fila o la columna.

25	24	7	6	3
4	10	15	14	22
5	17	13	9	21
8	12	11	16	18
23	2	19	20	1

Así para el caso indicado seleccionamos los números (25, 24, 7, 6, 3), que suman 65, los ubicaremos con sus pares en los opuestos, tal como se observa en el cuadro 2.

Por último llenaremos los demás espacios, con los pares restantes, debiendo cuidar que su suma por columna también sea 65, tal como se observa en el cuadro 4.

Con lo que se ha construido el cuadrado matemático 5x5, con la característica especial que aquel que está en su interior de orden 3x3, también es un cuadrado matemático.
Es preciso en esta parte indicar que partiendo de un cuadrado matemático 3x3, hemos construido este 5x5, más podemos construir otros permutando los elementos extremos de las tres columnas interiores, así como también los de las tres filas interiores, es decir podemos construir 3!x3! distintos, es decir 36 cuadrados distintos.
Además si observamos podemos intercambiar los elementos extremos de las columnas 7 y 6, con los extremos de filas 5 y 8, ya que su suma coincide (es 13), por supuesto con sus opuestos, y tendríamos otros 36 cuadrados matemáticos distintos, con lo que se puede afirmar que por cada cuadrado matemático 3x3, tendremos 72 cuadrados matemáticos distintos, además como vimos que existen
Vimos que es posible ubicar los elementos de un cuadrado 3x3 de 8 formas distintas, que al ubicarlas aquí, cada uno generará distintos cuadrados matemáticos 5x5, entonces por este procedimiento afirmaremos, que con este método es posible construir 576 cuadrados matemáticos distintos, sin tomar en cuenta sus derivados.
CUADRADOS MATEMATICOS DE ORDEN 6x6.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

32	34	1	2	9	33
29	11	25	24	14	8
10	22	16	17	19	27
6	18	20	21	15	31
30	23	13	12	26	7
4	3	36	35	28	5

Al igual que en caso anterior, podemos construir cuadrados matemáticos 6x6 a partir de uno 4x4, teniendo en cuenta que el cuadrado 6x6, deberemos ubicar los números del 1 al 36 y que la constante de sumatoria es 111, recordando que en los 4x4, su constante es 34, además en el contorno se ubicaran 20 números, del 1 al 10 y de 27 a 36, para poder llenar adecuadamente sumaremos a cada elemento del cuadrado 4x4, la cantidad de 10

(2x(n-1)), logrando la que se observa en el CUADRO 5, donde se ha construido el cuadrado matemático 6x6.

Está claro que al interior, está un cuadrado matemático 4x4.

Además es fácil calculara que por cada arreglo de este tipo, únicamente al modificar los elementos internos de la columna y de la fila del entorno, es posible generar 576 cuadrados matemáticos distintos.

Así se podrá calcular cuadrados matemáticos de orden mayor, conteniendo en su interior otros que también son cuadrados matemáticos, cada vez en cantidad mayor.

PRODUCTOS DE CUADRADOS MATEMATICOS

En base de investigación hemos construido un proceso que permite tomar un cuadrado matemático de orden nxn, y un segundo, de orden mxm, para mediante un proceso que denominaremos "PRODUCTO DE CUADRADOS MATEMÁTICOS", construir uno nuevo de orden nmxnm, es decir cuyo orden el es producto de los ordenes de los cuadrados matemático inicialmente presentados.

Para presentar el proceso, primero mostraremos un ejemplo detallado.

Tomamos el siguiente cuadrado matemático de orden 3x3, que lo denominaremos A.

A =

8	3	4
1	5	9
6	7	2

B =

6	9	12	7
3	16	13	2
15	4	1	14
10	5	8	11

Luego tomamos otro de orden 4x4, que lo denominamos B.

Al multiplicar los dos tendremos un cuadrado matemático de orden 12 x12, debiendo aclararse qua AxB no es igual a BxA.

Para calcular AXB, tomamos como base el cuadrado B, y cambiaremos cada elemento de este por un cuadrado matemático construido a partir de A, cambiando cada elemento de este cuadrado matemático a través de una transformación lineal.

La transformación lineal requerida es:

$a_{ij}' = M(b_{kl} - 1) + a_{ij}$

Donde:

a_{ij}'= *representa los elementos del cuadrado A transformado, que se ubican fila i, columna j.*

a_{ij} = representa los elementos del cuadrado A, que se ubican fila i, columna j.

b_{kl} = representa los elementos del cuadrado B, que se ubican fila k, columna l.

M = número total de elementos del cuadrado B (m^2).

Así, como el elemento de su primera fila y primera columna es 6, transformamos los elementos A en A´ con la transformación lineal $a_{ij}' = 9(6-1) + a_{ij} = 45 + a_{ij}$, es decir para este caso A´ se construiría como A, más el valor de 45 para cada elemento.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

53	48	49
46	50	54
51	52	47

Luego tomamos el segundo elemento de B, aquel de la primera fila segunda columna, que en este caso es 9, y le aplicamos la transformación lineal $a_{ij}' = 9(9-1) + a_{ij} = 72 + a_{ij}$, obteniéndose otro cuadrado matemático de orden 3x3.

53	48	49
46	50	54
51	52	47

80	75	76
73	77	81
78	79	74

Procederíamos así con los 16 elementos de B, para luego ubicar cada cuadrado matemático de orden 3x3 obtenido, en un cuadrado matemático de orden 12x12, SEGÚN EL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DE B.

Así obtendremos el cuadrado matemático AxB:

53	48	49	80	75	76	107	102	103	62	57	58
46	50	54	73	77	81	100	104	108	55	59	63
51	52	47	78	79	74	105	106	101	60	61	56
26	21	22	143	138	139	116	111	112	17	12	13
19	23	27	136	140	144	109	113	117	10	14	18
24	25	20	141	142	137	114	115	110	15	16	11
134	129	130	35	30	31	8	3	4	125	120	121
127	131	135	28	32	36	1	5	9	118	122	126
132	133	128	33	34	29	6	7	2	123	124	119
89	84	85	44	39	40	71	66	67	98	93	94
82	86	90	37	41	45	64	68	72	91	95	99
87	88	83	42	43	38	69	70	65	96	97	92

Donde se han ubicado los 16 cuadrados matemáticos de orden 3x3, obtenidos para cada elemento de B y ubicados según la estructura de este.

PROCEDIMIENTO PARA EL "PRODUCTO" DE CUADRADOS MATEMÁTICOS

Con lo indicado podemos proponer el siguiente proceso para obtener el PRODUCTO DE CUADRADOS MATEMATICOS AxB.

a) Tomamos el cuadrado matemático B.
b) Por cada elemento de B, transformamos el cuadro A en A´ con la transformación lineal $a_{ij}´= M(b_{kl} -1) + a_{ij}$, *donde M es el orden de b al cuadrado, y* b_{kl} *es el elemento seleccionado de B.*
c) Ubicamos los cuadrados matemáticos obtenidos según la ubicación de los elementos de B que los generaron.
d) Tenemos el cuadrado matemático AxB.

Referencia Bibliográfica.

Berlekamp, E., Conway, J., y Guy, R.(1982), "*Winning Ways for your Mathematical Plays*".

Carlavilla, J. y Fernández, M. (2000), "*Cuadrados Mágicos*". Proyecto Sur de Ediciones.

Gardner, M.(1988), "*Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*", Labor.

Gardner, M., (2001), "*Training the Mind and Entertaining the Spirit*".