

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA RAÍZ CUADRADA

Mauricio Gamboa Inostroza; Marcela Parraguez González
maurigamboa@gmail.com; marcela.parraguez@ucv.cl
 Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Tema: I.4 - Pensamiento Matemático Avanzado.

Modalidad: Comunicación breve

Nivel: Medio (11 a 17 años)

Palabras Clave; Raíz Cuadrada, APOE, Descomposición Genética

Resumen

Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores y, considerando un estudio epistemológico del objeto matemático raíz cuadrada, proponemos una Descomposición Genética (DG) teórica (Dubinsky, 1991) —modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático— que permitirá articular cada uno de los siguientes aspectos de la raíz cuadrada: (1) aritmético, (2) geométrico, (3) algebraico y (4) funcional; explicitando aquellas construcciones y mecanismos mentales, que hipotéticamente, un estudiante de enseñanza media (16-17 años) pone de manifiesto al construir la raíz cuadrada como objeto. Para testear la viabilidad de la DG teórica propuesta, utilizamos el ciclo metodológico que viene aplicando exitosamente el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) en sus investigaciones con el fin de documentar la DG, respecto de las construcciones y mecanismos mentales que muestran los estudiantes al construir un objeto matemático.

1. El problema de investigación

El propósito de esta investigación es indagar cómo los estudiantes logran construir la Raíz Cuadrada, inquietud que nace en la experiencia docente, al identificar algunos errores o *fenómenos* en la actividad matemática de los estudiantes de enseñanza media respecto de la raíz cuadrada. Algunos de estos errores se describen de forma precisa a continuación: **1)** escriben $\sqrt{4} = \pm 2$, es decir, asimilan que la raíz cuadrada de un número tiene doble resultado, por lo que al resolver $\sqrt{4} + \sqrt{4}$, se podrían tener tres resultados, 4, 0 ó -4; **2)** Consideran que las raíces de números “*no cuadrados perfectos*” no tienen un valor exacto o las llaman “números inexactos”; **3)** establecen la siguiente equivalencia para definir la Raíz Cuadrada: $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x$, dejando de lado la restricción para los valores de x e y , lo que trae como consecuencia una confusión en el concepto de raíz cuadrada, con la noción de raíz de un polinomio. Muchos de estos errores corresponden a los evidenciados por Colín (2005) en su investigación en México, denotando que no equivalen a hechos locales solamente. Según Vidal (2009) los textos de estudio de

circulación nacional (Chile) para la enseñanza de la matemática generan estos fenómenos, pues su exposición se aleja mucho del saber sabio.

En base a lo expuestos anteriormente, enunciamos la pregunta de investigación: ***¿Cómo construyen el concepto matemático Raíz Cuadrada los estudiantes de enseñanza media?***

Para este trabajo el foco de indagación está centrado en la construcción mental de un concepto matemático, por ende se utilizará la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) como marco teórico, que tiene como principio entender cómo se aprende la matemática, observando los fenómenos que ocurren en los alumnos que intentan construir un concepto matemático (Salgado, 2007) y en base a esto la pregunta se reinterpreta así: ***¿qué construcciones y mecanismos mentales necesitan mostrar los estudiantes para (re)construir el concepto raíz cuadrada?***

2. La raíz cuadrada: antecedentes

El papiro de Ahmes, que es una copia del 1650 a.C. de un trabajo incluso anterior, que muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas. Según Vidal (2010), es probable que la raíz cuadrada fuera pensada por las antiguas civilizaciones, unida al conocimiento de los cuadrados perfectos. Colín (2005), destaca que los aspectos en los que se desenvuelve la raíz cuadrada históricamente son cuatro: (1) Geométrico, (2) Aritmético, (3) Algebraico, y (4) Funcional. Queda claro que en una primera instancia su nacimiento es geométrico (raíz cuadrada como un trazo). Según Vidal (2010), en el siglo V a.C. con la aparición del teorema de Pitágoras (noción que era conocida por culturas anteriores como la babilónica y/o egipcia), donde la necesidad de buscar tríos pitagóricos denota la idea de la operación inversa a elevar al cuadrado. Colín, menciona que *el nacimiento data de los elementos de Euclides (libro II), donde su uso se da para el cálculo de la “línea recta”, al considerar esa “línea” como la longitud del lado de un cuadrado que se quiere calcular dada la superficie de éste* (Colín, 2005, p.16). La raíz cuadrada como operador aritmético aparece basándose en la idea de los números Euclidianos en el libro VII, pero no se encuentra explícitamente un proceso –inverso al de elevar al cuadrado– como en el ámbito geométrico. Se tienen antecedentes de que los babilónicos usaban tablillas que contenían multiplicaciones y operaciones inversas con números. En cuanto al aspecto algebraico, considerando el álgebra como una generalización de la aritmética por medio de letras, estas se pueden considerar como una incógnita (ecuaciones irracionales), una variable donde hay que tener un conjunto

referencial (se utiliza para formalizar la definición) y como un número cualquiera generalizado (donde la letra puede ser cualquier número e incluso varios números). En relación al aspecto funcional, el trabajo realizado con la raíz cuadrada es netamente analítico, pues aun no existía un desarrollo avanzado acerca del estudio de las funciones, cuando años después se define la raíz cuadrada como la inversa de la función cuadrática; aunque en el siglo XVI es posible encontrar curvas que representen $y^2 = x$. Fermat habla de porciones parabólicas e hiperbólicas y, en otros escritos contemporáneos se comienzan a hacer las distinciones entre $y^2 = x$ e $y = \sqrt{x}$.

Entre las investigaciones existentes en relación a la raíz cuadrada, Colín (2005) hace un estudio de la raíz cuadrada desde la aritmética al cálculo, en él expone varios fenómenos acerca de la enseñanza de la raíz cuadrada, entre ellos el de asignarle un doble signo al calcular la raíz cuadrada a un número. Buhlea & Gómez (2008), hacen un estudio de textos para analizar la trasposición de la raíz cuadrada, estudio que compara textos de dos países (España y Rumania) y que reporta el *obstáculo didáctico* en los manuales españoles para la trasposición del objeto en cuestión. Vidal (2009) en su tesis doctoral titulada “Las raíces y radicales en libros de texto en Chile (1969-2009)”, hace un estudio de la presentación del objeto matemático raíz cuadrada en los textos de circulación nacional en Chile entre los años 1969 y 2009 por medio de la teoría de la Transposición Didáctica, donde hace diferencia entre el radical y la raíz, argumentando desde la matemática.

3. Marco teórico: La teoría APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991), y Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: Acciones, Procesos y Objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. El tránsito por las construcciones mentales desde APOE se puede ver de la siguiente manera: se dice que

un individuo evidencia una concepción acción cuando solamente es capaz de realizar transformaciones a algún objeto motivado por estímulos externos y no por sí solo. Si este alumno reflexiona sobre estas acciones y las realiza conscientemente, se dice que las acciones se han *interiorizado*, por lo que muestra una concepción proceso. Dos o más procesos se pueden *coordinar* en un nuevo proceso. También un proceso se puede *revertir*, no en el sentido de deshacer, sino como pensar a la inversa generando un nuevo proceso. Cuando surge internamente la necesidad de transformar los procesos desarrollados, el alumno los *encapsula* en objetos, sobre los cuales puede volver a aplicar acciones. Los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas. La forma de pasar de un estado de construcción de conocimiento matemático a otro en la teoría APOE es por medio del mecanismo de abstracción reflexiva, que se utiliza para describir cómo un individuo realiza ciertas construcciones mentales acerca de un concepto determinado. Los 5 tipos de mecanismos de abstracción reflexiva que menciona Dubinsky son: *interiorización*, *coordinación*, *encapsulación*, *generalización* y *reversión*. Por medio de estas se originan las construcciones mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; los cuales dan el nombre a la teoría. El esquema “*es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante.*” (Asiala et al, 1996, p. 12). En la *Figura 1* se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

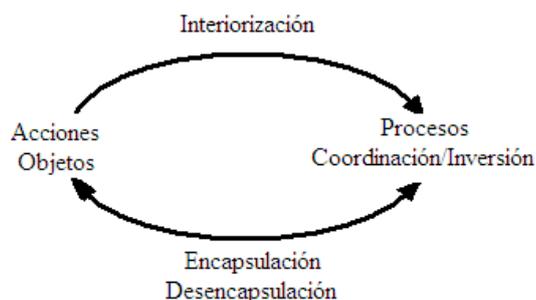


Figura 1: Esquema de la teoría APOE (Asiala et al., 1996)

La teoría APOE explica el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción. Asiala et al., (1996, p. 7), define la descomposición genética (DG) del concepto como “*conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del alumno*”. La DG pone en relieve las construcciones cognitivas que pueden ser necesarias para el aprendizaje de un concepto. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos,

además de la forma que se pueden ir estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto, y así favorecer la construcción de las relaciones entre estas acciones, procesos y objetos (Salgado, 2007).

Descomposición Genética de la Raíz Cuadrada

Los antecedentes (aspectos aritmético, geométrico, algebraico y funcional), el análisis teórico (la matemática), y un análisis de los textos de estudio permiten establecer la DG hipotética del objeto en cuestión, todo esto sumado a la experticia de los investigadores.

La Figura 2, muestra la DG hipotética diseñada:

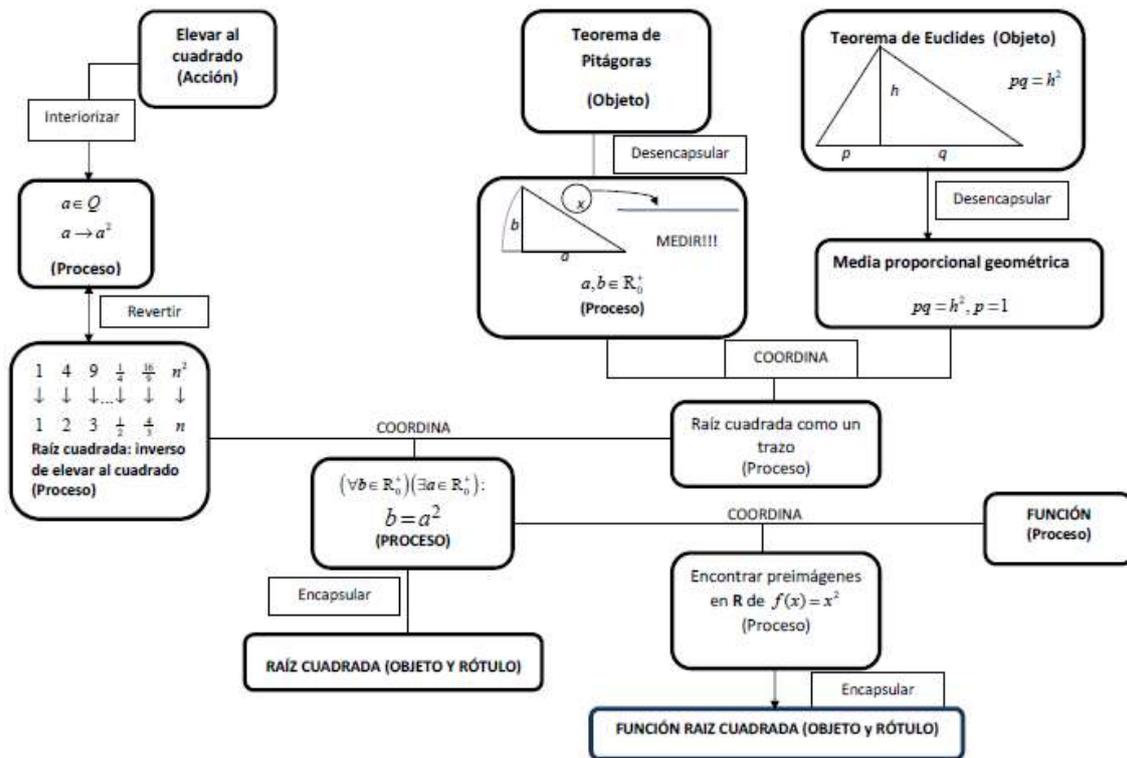


Figura 2: Descomposición Genética hipotética de la Raíz Cuadrada.

Mediante esta DG hipotética describimos de manera explícita las construcciones y mecanismos mentales que los individuos requieren para construir el concepto raíz cuadrada, tomando en consideración los 4 aspectos en los que se desenvuelve. Una consideración importante desde nuestro análisis teórico es la incorporación necesaria del aspecto geométrico, pues es mediante éste que se pretende establecer la existencia de la raíz cuadrada para todo número real positivo o cero (considerando que se puede construir la raíz cuadrada de cualquier trazo) debido a la ausencia del axioma del supremo como estructura previa en los estudiantes del nivel medio (17-18 años).

4. Metodología

La Teoría APOE tiene su propia metodología la cual viene aplicando exitosamente el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) considerando tres componentes: a) el análisis teórico, b) diseño y aplicación de instrumentos, c) el análisis y verificación de datos. En el análisis teórico se genera un mapa del aprendizaje, en nuestro caso la DG hipotética de la raíz cuadrada. En base a esta DG se diseñó un cuestionario de 7 preguntas, el que pretende recoger información de la forma de construir la raíz cuadrada. Este cuestionario fue aplicado a 20 informantes divididos en 4 casos de estudio: 1) Ocho estudiantes de 4º año de pedagogía en Matemática; 2) Cinco profesores (egresados) de Matemática en proceso de habilitación profesional; 3) Cuatro profesores de matemática con más de 4 años de experiencia; 4) Tres estudiantes de último curso de enseñanza media. De este modo, fue posible describir y documentar de manera apropiada las construcciones y mecanismos mentales empleados por los informantes. El análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se realizó desde la descomposición genética hipotética, en donde se detectaron las dificultades para *coordinar* procesos que se dan entre lo geométrico y aritmético, imposibilitando una concepción proceso del aspecto algebraico y con esto una *encapsulación* de la raíz cuadrada y/o la función raíz cuadrada. Una evidencia de esto es la aparición del fenómeno del doble signo en 17 de los 20 informantes. Es así como a modo de ejemplo podemos citar algunos argumentos dados a la pregunta 6 del cuestionario, la cual tenía por intención indagar la concepción acerca del concepto raíz cuadrada (aspecto algebraico y funcional).

En la figura 3, se muestra la respuesta del informante 8 a la pregunta, quien afirma que en el caso geométrico la raíz cuadrada siempre será positiva, pero no en el álgebra.

<p>6. Un libro de texto A afirma que "$\sqrt{9} = \pm 3$", y el texto B afirma que "$\sqrt{9} = 3$". Si tuvieras que enseñar a un amigo, compañero y/o algún otro estudiante, ¿Cuál de los dos libros de texto sería tu apoyo? Argumenta tu elección.</p>
<p>Si son medidas utilizaría el texto B</p> <p>Si es algebra el texto A</p>

Figura 3: Respuesta del informante 8 al cuestionario.

En la figura 4, el informante 12 utiliza el aspecto funcional, pero su argumento viene desde la función cuadrática en vez de la función raíz cuadrada, evidenciando una falta de articulación entre los aspectos.

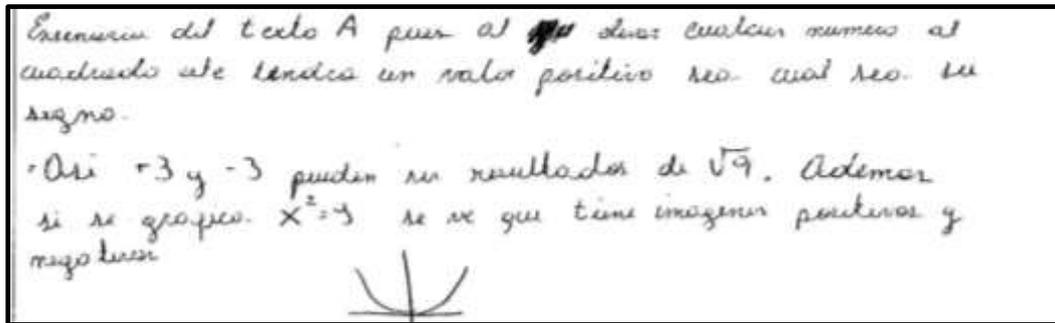


Figura 4: Respuesta del estudiante 12 al cuestionario.

Conclusiones

El análisis de los datos del cuestionario y de los casos en particular dan cuenta de la presencia de los cuatro aspectos (geométrico, aritmético, algebraico y funcional), pero evidencia la falta de coordinación entre las construcciones mentales expuestas en la DG. Lo anterior indica que la DG hipotética es viable. Además es necesario mencionar que se detectó que el camino más utilizado para construir la raíz cuadrada es el tránsito del proceso aritmético al algebraico por medio de la *reversión* del proceso potencia de exponente 2, dejando de lado lo geométrico, proceso que permite aproximarnos a la continuidad, lo cual genera problemas al construir la función raíz cuadrada en base a las preimágenes de la función cuadrática. Por ejemplo el informante 18 en la pregunta 7.a. evidencia complicaciones para establecer la imagen y preimagen para un número irracional (ver Figura 5).

7. El área A de un cuadrado de lado x está modelada por la función $A(x) = x^2$.

a. Completa la tabla siguiente:

x	$\frac{1}{2}$	1	1,2	$\sqrt{2}$	3	$\frac{3}{2}$	π	
$A(x)$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{30}{25}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{9}{4}$		π

Figura 5: Respuesta del estudiante 18 a la pregunta 7.a. del cuestionario.

Las evidencias recopiladas nos permiten establecer la necesidad de construcción de cada uno de los aspectos de la raíz cuadrada y articularlos para lograr construir como un todo a la raíz cuadrada (objeto) y con esto la función raíz cuadrada. Las evidencias indican que cada aspecto presente en la DG hipotética considera una colección de acciones, procesos y objetos, por lo que se puede considerar un esquema para cada aspecto

articulándolos mediante mecanismos de abstracción reflexiva (ver figura 6), lo que correspondería a una refinación de la DG hipotética en base a la noción de Esquema.

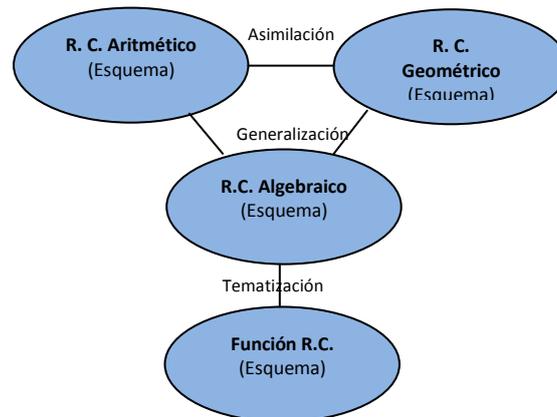


Figura 6: DG en base a la noción de Esquema.

Referencias

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society.
- Buhlea, C. y Gómez B. (2008). Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania). En Ricardo Luengo, Bernardo Gómez, Matías Camacho, Lorenzo Blanco (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática – SEIEM*, SEIEM, SPCE y APM, pp. 217-239. Badajoz: SEEM.
- Colin, M. (2005). De la aritmética al cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada. Tesis de Maestría en Matemática Educativa (no publicada). IPN, CICATA. México
- Dubinsky, E (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95- 126.
- Kú, D; Trigueros, M; Oktaç, A. (2008), Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, Vol. 20, Núm. 2, agosto, 2008, pp. 65-89. Santillana, México
- Salgado, H. (2007), Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa (no publicada), IPN, CICATA, México.
- Vidal, R. (2009), Las raíces y radicales en libros de texto en Chile (1969-2009). Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas. Tesis doctoral, Facultad de ciencias de la Educación, PUCV, Chile