LAS CÓNICAS EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DESDE LA TEORÍA DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González, Leonardo Solanilla Chavarro
danielabonillab@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl, leonsolc@ut.edu.co
Universidad de La Serena-Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile, Universidad del Tolima-Colombia

Tema: Pensamiento Matemático Avanzado.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras Claves: Modos de pensamiento, Cónicas, Geometría del taxista.

Resumen

Se sustenta una propuesta didáctica para la comprensión de las cónicas en estudiantes de 16 a 18 años de edad, a partir de una investigación con enfoque cognitivo, a través de la teoría los modos de pensamiento de Anna Sierpinska, donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Nuestra problemática se sitúa en la enseñanza-aprendizaje de las cónicas (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) cuando el discurso matemático escolar da prioridad a las ecuaciones cartesianas que las describen, en desmedro de su concepción estructural. Consideramos que el énfasis en esas ecuaciones, promueve la pérdida de su estructura como lugares geométricos. Postulamos como hipótesis de investigación, que para lograr una comprensión de las cónicas es necesario que el aprendiz de estos tópicos transite entre los distintos modos de comprenderlas: SG (como figuras que las representan en el plano), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico). Como resultado de la investigación, se diseña una propuesta didáctica exploratoria en la geometría del taxista, que promueve el tránsito entre los distintos modos de pensar cada una de las cónicas.

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) se trata en nuestro país en la asignatura *álgebra y modelos analíticos*, correspondiente al tercer año de enseñanza media (16-18 años). En el tratamiento de las cónicas, el programa de estudio promueve el uso de técnicas analíticas, y se espera que los aprendices puedan "Reconocer la circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan". (Ministerio de Educación, 2001, p.41), (Figura 1):

i) ¿Qué lugar geométrico en el plano representan las siguientes ecuaciones?

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$

Figura 1: Actividad del programa de estudio.

Consideramos que este enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas propicia la pérdida de sus definiciones como lugares geométricos. Específicamente, en la investigación realizada por Bonilla y Parraguez (2012) sobre la elipse, manifiestan, que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico.

Con el propósito de que los aprendices comprendan cada una de las cónicas –como figuras que las representan, como pares ordenados y como lugar geométrico–, nos propusimos como objetivo general de investigación: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito entre estos tres modos de pensar las cónicas SG, AA y AE, para estudiantes de 16-18 años, utilizando como sistema de referencia el plano en la geometría del taxista.

Marco teórico: los modos de pensamiento

La propuesta didáctica y la investigación se sustentan en el marco teórico, los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000). Ella distingue tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Para esta teoría comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde SG, AA y AE (Parraguez, 2012). Por lo tanto, consideramos que para lograr una comprensión de las cónicas es necesario que el aprendiz de estos tópicos transite entre los distintos modos de comprenderla: SG (como figuras que las representan), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico), y la geometría que brinda los elementos para tal articulación es la geometría del taxista (Bonilla y Parraguez, 2013). La figura 2, nos muestra el caso de la circunferencia en la geometría del taxista.

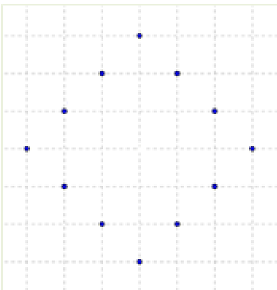
Sintético – Geométrico	Analítico – Aritmético	Analítico - Estructural
	Conjunto de pares ordenados que satisfacen la ecuación: $\lvert x-h\rvert+\lvert y-k\rvert=r$ Donde (h,k) es el centro de la circunferencia y r es el radio.	La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia constante se conoce como radio de la circunferencia

Figura 2: Modos de pensar la circunferencia en la geometría del taxista.

Estos tres modos de pensar, que hemos definido para las cónicas permiten analizar la forma en que los estudiantes las comprenden, además explicitar los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar diferentes tareas y mostrar en sus argumentos observables conexiones que logran establecer entre ellos.

Descripción general de la Geometría del Taxista

En este artículo, la Geometría del Taxista es una estructura algebraica y topológica sobre el producto cartesiano $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$, entendido como una versión discreta del plano cartesiano. Al trabajar en los enteros, en lugar que en los reales, se espera simplificar grandemente la situación para los aprendices, ya que se evita la complejidad que encierra la completitud de los números reales. La estructura algebraica de $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$ es aquella de módulo bilateral sobre el dominio entero $\mathbb{Z}$. Sin embargo, lo que marca la diferencia con la Geometría Euclidiana es la parte topológica de la estructura. Como el lector lo habrá entendido seguramente de las explicaciones anteriores, la distancia entre los puntos *(x,y)* y *(z,w)* de ℤ x ℤ es |*x*-*z*| + |*y*-*w*|. Con esta distancia o métrica, ℤxℤ posee una estructura de espacio métrico, la cual difiere de la que se obtiene con la métrica euclidiana usual (raíz cuadrada de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas). Por ello, la Geometría del Taxista puede llamarse no-Euclidiana. La diferencia radica en el hecho de que la métrica remeda la forma cómo un taxi recorre una ciudad. Sólo puede recorrer tramos en dirección norte-sur o este-oeste y no puede pasar a través de los bloques o manzanas.

En consecuencia, entendemos como plano cartesiano discreto *P* al conjunto de puntos formados por las parejas ordenadas de números enteros *(x,y)*. A este conjunto lo dotamos de su estructura algebraica natural de módulo sobre ℤ. Y también lo dotamos con una estructura de espacio métrico, una vez elegida una métrica o distancia *d* para él. Esto se resume diciendo que nuestra estructura *(P,+,d)* está formada por el plano cartesiano discreto, la suma correspondiente al grupo abeliano subyacente al módulo, el producto por escalares y una distancia o métrica *d*. En este artículo, la métrica es la del taxista, o sea,

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_2-x_1|+|y_2-y_1| \text{ , para } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \text{ en } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Es interesante detenerse un momento a considerar la compatibilidad entre la estructura de módulo y la estructura métrica o topológica. Si no se resuelve este asunto se pueden presentar dificultades serias para la comprensión. Por ejemplo, las rectas se pueden definir usando Álgebra o usando la métrica. El asunto es tan delicado, que las dos definiciones pudieran no coincidir. Así lo dejan ver los artículos de Moser y Kramer (1982) y Iny (1984), entre otros. Con la Geometría del Taxista no se presenta la fuerte compatibilidad de la Geometría Euclidiana. Para evitar estas dificultades, aquí se toma el siguiente principio de trabajo, que resuelve las dificultades: *"Sí una figura geométrica admite una definición algebraica y una definición métrica, se elige la definición métrica"*.

Por lo tanto, la recta, se definirá como *el lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano P tales que la distancia de uno de ellos a un punto dado* (x_1,y_1) *es igual a la distancia de él mismo a otro punto dado* (x_2,y_2)*. Es decir, una recta es un subconjunto de* ℤxℤ *de la forma:* $L = \{(x,y) \in P \mid d((x,y),(x_1,y_1)) = d((x,y),(x_2,y_2))\}$.

La figura 3, nos muestra ejemplos de rectas en la geometría del taxista.

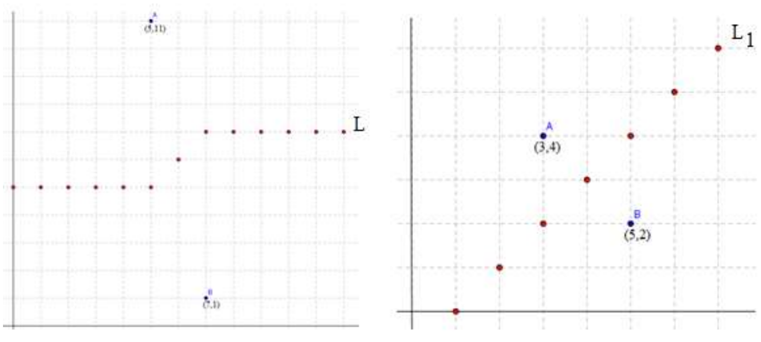


Figura 3: Ejemplos de rectas en la geometría del taxista.

Sobre la propuesta didáctica

Para diseñar la propuesta didáctica, indagamos en las bases epistemológicas de los modos práctico y teórico de pensar una cónica, las cuales nos dio luces sobre los elementos matemáticos que permiten articular estos tres modos de comprenderlas, que estamos especificando.

Destacamos como antecedentes didácticos, la investigación de Parraguez y Bozt (2012), que en una de sus conclusiones, reportan para su objeto matemático de estudio, que aquellos estudiantes que logran transitar entre los modos de pensamiento, muestran en sus argumentos una cercanía con las definiciones formales de los conceptos. Así también, Bonilla y Parraguez (2013) en su estudio sobre la elipse, afirman, que los estudiantes que comprenden la elipse en el modo AE, presentan mayores posibilidades de alcanzar la articulación de éste con los otros modos SG y AA de la elipse.
Un componente importante a destacar en nuestra propuesta didáctica es la métrica discreta propia de la geometría del taxista (Krausse, 1996), puesto que nos entrega importantes beneficios en la comprensión del modo AE a partir de un modo SG. Específicamente Bonilla y Parraguez (2013) reportan que para el caso de la elipse “Los elementos de esta geometría (distancia discreta, puntos como “esquinas”) facilitan la comprensión de la propiedad que la define como lugar geométrico “la suma de las distancias de un punto de la elipse a ambos focos es siempre constante”, además permite probar que ésta se cumple para todos los puntos de la elipse, situación que no es evidente en la geometría euclidiana.”(Bonilla y Parraguez, 2013, p.199).

A partir de los antecedentes mencionados, diseñamos una propuesta didáctica exploratoria, con la finalidad de indagar en los elementos matemáticos que estaría propiciando los tránsitos entre los modos SG- AE- AA de cada una de las cónicas. La propuesta exploratoria, considera como trabajo previo la familiarización de algunos conceptos matemáticos en la geometría del taxista, estos son: plano, distancia entre dos puntos, recta, distancia entre un punto y una recta. Dado que estos son elementos matemáticos, que sustentan la comprensión de las cónicas. En particular, la parábola es la sección cónica que más exige un dominio de estos conceptos.

La secuencia, en su parte inicial promueve el tránsito entre los modos SG a AE de las cónicas, para ello, se muestran las representaciones de cada una de ellas en la geometría del taxista, y se espera que los aprendices sean capaces de identificar características que presentan los puntos que forman la elipse, parábola, circunferencia e hipérbola, en relación a puntos fijos o rectas fijas según sea el caso. Un elemento matemático esencial a destacar en este tránsito de SG a AE, es el concepto de distancia en la geometría del taxista, la utilización de esta métrica discreta ayuda en el entendimiento de las cónicas, como conjuntos de puntos que cumplen una cierta condición. Posteriormente la secuencia aborda el tránsito de AE a AA, con la intensión que los estudiantes puedan obtener ecuaciones de cónicas, conociendo la representación geométrica asociada, y entendiendo las definiciones formales de cada una de ellas.

Metodología y resultados
En relación a nuestro objetivo de investigación, realizaremos un estudio de caso, puesto que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad del caso (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), “permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo” (Goetz y Le Compte, 1988, p.69), contribuyendo con ideas que puedan aportar al diseño de la secuencia didáctica.

La unidad de análisis la conforma un grupo de 10 estudiantes de un establecimiento educacional de dependencia compartida (particular subvencionado). Estos estudiantes aprobaron la *asignatura de álgebra y modelos analíticos*. Por lo tanto, ya han trabajado con las cónicas, con un enfoque centrado en las ecuaciones. Actualmente (2013) cursan cuarto año de enseñanza Media. Por otra parte es preciso dejar en claro que los estudiantes accedieron voluntariamente a ser partícipes de esta investigación.

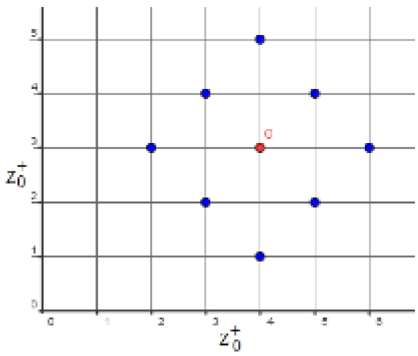
En búsqueda de evidencias empíricas para los tránsitos SG-AE-AA

Las actividades realizadas por los estudiantes muestran evidencias de los tránsitos, para la circunferencia y la elipse.

Hemos seleccionados dos preguntas de nuestra secuencia exploratoria para darla a conocer en esta artículo. En efecto, en la circunferencia, se plantea la siguiente actividad:

En el plano discreto definido de $\mathbf{z_0^+} \times \mathbf{z_0^+}$, *con la métrica del taxista.*

Se representa la siguiente circunferencia. El punto O es el centro de la circunferencia



En base a la descripción anterior, responde las sig

a) ¿Qué característica común tienen los puntos de la circunferencia en relación al centro?
b) escribe una definición para la circunferencia.
c) encuentra una ecuación que permita describir la circunferencia dada.

Análisis de respuestas

Las preguntas a) y b) dan cuenta sobre el tránsito SG-AE de la circunferencia, donde todos los estudiantes determinaron características que se acercan a su definición como lugar geométrico (figura 4 y figura 5). Es importante destacar que esta figura geométrica es una de las más trabajadas en el currículo, por lo tanto, es posible que los educandos posean algún conocimiento sobre ella.

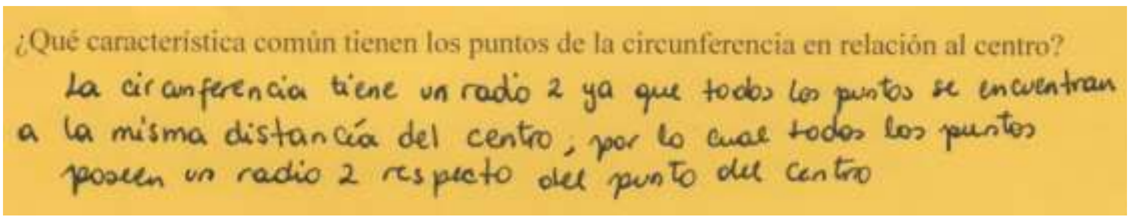


Figura 4: respuesta de estudiante 7

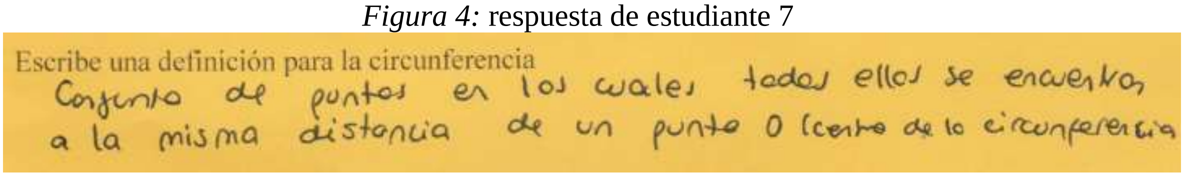
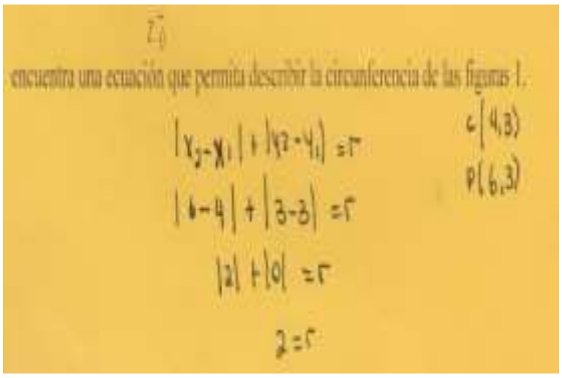


Figura 5: respuesta de estudiante 8.

La pregunta c) busca conectar los modos AE-AA de la circunferencia, en este caso la mayoría de los estudiantes (6 de 10) muestra evidencias de estar en vías de comprender el modo AA de la circunferencia, entienden que los puntos de la circunferencia están a una distancia constante del centro, pero solo prueba para algunos puntos particulares (ver figura 6), solo 4 de los estudiantes logran realizar con éxito la conexión AE-AA, estableciendo una ecuación para todos los puntos de la circunferencia, destacamos en este tránsito la comprensión de la circunferencia como un conjunto de puntos que cumple una ecuación (ver figura 7).


encuentra una ecuación que permita describir la circunferencia de las figuras 1.

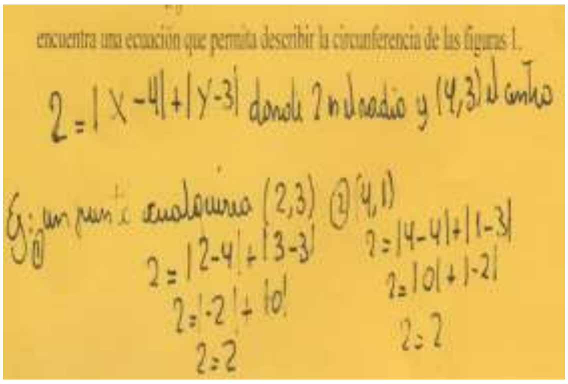
$|x_2-x_1|+|y_2-y_1| = r$ c(4,3) P(6,3)

$|6-4|+|3-3| = r$

$|2|+|0| = r$

$2 = r$

Figura 6: respuesta de estudiante 5


encuentra una ecuación que permita describir la circunferencia de las figuras 1.

$2 = |x-4|+|y-3|$ donde 2 es el radio y (4,3) el centro

Ej: un punto cualquiera (2,3) ② (4,1)

$2 = |2-4|+|3-3|$ $2 = |4-4|+|1-3|$

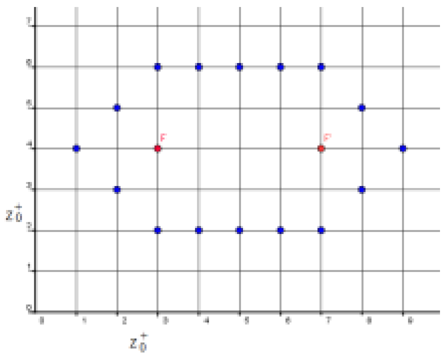
$2 = |-2|+|0|$ $2 = |0|+|-2|$

$2 = 2$ $2 = 2$

Figura 7: respuesta de estudiante 1

Pregunta 2: En la secuencia exploratoria se plantea la siguiente actividad, con respecto a la elipse:

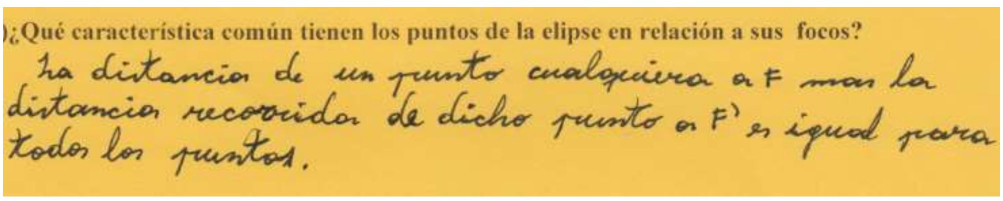
La figura siguiente representa una elipse en la geometría del taxista. (Los puntos F y F´ se llaman focos).



En base a la descripción anterior, responde las siguientes preguntas:
a) ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a sus focos?
b) Escribe una definición para la elipse
c) Grafique una elipse en la geometría del taxista. de focos F(4,2) y F(6,4)
d) Encuentre una ecuación que permita describir la elipse dada.

análisis de respuestas

El propósito de las preguntas a) b) y c) es dar cuenta de los tránsitos SG-AE-SG de la elipse. La mayoría de los estudiantes (8 de 10) muestran en sus respuestas evidencias de comprensión del modo AE a partir del modo SG de la elipse, es decir, dada la representación de una elipse identifican la propiedad que caracteriza al conjunto de puntos que la forman, (figura 8 y figura 9).


¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a sus focos?

La distancia de un punto cualquiera a F mas la distancia recorrida de dicho punto a F' es igual para todos los puntos.

Figura 8: respuesta del estudiante 6.

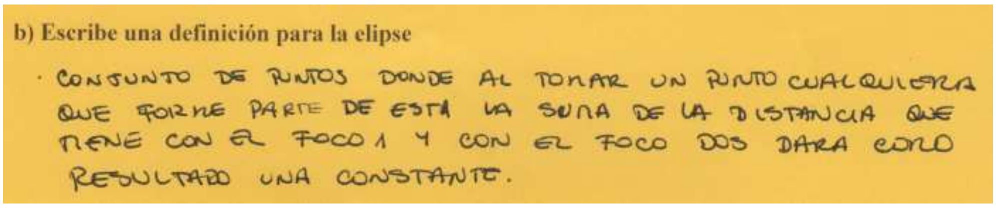


Figura 9: respuesta del estudiante 3.

Con respecto al tránsito AE-SG de la elipse, el cual se evalúa en la pregunta c), la mayoría de los estudiantes (7 de 10) logra graficar elipses, para ello se sitúan en un modo AE de la elipse, puesto que los focos están ubicados en distinta filas y columnas y no le es suficiente con recurrir a propiedades geométricas como la simetría, (ver figura 10).

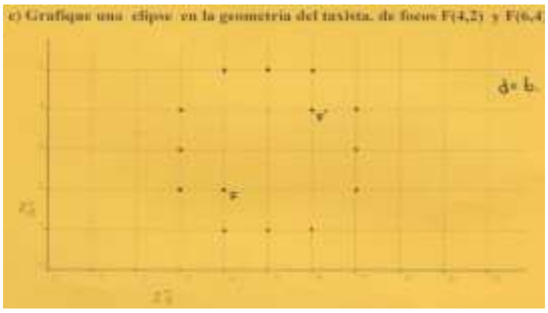


Figura 10: respuesta del estudiante 6.

En relación a la conexión en los modos AE -AA, la mayoría de los informantes (7 de 10) muestra evidencias de estar en vía de comprender el modo AA, prueban a través de las distancias la propiedad que define la elipse, pero no logran establecer una ecuación, (ver figura 11) El resto de los estudiantes (3 de 10) son capaces de establecer una ecuación para todos los puntos que forman la elipse, (ver figura 12).

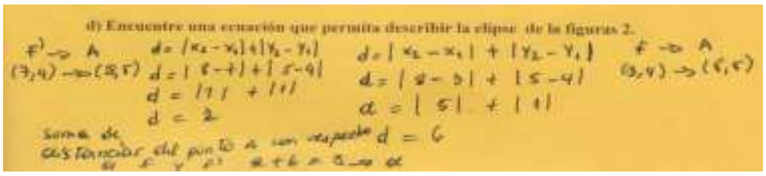


Figura 11: respuesta del estudiante 2.

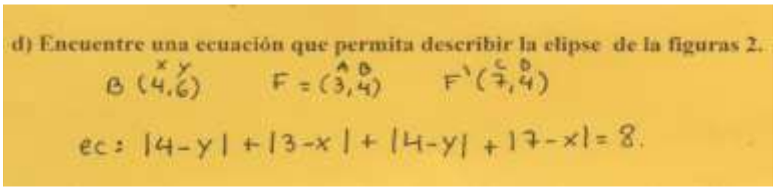


Figura 12: respuesta del estudiante 10

Es importante destacar que los estudiantes pueden mostrar que un punto específico es parte de la elipse, sin embargo, la dificultad de los estudiantes radica en generalizar un punto de la elipse, es decir, si *(a,b)* es un punto ¿cómo se muestra que ese punto es parte de la elipse? Por otro lado, evidenciamos que unos de los elementos que favorecen la conexión entre los modos de comprender la elipse es la concepción del conjunto solución de una ecuación. Además damos cuenta, que si bien los estudiantes han trabajado las cónicas en la geometría euclidiana, las definiciones presentadas en la actividad exploratoria acuden al concepto de lugar geométrico, por lo tanto, es posible que las definiciones de elipse, en la geometría del taxista como lugar geométrico se hayan construido a través de las actividades realizadas en el mismo instrumento exploratorio.

Reflexiones finales

En relación a la secuencia exploratoria realizada, damos cuenta de la factibilidad del tránsito entre los modos SG y AE de la circunferencia y elipse, donde el concepto de distancia es fundamental como elemento matemático que conecta ambos modos. Por otra parte en la interacción entre los modos AE y AA evidenciamos que los estudiantes presentan dificultades para plantear la ecuación, si bien la comprensión del modo AE es esencial para llegar a obtener las ecuaciones, también es importante que los aprendices comprendan el concepto de conjunto solución de una ecuación, y que cuenten con herramientas analíticas que permitan generalizar, por ejemplo, identificar un punto en el plano como *P(x,y)*.

Sobre lineamientos a seguir en la investigación, a partir de las evidencias empíricas con sustento teórico, obtenidas en el estudio exploratorio, se trabajará en el diseño de la secuencia didáctica para el tratamiento de todas las cónicas, potenciando aquellos elementos que favorezcan la conexión entre los modos de pensamiento para así alcanzar la comprensión del objeto matemático –cónicas–.

Sobre beneficios de la investigación para nuestros aprendices, consideramos por una parte que trabajar las cónicas en la geometría del taxista favorece la comprensión de los objetos matemáticos, a través de sus definiciones como estructuras, situación que trasciende a las representaciones. Además al plantear a los aprendices actividades en geometrías no usuales, los invita a la reflexión, a "hacer matemática", puesto que pueden establecer cuáles cónicas existen en esta geometría analítica y las cuáles son las condiciones de su existencia, entre otros análisis.

Por otro lado, el desarrollo de las actividades en esta geometría no euclidiana, nos brinda posibilidades al tratamiento unificado de las cónicas, es decir, comprenderlas integradamente bajo tres dimensiones: geométrica, analítica y estructural.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento.* Alemania: Editorial académica española.

Iny, D. (1984) *Taxicab Geometry: Another Look at Conic Sections*.The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol. 7, No. 10 (Primavera 1984), pp. 645-647.

Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York, United States of America: Dover Publications.

Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata.

Moser, J. M. y Kramer F. (1982) *Lines and Parabolas in Taxicab Geometry*. The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol. 7, No. 7 (Otoño 1982), pp. 441-448.

Parraguez, M. y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. Revista REIEC, Revista electrónica de investigación en ciencias ISSN 1850-6666, pp. 49-72.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-
L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática.* Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-chile.