

## UN ESTUDIO DE LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS DEL OBJETO FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA ENSEÑANZA SUPERIOR

Jesús Flores – Cecilia Gaita– Flor Carrillo  
jvflores@pucp.pe – cgaita@pucp.edu.pe –dayanarous@hotmail.com  
IREM –Pontificia Universidad Católica del Perú

Tema: Pensamiento algebraico

Modalidad: CB

Nivel educativo: Superior

Palabras clave: praxeologías, organización matemática, función cuadrática.

### Resumen

*Este artículo es un recorte de la investigación de Carrillo (2013) y tiene por objetivo presentar una metodología para el análisis de textos, teniendo como base la noción de praxeología propuesta por la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En particular, se identifican las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática presentes en un libro de texto ampliamente usado en la formación de estudiantes en economía. Se definen los elementos de una praxeología de acuerdo a una organización matemática de referencia y se presentan diez tipos de tareas, con sus respectivas técnicas y tecnologías. De esta manera, se define como uno de los criterios para el análisis del libro de texto la completitud de la organización matemática local, con respecto a los indicadores de la teoría adoptada. También se consideran resultados de investigaciones sobre dificultades de los alumnos relacionados con la función cuadrática para definir los criterios a partir de los cuales se valorará el texto. Se concluye que el libro analizado presenta una organización matemática local relativamente completa ya que presenta tareas resueltas y propuestas con presencia de técnicas y tecnologías diversas en torno al objeto matemático estudiado.*

### Introducción

Los aspectos de este trabajo forman parte de la tesis de Carrillo (2013). El punto de partida de la investigación se sitúa en las dificultades encontradas en la enseñanza de la función cuadrática en el curso de Matemática básica.

En este trabajo se considera hacer un análisis del libro de texto Sydsaeter, Hammond y Carbajal (2012). De acuerdo a la forma como el libro de texto presenta el desarrollo del objeto en estudio (a lo que denominamos organización didáctica), identificamos y analizamos las praxeologías: tareas, técnicas y tecnologías asociadas a la función cuadrática. Luego se presenta una valoración del libro de texto, según el análisis de las

praxeologías y la completitud de la organización matemática local con respecto a los indicadores de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. La valoración del libro de texto analizado se hace según el desarrollo matemático y didáctico presentado para enfrentar las dificultades de los estudiantes. Para las recomendaciones de la reorganización matemática del texto se tomó en cuenta una organización matemática y una organización didáctica por considerarlas inseparables, debido a que ambas forman parte de un proceso matemático. Finalmente, se buscó determinar la completitud de la organización matemática local, mediante los indicadores propuestos por Fonseca (2004) en los diferentes tipos de tareas, técnicas y tecnologías presentadas en el texto analizado. A continuación, presentamos el referencial teórico que fundamenta este trabajo.

### **Teoría Antropológica de lo Didáctico**

Según Chevallard (1999) la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) distingue dos tipos de praxeologías u organizaciones: las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y que son el resultado de la construcción de la comunidad matemática. Las segundas se refieren a la forma en que eso ocurre; son el proceso de estudio y construcción del conocimiento en un contexto con intencionalidad didáctica. Se trata de dos aspectos inseparables porque no hay organizaciones matemáticas sin un proceso de estudio que las genere, pero tampoco hay un proceso de estudio sin organizaciones matemáticas en construcción.

Esta teoría supone que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología. El término praxis hace referencia al “saber hacer”; es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos, se identifica con el “saber” e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que dan sentido a los problemas planteados.

Para medir el grado de completitud de una Organización Matemática Local (OML) utilizaremos los indicadores referidos por Fonseca (citado en Lucas, 2010, pp.39-41). Deben aparecer tipos de tareas asociados al “cuestionamiento tecnológico”; esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el

alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas. El grado de completitud dependerá del grado de integración de todos los tipos de tareas. Una OML será menos completa cuantos más tipos de tareas aisladas existan; esto es, tareas realizables mediante técnicas que no están relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico.

- i. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas. Una OML será más completa en la medida que, dado un tipo concreto de tareas de OML, existan dos o más técnicas que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo. Este indicador de la completitud contempla que en la OML existan, además, los elementos tecnológicos que permitan discernir para cada tarea concreta, cuál es la técnica más fiable y económica para llevar a cabo dicha tarea.
- ii. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática. La flexibilidad de las técnicas utilizadas debe permitir la utilización de diferentes representaciones, pero también deben existir criterios explícitos para elegir la representación más adecuada, dependiendo de la actividad matemática en la que estas técnicas se hayan inmersas.
- iii. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”. La flexibilidad de las técnicas debe también permitir trabajar tareas inversas como, por ejemplo, aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas del problema o, a partir de la respuesta, analizar la situación de partida.
- iv. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas. Debe existir un tipo de tarea que permita al alumno interpretar el real funcionamiento de una técnica para, a posteriori, percibir su beneficio matemático o ventaja en relación con otras técnicas.
- v. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”. En las tareas abiertas los datos se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos sino las relaciones que se establecen entre ellos. El estudiante ha de decidir, ante una situación matemática o extra matemática determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas. En este nivel se incluyen las tareas de modelización matemática.

- vi. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas. Simultáneamente, la tecnología y la teoría son los componentes para la construcción de técnicas nuevas, capaces de ampliar los tipos de problemas que se pueden abordar y en consecuencia, los tipos de tareas de una organización matemática local.
- vii. La posibilidad de perturbar la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar casos diferentes que permite ampliar y completar el proceso de estudio.

Hay que subrayar, que la noción de “completitud” es relativa. No tiene sentido hablar de OML “completas” ni de OML “incompletas”. Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos “completas” que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores de Fonseca.

### Análisis del libro de texto

Para el análisis del texto Sydsaeter, Hammond y Carbajal (2012) se tomaron en cuenta diez tipos de tareas por considerarlas fundamentales, las que se presentan a continuación.

Tabla 1. Tipos de tareas

<b>Tipos de tareas</b>
<b>T<sub>1</sub></b> : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar el dominio e imagen.
<b>T<sub>2</sub></b> : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar los ceros.
<b>T<sub>3</sub></b> : Dada la expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ , calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.
<b>T<sub>4</sub></b> : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, identificar si la gráfica es cóncava o convexa.
<b>T<sub>5</sub></b> : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar a su gráfica.
<b>T<sub>6</sub></b> : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, determinar los coeficientes cuando vienen expresados como parámetros.
<b>T<sub>7</sub></b> : Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.
<b>T<sub>8</sub></b> : Dada la expresión algebraica de una función cuadrática, hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función.
<b>T<sub>9</sub></b> : Dado un problema contextualizado donde se involucra una función cuadrática, interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos.
<b>T<sub>10</sub></b> : Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas cuando corresponda.

El texto Sydsaeter presenta una mayor cantidad de tareas propuestas (49), que tareas resueltas (12). Podemos identificar la ausencia de la tarea  $T_3$ . Con respecto a las tareas  $T_1$ ,  $T_5$ ,  $T_6$  y  $T_7$ , si bien el texto presenta algunos problemas propuestos sobre ellas, en ningún caso muestra el procedimiento para resolverlas. También observamos que el número de actividades de la tarea  $T_8$  es mayor que las otras tareas; le siguen en cantidad los enunciados de las tareas  $T_9$  y  $T_{10}$ .

Sobre las técnicas y tecnologías presentes en el texto analizado para abordar las tareas propuestas, se puede decir lo siguiente:

- Para la solución de la tarea  $T_1$ , se presenta una técnica cuya justificación se basa en un ejemplo que hace referencia a una función cúbica; no encontramos tareas resueltas para la función cuadrática. La determinación del rango de una función se realiza a partir de la gráfica, no hay una justificación algebraica.
- Para la tarea  $T_2$  el texto describe una técnica basada en la “fórmula cuadrática” para hallar los ceros de la función en estudio; la justificación se basa en el método de “completar los cuadrados”. También muestra la técnica de factorización mediante un ejemplo para hallar las raíces en una ecuación cuadrática, justificándola a partir de propiedades de los números reales.
- Para la tarea  $T_3$  que está conformada por tres partes debido a que se hallan tres intersecciones distintas, encontramos técnica para la intersección con el eje “X” que son las mismas técnicas empleadas para la solución de la tarea  $T_2$ ; para las otras dos intersecciones no se presenta técnica ni justificación alguna.
- Para la tarea  $T_4$  el texto presenta una técnica en forma de definición donde la concavidad y la convexidad dependen del valor del coeficiente de la variable cuadrática de la función, esta técnica no tiene justificación. Otra técnica para esta tarea es mediante el teorema de los “Máximos y mínimos de funciones cóncavas y convexas”, sin presencia de justificación.
- Para la tarea  $T_5$  el libro de texto presenta un ejemplo donde muestra una expresión algebraica de una función cuadrática con su respectiva gráfica, pero están ausentes la técnica y la justificación del procedimiento seguido. En otra sección, se presentan ejemplos que relacionan la expresión algebraica de funciones cuadráticas con sus

respectivas gráficas, tomando en cuenta el análisis de sus parámetros, sin justificación alguna.

- Para las tareas  $T_6$  y  $T_7$  el texto no presenta técnica ni justificación.
- Para la tarea  $T_8$  el texto presenta como técnicas el método de “completar cuadrados” para hallar máximos y mínimos aplicándola a ejemplos concretos, el “test de la primera derivada” que sí se justifica y el “test de la segunda derivada” con su respectiva justificación.
- Para la tarea  $T_9$  el texto muestra tareas resueltas en forma general justificando la naturaleza de sus parámetros.
- Para  $T_{10}$  el texto presenta una técnica por medio de un ejemplo resuelto sin justificación.

Considerando los indicadores de Fonseca (2004) para este análisis, respecto a la completitud de la OM se puede afirmar lo siguiente:

- Si bien el texto presenta tareas que hacen referencia a la interpretación y justificación del objeto en estudio, no se observa la comparación entre técnicas para la solución de una tarea. Por otro lado, la mayoría de tareas que observamos en el libro se encuentran relacionadas, haciendo que dependa una de otra con respecto a la técnica usada para su solución. No contamos con tareas aisladas. Un ejemplo es mostrado en la figura 1.

**1** Supongamos que  $f(x) = 1 - x^2$ .

(a) Probar que  $D = f((1 - \lambda)a + \lambda b) - (1 - \lambda)f(a) - \lambda f(b)$  se puede escribir en la forma

$$D = \lambda(1 - \lambda)(a^2 - 2ab + b^2) = \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2$$

(b) Si  $\lambda \in (0, 1)$ , ¿qué signo tiene  $D$ ? ¿Es  $f$  cóncava, convexa, o ninguna de las dos?

(c) ¿Es  $f$  estrictamente cóncava/convexa?

(d) Comprobar el resultado de la parte (c) usando (9.17).

Figura 1. Ejemplo de OML 1  
 Fuente: Sydsaeter et al. (2012) problema 1, p.264

- En algunas tareas podemos notar la presencia de varias técnicas y criterios para su solución, por ejemplo en las tareas  $T_2$ ,  $T_4$ ,  $T_8$  y  $T_9$  podemos apreciar más de una técnica para la solución de la tarea planteada.
- Con respecto al objeto de estudio, podemos reconocer cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y representación tabular. El texto no hace referencia a la representación del objeto matemático más adecuada según la técnica usada. A continuación mostramos un ejemplo (ver figura 3).

$f(x) = ax^2 + bx + c$     ( $a, b, c$  constantes,  $a \neq 0$ )

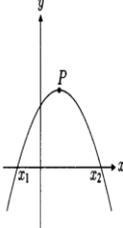
**1** (a) Sea  $f(x) = x^2 - 4x$ . Rellenar la tabla siguiente:

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

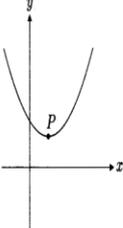
(b) Usando la tabla anterior, dibujar la gráfica de  $f$ .

(c) Usando (3.3), determinar el mínimo.

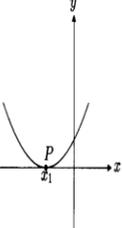
(d) Resolver la ecuación  $f(x) = 0$ .



(a)  $a < 0, b > 0$



(b)  $a > 0, b < 0$



(c)  $a > 0, b > 0, b^2 = 4ac$

Figura 3. Ejemplo de OML 3

Fuente: Sydsaeter et al. (2012) pp. 61-63

- Para el estudio de la función cuadrática tomamos en cuenta los tipos de tareas  $T_5$  y  $T_7$  donde observamos claramente la existencia de tareas y técnicas “inversas”. Para la tarea  $T_5$  el libro de texto muestra seis tareas y para la tarea  $T_7$  presenta una tarea.
- El libro de texto presenta tareas resueltas y propuestas con aplicaciones generales para luego ser usadas como técnica en algún tipo de tarea dada.
- El texto presenta tareas abiertas, en el tipo de tareas  $T_{10}$  donde el alumno se encuentra ante datos que son valores desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos. El libro de texto muestra una tarea resuelta y propone seis tareas donde el lector debe modelar la situación dada.
- El texto no presenta tareas con las descripciones de los indicadores vii y viii.

### Conclusiones sobre la organización didáctica en el texto Sydsaeter

El texto presenta una variedad de representaciones siendo esto favorable para la interpretación de conceptos matemáticos permitiéndonos así una valoración positiva del texto. En particular, presenta una cantidad considerable de tareas que requieren de la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Esto ayudaría a superar la dificultad donde los alumnos deben relacionar la representación gráfica con la analítica.

Sin embargo, sólo se observa la presencia de una tarea propuesta en relación a las dificultades que tienen que ver con la relación entre las variables de la función cuadrática, su variación conjunta y manipulación de parámetros, por lo que podemos inducir que el texto no ayudaría a superar dichas dificultades por falta de tareas, técnicas y tecnologías.

El libro de texto ayudaría en alguna medida a superar la dificultad de los alumnos donde a partir de una gráfica de función cuadrática no logran la identificación de la concavidad, debido a que describe dos técnicas para las tareas presentadas en relación a esta dificultad; sin embargo las justificaciones están ausentes.

Por otro lado, el texto presenta un gran número de tareas que se resuelven a partir de la expresión algebraica y sin una contextualización previa. Por esa razón, se sugiere incrementar el número de tareas considerando otras que sean contextualizadas y que requieran de la interpretación, modelización y traducción, pues estas serán las características de las tareas a las que los alumnos se enfrentarán en su práctica profesional.

### Referencias bibliográficas

- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. (Tesis Doctoral) Universidad Autónoma de Barcelona.
- Bosch, M.; Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23 (1), 79-135.
- Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo, España.
- García, J. (2005). *La Modelización Matemática en Didáctica de las matemáticas. Formulación de un problema de investigación*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.
- Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas Locales Relativamente Completas I*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo, España.
- Sydsaeter, K., y Hammond, P. y A. Carvajal, (2012). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editora Fareso S.A.

