COMO ABRIR VÁRIOS CADEADOS DISTINTOS COM UMA ÚNICA CHAVE, USANDO A MATEMÁTICA

João Luzeilton de Oliveira
jluzeilton@gmail.com
Universidade Estadual do Ceará - UECE/BRASIL

Tema: La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático
Modalidad: MC
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras chave: mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, problemas, educação matemática

Resumen

A matemática está presente em tudo que fazemos. Estuda-se muita matemática na escola e boa parte sem preocupação de relacioná-la com o quotidiano dos alunos. Com isso, para muitos, torna-se uma disciplina sem atração. É preciso torná-la atraente, sendo necessário, sempre que possível, fazer relação com os problemas do nosso dia-a-dia. Uma grande preocupação da educação matemática é com a contextualização, entretanto, não devemos esquecer que não se pode ensinar o que não se sabe. É preciso ter domínio do que se ensina. Na tentativa de dar alguma contribuição, neste estudo sugiro um problema, na verdade, dois problemas. Ei-los. Primeiro: Uma escola possui 10 (dez) salas de aula, cada uma com um cadeado, e todos distintos dois a dois. É possível confeccionar uma chave para abrir todos os eles? A resposta é sim. Usando matemática, como resolvê-lo? Que matemática está envolvida no problema? Outro problema que tem relação com o anterior é o seguinte: É possível confeccionar um cadeado, apenas, para que o mesmo possa ser aberto por dez chaves distintas? A resposta, também, é sim. É desses problemas que tratará o referido trabalho. Mostraremos como resolvê-los utilizando o m.m.c. e o m.d.c de números naturais.

Introdução

Este texto é baseado em umas notas sobre m.m.c. e m.d.c., que estão no livro de Matemática - 5ª série do Prof. Carlos Galante. Trata-se de duas aplicações de m.m.c. e m.d.c.. Por achá-las interessantes e, acima de tudo, aplicações importantes, decidi abordá-las neste texto. Geralmente, o m.m.c. e o m.d.c. de dois ou mais números naturais, é utilizado quando se trabalha com frações, principalmente nos quinto e sexto anos do Ensino Fundamental. O m.m.c. é utilizado, quando somamos, subtraimos ou comparamos frações, enquanto o m.d.c., é utilizado para simplificar frações. Muitas vezes essa utilização é feita sem o apelo às aplicações do nosso dia-a-dia. Em alguns alunos, após a definição e cálculo do m.m.c. e do m.d.c., percebe-se que existe uma aparente contradição entre esses dois conceitos e isso é um motivo de confusão por parte desses alunos nesse nível de escolaridade, visto que o m.m.c. é "mínimo" e o m.d.c., "máximo". Para se determinar, por exemplo, o m.d.c., que é máximo, devem ser tomados somente alguns fatores, enquanto, para o m.m.c., que é mínimo, devem ser tomados todos os fatores. Além disso, para o m.d.c. tomam-se os maiores expoentes, enquanto para o m.m.c., tomam-se os menores expoentes. Com a apresentação da definição de m.d.c. e m.m.c., de uma maneira de como calculá-los e da solução dos dois problemas propostos, espera-se que essa contradição seja apenas aparente, como será visto mais adiante. A seguir, serão apresentadas as definições de m.d.c. e m.m.c. e uma maneira de calculá-los, utilizando a decomposição dos números em fatores primos. Este mini-curso será iniciado com a apresentação dos problemas propostos, em seguida serão apresentadas algumas definições e propiedades que serão utilizadas na solução dos mesmos e, finalmente, a resolução destes.

M.D.C. e M.M.C – Definições

Antes de definir m.d.c. e m.m.c. de dois ou mais números naturais, será apresentada a definição de divisibilidade. Sejam $a,b \in \mathbb{N}$. Diz-se que *a* divide *b* e escreve-se $a|b$, se e somente se, existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $c \cdot a = b$. A notação $a|b$ significa que "*a* é divisor de *b*" ou "*a* é fator de *b*" ou "*b* é múltiplo de *a*". O *máximo divisor comum* de *a* e *b*, indicado por $d = mdc(a,b) \in \mathbb{N}$, é tal que: i) $d|a$ e $d|b$; ii) se $d' \in \mathbb{N}$, $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$. Isto significa, por i), que o $mdc(a,b)$ é um *divisor comum* de *a* e *b*, e por ii), o *maior divisor comum* de *a* e *b*. O *mínimo múltiplo comum* de *a* e *b*, indicado por $m = mmc(a,b) \in \mathbb{N}$, é tal que: i) $a|m$ e $b|m$; ii) $m' \in \mathbb{N}; a|m'$ e $b|m' \Rightarrow m|m'$. Isto significa, por i), que o $mmc(a,b)$ é um *múltiplo comum* de *a* e *b*, e por ii), o *menor múltiplo comum* de *a* e *b*. Para determinar o $mmc(a,b)$ e o $mdc(a,b)$, decompõem-se *a* e *b* em fatores primos: "O $mmc(a,b)$ é igual ao produto dos fatores primos de *a* e *b*, comuns e não comuns, cada um deles elevado ao menor expoente." E, "O $mdc(a,b)$ é igual ao produto dos fatores primos comuns, cada um deles elevado ao maior expoente." Acima, o m.m.c e o m.d.c. foram definidos apenas para dois números naturais, no entanto, essas definições podem ser estendidas para uma quantidade finita de números naturais. Observe-se que o m.d.c. de dois ou mais números naturais é um *divisor* e, por isso está contido nos números que os mesmos dividem. O m.m.c., que é um *múltiplo*, contém os números dos quais ele é produto. Por isso, embora denominado mínimo, deve ser tal que o maior dos números possa nele está contido. A seguir serão apresentados e solucionados os dois problemas que foram propostos no texto.

Problemas

Uma escola possui 10 (dez) salas de aula, cada uma delas fechada com um cadeado. Suponha que o vigia desta escola queira confeccionar uma chave que possa abrir todos os cadeados. É possível? Para resolver esse problema, inicialmente, serão feitas algumas considerações. Em uma chave qualquer, cada dente corresponde a um fator primo e a altura desse dente, proporcional ao expoente do fator correspondente. No qaudro abaixo, estarão representadas essas chaves.

$$\begin{array}{l}
\text{Chave1} \longrightarrow c_1 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \\
\text{Chave2} \longrightarrow c_2 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\
\text{Chave3} \longrightarrow c_3 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11 \\
\text{Chave4} \longrightarrow c_4 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7^2 \\
\text{Chave5} \longrightarrow c_5 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 11 \\
\text{Chave6} \longrightarrow c_6 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11 \\
\text{Chave7} \longrightarrow c_7 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 13 \\
\text{Chave8} \longrightarrow c_8 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 17 \\
\text{Chave9} \longrightarrow c_9 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7 \times 11 \\
\text{Chave10} \longrightarrow c_{10} = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 17
\end{array}$$

Deseja-se, assim, uma chave de maior número de dentes, com a menor altura, ou seja, a chave desejada será aquela que possui todos os dentes comuns a todas às chaves, cada uma delas com a menor altura, isto é,

$$\boxed{\text{Chave procurada} \longrightarrow 2^3 \times 3 \times 5}$$

Verifica-se, também, que a mesma só poderá ter os dentes que todas as chaves possuem e, destes, os de menor altura, pois se fizéssemos o dente correspondente ao 2, por exemplo, com altura equivalente a 2^4, a chave não passaria pelos terceiro e quarto cadeados. Também, se incluíssemos na chave o dente correspondente ao número 11, a mesma não passaria pelos demais cadedos. Observe que o mesmo ocorre em relação aos dentes. Se, agora, o mesmo desejasse um cadeado onde todas as chaves pudessem passar, então este cadeado deveria conter todos os dentes de qualquer das chaves e, para cada dente, a altura deveria corresponder ao dente de maior altura. O cadeado deverá ter, então, os dentes comuns e não comuns a todas as chaves, cada uma delas com a maior altura. Veja no quadro abaixo:

$$
\begin{array}{l}
\text{Cadeado 1} \longrightarrow C_1 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \\
\text{Cadeado 2} \longrightarrow C_2 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\
\text{Cadeado 3} \longrightarrow C_3 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11 \\
\text{Cadeado 4} \longrightarrow C_4 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7^2 \\
\text{Cadeado 5} \longrightarrow C_5 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 11 \\
\text{Cadeado 6} \longrightarrow C_6 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11 \\
\text{Cadeado 7} \longrightarrow C_7 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 13 \\
\text{Cadeado 8} \longrightarrow C_8 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 17 \\
\text{Cadeado 9} \longrightarrow C_9 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7 \times 11 \\
\text{Cadeado 10} \longrightarrow C_{10} = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 17
\end{array}
$$

O cadeado procurado é o que tem os fatores 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17, cada um deles elevado ao maior expoente. Portanto, tal cadeado será:

$$\boxed{\text{Cadeado procurado} \longrightarrow 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17}$$

Sendo assim, o primeiro problema é uma aplicação de m.d.c.: a chave procurada é $mdc(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}) = 2^3 \times 3 \times 5$. No segundo, procura-se um cadeado que por ele passe todas as chaves, tem-se uma aplicação do m.m.c.: o cadeado procurado é $mmc(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}) = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$.

Referências bibliográficas

Galante, C. (1953). *Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil.

Alencar Filho, E. (1992). *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo: Editora Nobel.

Oliveira, J. P. (2000). *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA.

Paterlini, R. R. (1988). Um método para o cálculo do mdc e do mmc. *Revista do Professor de Matemática*, 13, 34-37.

Gonçalves, P. S. (1992). Divisores, múltiplos e decomposição em fatores primos. *Revista do Professor de Matemática*, 20, 31-32.