TÉCNICA Y TECNOLOGÍA, REFLEXIONES ENTORNO A ECUACIONES E INECUACIONES

Nélida Haydée **Pérez**, Diana Celia **Mellincovsky,** María Emilce **Barrozo,** Héctor **Páez,** Magdalena **Pekolj**

Universidad Nacional de San Luis - Departamento de Matemáticas

nperez@unsl.edu.ar

Categoría del Trabajo: Reflexiones

Nivel Educativo: Bachillerato - Superior

Palabras claves: Ecuaciones e inecuaciones de una variable, Formación de Profesores, técnicas y tecnologías.

Resumen

Estas reflexiones surgieron a partir de analizar algunas cuestiones que emergieron en cursos obligatorios que toman alumnos del Profesorado de la UNSL al trabajar el tema de resolución de ecuaciones e inecuaciones en una variable.

Teniendo en cuenta que no es posible ni para el matemático ni para los alumnos actuar eficazmente sino se comprende lo que se hace, como tampoco se puede llevar adelante una comprensión profunda, sino se hace una práctica matemática, nos preguntamos cuáles serían las técnicas didácticas adecuadas para abordar un proceso de estudio.

Adoptamos como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico para construir una *praxeología* matemática que permita ingresar a un proceso de estudio.

Introducción

Nuestras reflexiones surgen de la observación y discusión sobre lo que acontece en la enseñanza del tema ecuaciones e inecuaciones, este análisis fue realizado aprovechando lo que emergió en aulas de las clases de Tecnologías para la Enseñanza de la Matemática y del Módulo de Formación para la Práctica, ambas asignaturas del Profesorado en Matemáticas.

Postulamos que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) nos podría ayudar para elaborar justificaciones e interpretaciones de la práctica matemática.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) siguiendo los últimos enfoques (Chevallard, 1996, citado en Gascón 1998) se modeliza la *matemática institucional* mediante la noción de *obra matemática.* Las cuestiones y las tareas problemáticas a las que responde una obra matemática se materializan en uno o más *tipos de problemas*, lo que no significa que tengan enunciados similares, sino que existe una técnica matemática para abordarlos.

Este modelo se ha denominado *praxeología,* y consta de dos aspectos o niveles relacionados:

El aspecto de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto *tipo de tareas* plasmadas en *tipos de problemas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* útiles para resolverlos.

El aspecto del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los cuales reciben el nombre de *tecnología*, que sería el discurso razonado sobre la práctica. Dentro del *saber* se considera un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel *tecnología de la tecnología*) que se denomina *teoría*. Las tecnologías y las teorías son en definitiva, los elementos constitutivos de toda obra matemática. (Gascón, 1998)

Focalizamos nuestra atención a tareas sobre ecuaciones e inecuaciones que en general forman parte de cursos de los últimos cursos del bachillerato o cursos de precálculo.

Desarrollo

Muchos libros de preálgebra o precálculo tienen un ítem dedicado a la resolución de ecuaciones irracionales. Por ejemplo:

I) Resolver las siguientes ecuaciones en R.

a) $\sqrt{3-x} = x-1$ b) $\sqrt{x+7}+1 = 2x$ c) $1-\sqrt{x} = 2\sqrt{1-x}$

II) Resolver las siguientes inecuaciones o desigualdades en R.

a) $\sqrt{3-x} > x+1$ b) $x+1 > \sqrt{x+3}$

Generalmente explican las técnicas de resolución de dichas ecuaciones transformándolas en ecuaciones algebraicas, no justifican ni explican el por qué de las técnicas empleadas y suelen partir de definir una ecuación como igualdad con incógnitas o no definen qué es una ecuación.

Para ilustrar tomamos textos de diferentes procedencias y épocas.

i) "Algebra Elemental Moderna" de Gónzalez M. O. Mancill J.D. Editorial Kapeluz, 1991, sobre el tema "ecuaciones con radicales" dice lo siguiente:

"La resolución de una ecuación con radicales requiere tres pasos:

1º Racionalización de la ecuación, esto se consigue por elevaciones a potencias o mediante factores racionalizantes.

2º Resolución de la ecuación obtenida.

3º Verificación de las raíces encontradas en la ecuación original para desechar las raíces extrañas que se hayan podido introducir en el proceso de racionalización". Y da el siguiente ejemplo:

Para resolver $\sqrt{x+7}+1=2x$, elevamos al cuadrado y se obtiene la ecuación de segundo grado $4x^2-5x-6=0$ cuyas soluciones son $x=2$ y $x=-\frac{3}{4}$; se ejecuta el 3º paso y al verificar vemos que la solución es $x=2$.

ii) En "Álgebra y Trigonometría" de Zill y Dejar, Editorial Mc Graw Hill se detallan las técnicas de resolución sin ninguna tecnología (TAD) que las justifique o explique, solamente señalando los "pasos" a seguir

1. *Aísle el radical más complicado a un lado de la ecuación*
2. *Elimine el radical elevando ambos lados de la ecuación a una potencia adecuada*
3. *Repita los pasos 1) y 2) hasta que se hayan eliminado todos los radicales de la ecuación.*
4. *Después de haber eliminado todos los radicales, resuelva la ecuación.*
5. *Verifique su(s) respuestas.*

iii) En "1000 PROBLEMAS de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría", de N. Antonov, M, Vygodsky V. Nikitin, A. Sankin, Editorial Paraninfo, Madrid 1977
se analizan los procedimientos a seguir, mencionando que obrando de esa manera es posible que aparezcan raíces extrañas y la técnica empleada para la eliminación de estas raíces es la verificación.

iv) "Problemario de Precálculo" de Antonyan N., Medina Herrera L. Y Wisniewski P. Editorial Thomson 2001, página 51 dice *"cuando se resuelve una ecuación fraccionaria o una radical, con frecuencia se aplican operaciones que no garantizan que la ecuación resultante sea equivalente a la original…Las soluciones obtenidas al final de tales procedimientos deben verificarse sustituyéndolas en la ecuación dada, para rechazar aquellas que no lo son"*.

En los ejemplos expuestos observamos la presencia de tarea y técnica, una práctica sin elementos que permitan justificar y/o comprender lo que se hace.

Según la TAD en la actividad matemática hay dos aspectos, la *praxis* (en griego) que llamamos práctica y la segunda que los griegos llamarían *logos*. No hay *praxis* sin *logos*, pero tampoco hay *logos* sin *praxis*, las dos están unidas, una organización matemática de este tipo, es una *praxeología matemática*. Debe permitir a los alumnos actuar con eficacia para resolver problemas, y entender al mismo tiempo lo que hacen de manera racional. (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997, página 251).

A partir de la práctica, debería poder explicarse concretamente cuáles son las razones de adquisición o pérdida de soluciones. Por qué motivo, transformaciones aparentemente inofensivas realizadas a ambos miembros de una ecuación (elevación a potencia, logaritmación, potenciación, etc.) conducen a la introducción de soluciones extrañas o pérdida de las mismas.

Si para resolver una ecuación con radicales se sustituye $\left(\sqrt{3-x}\right)^2$ *por* $3-x$ extendemos el dominio, ya que $3-x$ está definida para todo x real y $\sqrt{3-x}$ sólo para $x \leq 3$.

Analizar este hecho, el por que de la técnica aplicada, puede dar lugar al momento tecnólogico-teórico.

La pregunta que nos surgió al trabajar estos temas con alumnos del Profesorado de Matemática, es ¿Por qué les resultaba difícil justificar la práctica?.

Pensamos que la definición de ecuación e inecuación que manejan los estudiantes no permite dar el paso de la técnica a la tecnología. Como aporte en este sentido, consideramos adecuada la presentación del tema que se hace en el texto "Elementos de Matemática" de Alfredo Novelli, Edición 4ta. 2005 de Universidad Nacional de Luján.

> *Si f y g son dos funciones definidas en un conjunto A, se tienen las siguientes dos alternativas:*
>
> - $\forall x \in A, \quad f(x) = g(x)$. *Es decir las dos funciones toman los mismos valores para cualquier elemento de A, entonces* $f(x) = g(x)$ *es una identidad.*
>
> - $\exists x \in A, \quad f(x) \neq g(x)$. *En este caso f y g no son la misma función.*
>
> *Podemos plantear el problema siguiente:*
>
> *Dadas dos funciones, definidas en un dominio A, determinar si existen x de A, tales que resulte* $f(x) = g(x)$.
>
> *Este problema se denomina ecuación, y el signo igual se interpreta como signo de ecuación, los elementos x de A, tales que* $f(x) = g(x)$ *se llaman soluciones de la ecuación o raíces, y se dice que estos valores x, satisfacen la ecuación. A es el dominio donde están definidas simultáneamente f y g, es el dominio de la ecuación. Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.*

El manejo de la definición de ecuación dada anteriormente, permite entender la presencia de soluciones extrañas, ya que aparecen por la ampliación del dominio admisible.

Comprender esto tiene gran importancia para justificar la práctica, más aún, se puede resaltar que aparecerán soluciones extrañas cuando al hacer transformaciones de la ecuación, se extienda el dominio de definición de las funciones involucradas originalmente, entonces las soluciones serán solamente aquellos valores que pertenezcan al dominio.

Esta afirmación es poco empleada y sin embargo libera al resolutor de la sustitución directa de los valores en la ecuación para su verificación, comprobación que resulta muchas veces difícil o imposible.

Es decir aparece una tecnología, en lugar de la comprobación directa, verificar si los valores encontrados pertenecen a no al dominio.

Es frecuente en la práctica que para resolver una ecuación irracional $f(x) = g(x)$ se pase a la ecuación $\left[f(x)\right]^2 = \left[g(x)\right]^2$. ¿Qué ocurre con las soluciones?. Claramente la segunda ecuación es consecuencia de la primera es decir: Si $f(x_1) = g(x_1)$ entonces $\left[f(x_1)\right]^2 = \left[g(x_1)\right]^2$, si x_1 es solución de la primera ecuación, entonces es solución de la segunda. Lo recíproco no es cierto, las soluciones no se pierden pero pueden aparecen extrañas.

Esta última afirmación, surge de un proceso de estudio, de análisis, provoca un momento muy matemático que permite enunciar una propiedad: Si los dos miembros de una ecuación son no negativos en un dominio, entonces, al elevar al cuadrado ambos miembros, resulta una ecuación equivalente a la inicial en el mismo dominio.

Teoremas

a) *Si las funciones f y g son no negativas en todo punto del dominio A, entonces elevando ambos miembros de* $f(x) = g(x)$ *a un exponente real s>0 se obtiene una ecuación equivalente.*
b) *Si las funciones f y g , cumplen que f >0 y g>0 en todo punto del dominio A, entonces elevando ambos miembros de* $f(x) = g(x)$ *a un exponente real s cualquiera se obtiene una ecuación equivalente*.

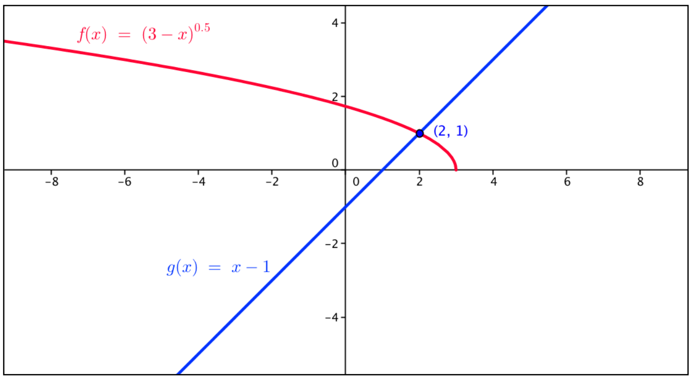
Como vemos los elementos constitutivos de una obra matemática están interrelacionados, el desarrollo de las técnicas, genera otros problemas y provoca necesidades tecnólogico-teóricas. Los teoremas constituyen teoría, de utilidad para justificar, a veces no adecuada para explicar. La definición de ecuación mencionada en Novelli, nos permite anticipar que el empleo de software para encontrar explicación a lo que sucede cuando se hacen transformaciones en una ecuación puede constituir una herramienta eficaz.

En la asignatura Tecnologías para la Enseñanza de la Matemática se analiza la necesidad de incorporar nuevas tecnologías para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este sentido, se procura que el uso de software sea una herramienta que promueva la experimentación y la construcción del conocimiento.

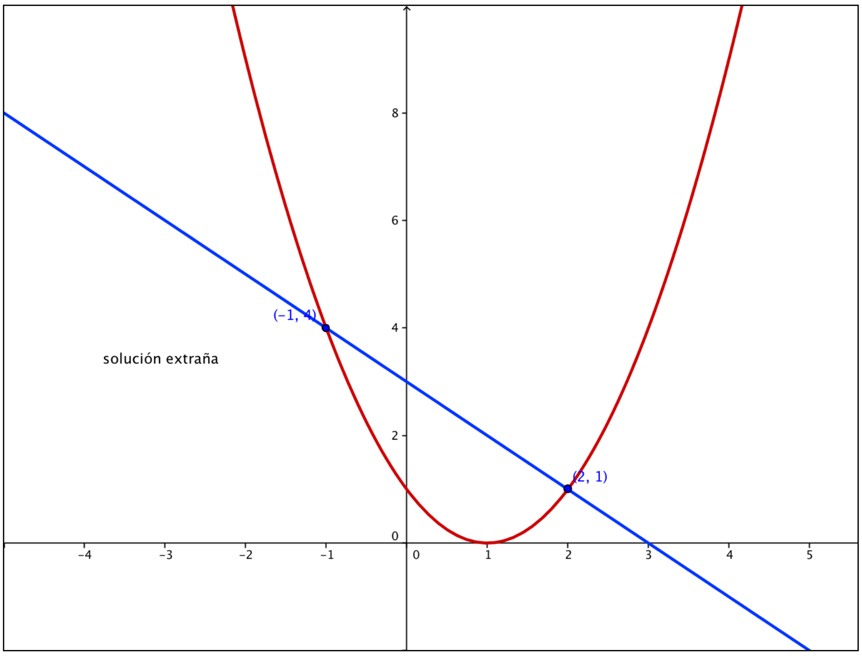
Nos preguntamos cuánto puede contribuir el uso de la computadora con un software adecuado para explicar y justificar las técnicas que se emplean para resolver ecuaciones del tipo $f(x) = g(x)$.

Encontramos que observar las gráficas de las funciones originales, las gráficas de las obtenidas por transformaciones y realizar el análisis correspondiente, aporta con un discurso razonado sobre la práctica; describe y explica las técnicas que se utilizan, es decir encontramos una *tecnología* que prestigia la técnica.

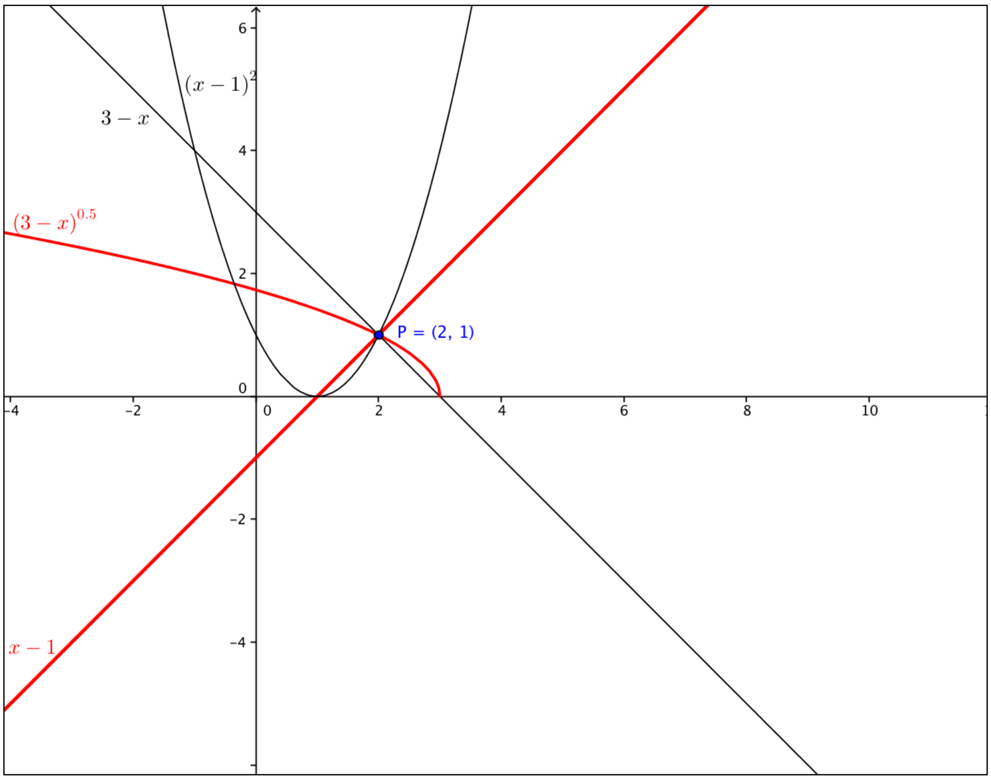
Ejemplo: Resolver $\sqrt{3-x} = x-1$. Recurso *"geogebra"*.



En esta primer imagen se muestran las gráficas de las funciones originales.



En esta representación se observan las gráficas de las funciones luego de la transformación.



En el punto P(2,1) se intersecan las funciones originales $\sqrt{3-x}$ y $x-1$ y las funciones obtenidas al transformar las originales $3-x$ y $(x-1)^2$.

En cambio en (-1,4) solo se intersecan las funciones obtenidas por transformación.

La visualización abre posibilidades de comprensión, esta poderosa herramienta va asociada al conocimiento y manejo de gráficas de funciones e interpretación de los correspondientes dominios de definición.

En el caso de resolución de desigualdades aparecen dificultades similares para pasar de la práctica a la justificación y explicación. También la aparición de soluciones extrañas como resultado de aplicar identidades logarítmicas tiene sus sorpresas y en general los procedimientos están asociados a las propiedades de las funciones involucradas.

Conclusión

Este trabajo es un punto de partida para continuar con los dos aspectos inseparables del trabajo matemático: el proceso de construcción matemática y el resultado de esa construcción. No hay obra matemática sin un proceso de estudio.

A modo de reflexión creemos que necesitamos generar una comunidad para que el alumno del

profesorado realizando un trabajo guiado, pueda entrar en un proceso de estudio, vivir los momentos exploratorios de una obra matemática, la construcción de una técnica adecuada que desemboque en el momento tecnológico-teórico a fin de integrar la justificación de la práctica matemática y los momentos de institucionalización y evaluación.
Revindicamos que la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula sólo se podrá cambiar si se modifica el modelo docente habitual.

Referencias Bibliográficas

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), 129-159.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.

Novelli A. (2006) *Elementos de Matemática*. 4ta. Edición. Universidad Nacional de Luján.