# UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES BASADA EN LA FORMULACIÓN Y CONTRASTACIÓN DE CONJETURAS

**Cinthia Rougier** y **Sara Scaglia**

**Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral**

Ciudad Universitaria Paraje El Pozo s/n. Santa Fe

**cinthia.rougier@gmail.com**

**Categoría del Trabajo:** Relato de experiencia

**Nivel Educativo:** Universitario

**Palabras claves: formulación, contrastación, conjeturas**

**Resumen**

En este trabajo se describe una experiencia áulica desarrollada con futuros profesores de matemática, con el objetivo de generar la posibilidad de que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar procesos de formulación y contrastación de conjeturas durante su formación disciplinar.

Las intervenciones del docente y de los alumnos permiten avanzar en la formulación de conjeturas con creciente grado de generalidad. En el ejemplo presentado, las conjeturas formuladas se demuestran mediante una actividad de justificación desarrollada a partir de las interacciones entre el docente y los alumnos.

Se ponen de manifiesto algunas de las dificultades inherentes a este tipo de trabajo, como por ejemplo la posibilidad de que algunas discusiones no puedan ser seguidas por todos los alumnos, cuestión que se agudiza cuando se trata de cursos numerosos.

Más allá de estas limitaciones, la experiencia se valora como muy fructífera para todos los participantes, lo que conduce a subrayar la pertinencia de que los futuros profesores puedan familiarizarse con este tipo de trabajo durante su formación inicial.

## Introducción

En este trabajo se analiza una experiencia áulica desarrollada con futuros profesores de matemática. El objetivo que se persigue con la tarea propuesta es generar la posibilidad de que los estudiantes tengan durante su formación disciplinar la oportunidad de desarrollar procesos de formulación y contrastación de conjeturas.

Markiewitcz y Etchegaray (2010; p.2) señalan la importancia de "generar espacios para que el alumno de nivel medio pueda enfrentarse a situaciones que conlleven la necesidad de formular y contrastar conjeturas", así como promover la reflexión en torno al tipo de razonamiento utilizado. Estas autoras sostienen que para alcanzar estos objetivos "es necesario incluir esta problemática en la formación de los futuros profesores de matemática a fin de que ellos puedan crear las condiciones para que este tipo de trabajo se pueda desarrollar" (Markiewitcz y Etchegaray, 2010; p.3).

Se considera que estas experiencias aportarán al futuro docente un dominio diferente de los saberes matemáticos y una confianza en sí mismo que debería construirse en forma progresiva.

## Elementos teóricos

Uno de los obstáculos planteados por Balacheff (2000) en la enseñanza de la demostración está relacionado con el funcionamiento del sistema didáctico, que se caracteriza por despojar a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. En general, las actividades de demostración consisten en probar propiedades enunciadas por el profesor, en lugar de presentar consignas en las que se pida explorar y conjeturar resultados o propiedades para demostrarlos posteriormente.

Garuti, Boero y Lemut (1998) introducen el concepto de 'unidad cognitiva de un teorema' para señalar la importancia de una aproximación holística a los teoremas y para interpretar algunas de las dificultades de los estudiantes durante la producción de las demostraciones. "La unidad cognitiva de un teorema está basada sobre la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la posible construcción de su prueba". En la definición del concepto, estos autores sostienen que durante la producción de una conjetura, el estudiante elabora progresivamente su afirmación a través de una actividad argumentativa intensa. Posteriormente, durante el proceso de demostrar la afirmación, el estudiante conecta de un modo coherente algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción de la afirmación de acuerdo a una cadena lógica.

Garuti, Boero y Lemut (1998) afirman que es necesario desarrollar investigaciones que permitan "comprender mejor la naturaleza de la exploración de la situación descripta por una afirmación dada y las condiciones que permiten realizar una conexión productiva entre tal exploración, el razonamiento transformacional y la construcción de la prueba".

En relación con el planteo de conjeturas, Polya (1968) define el razonamiento plausible o conjetural como aquel que nos permite formular conjeturas, examinar su validez y contrastarlas, y reformularlas para obtener nuevas conjeturas susceptibles de ser puestas a prueba. Sostiene que debe enseñarse a los alumnos a conjeturar y a demostrar, es decir, promover el uso de los dos tipos de razonamiento, el plausible y el deductivo. "Más valioso que cualquier hecho o truco, teorema, o técnica, es para el estudiante aprender a:

Primero, distinguir una demostración válida de un intento inválido, una demostración de una conjetura.

Segundo, distinguir una conjetura más razonable de una menos razonable" (Polya, pp.158-159).

Otro matemático que remarca la importancia del razonamiento plausible en el desarrollo de esta ciencia es Lakatos (1976; p. 20), que afirma que "las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones".

**Descripción del contexto**

La asignatura en la que se desarrolla la experiencia se denomina Matemática Discreta I y se dicta en el segundo cuatrimestre del segundo año de la carrera. Los contenidos que se trabajan corresponden a teoría combinatoria y aritmética. Durante el ciclo lectivo 2011 se trabajó en primer lugar la teoría combinatoria, y en la décima primera semana de clase se inició el desarrollo de la teoría elemental de números, con la tarea que se describe en esta experiencia.

Cursaron la asignatura once alumnos, pero dado que la asistencia no es obligatoria, en la clase en la que se desarrolló la experiencia participaron 7 alumnos.

A continuación presentamos la tarea propuesta. Posteriormente transcribimos algunos fragmentos de la clase, con el fin de realizar un análisis de la actividad de formular y contrastar conjeturas.

**Problema “La gran Mudanza”**

Con este problema se inicia el desarrollo de los conocimientos de aritmética y tiene como propósito abordar el estudio de algunas propiedades vinculadas a la noción de divisor.

En la tarea propuesta, los alumnos deben analizar información que requiere de la intervención de conocimientos y relaciones matemáticas, con el fin de tomar una decisión. Se plantea a través de un problema extra matemático, que refiere a un concurso que lanzó en el año 1994 una empresa de productos alimenticios, con el fin de que participen los consumidores de sus productos en todo el país. Se les entrega a los alumnos una tarjeta, que contiene las bases y condiciones para participar.

A continuación se incluyen algunas de las bases del concurso:

> “2- En todos los envases o etiquetas de los productos encontrará la mención de la cantidad de puntos. También podrá encontrar puntos adicionales en el dorso de algunas etiquetas y tarjetas válidas por puntos adicionales (de aquí en más “tarjetas”) en el interior de algunos envases. […]
> 4- Los participantes que acumulen exactamente 2.500 (dos mil quinientos) puntos ganarán un departamento de tres (3) ambientes. Los que acumulen exactamente 1.000 (un mil) puntos ganarán un departamento de dos (2) ambientes. Los que logren acumular exactamente 500 (quinientos) puntos habrán ganado un departamento de un (1) ambiente.[…]
> 6- …No se reconocerán como válidos los envases en los cuales obren cantidades de puntos distintas de las siguientes: seis, treinta y tres, quince, veintiuno, doce, treinta y nueve, veinticuatro, nueve, cuarenta y ocho, treinta, cuarenta y dos, dieciocho, cuarenta y cinco, treinta y seis y veintisiete”.

La consigna que se plantea a los alumnos es la siguiente:

***¿Qué envases/etiquetas o tarjetas deberían usar para obtener como premio algún departamento de los que se ofrecen (sin entrar en los sorteos)?***

Para resolver esta actividad, los alumnos poseen mínimos conocimientos de aritmética que traen de su paso por las escuelas primaria y secundaria, por ejemplo: la definición de múltiplo, divisor y algunas propiedades elementales.

**Relato de la experiencia**

Para decidir si el concurso podía ganarse o no, los alumnos comienzan caracterizando las condiciones del mismo. En esta situación el docente realiza una pregunta que consideramos relevante para que los alumnos comiencen con el proceso ensayo y error: ***¿Cuáles son los posibles puntajes que nos pueden conducir al premio?***

Los alumnos comienzan a realizar cálculos teniendo en cuenta la pregunta realizada anteriormente. Intercambian opiniones, realizan correcciones y escriben en sus cuadernos. Luego se consultan, debaten y vuelven a anotar en sus cuadernos. Las exploraciones los conducen a afirmar que el concurso no puede ganarse, pues ninguno de los puntajes incluidos en los envases es múltiplo de 3:

> *María: Yo lo que me fijé es que eran múltiplos de 3 y de 6 los números, bueno no sé si eso tendrá algo que ver o no.*
> *Rocío: Y ni 1500, 2500 y 500 no son múltiplos ni de 3 ni de 6.*
> *Docente: A ver, ¿qué les parece esa idea?*
> *Alumno: No hay forma.*
> *Docente: Bueno, a ver si tratamos de expresar un poquito mejor esa idea. ¿Por qué no puede ser entonces?*
> *Rocío: Porque todos los números que van a estar en los envases van a ser múltiplos de 3 y de 6 y ninguno de los números a los que hay que llegar son múltiplos de 3 y de 6.*
> *Docente: ¿Todos son múltiplos de 3 y de 6, los números que están ahí? Fíjense.*
> *Alumnas (en general): Todos los números son múltiplos de 3.*
> *Docente: Bien, entonces una cosa de la que estamos seguros es que todos los números que están ahí son múltiplos de 3. ¿Y qué pasa? ¿Cómo continuamos entonces con la idea? ¿Qué es lo que dijeron entonces? ¿Se puede o no se puede ganar ese concurso?*
> *María: Si vas a sorteo puede que sí, pero sino no.*
> *Docente: Pero sin sorteo estamos diciendo. Si vos decís, empiezo a juntar porque esto sale seguro.*
> *María: No.*
> *Docente:* […] *Escribamos la idea de por qué no se podría ganar el concurso. ¿Está? Tratemos de armar una frase, si quieren lo pueden armar entre las tres. Digamos que una justificación, ¿no?*
> *Docente: ¿Quieren leer lo que escribieron si ya terminaron? ¿Sí? ¿Quién arranca?*
> *María: Nosotras lo hicimos juntas.*
> *Docente: Bueno, dale.*
> *María: Los posibles números que pueden estar en los envases son todos múltiplos de 3 y debido a los puntos que debemos sumar para no ir a sorteo no son múltiplos de 3, entonces nunca se podrá acceder a los premios sin entrar en el sorteo.*

A continuación, la docente propone la siguiente consigna:

> *Docente:* ***-Pensar en una propiedad, intentando salir del contexto del concurso.***
> *Lucía: -¿Cómo una propiedad?*
> *Ana:* ***-Un múltiplo de 3 más un múltiplo de 3 da como resultado un múltiplo de 3****.* (Sin dar tiempo a que la docente aclare a Lucía la consigna, Ana formula la Conjetura 1)

Es necesario rescatar que la pregunta del docente referida a los posibles puntajes que permitan ganar abre un camino de posible indagación. Los alumnos intentan dar con la combinación indicada para ganar el concurso y observan que todos los números de las tarjetas son múltiplos de 3. El pedido de la docente de pensar una propiedad, si bien no es interpretado por todos los alumnos, da pie para que una alumna (Ana) enuncie una proposición, que se constituye en la primera conjetura que los alumnos intentan demostrar teniendo en cuenta los datos incluidos en las condiciones del concurso.

Los alumnos discuten acerca de cómo expresar un múltiplo de 3, y surgen diversas posibilidades, hasta que acuerdan expresarlo como 3.z, donde z es un entero. Trabajan en sus carpetas, y luego Ana copia en el pizarrón lo realizado:

| |
|---|
| *Demostración: Un múltiplo de 3 lo podemos definir como* $x = 3.z$*, con* $z \in \mathbb{Z}$ *y el otro como* $y = 3.k$ *con* $k \in \mathbb{Z}$*. Planteando la suma:* $3.z + 3.k = 3.(z + k)$*. Como* $z, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (z + k) \in \mathbb{Z}$*, por lo cual* $3.(z + k)$ *es un múltiplo de 3.* |

Luego de esto, se les propuso avanzar un poco más en el desarrollo de propiedades que puedan relacionarse con la que establecieron anteriormente. El siguiente fragmento resume lo sucedido en este caso:

*Docente:* ***-¿Esa propiedad que vale para 3, valdrá para otro número?***
*Rocío:* ***- Un múltiplo de n más un múltiplo de n da un múltiplo de n.*** (Conjetura 2)
*Docente: - Lo planteamos como una conjetura y vamos a ver si es verdad.*

A partir de esta afirmación imperativa se asume en la clase el planteo de una segunda conjetura, que los alumnos comienzan a trabajar en su carpeta. La docente solicita que pasen al pizarrón. Ana plantea el siguiente enunciado:

*Ana:* ***- La sumatoria de dos múltiplos de n es un múltiplo de n***. (Lo escribe en el pizarrón).
*Docente: - Chicos, ¿estamos de acuerdo con ese enunciado?... Joaquín?*
*Joaquín (y otros): -Sí.*
*Docente: -Dijimos que íbamos a aclarar: n ¿qué tipo de número es?*
*Ana: -Entero*. Agrega en el pizarrón que n pertenece a los enteros, y queda expresado lo siguiente:

| |
|---|
| *La sumatoria de dos múltiplos de n da como resultado otro múltiplo de n, con n que pertenece a los enteros.* |

*Docente: - Cuando nosotros tenemos una operación, la operación, ¿cómo se llama? Suma, sumatoria, eso tenemos que ver. Porque sumatoria hace referencia a muchos términos, muchos sumandos, ¿no?*
*Joaquín: - Justo yo le iba a preguntar eso* […] *, ¿por qué de dos? Sería: la sumatoria de todos los múltiplos de n es un múltiplo de n.*
*Docente: - Eso sería un enunciado más general todavía, ¿estamos de acuerdo? Pero estamos planteando acá la suma de dos múltiplos de n, ¿no? Podemos pensar en ese caso, si, y un caso más general, que es un paso más en la generalidad es lo que dice Joaquín, ¿cómo dijiste vos?*
*Joaquín: -**La sumatoria de múltiplos de n es un múltiplo de n.*** (Conjetura 3)

Ana se mantiene un poco ajena a este intercambio entre la docente y Joaquín, y manifiesta dudas acerca de cómo seguir. La docente está interesada en retomar la discusión sobre las implicaciones del uso del término sumatoria:

*Docente: - Nosotros tenemos formas matemáticas de expresarlo.*
*Alumna: -Con a sub n*
*Docente: - ¡Claro!… Tenés que ser un poquito más cuidadoso. Por eso, primero hagamos este y después hacemos lo otro, ¿sí?*
*Joaquín: - ¿Cómo hacemos para probar eso? ¿Por inducción?*
*Docente: - Exactamente, Joaquín, esa es la idea.* (La docente retoma esto luego de que se demuestra la conjetura 2).

Ana completa la demostración en el pizarrón de la conjetura 2, donde queda anotado lo siguiente:

| |
|---|
| La suma de dos múltiplos de n da como resultado otro múltiplo de n, con n que pertenece a los enteros.<br>Demostración: $\mathrm{z,k} \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{n.z + n.k = n.(z + k)}$, como $\mathrm{(z + k)} \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\mathrm{n.(z + k)}$ es un múltiplo de n. (*) |

Finalmente, se retoma la conjetura 3 planteada por Joaquín, que se escribe en el pizarrón como: ***La sumatoria de k múltiplos de n es igual a un múltiplo de n, para n que pertenece a los enteros y k que pertenece a los naturales.***
Esta conjetura es demostrada en forma conjunta, tomando la idea planteada por Joaquín que había quedado en suspenso respecto de la utilización de la inducción matemática. Cabe señalar que en

este tramo de la clase, surgido a partir de la inquietud de un alumno y retomado posteriormente por la docente, es notoria la escasa participación del resto de los alumnos.

A continuación resumimos cómo se construye la demostración:

| **Pasos de la demostración** | **Sujeto** |
|---|---|
| ¿Cómo escribimos la tesis? | Docente |
| $\sum_{i=1}^{k} n.a_i = n.a_1 + n.a_2 + \cdots + n.a_k = n.x\,, con\ a_i \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$ | Joaquín plantea las dos primeras expresiones. Rocío la última. |
| Escribir la base inductiva de la demostración | Docente |
| Se cumple para k=2: | Joaquín indica que es para k=2 y el docente señala que esto ya fue probado con anterioridad en (*). |
| Vamos a escribir ahora el paso inductivo. ¿Cuál es la hipótesis inductiva? | Docente |
| Se cumple para k = z | Alumnos |
| Lo cual significa $\sum_{i=1}^{z} n.a_i = n.a_1 + n.a_2 + \cdots + n.a_z = n.x\,, con\ a_i \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$ | Docente y Joaquín |
| La tesis del paso inductivo, ¿cuál sería? | Docente |
| Que se cumple para k = z+1 | Joaquín |

Luego de llegar a este momento de la demostración, la docente les propone que piensen un rato cómo lograr la última parte de la justificación, para luego realizar la puesta en común en el pizarrón. La demostración continúa de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| $\sum_{i=1}^{z+1} n.a_i = n.a_1 + n.a_2 + \cdots + n.a_z + n.a_{z+1} \quad =$ | Ana |
| $\left(\sum_{i=1}^{z} n.a_i\right) + n.a_{z+1} =$ | Rocío |
| Esto se justifica mediante la definición de suma y su propiedad asociativa. | Docente y Joaquín |
| Entonces por hipótesis inductiva, obtenemos: | Docente |
| $n.x + n.a_{z+1} =$ | Ana |
| $n.(x + a_{z+1})$ | Ana y Joaquín |
| Y como se tiene que cada $a_i \in \mathbb{Z}\ y\ x \in \mathbb{Z}$ entonces se tiene que $(x + a_{z+1}) \in \mathbb{Z}$ , de manera que $n.(x + a_{z+1})$ es un múltiplo de **n.** | Docente |

**Reflexiones finales**

En primer lugar, interesa analizar el papel del docente en el proceso de formulación y validación de las conjeturas. En la experiencia descripta, plantea una pregunta que permite avanzar en el análisis de la situación planteada por el concurso; posteriormente enuncia interrogantes que permiten a los estudiantes abandonar el contexto del concurso y plantear conjeturas con un grado creciente de generalidad:

> "¿Cuáles son los posibles puntajes que nos pueden conducir al premio?"
>
> "Pensar en una propiedad, intentando salir del contexto del concurso."
>
> "Esa propiedad que vale para 3, ¿valdrá para otro número?

En segundo lugar, resulta de interés destacar la importancia de la intervención de los alumnos que aportan comentarios necesarios y constructivos. Estas participaciones promueven un intercambio de ideas que conduce a la formulación y demostración de la conjetura final, como por ejemplo:

> "Justo yo le iba a preguntar eso […] ¿por qué de dos? Sería: la sumatoria de todos los múltiplos de n es un múltiplo de n."
>
> "¿Cómo hacemos para probar eso? ¿Por inducción?"

Es posible observar también que, en algunos momentos de la clase, la participación más intensa de un alumno (Joaquín) origina un intercambio entre éste y la profesora que aparentemente no es seguido por el resto de los estudiantes. En esta situación el docente debería haber generado la posibilidad de que todos los alumnos se involucren, planteando preguntas como las siguientes: ¿Qué piensan de lo que afirma el compañero?, ¿Cómo pueden justificar si lo que dijo su compañero es correcto? ¿Quién pensó alguna otra idea?

Esta experiencia pone de manifiesto que la gestión de este tipo de trabajo requiere que el docente atienda las diversas interpretaciones de los alumnos, cuidando que los avances que se logren en el análisis de la situación planteada pueda ser seguido por la clase en su conjunto. Esta cuestión se complejiza cuando se trata de cursos numerosos.

Itzcovich, Ressia, Novembre y Becerril (2007; p.9) afirman que "la Matemática, para los alumnos, quedará en parte definida y caracterizada por el conjunto de experiencias que les hagamos vivir en relación con los conceptos que se traten". Por esta razón, coincidimos con Markiewicz y Etchegaray (2010) en subrayar la pertinencia de que los futuros profesores puedan familiarizarse con este tipo de trabajo durante su formación inicial.

Este trabajo muestra que es posible desarrollar con los futuros profesores este tipo de experiencias que proporcionan la posibilidad de que experimenten, por un lado, aspectos del trabajo matemático (como la formulación y contrastación de conjeturas), y por el otro, una actividad en el aula que sería deseable que propicien en el futuro durante su desempeño como docentes de la disciplina.

**Bibliografía**

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

Garutti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and dificulty of proof. Extraido de http://www.lettredelaprevue.it/resumes/Garuti98.html. Fecha de captura: 15/03/08.

Itzcovich, H., Ressia, B., Novembre, A. y Becerril, M. (2007). *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique Educación.

Lakatos, I. (1986). Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad.

Markiewicz, M.E. y Etchegaray, S.C. (2010). El razonamiento conjetural en la formación de profesores. III Reunión Pampeana de Educación Matemática. Disponible en CD.

Polya, G. (1968). Mathematics and plausible reasoning. Volume II. Patterns of plausible inference. Segunda edición. New Jersey: Princeton University Press.