

## EL SIGNO DE IGUAL: ACTIVIDAD QUE PROMUEVE SU USO RELACIONAL

Natali Avellaneda    Joaquín Batista  
nataliavellaneda23@hotmail.com    joacobatista\_8@hotmail.com

Stefani Fleitas    Ana Martínez  
stfleitas@gmail.com    martinezina@gmail.com

Claudio Meiras    Rosana Midaglia  
(claudioernestomeiras@gmail.com)    (rosanamidaglia@gmail.com)

Gimena Negrette    Silvia Romaniello  
(magine\_7@hotmail.com)    silromaniello@gmail.com

Instituto Profesores “Artigas”, Uruguay

**Tema:** Pensamiento algebraico.

**Modalidad:** Comunicación breve.

**Nivel:** Primer año de Ciclo Básico de Educación Media.

**Palabras claves:** igualdad matemática, signo de igual.

**Resumen:**

*El signo de igual es utilizado habitualmente en los libros de texto para primer año de ciclo básico de forma operacional, esto es, como el indicador del resultado de una operación y no en forma relacional, es decir, como el indicador de una relación de equivalencia. En este trabajo reformulamos actividades tomadas de libros de texto para favorecer dicho uso relacional. Las mismas se realizaron atendiendo resultados de investigación en los que se plantea que una adecuada comprensión del signo de igual constituye un requisito imprescindible para el aprendizaje del álgebra.*

**Introducción:**

Este trabajo surge en el marco de un grupo formado a partir del curso de la asignatura Didáctica I, correspondiente al segundo año de la carrera de profesorado de Matemática

del Instituto de Profesores Artigas (IPA).

En el año 2014 y luego de haber cursado y aprobado Didáctica I, el grupo de estudiantes manifestó a la docente del grupo la necesidad y el deseo de seguir estudiando didáctica junto a ella. Fue así que a partir de marzo de 2015 se conformó el grupo que se denomina DID1BB14 integrado por siete estudiantes del profesorado de Matemática y una profesora de didáctica del Instituto de Profesores “Artigas” (IPA). Se comienza a trabajar con reuniones periódicas en las que se estudian y analizan diferentes trabajos de investigación en el campo de la Matemática Educativa.

En 2016 se realizó la lectura de la tesis de Federico Burgell (2012) referida a los significados que atribuyen al signo de *igual* los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Media. Surgió la inquietud de analizar las actividades que proponen los libros de texto ya que Burgell (2012) plantea que en los libros analizados en su investigación aparecen pocos ejemplos que favorezcan el desarrollo de la visión relacional del signo de *igual*, así como una ausencia casi total de referencias a la igualdad y los significados de dicho signo.

Seleccionamos uno de los textos para primer año de enseñanza media analizados por Burgell (2012) y reformulamos algunos ejercicios de ese texto atendiendo a los resultados de dicha investigación.

### **Análisis de Burgell (2012)**

La investigación realizada por Burgell (2012) plantea dos problemas en relación a la igualdad matemática y a los significados del signo de *igual*. Uno de estos problemas es el hecho de constatar que gran parte de los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Educación Secundaria que participaron en la investigación interpretan el signo de *igual* de forma exclusivamente operacional, es decir, como indicador del resultado de una

operación, y no de forma relacional, esto es, como el indicador de una relación de equivalencia. Este problema es considerado por varios autores (Kieran (1992), Stacey y MacGregor (1997), MacGregor y Stacey (1999), Falkner, Levi y Carpenter (1999) y Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006 y 2008) como uno de los obstáculos que tienen los estudiantes en el aprendizaje del álgebra.

El segundo problema refiere a que tanto los docentes como los libros de texto no brindan al tema una atención especial. Esto, como lo indica Burgell (2012), transforma al problema en “invisible” ya que los docentes no lo visualizan como una dificultad generalizada que amerite trabajar en ella e implementar las herramientas necesarias para resolverla.

Para la clasificación de los distintos significados del signo de *igual*, Burgell (2012) se basa en Molina (2006) y en Molina, Castro y Castro (2009).

Los significados del signo de *igual* son:

Propuesta de actividad, Operador, Expresión de una acción, Separador, Expresión de una equivalencia, (Equivalencia numérica, Equivalencia simbólica, Identidad estricta, Equivalencia por definición o notación), Expresión de una equivalencia condicional (ecuación), Definición de un objeto matemático, Expresión de una relación funcional o de dependencia, Indicador de cierta conexión o correspondencia, Aproximación. y Asignación de un valor

Burgell (2012) realiza un aporte a esta clasificación identificando un nuevo significado del signo de *igual* que no está dentro de las clasificaciones de Molina (2006) y Molina et al. (2009) y que podría incluirse como una ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia*. El hecho de incluirlo como ampliación de este significado se basa en que para Molina et al. (2009) este significado corresponde a un uso impreciso del signo de *igual* entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, por ejemplo entre

imágenes y números o entre expresiones matemáticas y no matemáticas. La ampliación que propone Burgell sería admitir su uso también entre dos expresiones matemáticas.

Burgell (2012) realiza un análisis de los libros de texto más usados en primer año del ciclo básico. Primero, siguiendo a McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur y Krill (2006), y Ramírez y Rodríguez (2011), reporta la frecuencia con que aparece el signo de *igual* en los diferentes contextos planteados en la tesis (*estándar de operaciones-igual-respuesta, operaciones en ambos lados, operaciones del lado derecho, sin operaciones explícitas y otros contextos*). Esta mirada permite apreciar un panorama general respecto a cómo se utilizó el signo de *igual* y sirve, además, para la segunda instancia donde se analizan y se muestran ejemplos de algunas actividades de las propuestas en las que se presenta dicho signo.

### **Método de trabajo con el grupo de estudiantes**

En una primera etapa se revisó por capítulos la tesis de maestría de Burgell (2012). Cada capítulo era leído por los integrantes del equipo para luego, en sucesivos encuentros, plantear las reflexiones, dudas y comentarios que iban surgiendo.

Una vez terminada la lectura y reflexión sobre la tesis nos propusimos una actividad referida al uso del signo de *igual* en los libros de texto. Trabajamos con uno de los libros de texto para primer año de enseñanza secundaria, analizados en la tesis: Borbonet, Burgos, Martínez, y Ravaioli, (2000).

Primero realizamos la selección de las actividades a trabajar, analizamos el contexto en el que estaban presentadas y clasificamos el uso del signo de *igual* según los significados de Molina (2006) y Molina, Castro y Castro (2009). A partir de este análisis y en grupos de dos o tres integrantes, confeccionamos para cada actividad seleccionada una reformulación donde se promoviera el uso del signo de *igual* en forma relacional. Luego

cada grupo presentó su trabajo al equipo, se intercambiaron opiniones y se realizaron ajustes.

Una vez terminada esta etapa contactamos al investigador Federico Burgell, autor de la tesis que estudiamos. Le planteamos la posibilidad de enviarle el trabajo realizado para que diera su opinión. Comienza entonces la etapa en la que se produce un intercambio entre el investigador y el equipo de trabajo. Después de este intercambio realizamos cambios y ajustes a partir de los comentarios y sugerencias del investigador.

### **Reformulación de actividades de un libro de texto**

Junto a los estudiantes trabajamos utilizando como marco la tesis del profesor Federico Burgell (2012), elegimos actividades del libro Borbonet, et al. (2000) en las que apareciera el signo de *igual*, clasificamos su uso y las reformulamos de forma que promuevan un uso relacional del mismo (como relación de equivalencia).

Trabajamos en dos ejercicios o actividades seleccionadas del libro de texto. En cada instancia se transcribe la actividad original, se clasifica el contexto y el significado del uso del signo de *igual* y luego se plantea la actividad reformulada.

#### **(1) Actividad tomada de Borbonet et al. (2000, p.19)**

Calcula mentalmente:

$$\begin{array}{ll} 46 + 25 + 4 + 50 + 25 = & 127 + 25 + 73 + 75 = \\ 132 + 0 + 48 + 9 = & a + 34 + b + 16 = \quad (\text{sabiendo que } a + b = 30) \end{array}$$

Ubicamos a este ejercicio en un contexto *estándar* de operación-igual-respuesta en el que el signo de *igual* aparece cuatro veces con el significado de *propuesta de actividad* y una vez como asignación de un valor numérico.

#### **Actividad modificada**

Indica cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas o falsas.

$$46 + 25 + 4 + 50 + 25 = 25 + 125 \quad 125 + 75 = 127 + 25 + 73 + 75$$

$$132 + 0 + 48 + 9 = 189 + 11 \quad 80 = a + 34 + b + 16 \quad (\text{sabiendo que } a + b = 30)$$

La propuesta de modificación para este ejercicio basándose en el trabajo de tesis de Burgell (2012) es plantear una lista de sentencias para que los estudiantes digan si son verdaderas o falsas a través de la aplicación de diferentes propiedades.

Para la confección de esta lista tuvimos en cuenta que apareciera el signo de *igual* en un contexto *no estándar*, de *operaciones a ambos lados* y *operaciones del lado derecho*. El significado del signo de *igual* es el de equivalencia numérica ya que el estudiante podrá realizar operaciones y observar si en ambos miembros se obtiene o no el mismo número. Se plantean dos sentencias falsas: “ $132 + 0 + 48 + 9 = 189 + 11$ ” y “ $125 + 75 = 127 + 25 + 73 + 75$ ”. En la primera el alumno se enfrenta, tal como lo dice Burgell (2012), a un error típico que cometen al considerar el signo de *igual* exclusivamente en su carácter de *operador*. En ese caso considerarían que la sentencia es verdadera porque 132 más 0 más 48 más 9 es igual a 189. Pero los que interpreten el signo de *igual* en su carácter *relacional* como la *expresión de una equivalencia* dirán que es falsa ya que 132 más 0 más 48 más 9 no es igual a 200 que surge de 189 más 11. En la segunda pensamos que el estudiante puede determinar que la sentencia es falsa sin necesidad de realizar cálculos; puede ver que en ambos miembros de la igualdad está el número 75 y que si se prescinde de dicho número en ambos miembros, les queda 125 del lado izquierdo y del lado derecho una suma de naturales en la que el primer sumando, 127, es mayor que 125. Realizando el razonamiento de esta manera, se estaría haciendo uso del signo de *igual* en forma relacional ya que para tomar su decisión tuvo que trabajar con ambos miembros de la igualdad.

## (2) Actividad tomada de Borbonet et al. (2000, p.39)

Colocar los paréntesis que corresponda para que las igualdades sean verdaderas

- a)  $9 + 3 \times 15 = 180$  b)  $2 + 3 \times 5 + 4 = 45$  c)  $8 + 9 \times 6 + 4 = 106$  d)  $2 \times 3 + 5 \times 8 + 2 = 160$   
e)  $9 \times 5 + 17 = 198$  f)  $5 \times 9 + 5 \times 4 = 145$  g)  $5 \times 9 + 5 \times 4 = 280$

En este ejercicio aparece el signo de *igual* en un contexto *estándar*, como operador, operación *igual* respuesta.

### Actividad modificada

Colocar los paréntesis que corresponda para que las sentencias sean verdaderas.

- a)  $9 + 3 \times 15 = 10 \times 18$  b)  $2 + 3 \times 5 + 4 = 3 + 2 \times 9$  c)  $106 = 8 + 9 \times 6 + 4$  d)  $20 \times 80 = 2 \times 3 + 5 \times 8 + 2$   
e)  $9 \times 5 + 17 = 9 \times 22$  f)  $5 \times 9 + 5 \times 4 = 145$  g)  $5 \times 9 + 5 \times 4 = 5 \times 14 \times 4$

En el cambio que proponemos el signo de *igual* aparece nuevamente en los dos contextos, *estándar* y *no estándar* de forma que el estudiante deberá trabajar con ambos miembros de la igualdad para poder validarlas.

### Reflexiones finales

La lectura y análisis de la tesis así como las actividades realizadas, nos hicieron tomar conciencia del uso casi exclusivamente operacional que hacemos del signo de *igual*. Creemos muy importante comenzar a cambiar nuestras prácticas de aula de forma de darle visibilidad al signo de *igual* y que deje de ser un símbolo invisible para pasar a ser problematizado y analizado. Estamos seguros de que si nos ocupamos de realizar actividades de enseñanza donde el signo de *igual* se utilice en distintos contextos y situaciones podremos poner de relieve y problematizar, al menos algunos de los distintos usos y significados que tiene el signo de *igual*, evitando que siga siendo una "noción transparente" en el sentido planteado por Chevallard, Bosch y Gascón (1997).

### Referencias bibliográficas

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences*. Technical

- Report No. 3, Florida State University.
- Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. & Ravaioli, N. (2000). *Matemática I*. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.
- Burgell, F. (2012). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Media?* Tesis de maestría. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Comahue, Neuquén – Argentina
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de educación 22. Barcelona: Editorial Horsori
- Falkner, K., Levi, L. y Carpenter, T. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics* 6(4), pp. 232-236.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12, pp. 317-326.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, pp. 390-419.
- Knuth, E., Stephens A., Mc-Neil, N., y Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education* 36, pp. 297-312.
- Knuth, E., Stephens, A., Mc-Neil, N., and Alibali, M. (2008). The importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, V. 13, 9, pp. 514-519.
- MacGregor, M., y Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*. 6(2), pp. 78-85.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis de Doctorado, Universidad de Granada. Disponible en: <http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210> (12/12/2011).
- Molina, M., Castro, E. & Castro, E. (2009). Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. 17, V. 7 (1), pp. 341 – 368.
- Ramírez, M. y Rodríguez, M. (2011). Interpretaciones del signo de igual. Un estudio de libros de texto. Unión. Revista iberoamericana de educación matemática. N°26, pp. 41-55.
- Stacey, K. y MacGregor, M. (1997). Building Foundations for Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2 (4), pp. 252-260.



## Anexo

Para la clasificación de los distintos significados del signo de *igual*, Burgell (2012) se basa en Molina (2006) y en Molina, Castro y Castro (2009).

Los significados del signo de *igual* son:

1.- **Propuesta de actividad.** Refiere al uso del signo de *igual* en expresiones incompletas, cadenas de números y símbolos a la izquierda y a la derecha un espacio vacío.

Ejemplos:  $27 \times 2 =$  ;  $(x + 3)2 - 5x(2 - x) =$

2.- **Operador.** Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una secuencia de operaciones a la izquierda y su resultado a la derecha.

Ejemplos:  $4 \times 5 = 20$  ;  $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$

3.- **Expresión de una acción.** Describe un significado bidireccional; extiende el de operador. En este caso la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha del signo de *igual* y el resultado en el otro miembro.

Según Molina (2006) este significado “implica una interpretación operacional del signo *igual* y la interpretación de la sentencia numérica como la expresión de una acción (de ahí su nombre)”.

Ejemplos:  $2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$  ;  $24 = 12 + 12$  ;  $12 + 12 = 24$

En el trabajo de Burgell (2012) se toma este significado únicamente cuando el resultado está a la izquierda. Si el resultado aparece a la derecha se lo considera un uso de operador.

4.- **Separador.** Este es un uso matemáticamente incorrecto del signo de *igual*. Es utilizado por los estudiantes en contextos algebraicos vinculando expresiones que no son iguales como separador de los pasos realizados.

Ejemplos:  $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x} = x^2 + 1 = x = x^2 - x + 1 = 0$

Los signos de *igual* que cumplen el papel de separador son el segundo y el cuarto (de

izquierda a derecha). El signo de *igual* utilizado de esta manera vincula expresiones algebraicas que no son iguales pero que son pasos sucesivos en la resolución de la actividad.

5.- **Expresión de una equivalencia.** Refiere al uso del signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático.

5.1. **Equivalencia numérica.** Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas de ambos miembros.

Ejemplos:  $4 + 5 = 3 + 6$  ;  $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

5.2. **Equivalencia simbólica.** Indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de la o las variables.

Ejemplos:  $x^2 + 2x = x(x + 2)$  ;  $a + b = b + a$

5.3. **Identidad estricta.** En ambos lados las expresiones representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.

Ejemplos:  $3 = 3$  ;  $x + 5 = x + 5$

5.4. **Equivalencia por definición o notación.** Indica la equivalencia de dos expresiones por definición o por el significado de la notación utilizada.

Ejemplos:  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$  ;  $100cm = 1m$  ;  $\frac{a}{b} = ab^{-1}$

6.- **Expresión de una equivalencia condicional (ecuación).** La equivalencia expresada por el signo de *igual* es cierta para algún o algunos valores de la o las variables. Ejemplo:

$$x^2 + 4x = 5x + 6$$


7.- **Definición de un objeto matemático.** Se utiliza para definir o asignar nombre a una función u otro objeto matemático.

Ejemplos:  $a^0 = 1$  ;  $f(x) = 2x + 3$

8.- **Expresión de una relación funcional o de dependencia.** Se utiliza el signo de *igual* para indicar una relación de dependencia entre variables o parámetros.

Ejemplos:  $l = 2\pi r$  ;  $y = 3x + 2$

9.- **Indicador de cierta conexión o correspondencia.** Significado impreciso. Refiere al uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, por ejemplo entre imágenes o figuras y números.

Ejemplo:  = 3; *precio bici = 3x + 5 siendo x el precio de la pelota de basket*

10.- **Aproximación.** Se utiliza el signo para relacionar expresiones aritméticas y una aproximación de su valor numérico.

Ejemplo:  $\frac{1}{3} = 0,33$

11.- **Asignación de un valor numérico.** Asigna un valor numérico a un símbolo.

Ejemplo: *si  $x = 4$ , ¿cuál es el valor de  $x^2 - 5$ ?*

Burgell (2012) realiza un aporte a esta clasificación identificando un nuevo significado del signo de *igual* que no está dentro de las clasificaciones de Molina (2006) y Molina et al. (2009) y que podría incluirse como una ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia*. Este nuevo significado se puede ver en las interpretaciones del signo de *igual* que realizaron algunos alumnos participantes de la investigación de Burgell, considerando que  $8=16$  o  $4=0$  son sentencias verdaderas. Los estudiantes argumentan que son verdaderas porque encuentran alguna operación que incluya el 8 y cuyo resultado sea 16 o que incluya al 4 y el resultado sea 0 o porque encuentran alguna otra correspondencia entre el 8 y el 16 y entre el 4 y el 0. El hecho de incluirlo como ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia* se basa en que para Molina et al. (2009) este significado corresponde a un uso impreciso del signo

de *igual* entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, por ejemplo entre imágenes y números o entre expresiones matemáticas y no matemáticas. La ampliación que propone Burgell sería admitir su uso también entre dos expresiones matemáticas.

McNeil et al. (2006) definen además distintos contextos en los que se utiliza el signo de *igual*. Dividen, en una primera clasificación, los contextos en dos: a) el contexto *estándar*, de *operaciones-igual-respuesta* (ejemplos:  $3+4=7$ ;  $2x+5=7$ ), y b) el contexto *no estándar*, que incluye todos los demás casos. El contexto *no estándar* se subdivide a su vez en cuatro: i) el contexto de *operaciones a ambos lados* (ejemplos:  $5+2=3+4$ ;  $3x+6=2x$ ); ii) el contexto de *operaciones del lado derecho* (ejemplo:  $7=3+4$ ;  $y=2x$ ); iii) el contexto *sin operaciones explícitas* (ejemplos:  $7=7$ ;  $a=5$ ;  $100\text{cm}=1\text{m}$ ), y iv) *otros contextos*. Esta clasificación complementa la anterior debido a que consideran distintos aspectos del uso y el significado que se le da al signo de *igual*. Se puede ver un mismo significado del signo de *igual* en diferentes contextos así como distintos significados del signo de *igual* en un mismo contexto. Por ejemplo, el significado *expresión de una equivalencia condicional* (ecuación) se puede presentar en diferentes contextos: *operaciones a ambos lados*, *operaciones-igual-respuesta*, *operaciones del lado derecho* o *sin operaciones explícitas*.

Nos interesa por último hacer un comentario sobre la visión operacional y relacional del signo de *igual* ya que varios autores (Behr, Erlwanger y Nichols, 1976; Kieran, 1981; Knuth, 2006, entre otros) solo trabajan con estas dos categorías. La visión operacional implica considerar el signo de *igual* como un operador o como una señal de hacer algo, y se contrapone con la visión relacional que implica ver el signo de *igual* como el indicador de una relación de equivalencia.