UN NÚMERO ENTRE 2 Y 3

Domingo W. Borba – mingofax@gmail.com
Martín Botta– martin.botta.sampietro@gmail.com
Yoan E. Mora–yoanmora26@gmail.com

Consejo de Formación en Educación – Profesorado Semipresencial – Uruguay

Tema: Historia de la matemática
Modalidad: P (Póster)
Nivel educativo: Terciario - Universitario
Palabras clave: irracional, trascendente, logaritmo, e, Napier, Euler, Bernoulli, Hermite.

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar parte de la historia del número e. Cómo, dónde y cuándo se originó, recorriendo los aportes de los principales matemáticos que colaboraron en el desarrollo histórico del concepto, considerando su evolución de la mano del concepto de logaritmo.

Introducción

En el marco del séptimo Congreso Uruguayo de Educación Matemática organizado por la Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, se presenta el siguiente trabajo en forma de póster. El número *e* es un número relevante dentro de la matemática por sus numerosas aplicaciones dentro y fuera de ella, como, por ejemplo, oficiando como base de los logaritmos neperianos, y la datación de fósiles a través de radiocarbono. La construcción del mismo ha sido realizada por matemáticos de distintas épocas motivados por diferentes objetivos. Así es que este trabajo pretende realizar un recorrido por los principales aportes de esos matemáticos desde su evolución de la mano del concepto de logaritmo.

John Napier (1550 - 1617)

Vale aclarar que el número *e* no siempre se conoció como tal. De hecho, el primer matemático que manejó este concepto no le puso nombre ni trabajó directamente sobre él. John Napier, matemático del siglo XVII, se propuso realizar operaciones con números cuantiosos, transformando así las multiplicaciones en sumas y las divisiones en restas, para lo que construyó tablas que le permitían llevar a cabo esto.

Las tablas construidas por Napier eran similares a las que se muestran en la figura uno, la que se basa en los logaritmos naturales, nombrados por Napier como números artificiales (en contraposición a los números naturales, que serían los antilogaritmos). Estos números fueron introducidos bajo una concepción geométrica basada en la cinemática, que según él, se originaban en una especie de fluctuaciones entre dos velocidades. Sin embargo, las primeras tablas calculadas por él fueron de forma numérica, tal como lo indica el significado etimológico de la palabra logaritmo: *logos* que significa razón y *arithmos* que significa número, por lo que puede entenderse como *número relativo*.

Básicamente, si se desea multiplicar, por ejemplo, 512 x 256, en la tabla 1, se deben obtener los logaritmos de dichos números, que podemos ver que el $\log_2 512 = 9$ y el $\log_2 256 = 8$. Luego, se debían sumar los logaritmos y buscar en la tabla el logaritmando al que el resultado hace referencia. Así, como 9 + 8 = 17, volviendo a la tabla 1, es posible obtener que el resultado de dicha multiplicación es 131072, ya que es el logaritmando de 17 para esta base.

Potencias de base 2 (de 0 a 20)		*Logartimos de base 2 y potencias correspondientes*	
Exponente	**Potencia**	**Logaritmo**	**Logaritmando**
0	1	*0*	1
1	2	*1*	2
2	4	*2*	4
3	8	*3*	8
4	16	*4*	16
5	32	*5*	32
6	64	*6*	64
7	128	*7*	128
8	256	*8*	256
9	512	*9*	512
10	1.024	*10*	1.024
11	2.048	*11*	2.048
12	4.096	*12*	4.096
13	8.192	*13*	8.192
14	16.384	*14*	16.384
15	32.768	*15*	32.768
16	65.536	*16*	65.536
17	131.072	*17*	131.072
18	262.144	*18*	262.144
19	524.288	*19*	524.288

Tabla 1

Vale aclarar que el trabajo de Napier con el número e se refiere a la primera tabla de logaritmos que construyó. Esto se debe a que al momento de definir lo que hoy interpretamos como la base de los logaritmos empleados, utilizó el número $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$, que puede ser reescrito como $1 - \frac{1}{10^7}$. Luego de realizados los cálculos, para evitar el empleo de número decimales, multiplicó los resultados por10^7. Si bien Napier no había especificado la base con la que trabajó al momento de construir la tabla, un estudio más detenido y luego de construida la definición formal de los logaritmos y sus propiedades, hoy podemos establecer que la base de su primer tabla fue $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7} = 0{,}36787942292$ que es bastante similar a $\frac{1}{e}$ si recordamos que $\frac{1}{e} = lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ (Boyer, 2013, pp. 396-398).

Jacob Bernoulli (1654 - 1705)

La próxima aparición del número *e* en la historia fue varios años más tarde en la casa de los Bernoulli (familia de matemáticos suizos). Pese a que nunca descubrieron grandes conceptos matemáticos, siempre estaban inmersos en los temas más interesantes de la época realizando grandes aportes a los mismos y muy vinculados con sus colegas. Uno de los problemas que se propuso Jacob Bernoulli (quizás el más conocido de los Bernoulli) en el año 1683, fue estudiar lo que ocurría con el monto de un capital de una unidad monetaria (1 UM) colocado al cien por ciento de interés compuesto al realizar distintas capitalizaciones en un año (ver Tabla 2). Bernoulli observó que pese a la gran cantidad de capitalizaciones, el monto no aumentaba muy significativamente y sin saber que estaba escribiendo la primera definición del número *e*, lo presenta como:

Capitalizaciones	***Monto***
anual	*2*
semestral	*2,25*
trimestral	*2,44140625*
mensual	*2,6130352902247*
semanal	*2,6904965986289*
diaria	*2,7173385810333*
cada una hora	*2,7182425025068*
cada un minuto	*2,7182811724521*

Tabla 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

demostrando a través del Teorema del Binomio que se trataba de un número entre dos y tres (O'Connor y Robertson, 2002).

Leonhard Euler (1707-1783)

Tiempo después, otro matemático suizo llamado Leonhard Euler (discípulo de Jacob Bernoulli) utilizó en 1727 por primera vez la letra *e* como notación estándar para representar la base del sistema de logaritmos naturales utilizados en una serie de experimentos relativos al disparo de cañones. Pero no es hasta el año 1736, en la página 68 del volumen uno de su obra *Mechanica*, que *e* aparece impreso por primera vez en lo que fue la primera presentación de la mecánica newtoniana de forma analítica (Boyer, 2013, p.556).

Euler también demostró la irracionalidad de ***e***, es decir que: no puede expresarse mediante un cociente de números enteros. Para esto Euler partió de una notación de *e* como suma de infinitos términos:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

lo que Euler escribió en su época como:

$$\sum\frac{1}{n!}$$

introduciendo la notación sigma (Boyer, 2013, p.557).

Luego supuso su racionalidad (cociente de dos números enteros) la cual refutó por el método de reducción al absurdo (operando con fracciones continuas), ya que su racionalidad dependía de encontrar un número entero entre 0 y 1. (O'Connor y Robertson, 2002).

Charles Hermite (1822-1901)

Años más tarde, en 1873, Charles Hermite (sucesor de August Cauchy en la comunidad matemática francesa) logra demostrar la trascendencia de *e*, lo cual implica que *e* no puede ser obtenido mediante el proceso de resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros no todos nulos. Esta demostración se considera el mayor aporte de Hermite a las matemáticas, ya que si bien los números trascendentales habían sido estudiados ya por su coterráneo Joseph Lioville (demostrando que tales números existían y que *e* no podía ser raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes racionales), hasta Hermite no se había demostrado la trascendentalidad de ningún número. De hecho, el matemático alemán Carl Louis Ferdinan von Lindemann en 1882, partiendo de la demostración de Hermite, demostró la trascendencia de π.

Para demostrar la trascendencia de *e*, Hermite propuso una demostración por reducción al absurdo, la cual parte de suponer que existe un polinomio de coeficientes enteros, donde *e* es una de sus raíces. Mediante el uso de funciones auxiliares, y transformaciones algebraicas arribó a que no existe polinomio alguno con coeficientes enteros tal que el número *e* sea una de sus raíces, por lo cual el número *e* es trascendente sobre $\mathcal{Q}$ (Sanchez, 2011).

Las cifras de *e*

La tabla que se presenta a continuación muestra los matemáticos más relevantes que realizaron descubrimientos en torno a las cifras del número *e* y los años en los que se descubrieron:

Fecha	Cantidad de cifras	Realizador del cálculo
1690	1	Jacob Bernoulli
1714	13	Roger Cotes
1748	23	Leonhard Euler
1853	137	William Shanks
1871	205	William Shanks
1884	346	J. Marcus Boorman
1949	2	John von Neumann (on the ENIAC)
1961	100	Daniel Shanks and John Wrench
1978	116	Steve Wozniak on the Apple II
1994	10 000 000	Robert Nemiroff y Jerry Bonnell
1997	18 199 978	Patrick Demichel
Agosto de 1997	20 000 000	Birger Seifert
Septiembre de 1997	50 000 817	Patrick Demichel
Febrero de 1999	200 000 579	Sebastian Wedeniwski
Octubre de 1999	869 894 101	Sebastian Wedeniwski
21 de noviembre de 1999	1 250 000 000	Xavier Gourdon
10 de julio de 2000	2 147 483 648	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
16 de julio de 2000	3 221 225 472	Colin Martin y Xavier Gourdon
2 de agosto de 2000	6 442 450 944	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
16 de agosto de 2000	12 884 901 000	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
21 de agosto de 2003	25 100 000 000	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
18 de septiembre de 2003	50 100 000 000	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
27 de abril de 2007	100 000 000 000	Shigeru Kondo y Steve Pagliarulo
6 de mayo de 2009	200 000 000 000	Shigeru Kondo y Steve Pagliarulo
21 de febrero de 2010	500 000 000 000	Alexander J. Yee
5 de julio de 2010	1 000 000 000 000	Shigeru Kondo y Alexander J. Yee
24 de junio de 2015	1 400 000 000 000	Matthew Hebert

Tabla 3

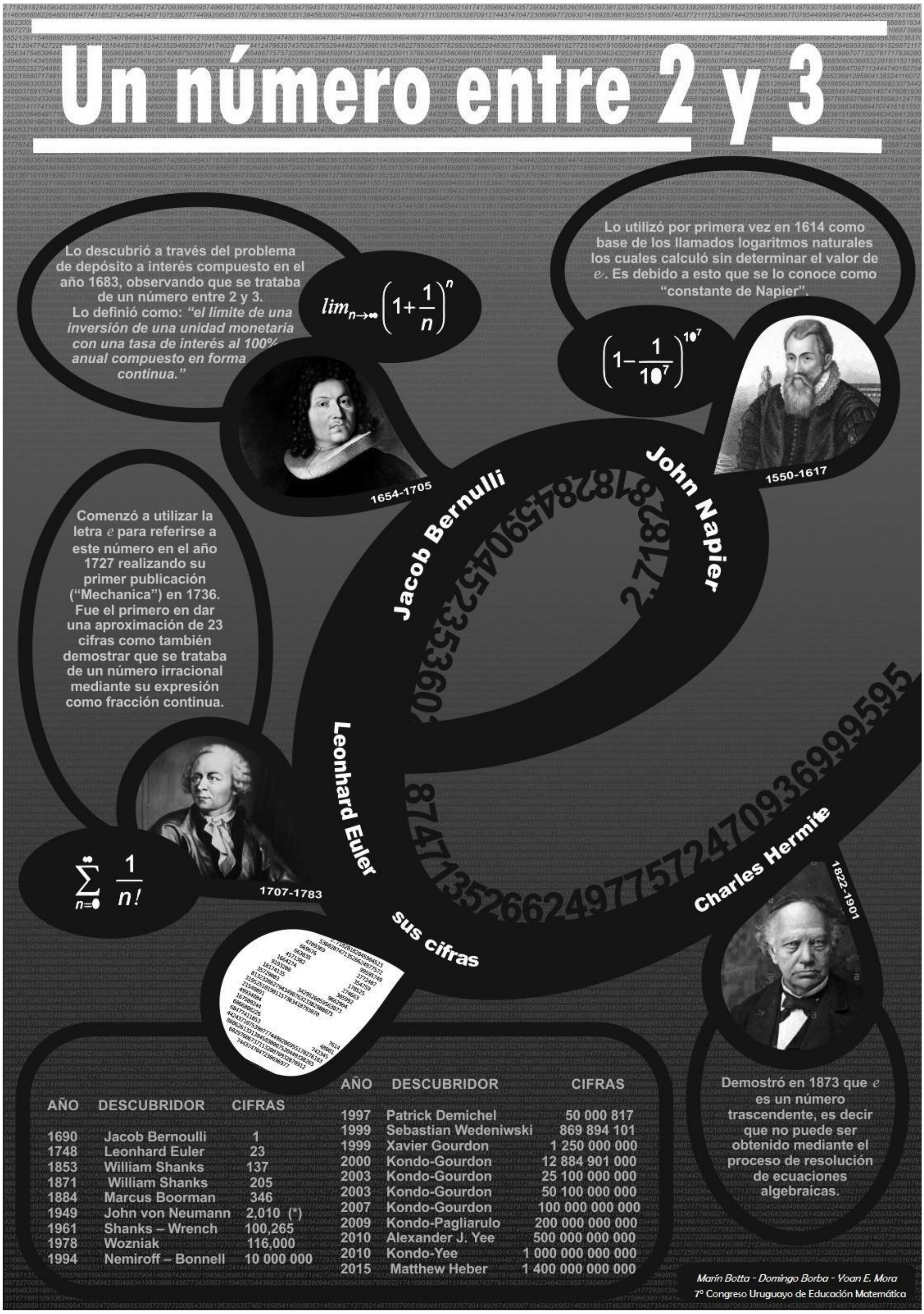
Conclusión

El haber realizado esta investigación con el objetivo de generar el póster nos hizo conocer el origen y gran parte de la historia de un número que tuvo un papel destacado en nuestros cursos, tanto como estudiantes de educación media como también en formación docente, dándonos cuenta de lo poco que sabíamos al respecto. Como futuros profesores de matemática, estamos convencidos que la integración de los procesos históricos que dieron orígenes y evolución a los conceptos matemáticos pueden y deben estar integrados a nuestras prácticas de aula, ya que a través de ellos se pueden generar diversas actividades y problemas, como por ejemplo el problema de interés compuesto que se planteó Jacob Bernoulli, siendo eventualmente una alternativa didáctica que rompe con las actividades tradicionales.

En palabras del National Council of Teachers of Mathematics (1991):

> Los estudiantes deberían tener experiencias numerosas y variadas en relación con la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas de forma que puedan apreciar el papel que cumplen las matemáticas en el desarrollo de nuestra sociedad actual y explorar qué relaciones existen entre la matemática y las disciplinas a las que le sirve: las ciencias físicas y la vida, las ciencias sociales y humanidades. (p.7)

Enseñar la matemática desde sus orígenes históricos y no desde su estructura matemática, como también partiendo de su vínculo con otras disciplinas y no desde sus contenidos aislados, logra que los estudiantes se acerquen a nuestra asignatura, lo cual contribuye a derribar preconceptos que puedan tener y comprendan mejor una dimensión de la matemática que muchas veces dejamos de lado: la humana.



Un número entre 2 y 3
Lo descubrió a través del problema de depósito a interés compuesto en el año 1683, observando que se trataba de un número entre 2 y 3.
Lo definió como: *"el límite de una inversión de una unidad monetaria con una tasa de interés al 100% anual compuesto en forma continua."*
$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1654-1705
Jacob Bernoulli
Lo utilizó por primera vez en 1614 como base de los llamados logaritmos naturales los cuales calculó sin determinar el valor de e. Es debido a esto que se lo conoce como "constante de Napier".
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$
1550-1617
John Napier
2,718281828459045235360287471352662497757247093699959 5
Comenzó a utilizar la letra e para referirse a este número en el año 1727 realizando su primer publicación ("Mechanica") en 1736. Fue el primero en dar una aproximación de 23 cifras como también demostrar que se trataba de un número irracional mediante su expresión como fracción continua.
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$
1707-1783
Leonhard Euler
sus cifras
Charles Hermite
1822-1901
Demostró en 1873 que e es un número trascendente, es decir que no puede ser obtenido mediante el proceso de resolución de ecuaciones algebraicas.
AÑO DESCUBRIDOR CIFRAS
1690 Jacob Bernoulli 1
1748 Leonhard Euler 23
1853 William Shanks 137
1871 William Shanks 205
1884 Marcus Boorman 346
1949 John von Neumann 2,010 (*)
1961 Shanks – Wrench 100,265
1978 Wozniak 116,000
1994 Nemiroff – Bonnell 10 000 000
AÑO DESCUBRIDOR CIFRAS
1997 Patrick Demichel 50 000 817
1999 Sebastian Wedeniwski 869 894 101
1999 Xavier Gourdon 1 250 000 000
2000 Kondo-Gourdon 12 884 901 000
2003 Kondo-Gourdon 25 100 000 000
2003 Kondo-Gourdon 50 100 000 000
2007 Kondo-Gourdon 100 000 000 000
2009 Kondo-Pagliarulo 200 000 000 000
2010 Alexander J. Yee 500 000 000 000
2010 Kondo-Yee 1 000 000 000 000
2015 Matthew Heber 1 400 000 000 000
Marín Botta - Domingo Borba - Yoan E. Mora
7º Congreso Uruguayo de Educación Matemática

Referencias bibliográficas

Apóstol, M. (1976). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.

Boyer, C. (2013), *Historia de la matemática*. Madrid: Editorial Alianza.

Logaritmo (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado el 01 de febrero de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo

Marcia, C., García, G. (2005). *El número e en el cálculo elemental* (tesis de pregrado), Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela. Recuperado de: http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/tesis/mgarcia/tesismarcia.pdf

Morales, M. (10 de octubre de 2006). *Cómo demostrar que el número e es irracional*. [Blog post]. Gaussianos. Recuperado de: http://gaussianos.com/como-demostrar-que-el-numero-e-es-irracional/

Morales, M. (23 de noviembre de 2009). *Cómo demostrar que el número e es trascendente*. [Blog post]. Gaussianos. Recuperado de: http://gaussianos.com/como-demostrar-que-el-numero-e-es-trascendente/

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Madrid: SAEM Thales.

Número e (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado el 01 de febrero de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Número_e

O'Connor, J., Robertson, E. (2002). *The number e.* Escocia, Reino Unido: MacTutor History of Mathematics archive. Recuperado de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html

Paenza, A. [TECtv La Señal de la Ciencia]. (2010, 27 de septiembre). *Grandes temas de la matemática: Capítulo 5: Número E* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ds8oBDVqhBc

Rey Pastor, J. (1985). *Análisis Matemático: Teoría de funciones y cálculo infinitesimal.* Madrid: Editorial Kapelusz.

Sánchez, J. (26 de abril de 2011). *Historias de Matemáticas. Hermite y la trascendencia de e*. Pensamiento matemático. Recuperado de: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_0/hermite.pdf