ALGUMAS CONSTRUÇÕES NO *GEOGEBRA* DE TRIÂNGULOS DA LISTA DE WERNICK

Edson de Souza Carneiro Fialho
fialhoedb@gmail.com
Secretaria Municipal de Educação, Esporte e Lazer – Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro

Tema: Uso de tecnologías digitales
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Medio y terciario
Palabras clave: lista de Wernick; Geometria Plana; construtibilidade de triângulos; *GeoGebra.*

Resumen

O autor, inicialmente, apresenta a lista de Wernick, um conjunto de problemas sobre construtibilidade de triângulos, dos quais conhecemos três pontos, de uma lista de dezesseis possíveis pontos (os pés das três medianas relativas aos lados e o baricentro; os pés das três alturas relativas aos lados e o ortocentro; os pontos de interseção entre as três bissetrizes internas e os lados e o incentro; os três vértices e o circuncentro) e, a seguir, mostra algumas construções realizadas com o software GeoGebra. O trabalho contém, ainda, algumas condições geométricas necessárias para que sejam realizadas as construções.

Sobre a lista de Wernick e algumas construções de triângulos no GeoGebra

Um artigo de 2014 (Nirode) na revista *Mathematics Teacher* fala *en passant* sobre uma lista de problemas de construção de triângulos em Geometria Plana, que doravante chamaremos neste trabalho de lista de Wernick. A lista, publicada em 1982, continha 139 problemas, com a proposição de construções de triângulos, dados três pontos conhecidos de um triângulo, dentre dezesseis pontos possíveis.

Estes problemas de construtibilidade poderiam ser utilizados com estudantes de graduação que estivessem aprendendo geometria plana. Uma possível utilização é pedir aos estudantes que tentem fazer as construções e depois as justifiquem rigorosamente.

O (clássico) artigo de Gravina menciona a teoria de Fischbein, segundo a qual os objetos geométricos têm dois componentes, uma conceitual e outra figural:

> A componente conceitual, através de linguagem escrita ou falada , com maior ou menor grau de formalismo dependendo do nível de axiomatização com que se está trabalhando, expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos. Já a componente figural corresponde a imagem mental que associamos ao conceito, e que no caso da Geometria, tem a característica de poder ser "manipulada" através de movimentos como translação, rotação, e outros, mas mantendo invariantes certas relações. A harmonia entre estes duas componentes é que determina a noção correta sobre o objeto geométrico.

O uso da geometria dinâmica para realizar essas construções vem de encontro à necessidade de integrar os dois componentes: sem a compreensão conceitual, não é possível realizar as construções; e, sem a componente figural, não teremos realizado o que se propôs.

Os dezesseis pontos que podem ser usados para essas construções são: os vértices: A, B, C; o circuncentro, O; os pés das medianas, Ma, Mb, Mc; o baricentro, G; os pés das alturas, Ha, Hb, Hc, e o ortocentro, H; os pés das bissetrizes internas, Ta, Tb, Tc, e o incentro, I.

Cada um desses problemas da lista de Wernick consiste na seguinte hipótese: Suponha que havia um triângulo desenhado. Se o triângulo fosse apagado e apenas três pontos fossem deixados, qual deveria ser o procedimento para reconstruir o triângulo?

O autor não resolveu todos os problemas da lista e classificou os resolvidos em três categorias: problemas resolvidos, problemas que dependem de lugares geométricos e problemas redundantes (que são bastante semelhantes a outros problemas da lista). Devido à limitação de espaço, faremos apenas algumas construções.

Utilizamos, aqui, o software GeoGebra, embora admitamos que tais construções poderiam ser feitas em qualquer outro software de geometria dinâmica, ou, até mesmo, pelos meios analógicos, isto é, usando régua e compasso.

Suporemos, o que não é pouca coisa e nem é irrelevante, que os três pontos não são coincidentes dois a dois, nem são os três coincidentes. Isto é feito por economia: se, digamos, nos fosse solicitado construir o triângulo que contém os pontos A, O e G (problema 23 da lista), ou seja: se quiséssemos construir um triângulo, dados um vértice, o circuncentro e o baricentro desse triângulo, e se o circuncentro e o baricentro fossem coincidentes, então (1) não teríamos como fazê-lo porque haveria infinitos triângulos nessas condições, ou (2) a construção seria impossível. Tal suposição é explicitada por Wernick no título de seu artigo: *"Triangle constructions with Three Located Points"*; portanto, não há coincidências entre os pontos mencionados, ou teríamos menos de três pontos, o que contraria a hipótese do artigo.

Vamos começar com as construções:

(Problema 83 da lista de Wernick) Ma, Mb, Mc, ou seja: Construir um triângulo dados os pés das três medianas.

Pode-se deduzir facilmente que os segmentos M_aM_b, M_bM_c e M_aM_c são paralelos aos segmentos AB, BC e AC, respectivamente. A construção é como segue abaixo:

Figura 1 – os pontos M_a, M_b e M_c

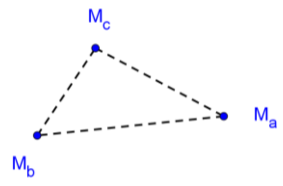


Figura 2 – os segmentos M_aM_b, M_aM_c e M_bM_c

Nesta etapa, basta criar as retas paralelas aos segmentos M_aM_b, M_aM_c e M_bM_c, conforme a figura:

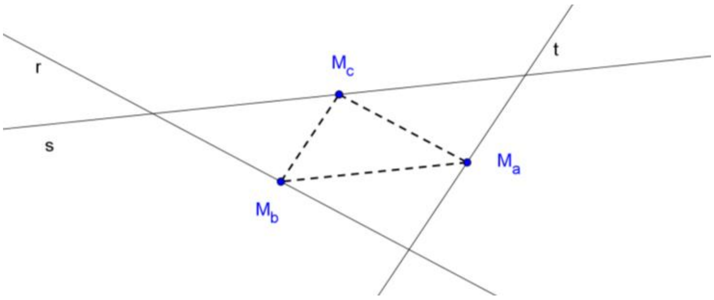


Figura 3 – As retas *r*, *s* e *t*

Agora é necessário marcar os pontos de interseção entre as retas e ligá-los:

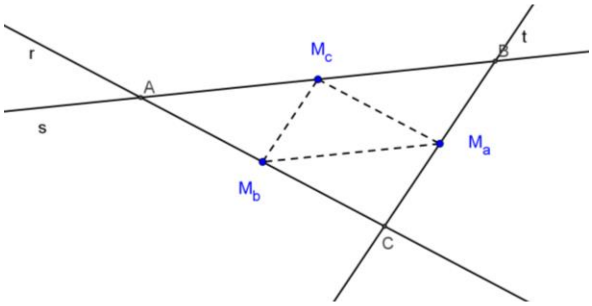


Figura 4 – Os pontos de interseção A, B e C...

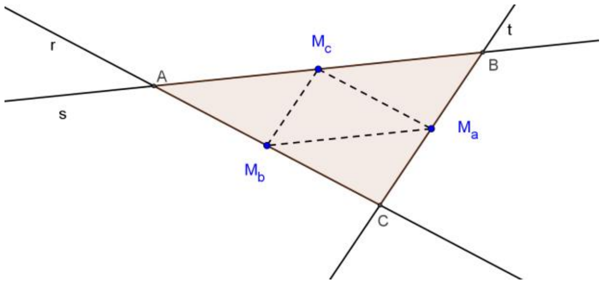


Figura 5 – ...e o triângulo ABC, devidamente construído

(Problema 10 da lista) A, B, I, ou seja: Construir um triângulo, dados dois vértices e o incentro. Obviamente o incentro precisa ser equidistante de A e B.

Figura 6 – O início da construção – os pontos A, B e I

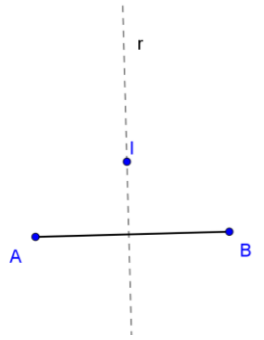


Figura 7 - O segmento AB e a reta *r*, que passa pelo ponto I e é perpendicular ao segmento AB

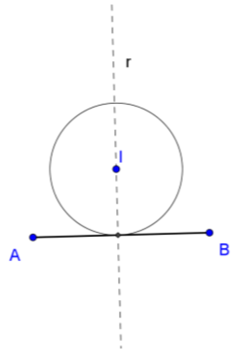


Figura 8 – A circunferência com centro em I e que passa pelo ponto de interseção entre a reta *r* e o segmento AB.

Nessa etapa, vamos usar uma ferramenta do programa: a *Reta Tangente* (quinta opção do quarto botão).

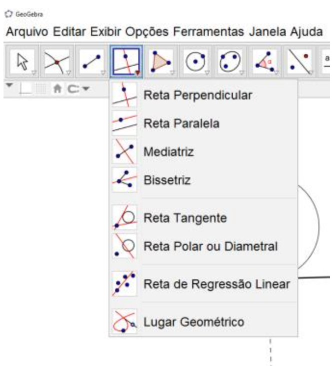


Figura 9 – Um detalhe do GeoGebra

Ao selecionar esse botão, precisamos clicar no ponto A e no círculo, e, depois, no ponto B e no círculo. O resultado, após essas duas ações, está na figura abaixo.

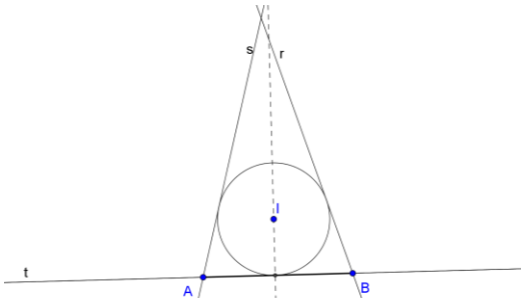


Figura 10 – As retas *r*, *s* e *t*, tangentes ao círculo

Marcamos, então, C, que é o ponto de interseção entre as retas *r* e *s*; e fechamos o triângulo ABC, conforme a figura a seguir.

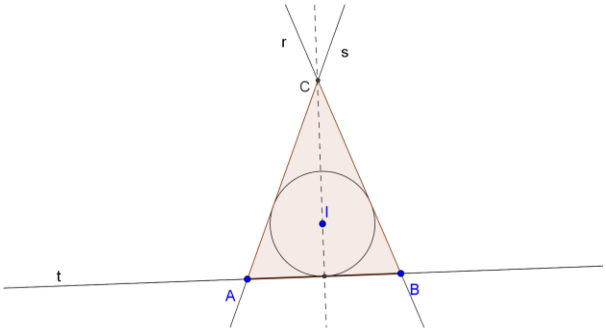


Figura 11 - O triângulo ABC

(Problema 84 da lista) M_a, M_b , G– Construir um triângulo dados os pés das medianas de dois vértices e o baricentro.

Por um teorema elementar de geometria plana, sabe-se que o baricentro divide as medianas na razão 2/3 – 1/3, ou seja: dando um exemplo, sabemos que $AG = 2/3.AM_a$, e que $GM_a = 1/3.AM_a$. Graças a isso a construção se torna fácil.

Vamos a ela:

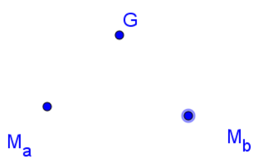


Figura 12 – Os pontos M_a, M_b e G

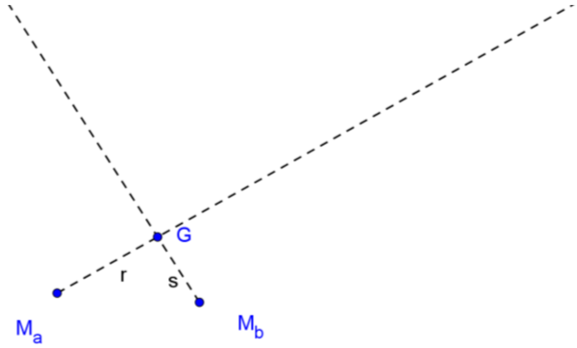


Figura 13 – as semirretas *r* – que contém G e M_a – e *s* – que contém G e M_b.

Isto feito, ao usar a ferramenta *Compasso* – terceira opção do sexto botão do programa – conseguimos criar o ponto B tal que BG = 2/3.BM_b.

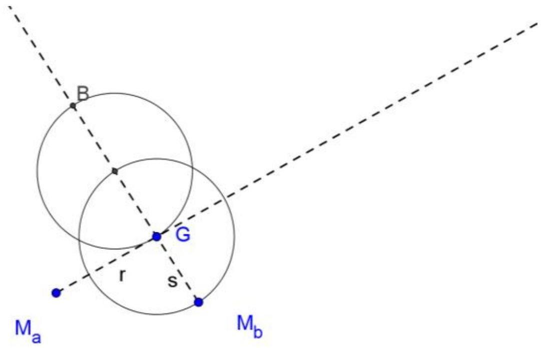


Figura 14 - O ponto B, criado conforme detalhes mencionados acima.

Na figura a seguir, ocultamos os círculos para maior clareza e mantivemos todos os pontos criados, e repetimos o processo para encontrar o ponto B, obtendo assim o ponto A:

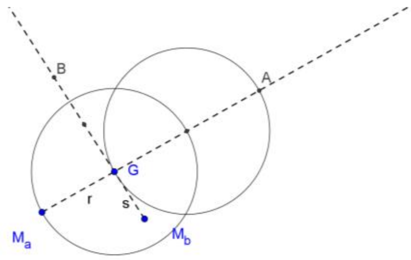


Figura 15 – O ponto A, obtido repetindo o processo explicado anteriormente a partir de outro ponto.

Agora, ocultamos os círculos e traçamos o segmento AB:

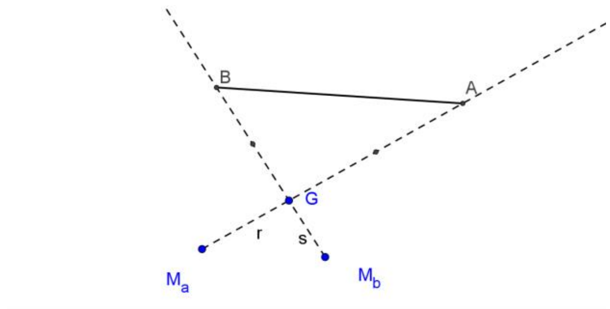


Figura 16 – A figura sem os círculos e com o segmento AB.

Nesse ponto da construção o problema está literalmente resolvido. Ao construir o segmento AB, nós já sabemos fazer o seu ponto médio, que é onde fica M_c. Ligando G e M_c...

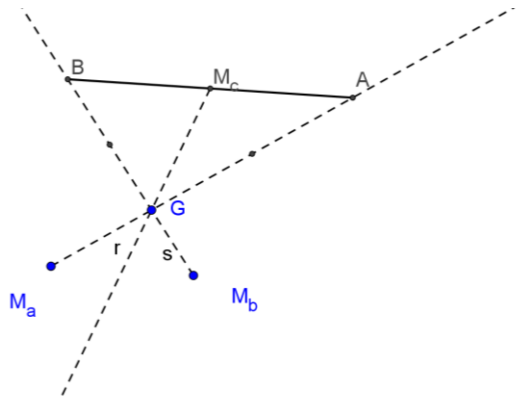


Figura 17 – A semirreta que contém M_c e G

...ligando M_a, M_b e M_c...

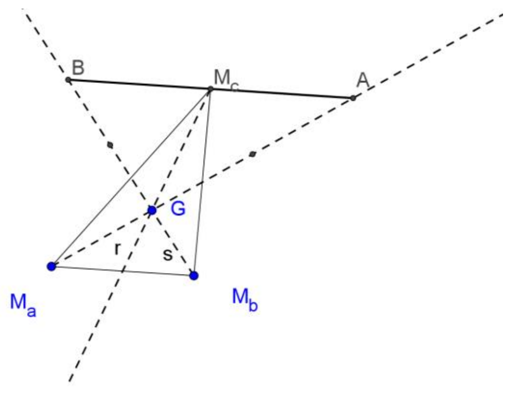


Figura 18 – Os segmentos M_aM_b, M_aM_c e M_bM_c

... e traçando a reta k, paralela ao segmento M_aM_c, passando por M_b, e a reta w, paralela ao segmento MbMc, passando por Ma...

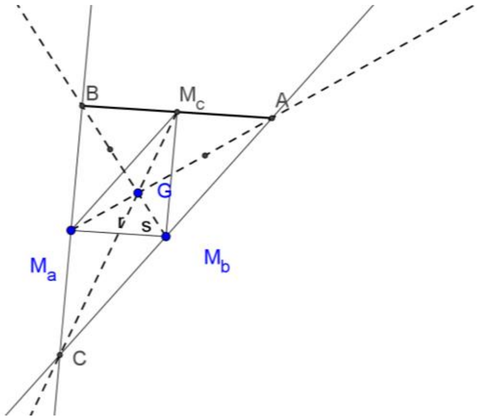


Figura 19 – Fazendo as retas mencionadas no parágrafo anterior.

Temos o triângulo desejado ABC.

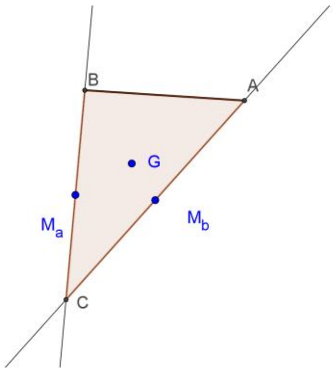


Figura 20 - O triângulo, depois de ocultados todos os elementos não-indispensáveis da construção

(1) A, B, O, ou seja: construir um triângulo, dados dois vértices e o circuncentro.

Este é um problema que o autor classificou como dependente de lugar geométrico. A razão está mostrada abaixo.

Figura 21 – Uma escolha aleatória dos pontos A, B e O.

Como mostra a figura acima, a escolha dos pontos A, B e O *não pode ser aleatória*. A razão é a seguinte: como o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ele deve ser equidistante dos vértices do triângulo. Na figura 21, o ponto O está bem mais perto do ponto B do que do ponto A. Portanto, não existe uma circunferência com centro em O e que contenha os pontos A e B. Para que tal circunferência existisse, seria necessário que o ponto O pertencesse à mediatriz do segmento AB, conforme a sequência abaixo:

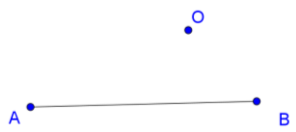


Figura 22 – O segmento AB

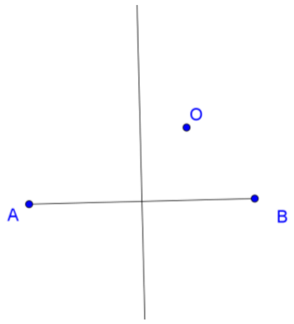


Figura 23 – A mediatriz do segmento AB

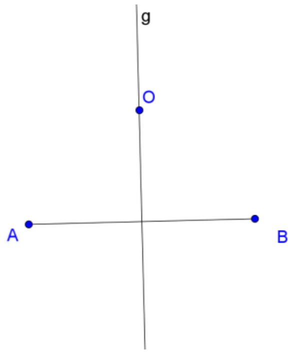


Figura 24 – O ponto O, sobre a mediatriz do segmento AB

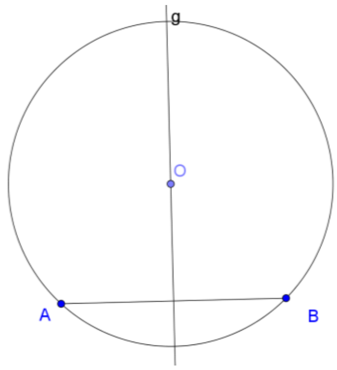
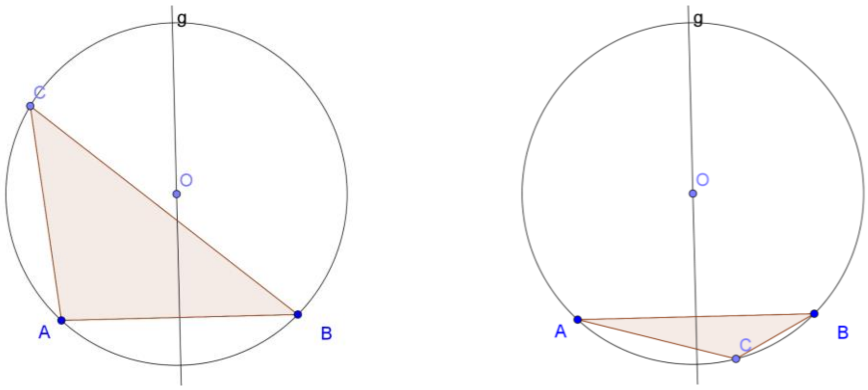


Figura 25 – O círculo que passa pelos pontos A e B com centro em O, construído

Uma vez resolvida a questão do círculo, onde está o terceiro vértice do triângulo? Em qualquer ponto pertencente ao círculo. Logo, temos uma construção que depende *duas vezes* de lugares geométricos: com relação ao ponto O – que necessariamente precisa pertencer à mediatriz do segmento AB – e em relação ao ponto C – que precisa pertencer ao círculo que passa pelos pontos A e B com centro em O.

A seguir, duas possíveis soluções:



Figuras 26 e 27– Duas possíveis construções do triângulo ABC, com C sendo um ângulo agudo [à esquerda] ou obtuso [à direita]

Considerações Finais

Em um artigo de 1993, PAVANELLO afima o seguinte:

> Existem fortes motivos para a inquietação dos professores com o abandono da geometria e sua insistência em melhorar seus conhecimentos com relação a ela. A ausência do ensino da geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. Atiyah salienta a necessidade de cultivar e desenvolver tanto o

> pensamento visual, dominante na geometria, quanto o sequencial, preponderante na álgebra, pois ambos são essenciais aos problemas matemáticos autênticos. (PAVANELLO).

Uma vez que concordamos com este ponto de vista, e constatamos que pouco mudou depois de tanto tempo, empreendemos esforços no sentido de diminuir, mesmo que em nosso pequeno raio de atuação, o abandono da geometria.

Referencias bibliográficas

Gravina, M. A.. (1996). Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o ensino da Geometria. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Maria_Gravina2/publication/228593511_Geometria_Dinmica_uma_nova_abordagem_para_o_aprendizado_da_Geometria/links/5630e26308ae506cea67587c.pdf

Nirode, W. (2014) “Triangles from three points”., Mathematics Teacher, vol. 108, n. 1, Reston, VA, Estados Unidos.

Pavanello, R. M. (1993) “O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.”, Revista Zetekité, vol.1, n.1, Campinas, SP, Brasil.

Wernick, W.. (1982) “Triangle Constructions with Three Located Points” , Mathematics Magazine, vol. 55, n. 4, Washington, DC, Estados Unidos.