LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS DE LA ANTIGÜEDAD: UNA BREVE REFLEXIÓN SOBRE SU IMPORTANCIA EN LA CONSTRUCCIÓN DELOS IRRACIONALES

Jorge Luis Chinchilla Valverde
jochinchilla@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

Tema: Historia de la matemática
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: Historia, Números Irracionales, Didáctica, Problemas de la antigüedad

Resumen

Es común escuchar en docentes de Matemática de Secundaria, que para sus estudiantes, asimilar los conjuntos numéricos: N, Z y Q los cuales representan un reto que lo deberían afrontar de una manera natural, asociándolos con situaciones comunes para ellos. Sin embargo, esta tendencia basada en lo concreto tiende a presentar dificultades con el inicio del estudio de los Números Irracionales II. En el mejor de los casos, muchos de los alumnos manipulan correctamente las operaciones con números irracionales de forma mecánica, recitan las propiedades y características de este conjunto; pero no le encuentran aplicación y significado a los mismos. Por otro lado, en la actualidad, la forma axiomática de presentar los conocimientos en matemática elimina la historia de los saberes, lo cual descontextualiza y despersonaliza lo más posible los resultados. Es por ello que la presente ponencia busca contextualizar el papel que juega la historia de las matemáticas dentro del ámbito educativo en general y sus diversas interacciones con la sociedad, analizando algunas situaciones históricas particularmente sobre los Tres Problemas Clásicos de la Antigüedad que involucra el desarrollo evolutivo del concepto de número irracional, con el fin de buscar herramientas didácticas que permitan el aprendizaje del mismo.

Algunos problemas clásicos que involucran irracionales

A continuación se expone brevemente el problema de la duplicaciòn del cubo y una de sus tantas resoluciones, como importancia para la construcción del número irracional $\sqrt[3]{2}$.

Problemas clásicos de la antigüedad

Ee el siglo V a .C. donde aparecen una serie de problemas que cautivaron las más brillantes mentes de los matemáticos. Entre los muchos problemas planteados en este contexto hay tres

que traspasaron la "barrera del tiempo" y hoy siguen siendo de gran admiración y estudio: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.
Una primera característica común de los tres problemas es que no encuadraban dentro de la geometría de polígonos y poliedros, de segmentos, círculos y cuerpos redondos, conocidos en su época. Su solución sólo podía obtenerse utilizando otras figuras o medios que iban más allá de las construcciones fundadas en las intersecciones de rectas y circunferencias o, construcciones hechas exclusivamente con los instrumentos platónicos.

En segundo lugar, y esto llamó la atención de los geómetras griegos, algunos de los métodos que resolvían uno de esos problemas a veces resolvían también otro, hecho que revelaba alguna relación entre los mismos, relación que, sin embargo, permaneció siempre oculta para ellos.

¿Por qué la limitación a la regla y el compás?

Todos estos problemas tenían la limitante que debían ser resueltos solamente con regla y compás. Dicha restricción, se añade a la utilización exclusiva de razones conmensurables, introduciendo límites extraordinarios a las matemáticas de la Grecia Antigua.

Al respecto, Bagazgoitia, A, Berritzegune de V. (2007) aseveran que Platón, por una premisa estética, trata de imponer que los tres problemas se resuelvan con regla y compás. Por ello, los tres problemas no encuadraban, como se mencionó anteriormente, dentro de la geometría de polígonos y poliedros, de segmentos, círculos y cuerpos redondos. Su solución sólo podía obtenerse utilizando otras figuras o medios que iban más allá de las construcciones fundadas en las intersecciones de rectas y circunferencias.

Duplicación del cubo: El problema de la extracción de la raíz cúbica.

Debemos destacar que los griegos no sabían extraer la raíz cúbica de números que no fueran cubos perfectos, lo que hizo que el problema de la duplicación del cubo, como fue propuesto, fuera difícil para ellos.

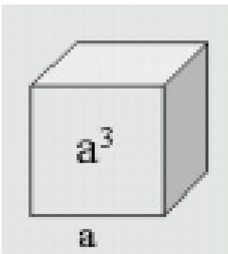
De ahí que la duplicación del cubo es en sí el problema de la constructibilidad con regla y compas, del número $\sqrt[3]{2}$.

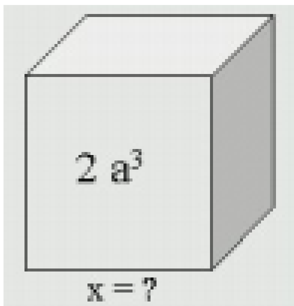
El origen del problema de la duplicación del cubo tiene un comienzo mítico que se remonta al siglo V a.C en Atenas con la muerte de su gobernador Pericles, atribuida a la peste que afectó fuertemente a la población. Por tal razón los atenienses se ven obligados a viajar a la isla de Delos en busca del Dios Apolo (dios que purifica y sana cuerpos). Y la respuesta del Oráculo es... un problema matemático:

> Construir en el templo de Apolo un altar semejante al existente
> pero que fuese el doble de grande… El altar tenía forma cúbica

Los atenienses toman la arista del altar que ya existía y la multiplican por 2. Pero la peste no cesó, el altar no duplicó el volumen del original si no que lo multiplicaba por 8.

La isla de Delos pertenecía a las islas Cícladas, situadas al este de la península del Peloponeso, y en ella surgieron los tres problemas clásicos griegos.





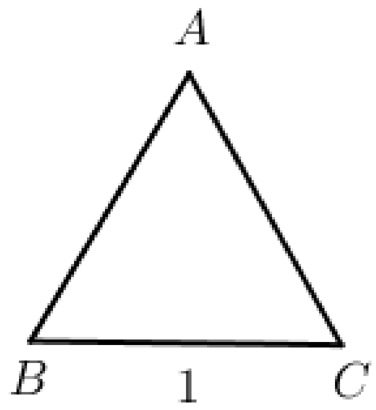
Es claro que la ecuación a resolver es: $x^3 = 2a^3$, cuyo resultado es $x = a\sqrt[3]{2}$. Se observa que no debe multiplicarse por dos la arista del cubo original, simplemente se incrementa multiplicándola por un factor, en este caso $\sqrt[3]{2}$.

Método de Tartaglia

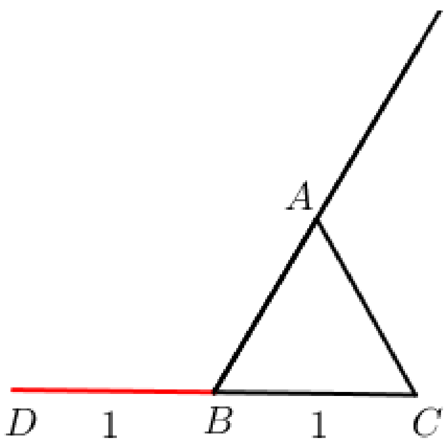
A continuación se mostrará una construcción sobre la $\sqrt[3]{2}$ utilizando regla marcada, la cual fue realizada por el matemático italiano Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557). Lo importante de esta construcción radica no sólo en que resuelve el problema de la duplicación del cubo, sino que presenta una riqueza pedagógica, la cual es aplicable en educación secundaria.

Construcción del segmento de medida $\sqrt[3]{2}$ con regla marcada

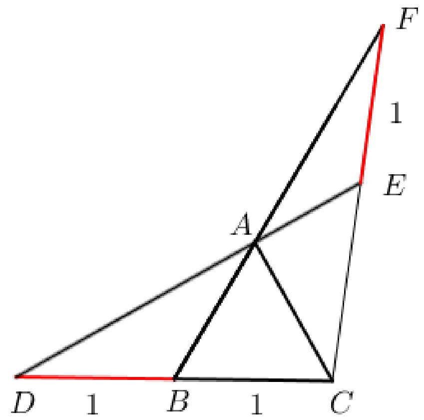
Sea el ΔABC equilátero cuya unidad de medida del lado es igual a 1.



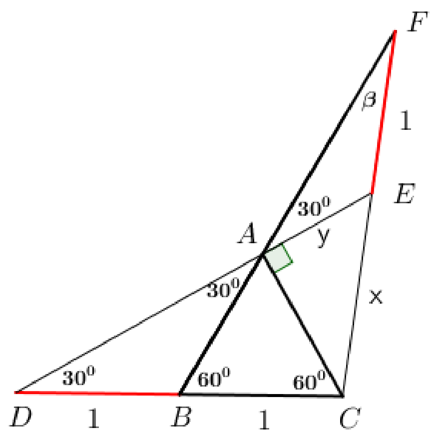
Se prolonga el lado BC de tal forma que D – B – C de manera que segmento DB = 1, se prolonga el segmento AB



Se traza el segmento DE tal que se cumpla que D – A – E, con la regla marcada se traza el segmento FC de modo que F – E – C y FE = 1



Considere AE = y, EC = x y m∠AFE = β, haciendo cálculo de algunas medidas de los ángulos se obtiene:



Debemos probar que EC = $\sqrt[3]{2}$

Demostración:

Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔCAE

$$y^2 + 1 = x^2 (1)$$

Aplicando la ley de senos en ΔFBC

$$\frac{sen\beta}{1}=\frac{sen60^\circ}{1+x}\Rightarrow sen\beta=\frac{\sqrt{3}}{2(1+x)}\quad(2)$$

Aplicando la ley de senos en ΔFAE

$$\frac{sen30^\circ}{1}=\frac{sen\beta}{y}\Rightarrow\frac{y}{2}=sen\beta\quad(3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene

$$\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2(x+1)}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{1+x}\quad(4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se tiene

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{1+x}\right)^2+1=x^2$$

$$\frac{3}{(1+x)^2}+1=x^2$$

$$3+(1+x)^2=x^2(1+x)^2$$

$$4+x^2+2x=x^2+2x^3+x^4$$

$$x^4+2x^3-2x-4=0$$

$$x^3(x+2)-2(x+2)=0$$

$$(x+2)(x^3-2)=0$$

$$x=-2 \text{ o } x=\sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, encontramos el valor de $\sqrt[3]{2}$.

Referencias bibliográficas

Bagazgoitia, A, Berritzegune de V. (2007). Un paseo por el círculo: un paseo de más de 2.000 años.http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=549&Itemid=75. Consultado 15/03/2017.

Beckmann, P. (1971). A history of π. New York: U.S.A. St Martin's Press.

Crespo, C. (2008). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. http://www.soarem.org.ar/Documentos/41 Crespo.pdf Consultado 15/08/2012

Man-Keung, S. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (undergraduate) Classroom. http://hkumath.hku.hk/~mks/ABCD.pdf. Consultado 23/05/2015.

Miralles de I, J, Deulofeu, J (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517104. Consultado 19/03/2016.